مسئله‌ی ۱. Couchy

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد و مستقل از هم باشند و با متغیرهای تصادفی U و V به صورت زیر مرتبط باشند:

$$U = X, V = \frac{X}{Y}$$

الف

تابع چگالی احتمال توزیع توام دو متغیر تصادفی U و V را بیابید.

ب

با استفاده از بخش قبل ثابت کنید که متغیر تصادفی V دارای توزیع کوشی است.

حل.

الف

در ابتدا باتوجه به اینکه دو متغیر تصادفی X و Y از هم مستقل هستند، داریم:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{۱}{۲\pi}e^{\frac{-(x^۲+y^۲)}{۲}}$$

سپس باتوجه به رابطه تبدیل برای تابع چگالی احتمال:

$$f_{U,V}(u,v) = |J(U,V)|f_{X,Y}(x,y)$$

$$x = u, y = \frac{u}{v}$$

$$J(U,V) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{v} & \frac{-u}{v^۲} \end{vmatrix} = \frac{-u}{v^۲}$$

تابع چگالی احتمال برای توزیع توام U و V برابر است با:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{|u|}{v^۲} \times \frac{۱}{۲\pi}e^{\frac{-(u^۲+(\frac{u}{v})^۲)}{۲}}$$

ب

برای اینکه توزیع متغیر تصادفی V را بدست آوریم:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u|}{v^2} \times \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(u^2+(\frac{u}{v})^2)}{2}} du = 2 \times \int_0^{+\infty} \frac{u}{v^2} \times \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(u^2+(\frac{u}{v})^2)}{2}} du =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{v^2} e^{-\frac{u^2(1+v^2)}{2v^2}} \frac{d(u^2)}{2} = \frac{1}{\pi(1+v^2)} e^{-\frac{u^2(1+v^2)}{2v^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi(1+v^2)}$$

▷

مسئله‌ی ۲. *نبود اسنپ

علی برای شرکت در جلسه‌ای نیاز دارد که به محل کارش برود. این جلسه بسیار برای او مهم است تا جایی که اگر به آن نرسد از کارش اخراج خواهد شد. برای رسیدن او باید ابتدا با گرفتن تاکسی‌ای به ایستگاه مترو برود و سپس با استفاده از مترو در ایستگاه جلوی محل کارش پیاده شود. زمان رسیدن تاکسی از توزیعی نمایی با میانگین پانزده دقیقه پیروی می‌کند و مسیر رسیدن به ایستگاه بیست دقیقه طول می‌کشد. زمان رسیدن مترو نیز از توزیعی یک‌نواخت بین صفر تا بیست دقیقه پیروی می‌کند. در نهایت با مترو نیز بیست و پنج دقیقه طول می‌کشد تا به مقصد برسد. اگر جلسه یک ساعت دیگر باشد، احتمال اخراج‌نشدن علی را حساب کنید.

حل.

$$X \sim EXP(\tfrac{1}{15})$$
$$Y \sim Unif(0, 20)$$

$$p(X + 15 + Y + 25 + 5 \leqslant 60) = p(X + Y \leqslant 15) = F_{X+Y}(15)$$

پس باید C.D.F جمع دو متغیر تصادفی X و Y را بیابیم:

$$F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y)\, dy = \int_0^{min(a,20)} (1 - e^{\frac{-1}{15}(a-y)}) \frac{1}{20}\, dy$$

اگر a کوچک‌تر از ۲۰ باشد داریم:

$$\int_0^{a} (1 - e^{\frac{-1}{15}(a-y)}) \frac{1}{20}\, dy = \frac{1}{20}(15e^{\frac{-a}{15}} + a - 15)$$

حال اگر بزرگ‌تر از ۲۰ باشد خواهیم داشت:

$$\int_0^{20} (1 - e^{\frac{-1}{15}(a-y)}) \frac{1}{20}\, dy = \frac{1}{20} e^{\frac{-a}{15}} (20 e^{\frac{a}{15}} + -15 e^{\frac{4}{3}} + 15)$$

الان با توجه به این که a برابر با ۱۵ است با جای‌گذاری خواهیم داشت:

$$\frac{1}{20}(15e^{\frac{-15}{15}} + 15 - 15) \cong 0/28$$

▷

مسئله‌ی ۳. حل تمرین

دو دانشجو به طور مستقل در حال حل یک تمرین هستند. دانشجوی اول در $Y_1 \sim Exp(\lambda_1)$ و دانشجوی دوم در $Y_2 \sim Exp(\lambda_2)$ این تمرین را انجام می‌دهد.

الف

تابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی $\frac{Y_۱}{Y_۲}$ را بیابید.

ب

به چه احتمالی دانشجوی اول زودتر از دانشجوی دوم تمرین را تمام می‌کند؟

حل.

الف

$$P_r(Y_۱ \leqslant cY_۲) = F_{\frac{Y_۱}{Y_۲}}(c)$$
$$P_r(Y_۱ \leqslant cY_۲) = \int_{Y_i} \int_{\frac{\overset{\infty}{a} y_۱}{c} \leqslant Y_۲} P_r(y_۱) P_r(y_۲) dy_۱ dy_۲$$

همچنین:

$$F_x(x) = ۱ - e^{-x\lambda}$$

پس ادامه‌ی عبارت قبل:

$$= \int (i - F_{Y_۲}(\frac{y_۱}{c})) P_r(y_۱) dy_۱ = \int (e^{\frac{-y_۱\lambda_۱}{c}}) \lambda_۱ e^{-\lambda_۱ y_۱} dy$$
$$= \lambda_۱ \int_۰^{\infty} e^{-y_۱(\frac{\lambda_۲}{c} + \lambda_۱)} dy_۱ = \frac{\lambda_۱}{\lambda_۱ + \frac{\lambda_۲}{c}}$$

اگر $\frac{Y_۱}{Y_۲}$ را Z در نظر بگیریم:

$$\frac{c\lambda_۱}{c\lambda_۱ + \lambda_۲} = F_z(c)$$
$$P_r(Z = c) = \frac{\lambda_۱\lambda_۲}{(c\lambda_۱ + \lambda_۲)^۲} = \frac{\lambda_۱(c\lambda_۱ + \lambda_۲) - \lambda_۱(c\lambda_۱)}{(c\lambda_۱ + \lambda_۲)^۲}$$

که با مشتق گرفتن از c رابطه بالا بدست می‌آید.

ب

$$\frac{\lambda_۱}{\lambda_۱ + \lambda_۲} = F_z(۱) = P_r(Y_۱ \leqslant Y_۲) = P_r(\frac{Y_۱}{Y_۲} \leqslant ۱)$$

▷

مسئله‌ی ۴. گشتاوری در برنولی‌ها

فرض کنید متغیرهای $X_1, X_2, ..., X_n$ از توزیع برنولی با احتمال p پیروی می‌کنند. متغیر تصادفی Z بدین شکل تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

و همچنین تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی X بدین شکل تعریف می شود:

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

مقدار تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی Z به دست بیاورید.

حل.
مجموع متغیرهای تصادفی برنولی همان متغیر تصادفی دوجمله ای است. پس:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n,p)$$

و تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی دو جمله‌ای، چون مستقل هستند به صورت زیر در می‌آید:

$$M_X(s) = (M_{X1}(s))^n = (pe^s + 1 - p)^n$$

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = e^{(-t\sqrt{\frac{np}{1-p}})}(1 - p + pe^{(\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}})})^n$$

ضریب دو جمله‌ای است، پس می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$= (pe^{t(\frac{(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}})} + (1-p)e^{t(\frac{(-p)}{\sqrt{np(1-p)}})})^n$$

▷

مسئله‌ی ۵. چپ و راست

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند و داشته باشیم:

$$E[X|Y] = A$$
$$E[Y|X] = B$$

آنگاه رابطه زیر را ثابت کنید:

$$Cov(X+A, Y+B) - Cov(A,B) = 3Cov(X,Y)$$

حل.

$$Cov(X+A, Y+B) - Cov(A,B) =$$
$$Cov(X,Y) + Cov(X,B) + Cov(A,Y) + Cov(A,B) - Cov(A,B) =$$
$$Cov(X,Y) + Cov(X,B) + Cov(A,Y)$$

برای $Cov(X,B)$ داریم:

$$Cov(X,B) = E[XB] - E[X]E[B] = E[XE[Y|X]] - E[X]E[E[Y|X]] = E[XE[Y|X]] - E[X]E[Y]$$

حال در عبارت $E[XE[Y|X]]$ مقدار متغیر تصادفی X در $E[Y|X]$ داده شده است و مشروط بر آن محاسبه می‌شود. پس مقدار X در کل عبارت یک عدد ثابت است و می‌توان آن را داخل برد:

$$E[XE[Y|X]] = E[E[XY|X]] = E[XY]$$

با جای‌گذاری داریم:

$$Cov(X,B) = E[XB] - E[X]E[B] = E[XY] - E[X]E[Y] = Cov(X,Y)$$

به همین ترتیب برای $Cov(A,Y)$ ثابت می‌شود که برابر با $Cov(X,Y)$ است و رابطه بالا اثبات می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۶. هندسه

دو متغیر تصادفی X و Y توزیع احتمال توام زیر را دارند:

$$f_{X,Y}(u,v) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}, & ۰ \leqslant u < ۱, ۰ \leqslant v < ۱, ۰ \leqslant u+v < ۱ \\ \frac{۳}{۲}, & ۰ \leqslant u < ۱, ۰ \leqslant v < ۱, ۱ \leqslant u+v < ۲ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف

توزیع چگالی احتمال حاشیه‌ای X را بیابید.

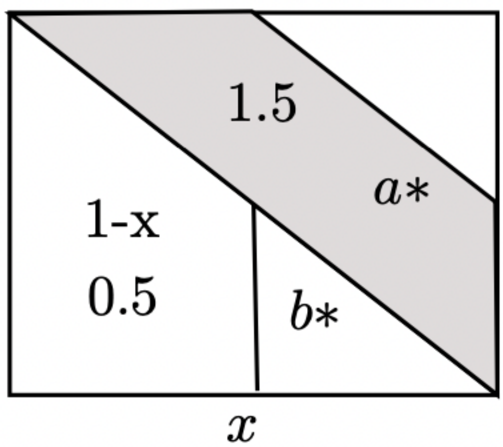
ب

مقدار $p(X+Y \leqslant \frac{۳}{۲})$ و $p(X^۲ + Y^۲ \geqslant ۱)$ را بیابید.

حل.

الف

برای درک بهتر به شکل زیر توجه کنید:



برای X داریم:

$$\int_۰^{۱-x} \frac{۱}{۲} dx + \int_{۱-x}^{۱} \frac{۳}{۲} dx = \frac{۱}{۲} + x \qquad (۱)$$

برای Y هم به همین شکل داریم:

$$\int_{۰}^{۱-y} \frac{۱}{۲} y dy + \int_{۱-y}^{۱} \frac{۳}{۲} dy = \frac{۱}{۲} + y \qquad (۲)$$

ب

$$P(X+Y \leqslant \frac{۳}{۲}) = a^* + b^* \qquad (۳)$$

که یعنی جمع مساحت ناحیه‌های مشخص شده در شکل که برابر است با $\frac{۱۳}{۱۶}$.

$$۱ - P(X^۲ + Y^۲ \geqslant ۱) = P(X+Y \leqslant ۱) + P(X+Y \geqslant ۱, X^۲ + Y^۲ \leqslant ۱) \qquad (۴)$$

$$= \frac{۱}{۲}.\frac{۱}{۲} + \int_{۰}^{۱} \int_{۱-x}^{\sqrt{۱-x^۲}} \frac{۳}{۲} dxdy = \frac{۳}{۲}(\frac{\pi - ۲}{۴}) \qquad (۵)$$

بنابراین داریم:

$$P(X^۲ + Y^۲ \geqslant ۱) = \frac{۳}{۸}(۴ - \pi) \qquad (۶)$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۷. Cov

متغیرهای تصادفی مستقل از هم $X_1, X_2, X_3, ...$ را در نظر بگیرید که واریانس همه آن‌ها برابر σ^2 است و کوواریانس هر دو تا از آن‌ها نیز برابر η است.

الف

$Var(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ را برحسب پارامترهای داده شده بدست آورید.

ب

اگر متغیر تصادفی Y_m را به صورت $Y_m = X_m + X_{m+1} + X_{m+2}$ تعریف کنیم، به ازای مقادیر $j \geqslant 0$ مقدار $Cov(Y_m, Y_{m+j})$ را بدست آورید.

حل.

الف

$$Var(X_۱ + X_۲ + ... + X_n) = E[(X_۱ + X_۲ + ... + X_n) - E[X_۱ + X_۲ + ... + X_n])^۲] =$$
$$E[(X_۱ - E[X_۱] + X_۲ - E[X_۲] + ... + X_n - E[X_n])^۲]$$

اگر درنظر بگیریم که:

$$Y_i = X_i - E[X_i]; i \in \{1, 2, ..., n\}$$

در این صورت طبق قضیه دوجمله‌ای داریم:

$$E[(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n)^2] = E[Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_n^2 + 2Y_1Y_2 + 2Y_1Y_3 + ... + 2Y_1Y_n + 2Y_2Y_3 + ... + 2Y_{n-1}Y_n]$$

باتوجه به اینکه:

$$E[Y_i^2] = E[X_i - E[X_i])^2] = Var(X_i)$$

$$E[Y_iY_j] = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])] = Cov(X_i, X_j), i \neq j$$

در نتیجه داریم:

$$Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n) + 2Cov(X_1, X_2) + 2Cov(X_1, X_3) + \\ ... + 2Cov(X_1, X_n) + 2Cov(X_2, X_3) + ... + 2Cov(X_{n-1}, X_n)$$

در آخر طبق داده مساله، جواب آخر برابر است با:

$$Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) = n\sigma^2 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \eta = n\sigma^2 + n(n-1)\eta$$

ب

طبق تعریف کوواریانس داریم:

$$Cov(Y_m, Y_{m+j}) = E[(Y_m - E[Y_m])(Y_{m+j} - E[Y_{m+j}])] = E[Y_mY_{m+j}] - E[Y_m]E[Y_{m+j}]$$

برای حساب‌کردن عبارت دوم، به طور کلی می‌دانیم:

$$E[Y_m] = E[X_m + X_{m+1} + X_{m+2}] = E[X_m] + E[X_{m+1}] + E[X_{m+2}] = 3\mu$$

در نتیجه:

$$E[Y_m]E[Y_{m+j}] = 9\mu^2, j \geqslant 0$$

حال برای حساب‌کردن $E[Y_mY_{m+j}]$ باید حالت‌های مختلف را در نظر بگیریم:

$$E[Y_mY_{m+j}] = E[(X_m + X_{m+1} + X_{m+2})(X_{m+j} + X_{m+j+1} + X_{m+j+2})] =$$

$$E[X_mX_{m+j}] + E[X_mX_{m+j+1}] + ... + E[X_{m+2}X_{m+j+2}]$$

باتوجه به این نکته:

$$E[X_iX_j] = \begin{cases} \mu^2 + \sigma^2 & i = j \\ E[X_i]E[X_j] = \mu^2 & i \neq j \end{cases}$$

حال با بررسی حالت‌های مختلف خواهیم داشت:

$$j = 0 : E[Y_m^2] = E[X_m^2] + E[X_{m+1}^2] + E[X_{m+2}^2] + 2(E[X_m]E[X_{m+1}] + E[X_m]E[X_{m+2}] +$$

$$E[X_{m+1}]E[X_{m+2}]) = 3\mu^2 + 3\sigma^2 + 6\mu^2 \to Cov(Y_m, Y_m) = 3\sigma^2$$

حالت $j = 1$:

$$E[Y_mY_{m+۱}] = E[X_۲^۲] + E[X_۳^۲] + (۲E[X_۲X_۳] + E[X_۱X_۲] + ... + E[X_۲X_۴]) = ۲\mu^۲ + ۲\sigma^۲ + ۷\mu^۲ \rightarrow$$
$$Cov(Y_m, Y_{m+۱}) = ۲\sigma^۲$$

حالت $j = 2$:

$$E[Y_mY_{m+۲}] = E[X_۳^۲] + (E[X_۱X_۳] + E[X_۱X_۴] + ... + E[X_۳X_۵]) = \mu^۲ + \sigma^۲ + ۸\mu^۲ \rightarrow Cov(Y_m, Y_{m+۲}) = \sigma^۲$$

حالت‌های $j \geqslant 3$:

$$E[Y_mY_{m+j}] = \underbrace{E[X_mX_{m+j}] + E[X_mX_{m+j+۱}] + ... + E[X_{m+۲}X_{m+j+۲}]}_{\text{اندیس جفت متغیرها در همه عبارات متفاوت هستند}} = ۹\mu^۲ \rightarrow Cov(Y_m, Y_{m+j}) = ۰$$

▷

مسئله‌ی ۸. *کمینگی استقلال متغیرها

فرض کنید X,Y دو متغیر تصادفی نمایی مستقل با پارامتر یکسان λ هستند. یک متغیر تصادفی به صورت $w = min(x, y)$ تعریف شده است.

الف

تابع چگالی احتمال را برای متغیر تصادفی w به دست آورید.

ب

تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی z را به دست آورید.

$$z = \frac{min(x,y)}{max(x,y)}$$

حل.

الف

$$F_W(w) = F_x(w) + F_y(w) - F_x(w)F_y(w)$$
$$f_W(w) = f_x(w) + f_y(w) - f_x(w)F_y(w) - F_x(w)f_y(w)$$

کافی است جای‌گذاری کنیم:

$$F_x(w) = F_y(w) = ۱ - e^{-\lambda w}$$
$$f_x(w) = f_y(w) = \lambda e^{-\lambda w}$$

بنابراین:

$$f_W(w) = ۲\lambda e^{-\lambda w} - ۲(\lambda e^{-\lambda w})(۱ - e^{-\lambda w}) = ۲\lambda e^{-\lambda w}$$

ب

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(\tfrac{x}{y} \leqslant z, x \leqslant y) + P(\tfrac{y}{x} \leqslant z, x > y)\\
F_Z(z) &= \int_0^\infty \int_{x=0}^{yz} f_{xy}(x,y)dxdy + \int_0^\infty \int_{y=0}^{xz} f_{xy}(x,y)dxdy\\
f_Z(z) &= \int_0^\infty y f_{xy}(yz,y)dy + \int_0^\infty x f_{xy}(x,xz)dx\\
&= \int_0^\infty y(f_{xy}(yz,y)dy + f_{xy}(y,yz)dy)\\
&= \int_0^\infty y\lambda^2(e^{-\lambda(yz+y)} + e^{-\lambda(y+yz)})dy\\
&= 2\lambda^2 \int_0^\infty ye^{-\lambda(yz+y)}dy \frac{2}{(1+z)^2}\int_0^\infty ue^{-u}du =
\end{aligned}
$$

$$
f_z(z) = \begin{cases} \frac{2}{(1+z)^2} & 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}
$$

$\triangleright$