



مسئله‌ی ۱. Couchy

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد و مستقل از هم باشند و با متغیرهای تصادفی U و V به صورت زیر مرتبط باشند:

$$U = X, V = \frac{X}{Y}$$

الف

تابع چگالی احتمال توزیع توام دو متغیر تصادفی U و V را بیابید.

ب

با استفاده از بخش قبل ثابت کنید که متغیر تصادفی V دارای توزیع کوشی است.

مسئله‌ی ۲. *نبود اسنپ

علی برای شرکت در جلسه‌ای نیاز دارد که به محل کارش برود. این جلسه بسیار برای او مهم است تا جایی که اگر به آن نرسد از کارش اخراج خواهد شد. برای رسیدن او باید ابتدا با گرفتن تاکسی‌ای به ایستگاه مترو برود و سپس با استفاده از مترو در ایستگاه جلوی محل کارش پیاده شود. زمان رسیدن تاکسی از توزیعی نمایی با میانگین پانزده دقیقه پیروی می‌کند و مسیر رسیدن به ایستگاه بیست دقیقه طول می‌کشد. زمان رسیدن مترو نیز از توزیعی یک‌نواخت بین صفر تا بیست دقیقه پیروی می‌کند. در نهایت با مترو نیز بیست و پنج دقیقه طول می‌کشد تا به مقصد برسد. اگر جلسه یک ساعت دیگر باشد، احتمال اخراج نشدن علی را حساب کنید.

مسئله‌ی ۳. حل تمرین

دو دانشجوی به طور مستقل در حال حل یک تمرین هستند. دانشجوی اول در $Y_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ و دانشجوی دوم در $Y_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ این تمرین را انجام می‌دهد.

الف

تابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی $\frac{Y_1}{Y_2}$ را بیابید.

ب

به چه احتمالی دانشجوی اول زودتر از دانشجوی دوم تمرین را تمام می‌کند؟

مسئله‌ی ۴. گشتاوری در برنولی‌ها

فرض کنید متغیرهای X_1, X_2, \dots, X_n از توزیع برنولی با احتمال p پیروی می‌کنند. متغیر تصادفی Z بدین شکل تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

و همچنین تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی X بدین شکل تعریف می‌شود:

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

مقدار تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی Z به دست بیاورید.

مسئله‌ی ۵. چپ و راست

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند و داشته باشیم:

$$\begin{aligned} E[X|Y] &= A \\ E[Y|X] &= B \end{aligned}$$

آنگاه رابطه زیر را ثابت کنید:

$$\text{Cov}(X + A, Y + B) - \text{Cov}(A, B) = 3\text{Cov}(X, Y)$$

مسئله‌ی ۶. هندسه

دو متغیر تصادفی X و Y توزیع احتمال توام زیر را دارند:

$$f_{X,Y}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1, 0 \leq u+v < 1 \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1, 1 \leq u+v < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف

توزیع چگالی احتمال حاشیه‌ای X را بیابید.

ب

مقدار $p(X + Y \leq \frac{3}{4})$ و $p(X^2 + Y^2 \geq 1)$ را بیابید.

مسئله‌ی ۷. Cov

متغیرهای تصادفی مستقل از هم X_1, X_2, X_3, \dots را در نظر بگیرید که واریانس همه آنها برابر σ^2 است و کوواریانس هر دو تا از آنها نیز برابر η است.

الف

$Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ را برحسب پارامترهای داده شده بدست آورید.

ب

اگر متغیر تصادفی Y_m را به صورت $Y_m = X_m + X_{m+1} + X_{m+2}$ تعریف کنیم، به ازای مقادیر $j \geq 0$ مقدار $Cov(Y_m, Y_{m+j})$ را بدست آورید.

مسئله ۸. *کمینگی استقلال متغیرها

فرض کنید X, Y دو متغیر تصادفی نمایی مستقل با پارامتر یکسان λ هستند. یک متغیر تصادفی به صورت $w = \min(x, y)$ تعریف شده است.

الف

تابع چگالی احتمال را برای متغیر تصادفی w به دست آورید.

ب

تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی z را به دست آورید.

$$z = \frac{\min(x, y)}{\max(x, y)}$$

نکات مهم

- بخش تئوری را در قالب یک فایل pdf با اسم [STD-Num]_HW# آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز دوشنبه ۱۴ آذر می باشد و تا پایان روز جمعه تحویل با تاخیر باز خواهد بود.
- سوالات ستاره دار، غیر تحویلی هستند و برای تمرین بیش تر قرار داده شده اند.

موفق باشید :)