تمرین ۵ آمار

شماره دانشجویی: ۹۹۱۰۲۲۰۷
اقبال محمدی

۱) ۵۰۰ بار پرتاب تاس، تعداد دفعاتی که تاس ۴ آمده با دقت ۹۵٪

$$Y = X_1 + \cdots + X_n \sim Binom(\overset{\to 500}{n}, \frac{1}{6})$$

$$E(\bar{X}) = \hat{\mu} = \frac{500}{6} \quad , \quad E(X_i) = \mu = \frac{1}{6}$$

$$\sigma_{(\bar{X})} = \sqrt{500 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \frac{50}{6} \quad , \quad \sigma_{(X_i)} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$\Rightarrow \quad n\mu - 2\sigma\sqrt{n} = \frac{500}{6} - \frac{10\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{6} = 66/6$$

$$n\mu + 2\sigma\sqrt{n} = \frac{500+100}{6} = 100$$

$$\Rightarrow \quad P(\overset{66/6\%}{67} \leq Y \leq 100) = 95\%$$

۲) مشاهده‌های ما از این n متغیر تصادفی ← $x_1, \ldots, x_n$

الف-

$$U(0, \theta) \to X_1, X_2, \ldots, X_n$$

$$f_X(x_i) = \frac{1}{\theta}$$

$$\Rightarrow L(\theta | X_1, \ldots, X_n) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \quad , \quad 0 \leq X_1, \ldots, X_n \leq \theta$$

برای بیشینه باید θ کمینه شود

$$\Rightarrow \theta_{MLE} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \hat{\theta}$$

ب- برای نشان دادن Biased بودن این تخمین‌گر، باید نشان دهیم $E(\hat{\theta}) \neq \theta$

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = E(\underbrace{\max(X_1, \ldots, X_n)}_{Y}) - \theta$$

$$\Rightarrow f_{X_n}(x) = n\, f_X(x)\, F_X(x)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f_{x_n}(x) = n \times \frac{1}{\theta} \times \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}$$

$$\Rightarrow E(X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_n}(x) = \int_0^{\theta} \frac{n x^n}{\theta^n} dx + 0 = \frac{n}{\theta^n} \times \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1}$$

$$\Rightarrow B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = \frac{n\theta}{n+1} - \theta = \frac{-\theta}{n+1} \quad , \quad B(\hat{\theta}) \neq 0$$

⟸ اثبات شد که این تخمین‌گر Biased است

تخمین unbiased

$$\hat{\mu}^2 = \left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

سؤال ۳) n نفر از دانشجوها با وزن $X_1, \dots, X_n$

میانگین μ و واریانس σ^2

تخمین‌گری unbiased برای μ^2

$$E(\hat{\mu}^2) = E\left(\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) = E\left(\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^2\right) - \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}^2 = \mu^2$$

$$Var\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) + E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$\Rightarrow E(\hat{\mu}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2 \Rightarrow E(\hat{\mu}^2) = \mu^2$$

پس می‌فهمیم unbiased است

سؤال ۴) ۳ بلدرچین گرفته و علامت‌گذاری می‌کند

۶ بلدرچین گرفته و ۲ تای اون‌ها علامت دار هستند

n ← کل بلدرچین‌ها

$MLE = ?$

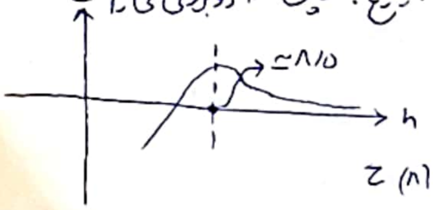
$$P = \frac{\binom{6}{2}\binom{3}{2}\binom{n-3}{4}}{\binom{n}{6}}$$

$$\Rightarrow \max(P) \Rightarrow P = \binom{6}{2}\binom{3}{2} \times 30 \times \frac{n-6}{n(n-1)(n-2)}$$

باید مقدار $\max\Big(\underbrace{\frac{n-6}{n(n-1)(n-2)}}_{Z}\Big)$ حساب شود ⇐ اگر مشتق برابر ۰ باشد، $n \simeq 8/5$

باید صحیح باشد پس ۹ و ۸ رو بررسی می‌کنیم

تابع را می‌کشیم و بررسی می‌کنیم ⇐



$$Z(8) = \frac{2}{8\times7\times6} = \frac{1}{168}$$

$$Z(9) = \frac{3}{9\times8\times7} = \frac{1}{168}$$

⇒ هر دو برابر مقدار max

$$MLE_n = \hat{n} = 8 \text{ یا } 9$$

سوال ۵) هر مقدار η را با n روش مختلف اندازه‌گیری می‌کند و مقادیر بدست آمده $\Leftarrow$ $x_1, \dots, x_n$

ε_i خطای اندازه‌گیری حسین است. $E[\varepsilon_i]=0 \quad Var(\varepsilon_i)=\sigma_i^2$

$\forall_{1\leq i\leq n}: x_i=\eta+\varepsilon_i$ و $\hat{\eta}=\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n = ?$

$\Rightarrow \hat{\eta}=\eta\sum\alpha_i+\sum\alpha_i\varepsilon_i$. $\hat{\eta}$ می‌خواهیم بایاس نباشد

$E[\hat{\eta}]=\eta$

$\Rightarrow E[\hat{\eta}]=E[\sum\alpha_ix_i]=\sum\alpha_iE(x_i)=\sum\alpha_i\eta=\eta\sum\alpha_i=\eta$

$\Longrightarrow \sum\alpha_i=1$

$Var(\hat{\eta})=var(\sum\alpha_ix_i)=\sum\alpha_i^2var(x_i)=\sum\alpha_i^2\sigma_i^2$

حالا برای کمینه کردن مقدار واریانس از ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$g(\alpha_1\dots\alpha_n)=\sum\alpha_i-1=0$

$f(\alpha_1\dots\alpha_n)=\sum\alpha_i^2\sigma_i^2$

$\mathcal{L}(\alpha_1\dots\alpha_n)=f+\lambda g=\sum\alpha_i^2\sigma^2+\lambda\sum\alpha_i-\lambda$

$$\Rightarrow \nabla\mathcal{L}=\begin{bmatrix}2\alpha_1\sigma_1^2-\lambda\\ \vdots\\ 2\alpha_n\sigma_n^2-\lambda\end{bmatrix}=0$$

$\Rightarrow \forall_i \quad 2\alpha_i\sigma_i^2-\lambda=0 \Longrightarrow \alpha_i=\dfrac{\lambda}{2\sigma_i^2}$

$\Longrightarrow \sum\alpha_i=1 \Rightarrow \dfrac{\lambda}{2}\sum\dfrac{1}{\sigma_i^2}=1 \Rightarrow \lambda=\dfrac{2}{\sum\frac{1}{\sigma_i^2}}$

$\Rightarrow \alpha_i=\dfrac{\lambda}{2\sigma_i^2} \Rightarrow \alpha_i=\dfrac{1/\sigma_i^2}{\sum\frac{1}{\sigma_i^2}}$