آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

میانترم

مسئله‌ی ۱. تاس بازی کامیار(۱۰ نمره)

کامیار که به جلسه مهم خود دیر رسیده است می‌خواهد زودتر نیز برود تا به کارهایش برسد. او میداند که مسئول جلسه تنها در صورتی اجازه خروج به او می دهد که در پرتاب های متوالی سکه شیر بیاورد. متغیر تصادفی Xرا تعداد پرتاب های متوالی تا اولین شیر تعریف می کنیم. بنابراین $X = n$ به معنی این است که $n - ۱$ پرتاب قبلی خط و پرتاب n ام شیر بوده است.

الف

$P(X > k)$ را حساب کنید

ب

اثبات کنید $P(X > n + k|X > n) = P(X > k)$

حل. $\triangleright$

الف

پیشامد خواسته شده این است که k پرتاب اول همه خط باشند. بنابراین داریم :

$$\mathbb{P}[X > k] = (۱ - p)^k$$

ب

داریم :

$$\mathbb{P}[X > n+k|X > n] = \frac{\mathbb{P}[(X > n + k) \cap (X > n)]}{\mathbb{P}[X > n]} = \frac{\mathbb{P}[X > n + k]}{\mathbb{P}[X > n]} = \frac{(۱ - p)^{n+k}}{(۱ - p)^n} = (۱ -p)^k = \mathbb{P}[X > k]$$

مسئله‌ی ۲. تاس بازی حسین(۱۵ نمره)

محمدآقا و دوستش که حوصلشان سر رفته است سراغ حسین می‌روند و حسین به آن ها بازی ساده ای را پیشنهاد می‌کند. محمدآقا آنقدر تاس می اندازد تا ۶ بیاید. همزمان با تاس انداختن محمد آقا دوستش تعداد ۱ هارا می شمارد. تعداد تاس هایی که باید بیاندازیم تا ۶ بیاید را X مینامیم. متغیر Y را تعداد ۱ ها در N پرتاب تاس مینامیم. $E[Y|X]$

را حساب کنید.

حل. $\triangleright$

طبق تعریف می‌دانیم که X تعداد تاس‌ها تا اولین ۶ و همچنین Y تعداد ۱ ها در بین این پرتاب هاست. بنابراین $\mathbb{E}[Y|X=N]$ به این معنا است که ما میدانیم در $N-1$ پرتاب اول فقط اعداد ۱ تا ۵ آمده‌اند و پرتاب N ۶ آمده است، و حالا میخواهیم بدانیم که میانگین تعداد ۱ ها در این N پرتاب چقدر است.

متغیر تصادفی B_i را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{if} i^{th} \text{ toss is} 1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

واضح است که داریم $B_N = 0$. حال میتوانیم Y را به صورت جمعی از B_i ها بنویسیم.

$$Y = \sum_{i=1}^{N} B_i = \sum_{i=1}^{N-1} B_i$$

در اینجا کافی است که مقدار p را برای متغیر تصادفی B_i را پیدا کنیم. پیشامد A را پیشامد ۱ آمدن تاس i و پیشامد C را ۶ نیامدن آن تعریف میکنیم. پس داریم :

$$\mathbb{P}[B_i = 1] = \frac{\mathbb{P}[A \cap C]}{\mathbb{P}[C]} = \frac{1}{5}$$

پس هرکدام از B_i ها یک متغیر تصادفی برنولی با مقدار احتمال $\frac{1}{5}$ است. پس میتوانیم نتیجه بگیریم که Y یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامتر های زیر است.

$$Y \sim \text{Binom}(N-1, 0/2)$$

$$\to \mathbb{E}[Y] = 0/2(N-1)$$

مسئله‌ی ۳. افسانه سه برادر(۱۵ نمره)

سه برادر که به تازگی سرزمین های ساو ساو پلید را فتح کرده اند نیاز به استقرار نیرو در این منطقه دارند. توزیع نیروهای آن ها به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 10 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مقدار k را بدست آورید به طوری کهf یک توزیع احتمال باشد. سپس $E[X], E[Y], E[XY], Cov(X,Y)$ را بدست آورید.

حل. $\triangleright$

در ابتدا ضریب ثابت توزیع را بدست می‌آوریم.

$$\int_0^{10} \int_0^{10-x} (x+y)\, dy\, dx = \frac{1}{k}$$

$$\int_0^{10} \int_0^{10-x} (x+y)\, dy\, dx = \int_0^{10} -\frac{x^2}{2} + 50\, dx = \frac{1000}{3}$$

$$\rightarrow k = \frac{۳}{۱۰۰۰}$$

حال که توزیع توام X و Y را داریم میتوانیم توزیع حاشیه‌ای هرکدام را حساب کنیم.

$$f_X(x) = \frac{۳}{۱۰۰۰} \int_{۰}^{۱۰-x} (x+y)\, dy = \frac{۳}{۱۰۰۰} (۵۰ - \frac{x^۲}{۲})$$

$$f_Y(y) = \frac{۳}{۱۰۰۰} \int_{۰}^{۱۰-x} (x+y)\, dx = \frac{۳}{۱۰۰۰} (۵۰ - \frac{y^۲}{۲})$$

حال با استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای میتوانیم مقدار $\mathbb{E}$ هارا هم محاسبه کنیم.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{۳}{۱۰۰۰} \int_{۰}^{۱۰} (۵۰x - \frac{x^۳}{۲})\, dx = ۳/۷۵$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{۳}{۱۰۰۰} \int_{۰}^{۱۰} (۵۰y - \frac{y^۳}{۲})\, dy = ۳/۷۵$$

حال کافی است $\mathbb{E}[XY]$ را داشته باشیم تا Cov را هم بتوانیم حساب کنیم.

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{۳}{۱۰۰۰} \int_{۰}^{۱۰} \int_{۰}^{۱۰-x} xy(x+y)\, dy\, dx = ۱۰$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = ۱۰ - (۳/۷۵)^۲$$

مسئله‌ی ۴. گنگ مترو(۲۰ نمره)

راننده مترو دو اندازه گیری برای رسیدن قطار به ایستگاه تئاترشهر انجام می دهد که از توزیع نرمال استاندارد پیروی میکنند. همبستگی بین مقادیر بزرگتر و کوچکتر را پیدا کنید.

راهنمایی: توجه کنید که $max(x,y) + min(x,y) = x + y$ و $max(x,y) - min(x,y) = |x-y|$

راهنمایی ۲: اگر X و Y دو متغیر تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشند آنگاه $E[|X-Y|] = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}$

حل. ▷

مقداری که در این مسئله میخواهیم محاسبه کنیم $\rho(\mathrm{Max}(X,Y), \mathrm{Min}(X,Y))$ است. تعریف میکنیم $Z = \mathrm{Max}(X,Y)$ و همینطور $W = \mathrm{Min}(X,Y)$.

$$Z = \frac{x+y+|x-y|}{۲}$$

$$W = \frac{x+y-|x-y|}{۲}$$

لازم است که ابتدا مقادیر $\mathbb{E}[Z]$ و $\mathbb{E}[W]$ و $\mathbb{E}[WZ]$ و همینطور $\mathrm{Var}(Z), \mathrm{Var}(W)$ را داشته باشیم.

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{۱}{\sqrt{\pi}}$$

$$\mathbb{E}[W] = -\frac{۱}{\sqrt{\pi}}$$

حال برای محاسبه $\mathbb{E}[\mathrm{Min} \times \mathrm{Max}]$ در نظر داشته باشید که با $\mathbb{E}[XY]$ برابر است. چرا که با تقسیم به بازه‌های $X > Y$ و $X \leqslant Y$ مشاهده میشود که این مقدار برابر با $\mathbb{E}[XY]$ است.

$$\mathbb{E}[WZ] = \mathbb{E}[XY] = ۰$$

همینطور دقت داشته باشید که داریم $\text{Var(Max)} = \text{Var(Min)}$. برای اثبات آن کافی است به توزیع $X-$ و $Y-$ نگاه کنید.

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(W) \quad , \quad \text{Var}(X+Y) = \text{Var}(Z+W)$$

$$\rightarrow \text{Var}(Z) = \text{Var}(W) = ۱ - \frac{۱}{\pi}$$

در آخر میتوانیم مقدار همبستگی را محاسبه کنیم.

$$\rho(Z,W) = \frac{\frac{۱}{\pi}}{۱ - \frac{۱}{\pi}} = \frac{۱}{\pi - ۱}$$

مسئله‌ی ۵. حمله تایتان‌ها (۲۵ نمره)

تایتان ها به شریف حمله کرده اند. شما که از گارد مخفی حافظ شریف هستید فهمیده اید که توزیع تعداد تایتان های زن و مرد از توزیع پواسون با λ_f و λ_m پیروی میکند.

الف

$T_۲$ را زمانی بگیرید که اولین تایتان به دانشگاه میرسد. $E[T_۲]$ را حساب کنید

ب

$T_۱$ زمانی است که حداقل یک تایتان زن و یک تایتان مرد به دانشگاه نفوذ کرده اند. $E[T_۱]$ را حساب کنید.

ج

فرض کنید هیچ تایتان زنی در بازه $[۰, ۱]$ به دانشگاه نفوذ نکرده است.اگر چهار تایتان در بازه $[۰, ۲]$ به دانشگاه نفوذ کرده باشند احتمال اینکه دقیقا ۲ تای آنها مرد بوده باشند را حساب کنید.

حل. $\triangleright$

الف

در ابتدا این نکته را درنظر داشته باشید که جمع ۲ متغیر تصادفی Poisson که مستقل هم هستند خود یک متغیر تصادفی Poisson با پارامتری معادل جمع پارامترها است. همینطور فاصله بین رخداد های Poisson از توزیع نمایی با پارامتری برابر با پارامتر همان توزیع Poisson پیروی میکند.

بنابراین میدانیم که اگر تعداد کل تایتان‌ها با متغیر تصادفی X نشان دهیم داریم :

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda_m + \lambda_f)$$

$$T_۲ \sim \exp(\lambda_m + \lambda_f)$$

$$\mathbb{E}[T_۲] = \frac{۱}{\lambda_m + \lambda_f}$$

ب

متغیرهای تصادفی T_m و T_f را به ترتیب برابر با زمان ورود اولین تایتان مرد و زمان ورود اولین تایتان زن تعریف میکنیم. داریم :

$$T_۲ = \mathrm{Min}(T_m, T_f)$$

$$T_۱ = \mathrm{Max}(T_m, T_f) = T_m + T_f - T_۲$$

$$\mathbb{E}[T_۱] = \mathbb{E}[T_m] + \mathbb{E}[T_f] - \mathbb{E}[T_۲] = \frac{۱}{\lambda_m} + \frac{۱}{\lambda_f} - \frac{۱}{\lambda_m + \lambda_f}$$

ج

X را تعداد تایتان‌های زن در بازه $[۱, ۲]$ و Y را تعداد تایتان‌های مرد در بازه $[۰, ۲]$ تعریف میکنیم.

$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_f) \quad , \quad Y \sim \mathrm{Poisson}(۲\lambda_m)$$

$$\mathbb{P}[X = ۲ | X + Y = ۴] = \frac{\mathbb{P}[X = ۲, Y = ۲]}{\mathbb{P}[X + Y] = ۴}$$

$$= \frac{\frac{(۲\lambda_m)^۲}{۲!} \times \frac{\lambda_f^۲}{۲!}}{\frac{\lambda_f^۴}{۴!} + (۲\lambda_m) \times \frac{\lambda_f^۳}{۳!} + \frac{(۲\lambda_m)^۲}{۲!} \times \frac{\lambda_f^۲}{۲!} + \frac{(۲\lambda_m)^۳}{۳!} \times \lambda_f^۲ + \frac{(۲\lambda_m)^۴}{۴!}}$$

مسئله‌ی ۶. انتخاب سخت(۲۰ نمره)

سوالات پیشنهادی تیم تدریس آنقدر خوب بودند که انتخاب برای دکتر شریفی سخت شده است.او تصمیم گرفت از بین N سوال طراحی شده که G تای آنها خوب و B تای آنها بد هستند بدون جایگذاری سوال انتخاب کند. متغیر تصادفی X را تعداد انتخاب سوال تا اولین سوال خوب در نظر میگیریم. (خود سوال خوب هم حساب است)

الف

$E[X]$ را بدست آورید

ب

$Var[X]$ را بدست آورید

(دقت کنید که احتمال انتخاب هر سوال برابر است)

ج(۵ نمره)

لطفا نظر خودتان درباره امتحان را بگویید

حل. ▷

متغیرهای تصادفی B_i را به این صورت تعریف میکنیم که B_i مقدار ۱ دارد اگر i امین سوال بد قبل از اولین سوال خوب قرار بگیرد و در غیراین‌صورت ۰ باشد. داریم :

$$X = ۱ + \sum_{i=۱}^{B} B_i$$

الف

$$\mathbb{E}[X] = ۱ + B\mathbb{E}[B_i] = ۱ + \frac{B}{G+۱}$$

مقدار p برای متغیرهای تصادفی برنولی برابر با $\frac{۱}{G+۱}$ میباشد چرا که بین تمامی جایگشت‌های مختلف سوال بد i و تمامی سوال‌های خوب مطلوب ما حالتی است که سوال بد اول باشد.

ب

در ابتدا دقت کنید که داریم $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X-۱)$:

$$\mathrm{Var}(X-۱) = \mathbb{E}[(X-۱)^۲] - \mathbb{E}[X-۱]^۲$$

$$\mathbb{E}[(X-۱)^۲] = \sum_{i=۱}^{B} \mathbb{E}[B_i^۲] + \sum_{i,j\ i\neq j}^{B} \mathbb{E}[B_iB_j]$$

برای مقادیر نابرابر i,j مقدار B_iB_j فقط زمانی برابر با ۱ است که هم سوال بد i و هم سوال بد j قبل از همه سوال‌های خوب آمده باشند. این احتمال برابر است با :

$$\frac{۲!G!}{(G+۲)!} = \frac{۲}{(G+۱)(G+۲)}$$

همینطور برای متغیر تصادفی برنولی دلخواه Y میدانیم:

$$\mathbb{E}[Y^۲] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{P}[Y=۱]$$

بنابراین برای جواب نهایی داریم:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{B}{G+۱} + \frac{۲B(B-۱)}{(G+۱)(G+۲)} - (\frac{B}{G+۱})^۲$$

ج

عالی.

موفق باشید :)