سؤال ۱) الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-|x|} = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} ce^{x} + \int_{0}^{+\infty} ce^{-x} = 1$$

$$\Rightarrow ۲c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{۲}$$

ب)

$$E(X^{۲n+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{۲n+1} f_n(x)\,dx = \frac{1}{۲}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{۲n+1} e^{-|x|}\,dx$$

$$\Rightarrow E(X^{۲n}) = c\int x^{۲n} e^{-|x|}\,dx = ۲c\int_{0}^{+\infty} x^{۲n} e^{-x}\,dx$$

$$f'(x) = e^{-x} \Rightarrow f(x) = -e^{-x}$$

$$g(x) = x^{۲n}$$

$$E[X^{۲n}] = gf - \int fg' \Rightarrow E[X^{۲n}] = 0 + ۲n\left(-x^{۲n-1}e^{-x} + (۲n-1)\int_{0}^{\infty} x^{۲n-۲} e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow E[X^{۲n}] = ۲n(۲n-1)\underbrace{E[X^{۲n-۲}]}_{(۲n-۲)!}$$

استقرا $\leftarrow$

$$\Rightarrow E[X^{۲n}] = (۲n)!$$

سؤال ۲) احتمال برنده نشدن را P در نظر می گیریم و برنده شدن را، $1-P$

احتمال اینکه یک بلیط جایزه دار باشد $\frac{100}{10^6}$ است پس $P = 1 - \left(1 - \frac{100}{10^6}\right)^{100}$

که تقریباً می شود یک درصد

ب) حالا اگر n بلیط خرید باشد، احتمال برنده شدن برابر است با

$$1-P = 1-\left(1-10^{-4}\right)^{n} \geq 0/95 \implies \left(1-10^{-4}\right)^{n} \leq 0/05$$

$$\implies n \geq \frac{\log 0/05}{\log 1-10^{-4}} \implies n \geq \log_{1-10^{-4}} 0/05 \implies n \geq 29956$$

ج) تعداد بلیط هایی که باید بخرد تا برنده شود از توزیع هندسی با پارامتر احتمال $\frac{1}{10^4}$ پیروی می کند.

امید ریاضی $X \sim Geometric(10^{-4})$ برابر $\frac{1}{P}$ است $\Leftarrow$ $E[X] = 10^{4}$

سؤال ۳) $X \sim N(3,9)$ و $X+Y=5$

$\mu=3$ و $\sigma=3$

الف) $P(x>2)=P\left(\frac{x-3}{3}>\frac{2-3}{3}\right)=P\left(Z>\frac{-1}{3}\right)=1-\Phi\left(\frac{-1}{3}\right)=1-\left[1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\simeq 0/63$

ب) $P(1<Y<3)=P(-4<-x<-2)=P(2<x<4)=P\left(\frac{-1}{3}<Z<1\right)$

$=\Phi(1)-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)=\Phi(1)-\left(1-\Phi\frac{1}{3}\right)\simeq 0/47$

ج) $P(x>4 \mid Y<2)=P(x>4 \mid x>3)=\frac{P(x>4)}{P(x>3)}=\frac{P\left(Z>\frac{1}{3}\right)}{P(Z>0)}$

$=\frac{-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)+1}{1-\Phi(0)}\simeq\frac{0/37}{0/5}=0/74$

سؤال ۴) در ۲ هفته زمین لرزه رخ می دهد به طور میانگین

الف) $\underbrace{\lambda \times 2}_{4} \leftarrow$

$$P_X(2) = \frac{e^{-4} \times 4^2}{2!} \qquad P_X(1) = \frac{e^{-4} \times 4}{1} \qquad P_X(0) = \frac{e^{-4} \times 1}{0!}$$

$$\Rightarrow P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 13e^{-4}$$

ب) اولین زمین لرزه‌ی بعدی ← Y

$$P(Y > t) = \frac{e^{-\lambda t} \times (\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} \Rightarrow P(Y \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

CDF توزیع exponential

سوال ۵)

$P(Y=x)=0 \Leftarrow x>\frac{\lambda}{2}$ و $x<0$

$\Leftarrow \quad P(Y=x)=P(X=x) \Leftarrow \quad 0\leq x<\frac{\lambda}{2}$

$$F_Y(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & 0\leq x<\frac{\lambda}{2} \\ F_X(x)=1-e^{-\lambda x} & \frac{\lambda}{2}\leq x \end{cases}$$

$\hookrightarrow P(Y\geq x)=1$

$P(Y\geq \frac{\lambda}{2})=1$

سؤال ۶) مثال چند نکته دارد. یکی اینکه عملکرد متغیر در هر مرحله مستقل از مرحله‌ی دیگری است. n حالت داریم و حالت iام دارای 2^i سر است.

اگر متغیر یافتن سر درست را X_i تعریف کنیم، X_i از توزیع هندسی پیروی می‌کند و احتمال موفقیت در هر بار تلاش، $\frac{1}{2^i}$ است؛ 1 بار تلاش موفق (تلاش آخر) و 2^i-1 بار تلاش ناموفق

$$\Rightarrow E[X_i]=2^i$$

$$\Rightarrow E[X]=E[X_1]+E[X_2]+\dots+E[X_n]=2^1+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-2$$