



نکات مهم

- پاسخ بخش تئوری را در قالب یک فایل pdf با اسم HW4_[STD-NUM] آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۵ دی ۱۴۰۱ می‌باشد.
- سوالات ستاره‌دار، غیر تحویلی هستند و برای تمرین بیشتر قرار داده شده‌اند.

مسئله‌ی ۱. کوواریانس شرطی

کوواریانس شرطی (Conditional Covariance) دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cov(X, Y|Z) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Z])(Y - \mathbb{E}[Y|Z])|Z]$$

با توجه به تعریف فوق موارد زیر را اثبات کنید:

(الف)

$$Cov(X, Y|Z) = \mathbb{E}[XY|Z] - \mathbb{E}[X|Z]\mathbb{E}[Y|Z]$$

(ب)

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[Cov(X, Y|Z)] + Cov(\mathbb{E}[X|Z], \mathbb{E}[Y|Z])$$

(ج)

$$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Y)] + Var(\mathbb{E}[X|Y])$$

مسئله‌ی ۲. بانک احتمالاتی

شعبه‌ی خیابان آزادی بانک ملت به مشتریان ایستاده در صف خدمات عابر بانک، یکی یکی، رسیدگی می‌کند. فرض کنید زمان ارائه خدمت مد نظر مشتری i را X_i بنامیم. این فرض را نیز در نظر بگیرید که داریم:

$$EX_i = 2, \quad VAR(X_i) = 1$$

همچنین در این مسئله فرض می‌کنیم که زمان رسیدگی به درخواست مشتریان از همدیگر مستقل می‌باشد. می‌دانیم ۵۰ نفر در صف این بانک ایستاده‌اند. Y را مدت زمانی در نظر بگیرید که عابر بانک به درخواست تمامی این مشتریان رسیدگی می‌کند. $P(90 < Y < 110)$ را بیابید.

مسئله‌ی ۳. توابع نزولی

الف

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته باشد که مقادیر ممکن برای آن برابر با $1, 2, \dots$ می‌باشد. اگر $P(X = k)$ در $k = 1, 2, \dots$ نزولی باشد، ثابت کنید:

$$P(X = k) \leq \frac{E[X]}{k^2}$$

ب

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته نامنفی باشد که تابع چگالی احتمال آن، نزولی است. نشان دهید:

$$f(x) \leq \frac{E[X]}{x^2} \quad ; \quad \forall x > 0$$

مسئله‌ی ۴. خطای تقریبی

۵۰ عدد گرد شده و سپس با هم جمع شده اند. اگر خطای گرد کردن هر عدد با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $(-0.5, 0.5)$ آنگاه احتمال این که تفاوت مجموع حاصل و مجموع اصلی این اعداد بیشتر از ۳ باشد را با استفاده از قانون حد مرکزی تقریب بزنید.

مسئله‌ی ۵. سرعت الگوریتم

فرض کنید می‌خواهید سرعت اجرای یک الگوریتم را اندازه بگیرید. می‌دانید که واریانس سرعت اجرا $\sigma^2 = 4 \text{ sec}$ می‌باشد ولی می‌خواهید میانگین زمان اجرا را بدست بیاورد. برای این کار الگوریتم را چندین بار اجرا می‌کنید. چند بار باید الگوریتم را اجرا کنید که زمان اجرا برابر $t \pm 0.5$ را با اطمینان ۹۵٪ بدست بیاید.

مسئله‌ی ۶. نامساوی کانتلی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد با شرط $E[X] = 0$. برای هر عدد حقیقی مثبت مثل a گزاره زیر را اثبات کنید:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X) + a^2}$$

مسئله‌ی ۷. قانون حد مرکزی پیچیده*

فرض کنید f تابع چگالی احتمالی غیر منفی باشد. می‌دانیم:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = 25$$

حال مقدار زیر را پیدا کنید: (علامت * به معنای Convolution است)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\sqrt{n}} \underbrace{f * f * \dots * f(x)}_{\text{بار } n-1} dx$$

مسئله‌ی ۸. حاج حسین پفکی*

حسین کوپن‌هایی که در بسته‌های پفک هستند را جمع‌آوری می‌کند. n نوع کوپن متفاوت وجود دارند و هر بسته‌ی پفک با احتمال یکسانی حاوی یکی از انواع این کوپن‌هاست. فرض کنید T تعداد بسته‌هایی باشد که حسین باز می‌کند تا تمام n نوع کوپن را پیدا کند. نشان دهید داریم:

$$\mathbb{P}(T \geq 2n \cdot (1 + \ln n)) \leq \frac{\pi^2/6}{(1 + \ln n)^2}$$

راهنمایی:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$$

مسئله‌ی ۹. پواسون زنجیرزن*

با استفاده از زنجیره‌ای از متغیرهای تصادفی پواسون عبارت زیر را اثبات کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

موفق باشید (:)