



مسئله ۱. مهمونی علی جان (۲۰ نمره)

علی جان که در مهمانی حوصله اش سر رفته است به بالکن رفته و سوال زیر را برای امتحان پایان ترم طرح کرده است. رشته باینری دوبیتی A را در اختیار داریم. در هر مرحله، به ترتیب سه حرکت زیر را برای بروزرسانی رشته A انجام می دهیم:

۱. رشته باینری دوبیتی B را از میان تمامی رشته های باینری دوبیتی انتخاب می کنیم. با این فرض که احتمال انتخاب تمامی رشته های ممکن با یکدیگر برابر است.
۲. از میان عملیات های بیتی XOR، Or، And که احتمال انتخاب هر کدام $\frac{1}{3}$ است، یکی را انتخاب می کنیم.
۳. عملیات منتخب را روی رشته های A و B اعمال می کنیم و نتیجه را در رشته A ذخیره می کنیم.

فرض کنید از رشته ۱۱ شروع کنیم. به طور میانگین، چند مرحله بعد به رشته ۰۰ می رسیم؟

مسئله ۲. سوال خسته (۲۰ نمره)

طراح این سوال چون تازه از کوه برگشته حال داستان گفتن برای سوال ندارد و فقط می خواهد لتک امتحان را بزند و برود بخوابد. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه (a, b) باشند. حال متغیر تصادفی Y را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

امید ریاضی متغیر تصادفی Y را محاسبه کنید.

مسئله ۳. موبایل زندان رفته (۲۰ نمره)

بهزاد که به تازگی موبایلش را پس گرفته، به قدری خوشحال است که تصمیم گرفته سوال زیر را برای امتحان بدهد. فرض کنید X_i ها دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و از یک توزیع یکسان با میانگین μ و واریانس σ^2 هستند. از طرفی N یک متغیر تصادفی مستقل از X_i ها با میانگین μ_N است که می تواند مقادیر ۱، ۲، ۳، ... را اتخاذ کند. تعریف می کنیم:

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

الف (۱۰ نمره)

$E[S_N|N]$ و $E[S_N^2|N]$ را بدست آورید.

ب (۱۰ نمره)

$E[S_N]$ و $var(S_N)$ را بدست آورید.

مسئله‌ی ۴. اصن نگران نباش (۱۵ نمره)

طراح این سوال نیز مانند سوال ۲ حال طراحی داستان ندارد و فقط می‌خواهد یک نصیحت به شما در مورد امتحان بکند که ”حاجی اصن نگران نباش“.

فرض کنید n توپ و n ظرف وجود دارد. توپ‌ها را به صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت داخل ظرف‌ها قرار می‌دهیم. فرض کنید X_i تعداد توپ‌های قرار گرفته در ظرف i ام باشد و $X = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ باشد.

الف (۵ نمره)

$$Pr(X_i \geq t) \leq 1/t$$

ب (۵ نمره)

$$Pr(X_i \geq t + 1) \leq 1/t^2$$

ج (۵ نمره)

$$Pr(X \geq 1 + 2\sqrt{n}) \leq 1/4$$

مسئله‌ی ۵. ام‌ال، میر، کاپیتان، همون همیشگی (۱۵ نمره)

فرض کنید میر و کاپیتان تصمیم گرفتند به ۲ گروه از دانشجویان آمار درس ML بدهند. هر گروه شامل ۹ دانشجو است و گروه کاپیتان در آزمون نمره میانگین ۱۵ با واریانس ۲۰۵ و گروه میر میانگین ۱۷ با واریانس ۲ را کسب کرده است. (برای استفاده از جدول درجه آزادی را برابر ۱۶ در نظر بگیرید)

الف (۲ نمره)

گلی برای نشان دادن یکسان بودن عملکرد کاپیتان و میر باید از چه آزمونی استفاده کند؟

ب (۱۰ نمره)

با سطح ۹۵ درصد فرض خود را بیازمایید. ($\sqrt{2} = 1/4$)

ج (۳ نمره)

گلی با حداکثر چه دقتی میتواند ادعا کند که کیفیت تدریس میر و کاپیتان یکسان نیست؟ (بر اساس اعداد موجود در جدول پاسخ خود را بیان کنید محاسبه مقدار دقیق لازم نیست)

مسئله‌ی ۶. گلی کشته شد (۲۰ نمره)

حسین مدتی ناراحت است. امیرحسین برای کمک به حسین تبدیل به یک غول چراغ جادو شده است و می‌تواند ۳ آرزو برای حسین با استفاده از توزیع میرگلی برآورده کند. توزیع میرگلی به این صورت است که خروجی آن یکی از ۳ حالت y_1, y_2, y_3 با احتمال‌های p_1, p_2, p_3 است. امیرحسین (غول چراغ جادو) از توزیع میرگلی، N داده گرفته است که به یکی از ۳ حالت فوق هستند. حسین می‌خواهد ببیند هر کدام از p_1, p_2, p_3 ها چه مقداری دارند. با استفاده از تخمینگر MLE به حسین کمک کنید.

(توجه کنید که جمع احتمال‌ها باید ۱ بشود در نتیجه $p_3 = 1 - p_1 - p_2$)

با لبخند قشنگ‌تری :)

t-test table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
Z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										