دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۱

کوئیز ۴

مسئله‌ی ۱. سوال آخره کاپیتان !

حسین و امیرحسین که بعد از میانترم (ساده) آمار و احتمال حوصله‌شان حسابی سر رفته بود، به این نتیجه رسیدند که به تفریح‌های جدیدی نیاز دارند. آن‌ها پس از بررسی تمام گزینه‌ها برای سرگرمی خود به این نتیجه رسیدند که بهترین کاری که با وقت خود میتوانند بکنند ساختن یک توزیع جدید است. آن‌ها موفق شدند توزیع میرگلی را پایه‌گذاری کردند که به صورت زیر تعریف میشود.

$$X \sim \mathrm{MirGoli}(\lambda) \quad , \quad \lambda > ۲$$

$$f_X(x) = \frac{۱}{\Gamma(۰, \ln(۲)) - \Gamma(۰, \ln(\lambda))} \times \frac{۱}{x^۲ \ln(x)} \quad , \quad ۲ \leqslant x \leqslant \lambda$$

در اینجا میتوانید ضریب ثابت توزیع را به صورت تابعی از λ در نظر بگیرید.

$$f_X(x) = g(\lambda) \times \frac{۱}{x^۲ \ln(x)}$$

حال آن‌ها تعداد زیادی نمونه تصادفی iid از این توزیع با پارامتر ۸ دارند و از شما کمک میخواهند که حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty} (X_۱ X_۲ \dots X_n)^{\frac{۱}{n}}$$

میتوانید مقدار $g(۸)$ را با ۳ تقریب بزنید.

حل.

متغیر های تصادفی Y را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$Y_i = \ln(X_i)$$

با استفاده از LOTUS داریم:

$$\mathbb{E}[Y_i] = \int_۲^۸ \frac{۳}{x^۲}\, dx = \frac{۹}{۸}$$

حال داریم:

$$S_n = (X_۱ X_۲ \dots X_n)^{\frac{۱}{n}} \quad , \quad S'_n = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} Y_i$$

$$\to S_n = e^{S'_n}$$

با استفاده از قانون اعداد بزرگ میدانیم که :

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \mathbb{E}[Y_i] = \frac{۹}{۸}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = e^{\lim_{n\to\infty} S'_n} = e^{\frac{۹}{۸}}$$

▷

موفق باشید :)