مسئله‌ی ۱.

تابع توزیع توام برای دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & 0<x<\infty, 0<y<\infty \\ 0 & O.W \end{cases}$$

تابع چگالی احتمالی (pdf) را برای متغیر تصادفی $\frac{X}{Y}$ به دست آورید.

مسئله ۱. دانشجو: علیرضا خاوری شماره دانشجویی: 99105797

$$P\left\{\frac{X}{Y} \le a\right\} = \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-(x+y)}\,dx\,dy = \int_0^\infty e^{-y} \underbrace{\int_0^{ay} e^{-x}\,dx}_{1-e^{-ay}}\,dy$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{-y} - e^{-y-ay}\right) dy = \underbrace{\int_0^\infty e^{-y}}_{1} - \int_0^\infty e^{-y(1+a)} = 1 - \frac{1}{1+a} = \boxed{1-\frac{1}{1+a}} : \text{CDF}$$

البته در ابتدا فرض کردیم a مثبت است پس تابع توزیع تجمعی برابر $1-\frac{1}{1+a}$ شد

پس برای Pdf باید مشتق بگیریم $\Leftarrow$

$$P\left\{\frac{X}{Y} = a\right\} = \left(1-\frac{1}{1+a}\right)' = \frac{1}{(1+a)^2} : \text{Pdf}$$

مسئله‌ی ۲.

فرض کنید که X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع هندسی با پارامتر p باشند.

الف

بدون محاسبات، بنظر شما مقدار عبارت زیر چیست؟

$$P\{X = i|X + Y = n\}$$

راهنمایی: فرض کنید که یک سکه را که با احتمال p رو می‌آید به طور متوالی پرتاب می‌کنیم، اگر بار دومی که سکه رو می‌آید بار n ام باشد، تابع چگالی احتمال اولین باری که سکه رو می‌آید چیست؟

ب

مقدار عبارت بالا را حساب کنید.

مسئله 2. ب)

$$P\{X=i \mid X+Y=n\} = \frac{P\{X=i\}\,P\{Y=n-i\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)\,p^2(1-p)^{n-2}$$

$$P\{X=i\} = p(1-p)^{i-1} \quad , \quad P\{Y=n-i\} = p(1-p)^{n-i-1}$$

$$\Rightarrow \quad P\{X=i \mid X+Y=n\} = \frac{p \times p(1-p)^{n-2}}{p^2(1-p)^{n-2}(n-1)} = \boxed{\frac{1}{n-1}}$$

الف) می‌دانیم که یک دنباله n حرفی داریم آخریش رو است حال می‌خواهیم ببینیم احتمال اینکه رو اول i اُم باید چقدر است i می‌تواند بین 1 تا $n-1$ باشد و همه هم با هم برابر و مشابه اند $\Leftarrow$ احتمال رو اول $= \frac{1}{n-1}$ است.

$$\underbrace{o \; - - - \; o \; x \; o \; - - \; o}_{}\; x \qquad (n-1)$$

برای محاسبه $X+Y=n$ ، n اُمی با احتمال P حتماً رو و بین $n-1$ تای قبلی روی اول را انتخاب می‌کنیم به احتمال P رو و بقیه $(P-1)^{n-2}$ پیش می‌آیند.

سه متغیر تصادفی Y_1، Y_2 و Y_3 از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ پیروی می‌کنند. اگر این سه متغیر هر کدام طول یک چوپ را نشان دهند، احتمال ساخت مثلث با این سه قطعه چوب را بیابید.

حل. متغیر M ، ماکزیمم سه متغیر فوق؛ و Y_1 و Y_2 دو متغیر دیگر هستند. برای تشکیل مثلث کافیست $M \leqslant Y_1 + Y_2$ باشد. بنابراین،

$$P(M \leqslant Y_1 + Y_2) = \int_0^1 \int_0^m f_M(m) f_{Y_1|M}(y_1|m) P(Y_2 < m - y_1|m, y_1) dy_1 dm$$

$$\rightarrow P(M \leqslant Y_1 + Y_2) = \int_0^1 \int_0^m m^3 \frac{1}{m}(m - y_1) dy_1 dm$$

سه متغیر تصادفی U_1، U_2 و U_3 از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ پیروی می‌کنند. متغیرهای L و M به ترتیب مقادیر مینیمم و ماکزیمم این سه متغیر هستند.

الف

تابع توزیع تجمعی و چگالی احتمال L را بیابید.

ب

تابع توزیع تجمعی توام و چگالی احتمال توام L و M را بیابید.

$$F_L(L < l) = ۱ - F_L(L \geqslant l) = ۱ - (۱ - l)^۳$$

در نتیجه، داریم:

$$f_L(l) = ۳(۱ - l)^۲$$

پیشامد $L \geqslant l, M \leqslant m$ معادل با این است که هر سه متغیر در بازه l تا m قرار گیرند.
همچنین میدانیم:

$$P(M < m) = P(M < m, L < l) + P(M < m, L \geqslant l)$$

حال با توجه به اینکه $P(M < m) = m^۳$ است، توزیع CDF دو متغیر مذکور به شکل زیر است.

$$F_{M,L}(m, l) = m^۳ - (m - l)^۳$$

در نتیجه:

$$f_{M,L}(m, l) = ۶(m - l)$$

الف

فرض کنید در حال تست کردن ۳ لامپ از شرکت های مختلف هستیم. تاریخ انقضای هر کدام از لامپ های $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ متغیر تصادفی های نمایی با امید ریاضی به ترتیب $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۸}$ می‌باشد (بر حسب سال). با فرض اینکه تاریخ انقضای لامپ ها مستقل از هم باشند، اگر T متغیر تصادفی مدت زمانی باشد که هر ۳ لامپ روشن هستند تابع چگالی احتمال آن را بیابید.

ب

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ می‌باشد. c را به گونه ای بیابید که $E_X[\mid X-c \mid]$ کمینه شود.

راه حل بخش اول

از آنجا که متغیر تصادفی های P_1، P_2 و P_3 مستقل و همگی دارای توزیع نمایی هستند بنابراین خواهیم داشت:

$$P_1 = exp(2),\ P_2 = exp(4),\ P_3 = exp(8)$$

متغیر تصادفی T مدت زمانی است که هر ۳ لامپ روشن هستند بنابراین میتوان T را بر اساس P_1 ، P_2 و P_3 نوشت .

$$T = min(P_1, P_2, P_3)$$

حال برای محاسبه تابع توزیع چگالی از تابع توزیع تجمعی کمک میگیریم که با تعاریف بالا خواهیم داشت:

$$P(T \geqslant t) = P(P_1 \geqslant t, P_2 \geqslant t, P_3 \geqslant t)$$

$$P(T \geqslant t) = P(P_1 \geqslant t)P(P_2 \geqslant t)P(P_3 \geqslant t)$$

به صورت کلی برای توزیع توانی داریم:

$$P(X \geqslant x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F_X(x) = 1 - \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda x}$$

در نتیجه $P(T \geqslant t) = e^{-2t}e^{-4t}e^{-8t} = e^{-14t}$ و $F_T(t) = 1 - e^{-14t}$ و تابع توزیع چگالی یعنی همان $f_T(t)$ برابر می شود با:

$$f_T(t) = \frac{\partial F}{\partial t} = 14e^{-14t}.$$

راه حل بخش دوم

$$E[|X-c|] = \int_{-\infty}^{\infty} |X-c| \, f_X(x)\,dx = \int_{c}^{\infty} (X-c) f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{c} (c-X) f_X(x)\,dx = g(c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial c} = ۰ \implies \int_{c}^{\infty} (۱) f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{c} (۱) f(X)\,dx = ۰ \implies \int_{c}^{\infty} f_X(x) = \int_{-\infty}^{c} f_X(x)$$

$$\implies c = median(f(X))$$

الف

متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید به طوریکه $f_X(x) = kx^۲$ و $۰ \leqslant x \leqslant ۳$ و همچنین متغیر تصادفی Y به این صورت تعریف شده است $Y = X^۳$. حال مقادیر k ، $var(Y)$ را بیابید

ب

اگر برای متغیر تصادفی های مستقل X و Y داشته باشیم: $f_X(x) = Exp(x,۱)$ و $f_Y(y) = Exp(y,۱)$ تابع چگالی احتمال $\frac{U}{V}$ را محاسبه کنید به طوریکه $U = min(X,Y)$ و $V = max(X,Y)$

راهنمایی : $\int_x e^{-ax}\, dx = -\frac{(ax+۱)e^{-ax}}{a^۲}$

راه حل بخش اول

برای اینکه $kx^۲$ تابع چگالی احتمال باشد باید داشته باشیم:

$$\int_۰^۳ f_X(x)\,dx = ۱ \implies \int_۰^۳ kx^۲\,dx = ۱ \implies ۹k = ۱ \implies k = \frac{۱}{۹}$$

$$E[Y] = E[X^۳] = \int_۰^۳ x^۳ f_X(x)\,dx = \frac{۱}{۹}\int_۰^۳ x^۵\,dx = \frac{۲۷}{۲}$$

$$E[Y^۲] = E[X^۶] = \int_۰^۳ x^۶ f_X(x)\,dx = \frac{۱}{۹}\int_۰^۳ x^۸\,dx = ۳۵$$

$$var(Y) = E[Y^۲] - E[Y]^۲ = \frac{۲۴۳}{۴}$$

ب

راه حل بخش دوم
$1 \leqslant z \leqslant 0$, $Z = \frac{U}{V}$ قرار میدهیم . حال ابتدا تابع توزیع تجمعی $F_Z(z)$ را حساب میکنیم.

$$F_Z(z) = P(\frac{U}{V} \leqslant z) \cap P((X \leqslant Y) \cup (X > Y))$$

در تساوی بالا پرانتزی که با تعریف توزیع تجمعی اشتراک گرفته شده است شرط داشتن مینیمم برای توزیع های X و Y است . حال با استفاده از خاصیت پخشی داریم :

$$F_Z(z) = (P(\frac{U}{V} \leqslant z) \cap (X \leqslant Y)) \cup (P(\frac{U}{V} \leqslant z) \cap (X > Y))$$

سمت راست تساوی بالا را دقت کنید که در آن دو عبارت با هم اجتماع شده اند ، اگر به هرکدام از این دو عبارت دقت کنیم درمیابیم که اگر شرط های $X \leqslant Y$ و $X > Y$ بخواهند برقرار باشند ، میتوان U و V را با X و Y جاگذاری کرد . بنابراین خواهیم داشت:

$$F_Z(z) = P(\frac{X}{Y} \leqslant z, X \leqslant Y) + P(\frac{Y}{X} \leqslant z, X > Y)$$

$$F_Z(z) = P(X \leqslant Yz, X \leqslant Y) + P(Y \leqslant Xz, X > Y)$$

$$F_Z(z) = \int_{۰}^{\infty} \int_{۰}^{yz} f_{XY}(x,y)\, dxdy + \int_{۰}^{\infty} \int_{۰}^{xz} f_{XY}(x,y)\, dydx$$

در این جا از دو طرف نسبت به z مشتق میگیریم و داریم:

$$f_Z(z) = \int_{۰}^{\infty} y f_{XY}(x,y) dy + \int_{۰}^{\infty} x f_{XY}(x,y)\, dx$$

با توجه به استقلال دو متغیر X و Y و توزیع آنها و محاسبه انتگرال فوق خواهیم داشت:

$$\Longrightarrow \quad f_Z(z) = \int_{۰}^{\infty} y e^{-(yz+y)} dy + \int_{۰}^{\infty} x e^{-(xz+x)} dx$$

با توجه به راهنمایی موجود در سوال داریم:

$$\int_x e^{-ax}\, dx = -\frac{(ax+۱)e^{-ax}}{a^{۲}}$$

$$\Longrightarrow \quad f_Z z = ۲\frac{۱}{(z+۱)^{۲}}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{۲}{(۱+z)^{۲}} & ۰ \leqslant z \leqslant ۱ \\ ۰ & ow \end{cases}$$

یک لاک‌پشت دریایی به تعداد $N \sim Pois(\lambda)$ در شن‌های ساحل تخم می‌گذارد. از هر تخم لاک‌پشت، به طور مستقل، با احتمال p بچه‌لاک‌پشتی متولد می‌شود. تعداد بچه‌لاک‌پشت‌هایی که متولد می‌شوند را X در نظر بگیرید، پس $X|N \sim Bin(N,p)$ (این یعنی به شرط دانستن مقدار N، متغیر تصادفی X از توزیع برنولی با پارامتری برابر با مقدار N پیروی می‌کند).
همین‌طور وقتی یک بچه‌لاک‌پشت سر از تخم بیرون می‌آورد، به طور غریزی شیب سرازیری ساحل و انعکاس نور ماه و ستارگان بر روی آب را دنبال می‌کند تا به دریا برسد. مدت زمانی که طول می‌کشد تا یک بچه‌لاک‌پشت حرکت کند تا به دریا برسد را $T \sim Exp(\mu)$ در نظر بگیرید.

الف

هم‌بستگی بین X و N را بیابید. (پاسخ شما باید تابعی از p باشد و λ حذف خواهد شد)

اگر دو بچه‌لاک‌پشت به طور هم‌زمان سر از تخم بیرون بیاورند، زمان رسیدن آنها به ساحل را $T_۱$ و $T_۲$ در نظر بگیرید. حاصل $Cov(min(T_۱,T_۲), max(T_۱,T_۲))$ را به دست آورید. آیا درست است بگوییم $Cov(min(T_۱,T_۲), max(T_۱,T_۲)) = Cov(T_۱,T_۲)$؟

تعداد تخم لاکپشت‌هایی را که منجر به تولد بچه لاکپشت نمی‌شوند، Y در نظر بگیرید. در اینجا در کمال تعجب می‌فهمیم که X و Y از هم مستقل‌اند!!! از طرفی با نگاه به رابطه‌ی $X+Y=N$ به نظر می‌آید که این دو متغیر تصادفی شدیداً به هم وابسته باشند، ولی این زمانی درست است که

ما مقدار N را بدانیم.

$$Pr(X=i,Y=j) = Pr(X=i,Y=j|N=i+j)Pr(N=i+j)$$

$$= \frac{(i+j)!}{i!j!}p^i q^j \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = \frac{(\lambda p)^i}{i!}\frac{(\lambda q)^j}{j!}e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^i}{i!}\frac{(\lambda q)^j}{j!}e^{-(p+q)\lambda}$$

$$= \left(e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\right)\left(e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^j}{j!}\right) = Pr(X=i)Pr(Y=j)$$

می‌بینیم که $X \sim Pois(\lambda p)$ و $Y \sim Pois(\lambda q)$ و این دو از هم مستقل هستند. اما ناراحت نباشید؛ این فقط یک مورد خاص برای توزیع پوآسون بود.

$$Cov(N,X) = Cov(X+Y,X) = Cov(X,X) + Cov(Y,X) = Var(X) + ۰ = \lambda p$$

$$Corr(N,X) = \frac{\lambda p}{SD(N)SD(X)} = \frac{\lambda p}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda p}} = \sqrt{p}$$

$$T_۱, T_۲ \sim Exp(\mu) \longrightarrow E[T_۱] = E[T_۲] = \frac{۱}{\mu}$$

$$E[min(T_۱, T_۲)max(T_۱, T_۲)] = E[T_۱T_۲] = E[T_۱]E[T_۲] = \frac{۱}{\mu^۲}$$

$$min(T_۱, T_۲) \sim Exp(\mu + \mu) \longrightarrow E[min(T_۱, T_۲)] = \frac{۱}{۲\mu}$$

$$min(T_۱, T_۲)+max(T_۱, T_۲) = T_۱+T_۲ \longrightarrow E[min(T_۱, T_۲)]+E[max(T_۱, T_۲)] = E[T_۱]+E[T_۲]$$

$$\frac{۱}{۲\mu} + E[max(T_۱, T_۲)] = \frac{۱}{\mu} + \frac{۱}{\mu} = \frac{۲}{\mu} \longrightarrow E[max(T_۱, T_۲)] = \frac{۳}{۲\mu}$$

$$Cov(min(T_۱, T_۲), max(T_۱, T_۲)) = \frac{۱}{\mu^۲} - \frac{۱}{۲\mu}\frac{۳}{۲\mu} = \frac{۱}{۴\mu^۲}$$

دیدیم که $Cov(min(T_۱, T_۲), max(T_۱, T_۲))$ با $Cov(T_۱, T_۲)$ برابر نبود زیرا حاصل کوواریانس $T_۱$ و $T_۲$ برابر با صفر است ($T_۱$ و $T_۲$ از هم مستقل‌اند). ◁

آقای توالی شکسته‌بند محل است ک به دلیل مهارتش در بهبود شکستگی ساق پا به او ساقی می‌گویند. اما موفقیت اتفاقی نیست! او برای بهبود کامل شکستگی ساق پا یک فرمول بسیار پیچیده دارد.
آقای توالی برای اینکه بتواند کار خود را به خوبی انجام دهد باید زرده‌ی تخم ۵ گونه پرنده را با

قیر آسفالت قاطی کند و به خورد مریض بدهد. اگر حتی یکی از ۵ نوع تخم پرنده در معجون وجود نداشته باشد، مریض دچار دل‌شکستگی می‌شود.
تخم ۵ گونه پرنده را نمی‌توان از روی ظاهر تشخیص داد و خریدن هر تخم پرنده و تشخیص نوع آن یک ساعت طول می‌کشد.

الف

اگر آقای ساقی هربار مجبور باشد بطور اتفاقی یکی از ۵ نوع تخم پرنده را خریداری کند، به او کمک کنید تا امیدریاضی زمان لازم برای جمع آوری هر ۵ نوع را به‌دست آورد. .

ب

اگر آقای توالی بخواهد ۲۴ ساعت تمام نخوابد و هر ساعت یک تخم پرنده را امتحان کند، به طور میانگین چند نوع متمایز تخم پرنده به دست خواهد آورد؟

حل. توالی بررسی تخم‌ها را با هر وقتی که تخم جدیدی یافت می‌شود جدا می‌کنیم و هر بار پس از دیده شدن نوع جدید، متغیر تصادفی جدیدی تعریف می‌کنیم. از خطی بودن امید ریاضی بهره می‌گیریم.
در امتحان اول حتما نوع جدیدی تخم پرنده خواهیم داشت.

$$X = X_۱ + X_۲ + X_۳ ... + X_۵$$

$$E[X] = E[X_۱ + ... + X_۵] = \sum_{i=۱}^{۵} E[X_i]$$

$$E[X_۱] = ۱$$

$$E[X_۲] = N \times \frac{۱}{N - ۱} = \frac{۵}{۴}$$

$$E[X_i] = \frac{N}{N - (i - ۱)} ... E[X] = N \sum_{i=۱}^{۵} \frac{۱}{i}$$

$$E[X] = ۵ \times (۱ + \frac{۱}{۲} + ... + \frac{۱}{۵})$$

$$E[X] = \frac{۱۳۷}{۱۲}$$

X_i را یک می‌گیریم وقتی در n امتحان (۲۴ امتحان) تخم نوع i دیده‌شده‌باشد.

$$P(X_i = ۰) = (۱ - p)^n$$
$$P(X_i = ۱) = ۱ - (۱ - p)^n$$
$$p = ۱/۱۰$$
$$P(X - i = ۱) = ۱ - (\frac{۹}{۱۰})^{۲۴}) = ۰/۹۲$$
$$E[X] = \sum_{i=۱}^{۱۰} E[X_i]$$
$$E[X] = \sum_{i=۱}^{۱۰} ۱ \times P(X_i = ۱) + \sum_{i=۱}^{۱۰} ۰ \times P(X_i = ۰)$$
$$E[X] = \sum_{i=۱}^{۱۰} ۱ \times P(X_i = ۱)$$
$$E[X] = ۱۰ - \sum_{i=۱}^{۱۰} (۱ - \frac{۱}{۱۰})^{۲۴}$$
$$E[X] = ۱۰ - ۱۰۰/۹^{۲۴} E[X] = ۱۰ - ۰/۸ \approx ۹/۲$$

به دلیل آتش‌سوزی‌های بی‌سابقه در جنگل آمازون، میمون‌ها قصد مهاجرت هرچه سریع‌تر به سوی آفریقا را دارند... اما مشکل آنجاست که فقط یک قایق دارند. برای اینکه حق هیچ میمونی ضایع نشود، رئیس قبیله تصمیم می‌گیرد همه را به صف بایستاند. او اسم هر میمون را درون نارگیلی می‌نویسد و سپس همه‌ی نارگیل‌ها را پشت یک وانت می‌اندازد. میمون‌ها به ترتیب از اول صف یکی یکی نارگیل برمی‌دارند و نام داخل آن را می‌خوانند. میمونی که نامش خوانده شود سوار قایق شده و از شر آتش رهایی می‌یابد!

الف

به طور میانگین انتظار می‌رود اگر ۱۰۰ میمون داشته باشیم، چند میمون اسم خودشان را درون نارگیلی که برمی‌دارند ببینند؟ این رابطه را برای n میمون نیز بدست آورید.

برای n میمون امید ریاضی جفت میمون‌هایی که هرکدام اسم دیگری را برمی‌دارد محاسبه کنید.

میمون‌ها را در صف به ترتیب با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم و حاصل نارگیل‌برداری میمون iم را a_i می‌نامیم. اگر b_i را $max\{a_1, \cdots, a_i\}$ تعریف کنیم، امید ریاضی تعداد اعضای منحصربه‌فرد $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ را به‌دست آورید.

I_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر میمون } i \text{ ام نارگیل خود را بردارد} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

حال امید ریاضی مجموع I_i ها را حساب می‌کنیم:

$$E[\sum_{i=1}^{n} I_i] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

همانطور که از رابطه مشخص است، تعداد میمون‌هایی که اسم خود را برمی‌دارند مستقل از تعداد کل آنها و برابر یک است.

ب

I_{ij} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر میمون } i \text{ ام و میمون } j \text{ ام نارگیل یکدیگر را بردارند} \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

حال امید ریاضی مجموع I_{ij} ها را حساب می‌کنیم::

$$E[\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=i}^{n} I_{ij}] = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=i}^{n} E[I_{ij}] = \frac{n(n-۱)}{۲} \times \frac{۱}{n(n-۱)} = \frac{۱}{۲}$$

دوباره جواب نهایی همیشه برابر نیم بوده و به تعداد وابستگی ندارد.

ج

برای هر k تای اول ترتیب متغیر نشانگر I_k را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$I_k = \begin{cases} ۱ & if\ max_{۱\leqslant i\leqslant k-۱}(a_۱, a_۲, \ldots, a_i) \neq max_{۱\leqslant i\leqslant k}(a_۱, a_۲, \ldots, a_i) \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

بدین معنی که نشانگر هنگامی یک می‌شود که عضو k ام ترتیب، بزرگترین عضو تا آنجا باشد که احتمال آن برابر $\frac{۱}{k}$ است.

$$E[\sum_{k=۱}^{n} I_k] = \sum_{k=۱}^{n} E[I_k] = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k}$$

توزیع توأم متغیر X و Y به صورت زیر است:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} a(۳x+y), & ۰ < x,y < ۱ \\ ۰, & \text{o.w.} \end{cases} \qquad (۱)$$

الف

ثابت a را بدست آورید.

ب

احتمال $P(X < ۰/۵ | Y > ۰/۵)$ را محاسبه کنید.

ج

$E[X|Y > ۰/۵]$ و $Var(X|Y = ۰/۵)$ را محاسبه کنید.

می‌دانیم مجموع احتمال‌ها در فضای موجود باید یک بشود. از انتگرال کمک می‌گیریم:

$$\iint_{XY\in[۰,۱]} a(۳x+y) = ۱$$

پس از محاسبه، a برابر با $\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید.

ب

$$P(x < ۰/۵ | y > ۰/۵) = \frac{P(x < ۰/۵, y > ۰/۵)}{P(y < ۰/۵)}$$

$$P(x < ۰/۵ | y > ۰/۵) = \frac{\int_{۰}^{۰/۵}\int_{۰/۵}^{۱} f(x,y)dxdy}{\int_{۰}^{۰/۵}\int_{۰/۵}^{۱} f(x,y)dxdy} = \frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۷}{۱۶}} = \frac{۲}{۷}$$

در ابتدا $f_Y(y)$ را ب دست می‌آوریم زیرا در ادامه از آن در هر دو قسمت استفاده خواهیم کرد.

$$f_Y(y) = int ۰ ۱ \frac{۱}{۲}(۳x + y)dx$$
$$f_Y(y) = \frac{۳}{۴} + y$$

$$E(X|Y > ۰/۵) = \int_X xf(x|y > ۰/۵)$$
$$= \int_X x\frac{f(x, y > ۰/۵)}{f(y > ۰/۵)}$$
$$= \int_۰^۱ x\frac{\int_{۰/۵} ۱ f(x, y)dy}{\int ۰/۵ ۱ f(y)}$$
$$= \frac{۱۹}{۶}$$

$$Var(X^۲|Y = ۰/۵) = E[X^۲|Y = ۰/۵] - E[X|Y = ۰/۵]$$
$$= \int_۰^۱ x^۲\frac{f_{XY}(x, ۰/۵)}{f_Y(۰/۵)} - \int_۰^۱ x\frac{f_{XY}(x, ۰/۵)}{f_Y(۰/۵)} = \frac{۵۲}{۱۲۰}$$

▷

سه متغیر تصادفی $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ از توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda_i}$ پیروی می‌کنند.

الف

$E[X_۱ + X_۲ + X_۳ | X_۱ > ۱, X_۲ > ۲, X_۳ > ۳]$ را بر حسب λ_iها بیابید.

ثابت کنید $Pr(X_۱ < X_۲) = \frac{\lambda_۱}{\lambda_۱ + \lambda_۲}$.

ج

$Pr(X_۱ = min(X_۱, X_۲, X_۳))$ را بیابید.

راهنمایی: سعی کنید احتمال خواسته‌شده را با استفاده از $X_۱$ و $min(X_۲, X_۳)$ بیان کنید. توزیع کمینه‌ی چند متغیر نمایی را به یاد بیاورید و از نتایج قسمت ب استفاده کنید.

با استفاده از خواص خطی بودن امید ریاضی، بی‌حافظه بودن و مستقل بودن متغیر تصادفی‌ها از هم، داریم:

$$E(X_۱|X_۱ > ۱) + E(X_۲|X_۲ > ۲) + E(X_۳|X_۳ > ۳) = \frac{۱}{\lambda_۱} + \frac{۱}{\lambda_۲} + \frac{۱}{\lambda_۳} + ۶$$

ب

از آنجایی که $X_۱$ و $X_۲$ از هم مستقل هستند، چگالی احتمال توأم آنها برابر است با:

$$Pr(X_۱ = a, X_۲ = b) = \lambda_۱\lambda_۲ e^{-(\lambda_۱ a + \lambda_۲ b)}$$

چگالی احتمال توأم روی اعداد حقیقی مثبت تعریف شده و باید روی قسمتی انتگرال بگیریم که $X_۲$ در $[۰, \infty]$ و $X_۱$ در $[۰, X_۲]$ مقدار میگیرند.

$$\begin{aligned}
Pr(X_۱ < X_۲) &= \int_۰^\infty \int_۰^b Pr(X_۱ = a, X_۲ = b) da db \\
&= \int_۰^\infty \lambda_۲ e^{-\lambda_۲ b} \int_۰^b \lambda_۱ e^{-\lambda_۱ a} da db \\
&= \int_۰^\infty \lambda_۲ e^{-\lambda_۲ b}(۱ - e^{-\lambda_۱ b}) db \\
&= \int_۰^\infty \lambda_۲ e^{-\lambda_۲ b} db - \int_۰^\infty \lambda_۲ e^{-(\lambda_۱+\lambda_۲) b} db \\
&= ۱ - \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱ + \lambda_۲} = \frac{\lambda_۱}{\lambda_۱ + \lambda_۲}
\end{aligned}$$

ج

احتمال خواسته شده همان $Pr(X_1 \leqslant min(X_2, X_3))$ است. همینطور می‌دانیم $min(X_2, X_3)$ از X_1 مستقل است و توزیع آن $Exp(\lambda_2 + \lambda_3)$ می‌باشد. پس:

$$Pr\big(X_1 = min(X_1, X_2, X_3)\big) = Pr\big(X_1 \leqslant min(X_2, X_3)\big) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$