آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۱

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

مسئله‌ی ۱.

معادله زیر چند راه‌حل یکتا دارد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$

$$x_1 \in \{1, 2, 3 \dots\} \quad , \quad x_2 \in \{2, 3, 4 \dots\} \quad , \quad x_3, x_4 \in \{0, 1, 2, 3 \dots\}$$

حل.

لم ۱. تعداد جواب‌های معادله زیر برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n \quad a_1, a_2, \cdots, a_n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

اثبات. فرض کنید n توپ در یک ردیف داریم. حال مسئله را معادل با این می‌کنیم که بین این n توپ، $k-1$ چوبخط قرار دهیم و آن‌ها را به k دسته تقسیم کنیم که جمع اعضای این دسته‌ها برابر با n که تعداد کل توپ‌ها است می‌شود. دقت کنید که در این معادل‌سازی تعداد توپ‌های دسته i ام را برابر با a_i می‌گیریم. تعداد راه‌های انجام این کار نیز مشخصا برابر با انتخاب $k-1$ جایگاه از بین $n-1$ جایگاهی است که بین توپ‌ها داریم. □

حال به حل مسئله می‌پردازیم. ابتدا متغیرهای y_2, y_3, y_4 را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$y_2 = x_2 - 1, \quad y_3 = x_3 + 1, \quad y_4 = x_4 + 1$$

درنتیجه داریم:

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 101, \quad x_1, y_2, y_3, y_4 \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

در نتیجه طبق لم ۱ تعداد جواب‌های معادله بدست‌آمده برابر است با: $\binom{100}{3}$ ▷

مسئله‌ی ۲.

در جعبه‌ای $k+۱$ سکه موجود است. برای مقادیر $i=۰,\ldots,k$ احتمال شیر آمدن در پرتاب سکه i برابر با $\frac{i}{k}$ است. از جعبه یک سکه را به صورت تصادفی انتخاب کرده و آن را n بار پرتاب میکنیم. اگر نتیجه تمام n پرتاب شیر باشد چقدر احتمال دارد که سکه‌ای که انتخاب کردیم $k+۱$ اُمین سکه باشد؟

حل.

فرض کنید متغیر تصادفی X برابر با اندیس سکه انتخاب‌شده باشد. همچنین پیشامد n بار شیر آمدن سکه انتخاب شده را نیز A می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\mathbb{P}(X=k+۱|A)=\frac{\mathbb{P}(X=k+۱,A)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\frac{۱}{k+۱}\times ۱}{\mathbb{P}(A)}$$

برای بدست آوردن $\mathbb{P}(A)$ هم از احتمال کل استفاده می‌کنیم:

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=۰}^{k}\mathbb{P}(A|X=i)\mathbb{P}(x=i)=\sum_{i=۰}^{k}\frac{۱}{k+۱}(\frac{i}{k})^n$$

این نتیجه را جایگذاری می‌کنیم:

$$\mathbb{P}(X=k+۱|A)=\frac{۱}{\sum_{i=۰}^{k}(\frac{i}{k})^n}=\frac{k^n}{\sum_{i=۰}^{k}i^n}$$

⊳