



نکات مهم

- بخش تئوری را در قالب یک فایل pdf با اسم $HW\#_ [STD-Num]$ آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز چهارشنبه ۱۸ آبان می باشد.
- سوالات ستاره دار، غیر تحویلی هستند و برای تمرین بیشتر قرار داده شده اند.
- هر کدام از تمرینات بارم برابری دارند و در هر سری تمرین بخش عملی ۶۰ درصد نمره و بخش عملی ۴۰ درصد نمره خواهد داشت.

مسئله ۱. مسابقه رمزنگاری

علی در مسابقه رمزنگاری شرکت کرده است. مسابقه سه مرحله دارد که باید حداقل از دو مرحله عبور کند. اگر علی رمزنگاری توانا باشد احتمال شکست خوردن در هر مرحله $۰/۳$ و در غیر این صورت احتمال شکست خوردن به $۰/۸$ افزایش می یابد. احتمال اینکه علی رمزنگاری توانا باشد $۰/۴$ است. احتمال شرطی اینکه در مرحله سوم شکست بخورد به شرط هر یک از حالات زیر حساب کنید.

الف

در مرحله اول و دوم شکست خورده است.

ب

در یکی از مراحل اول و دوم شکست خورده و دیگری را با موفقیت پشت سر گذاشته است.

ج

هر دو مرحله اول را با موفقیت پشت سر گذاشته است.

مسئله ۲. زلف پریشان

فرض کنید n و r دو عدد نامنفی باشند به طوری که $۰ < r < n$. حال $f(n, r)$ برابر با تعداد جایگشت های S_n است به طوری که دقیقاً r نقطه در جای خودشان قرار گرفته باشند. ثابت کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n, r)}{n!} = \frac{1}{e r!}$$

مسئله‌ی ۳. کمی خلاقیت

الف

دو متحرک از نقطه‌ی $x = 0$ به حرکت می‌کنند. دو متحرک با هم گام برمی‌دارند و حرکت آن‌ها از یکدیگر مستقل است. (در هنگام برخورد از روی هم رد می‌شوند) و هر یک در هر گام به احتمال یکسان به چپ یا راست حرکت می‌کند. احتمال اینکه بعد از N قدم این دو متحرک در محل یکسانی باشند چقدر است؟

ب

دو متحرک در صفحه‌ی دو بعدی از مبدا مختصات شروع به حرکت می‌کنند. دو متحرک هم زمان گام بر می‌دارند و در هر گام به اندازه‌ی یک واحد با احتمال یکسان به بالا، پایین، چپ یا راست حرکت می‌کنند. احتمال اینکه پس از N گام دو متحرک در محل یکسانی باشند چقدر است؟

مسئله‌ی ۴. پیشکسوتان پاپ

ستار، گوگوش و معین در یک بازی قرعه‌کشی شرکت می‌کنند. هر یک از آنها حروف نام خود را (با احتساب تکرار) روی برگه‌های مجزا می‌نویسد و سپس همه‌ی برگه‌ها را درون یک کیسه می‌ریزند. قرار است یک نفر در هر مرحله یک برگه از کیسه خارج کند و کنار بگذارد. هر کسی که برگه‌های شامل حروف اسمش پیش از بقیه از کیسه بیرون بیاید، برنده است. مثلاً اگر حروف خارج شده به ترتیب س، م، ش، ن، گ، و، ع، و، ی الی آخر باشد، برنده معین است. احتمال برنده شدن ستار را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۵. پیوستگی احتمال

الف

در هر دنباله کاهشی یا افزایشی از پیش آمدها $(E_n, n > 1)$ ، ثابت کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n)$$

ب

فرض کنید C_1, C_2, \dots دنباله‌ای از پیش آمدها باشند به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(C_n) = 0$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Pr(C_{n+1})}{Pr(C_n)} < \infty$$

باشد، نشان دهید:

$$Pr(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k) = 0$$

مسئله ۶. مثلث شیطانی

فرض کنید $\frac{n(n+1)}{2}$ عدد متفاوت به صورت زیر در یک مثلث قرار گرفته اند:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & * & & & \\ & & * & & * & & \\ & * & & * & & * & \\ & & * & & * & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \\ * & * & * & & * & * & * \end{array}$$

اگر M_k برابر با بزرگ ترین عدد در سطر k باشد، احتمال اینکه $M_1 < M_2 < \dots < M_n$ باشد را پیدا کنید.

مسئله ۷. کدهای هافمن طور

الف

فرض کنید F مجموعه ای متناهی از رشته های دودویی با طول انتهایی باشد و هیچ دو عضوی از F پیشوند دیگری نباشد. حال اگر N_i رشته هایی با طول i باشند ثابت کنید:

$$\sum_i \frac{N_i}{2^i} \leq 1$$

ب*

فرض کنید F مجموعه ای متناهی از رشته های دودویی با طول انتهایی باشد. همچنین در نظر بگیرید که اگر دو شیوهی متمایز الحاق کردن جفت رشته ها، حاصلش یک رشته ی متمایز است. حال اگر N_i رشته هایی با طول i باشند ثابت کنید:

$$\sum_i \frac{N_i}{2^i} \leq 1$$

مسئله ۸. میمون خوش شانس*

یک میمون پشت یک ماشین تایپ می نشیند و به طور تصادفی هر ثانیه یک کلید را (احتمال فشار دادن هر کلید با گذشت زمان تغییر نمی کند) فشار می دهد. نشان دهید بالاخره بعد از مدتی در میان نوشته های میمون، نمایشنامه هملت ظاهر می شود!

(موفق باشید :)