



مسئله‌ی ۱. گربه‌یابی

مهدی و محمدآقا تصمیم گرفتند که یک بازی جالب اختراع کنند. این بازی به این صورت است که آنها تعداد گربه‌هایی که از جلوی در دانشکده در یک زمان مشخص رد می‌شوند را یادداشت می‌کنند. فرض کنید این مقدار یک متغیر تصادفی پواسون با نرخ λ باشد. برنده بازی به این صورت مشخص می‌شود که محمدآقا باید پیش‌بینی کند تعداد گربه‌ها فرد است یا زوج؛ در صورتی که درست بگوید برنده می‌شود و در غیر اینصورت مهدی برنده بازی است. محمدآقا که درس احتمال را به خوبی یاد نگرفته است از شما کمک می‌خواهد تا به او بگویید چه انتخابی داشته باشد تا با احتمال بیشتری برنده شود.

حل.

برای یک متغیر تصادفی پواسون با نرخ λ داریم:

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

حال داریم:

$$\mathbb{P}[X \text{ is even}] = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{(2i)}}{(2i)!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(2i)}}{(2i)!}$$

کافی است سیگما را ساده‌تر کنیم. همینطور دقت کنید که داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = e^a$$

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(2i)}}{(2i)!} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$$

پس با جایگذاری این مقدار بدست می‌آید:

$$\mathbb{P}[X \text{ is even}] = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda})$$

➤ که این مقدار از $\frac{1}{2}$ بیشتر است. پس محمدآقا شانس بیشتری دارد اگر مقدار زوج را انتخاب کند.

مسئله‌ی ۲. کلید من کجاست؟

N نفر در یک مهمانی حضور دارند. در ابتدا هر شخص کلید خود را داخل یک جعبه می‌اندازد. پس از پایان مهمانی، هر شخص هنگام خروج یک کلید را به صورت تصادفی برمی‌دارد. امید ریاضی تعداد افرادی که کلید خودشان را برمی‌دارند محاسبه کنید.

حل.

X را تعداد افرادی که کلید خود را برداشته‌اند در نظر می‌گیریم. حال X_i را برابر با ۱ در نظر می‌گیریم اگر نفر i کلید خودش را در انتها برداشته باشد و در غیر این صورت صفر. داریم:

$$X = \sum_i X_i \quad 1 \leq i \leq N$$

حال هر کدام از X_i را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم. اگر کلید هارا در یک جعبه بریزیم و به صورت تصادفی کلیدها را پخش کنیم، $\frac{1}{N}$ احتمال دارید که نفر i کلید خودش را بردارد. بنابراین:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \frac{1}{N} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{N} \times 1 = \frac{1}{N}$$

حال از این مقدار استفاده می‌کنیم تا امید ریاضی اصلی را حساب کنیم.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_i X_i\right] = N \times \mathbb{E}[X_i] = N \times \frac{1}{N} = 1$$

▷

موفق باشید (:)