Subject: ____________

WSS @ CSE 2017

Date: / /

۹۹۱۰۲۲۰۷

علی روز نگاری توأم باشد ← B

علی در مرحله i شکست بخورد ← A_i

$P(B) = 0.4$ $\qquad P(A_i \mid B) = 0.3$

$P(\bar{B}) = 0.6$ $\qquad P(A_i \mid \bar{B}) = 0.8$

الف)

$$P(A_3 \mid A_2 A_1) = \underbrace{P(A_3 \mid B A_2 A_1)}_{P(A_3 \mid B)} P(B \mid A_2 A_1) + \underbrace{P(A_3 \mid \bar{B} A_2 A_1)}_{P(A_3 \mid \bar{B})} P(\bar{B} \mid A_2 A_1)$$

$$P(B \mid A_2 A_1) = \frac{(0.4)(0.3)(0.3)}{(0.4)(0.3)^2 + (0.8)^2(0.6)} = \frac{3}{35} \qquad P(\bar{B} \mid A_2 A_1) = \frac{(0.8)^2\, 0.6}{(0.4)(0.3)^2 + (0.8)^2(0.6)} = \frac{32}{35}$$

$$\Rightarrow P(A_3 \mid A_2 A_1) = 0.3 \times \frac{3}{35} + 0.8 \times \frac{32}{35} = \frac{26.5}{35} \simeq 0.75$$

ب)

$$P(A_3 \mid A_1 \Delta A_2) = P(A_3 \mid B \cap (A_1 \Delta A_2))\, P(B \mid A_1 \Delta A_2) + P(A_3 \mid \bar{B} \cap (A_1 \Delta A_2))\, P(\bar{B} \mid A_1 \Delta A_2)$$

$$\Rightarrow P(A_3 \mid A_1 \Delta A_2) = \underbrace{P(A_3 \mid B)}_{0.3} P(B \mid A_1 \Delta A_2) + \underbrace{P(A_3 \mid \bar{B})}_{0.8} P(\bar{B} \mid A_1 \Delta A_2)$$

$$P(B \mid A_1 \Delta A_2) = \frac{P(B)\; P(A_1 \Delta A_2 \mid B)}{P(B)\; P(A_1 \Delta A_2 \mid B) + P(\bar{B})\; P(A_1 \Delta A_2 \mid \bar{B})}$$

$$P(A_1 \Delta A_2 \mid B) = P(A_1 \cap \bar{A}_2 \mid B) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \mid B)$$

$$P(A_1 \mid B) * P(\bar{A}_2 \mid B) \qquad P(\bar{A}_1 \mid B) * P(A_2 \mid B)$$

$$\Rightarrow P(A_1 \Delta A_2 \mid B) = 0.3 \times 0.7 + 0.7 \times 0.3 = 0.42 \Rightarrow P(B \mid A_1 \Delta A_2) = \frac{0.4\,(0.42)}{(0.4)\,0.42 + 0.6\,(0.32)} = \frac{7}{15}$$

$$P(A_1 \Delta A_2 \mid \bar{B}) = 0.2 \times 0.8 + 0.8 \times 0.2 = 0.32 \Rightarrow P(\bar{B} \mid A_1 \Delta A_2) = \frac{0.6\,(0.32)}{0.4\,(0.42) + 0.6\,(0.32)} = \frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow P(A_3 \mid A_1 \Delta A_2) = 0.3 \times \frac{7}{15} + 0.8 \times \frac{8}{15} = \frac{17}{30}$$

NOTE DATE

ج)

$$P(A_3 \mid \bar{A}_1, \bar{A}_2) = P(A_3 \mid B\bar{A}_1, \bar{A}_2)\,P(B \mid \bar{A}_1, \bar{A}_2) + P(A_3 \mid \bar{B}\bar{A}_1, \bar{A}_2)\,P(\bar{B} \mid \bar{A}_1, \bar{A}_2)$$

$$P(A_3 \mid B\bar{A}_1, \bar{A}_2) = P(A_3 \mid B) \quad , \quad P(A_3 \mid \bar{B}\bar{A}_1, \bar{A}_2) = P(A_3 \mid \bar{B})$$

$$P(B \mid \bar{A}_1, \bar{A}_2) = \frac{P(B)\;P(\bar{A}_1, \bar{A}_2 \mid B)}{P(B)\,P(\bar{A}_1, \bar{A}_2 \mid B) + P(\bar{B})\,P(\bar{A}_1, \bar{A}_2 \mid \bar{B})}$$

$$\Rightarrow P(B \mid \bar{A}_1, \bar{A}_2) = \frac{(0.4)\;(0.7)^2}{(0.4)(0.7)^2 + (0.6)\;(0.2)^2} = \frac{49}{55}$$

$$P(\bar{B} \mid \bar{A}_1, \bar{A}_2) = \frac{0.6\;(0.2)^2}{(0.4)(0.7)^2 + 0.6\,(0.2)^2} = \frac{6}{55}$$

$$\Rightarrow P(A_3 \mid \bar{A}_1, \bar{A}_2) = 0.3\left(\frac{49}{55}\right) + 0.8\left(\frac{6}{55}\right) = \frac{39}{110}$$

سؤال ۲) $A(n)$ ← پیشامدی که هیچ عددی در جایگاه خودش نباشد

$\bar{A}(n)$ ← پیشامدی که حداقل یک عدد در جایگاه خودش باشد

$$P(\bar{A}(n)) = \frac{\binom{n}{1}(n-1)! - \cancel{\frac{n}{2}} \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots}{n!}$$

طبق اصل شمول و عدم شمول

چون اگر B_i را مجموعه حالت هایی فرض کنیم که i سر جای خودش قرار دارد ⇐

$$\Sigma P(B_i) = \frac{\binom{n}{1}(n-1)!}{n!}$$

$$\Sigma P(B_i \cap B_j) = \frac{\binom{n}{2}(n-2)!}{n!}$$

$$\vdots$$

$$\Sigma P(B_i \cap \ldots) = P(\bar{A}(n))$$

$$\Longrightarrow P(\bar{A}(n)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\binom{n}{i}(n-i)!}{n!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}$$

بسط تیلور $1 - \frac{1}{e}$ ⇐

$$\lim_{n\to\infty} P(\bar{A}(n)) = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A(n)) = \frac{1}{e}$$

اگر j عدد داشته باشیم، حالت هایی که هیچ کدوم سر جای خودشان نباشند: $A(j) \times j!$

$$\Longrightarrow f(n,r) = \frac{A(n-r)\; n!}{r!} \Rightarrow \frac{f(n,r)}{n!} = \frac{A(n-r)}{r!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n,r)}{n!} = \frac{1}{e\,r!}$$

اثبات شد

۹۹۶۲۲۰۷

سؤال ۳) الف. چون هر متحرک می‌تواند راست و چپ برود، تعداد کل حالات متحرک بعد از N

مرحله برابر است با 2^N $\Leftarrow$ کل حالات برای ۲ متحرک: $2^N \times 2^N = 4^N$

حال برای اینکه در یک نقطه باشند، باید به تعداد یکسان راست رفته باشند در N حرکت (همینطور چپ)

پس اگر تعداد حرکات راست متحرک را i فرض کنیم، تعداد حالاتی که هر دو متحرک i تا راست

می‌روند برابر است با $\binom{N}{i}\binom{N}{i}$ $\Leftarrow$ تعداد حالاتی که ۲ متحرک یک جا قرار دارند:

$$\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\binom{N}{i} = \binom{2N}{N}$$

احتمال قرارگیری ۲ متحرک در یک مکان: $\dfrac{\binom{2N}{N}}{4^N}$

ب. نکته‌ی این سؤال این است که اگر مسیر طی شده در N حرکت این سؤال را برعکس کنیم، به مبدا باز می‌گردیم

پس باید مسیرهای به طول $2N$ را حساب کنیم که مقصدشان مبدا است

حالا تعداد راست‌ها و چپ‌ها را فیکس می‌کنیم که یکسان است و پس بالا و پایین‌ها را

$$\sum_{i=0}^{N}\binom{2N}{i}\binom{2N-i}{i}\binom{2N-2i}{N-i} = \sum_{i=0}^{N}\frac{(2N)!\,\cancel{(2N-i)!}\,\cancel{(2N-2i)!}}{i!\,i!\,(N-i)!\,\cancel{(2N-i)!}\,\cancel{(2N-2i)!}\,(N-i)!} =$$

$$\sum_{i=0}^{N}\frac{(2N)!}{i!\,i!\,(N-i)!\,(N-i)!} = \sum_{i=0}^{N}\frac{N!\,N!\,\binom{2N}{N}}{i!\,i!\,(N-i)!\,(N-i)!} = \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}^2\binom{2N}{N} = \binom{2N}{N}^2$$

کل حالات: 4^{2N} $\Leftarrow$ احتمال برگشتن به مبدا: $\dfrac{\binom{2N}{N}^2}{4^{2N}} = \dfrac{\binom{2N}{N}^2}{16^N}$

سوال ۴) شرط برنده شدن سطار این است که آخرین حرفش قبل از آخرین حرف ۲ نفر دیگر بیاید
روی نفر دوم و سوم حالت بندی می کنیم.

حالت ۱: اول گوگوش تمام شده باشد، پس حرف ۱۳ ام از معین هست
برای ۳ حرف قبلی آن $\binom{12}{3}$ حالت داریم
بین ۹ حرف دیگر هم حرف آخر از گوگوش است و برای ۴ حرف دیگر، $\binom{8}{4}$ حالت داریم

حالت ۲: از معین تموم شده باشد پس حرف ۱۳ ام از گوگوش است
برای ۴ حرف قبلی آن $\binom{12}{4}$ حالت داریم
بین ۸ حرف دیگر هم حرف آخر از معین است و ۳ حرف، $\binom{7}{3}$ حالت داریم

$$\Longrightarrow \text{Answer}: \left(\binom{12}{3}\binom{8}{4}\,4!\,4!\,\frac{5!}{2} + \binom{12}{4}\binom{7}{3}\,4!\,4!\,\frac{5!}{2!\,2!}\right)\cdot\frac{2!\,2!}{13!}$$

$$= \frac{\cancel{12!}\,\cancel{8!}\,\cancel{4!}\,\cancel{4!}\,\cancel{5!}\,\cancel{2!}\,\cancel{2!}}{\cancel{3!}\,\cancel{9!}\,\cancel{4!}\,\cancel{4!}\,\cancel{2!}\,\cancel{13!}\,13} + \frac{\cancel{12!}\,\cancel{7!}\,\cancel{4!}\,\cancel{4!}\,\cancel{5!}\,\cancel{2!}\,\cancel{2!}}{\cancel{4!}\,\cancel{8!}\,\cancel{4!}\,\cancel{3!}\,\cancel{2!}\,\cancel{2!}\,\cancel{13!}\,(13)\,2} =$$

$$\frac{4}{13\times 9} + \frac{5}{13\times 2} = \frac{40+45}{13\times 18} = \frac{85}{13\times 18} = \frac{85}{234}$$

سؤال ۵) الف - دنباله‌ی افزایشی $\Leftarrow$

$C_1 = E_1 \ , \ \underset{k \geq 2}{C_k = E_k - E_{k-1}}$

$\Rightarrow E_n = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \Rightarrow E = \lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$

$\Rightarrow P(E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i) \Rightarrow P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(E_n) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i = P(E) = P(\lim_{n\to\infty} E_n)$

صعودی و دارای کران بالا ← حد دارد

دنباله‌ی کاهشی $\Leftarrow$

$C_1 = E_1 \ , \ \underset{k \geq 2}{C_k = E_{k-1} - E_k}$

$E_n = C_1 - C_2 - C_3 - \dots = \cancel{E_n} \ C_1 - \bigcup_{i=2}^{n} C_i \Rightarrow E = C_1 - \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$

$\Rightarrow P(E_n) = C_1 - \sum_{i=2}^{n} P(C_i) \ , \ P(E) = C_1 - \sum_{i=2}^{\infty} P(C_i) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(E_n) = C_1 - \sum_{i=2}^{\infty} P(C_i) = P(E)$

$= P(\lim_{n\to\infty} E_n)$

نزولی با کران پایین ← حد دارد

حکم ثابت شد!

سؤال ۵) ب- تعریف می‌کنیم $A_n=\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$ $\Leftarrow$ $\dots \subseteq A_{n+1} \subseteq A_n$

$\{A_i\}$ دنباله‌ای کاهشی از پیشامدهاست $\Leftarrow$ $A=\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \lim_{i\to\infty} A_i$ $\Leftarrow$ باید نشان دهیم $\lim_{i\to\infty} P(A_i)=0$

حال اگر تعریف کنیم $D_{n,i}=\bigcup_{k=n}^{n+i-1} C_k$ ، $\{D_{n,i}\}$ دنباله‌ای افزایشی است

$$\Rightarrow D_{n,i}=C_n\cup\dots\cup C_{n+i-1} \subseteq C_n\cup(C_{n+1}-C_n)\cup\dots\cup(C_{n+i-1}-C_{n+i-2})$$

$$\Rightarrow P(D_{n,i}) \le P(C_n)+P(C_{n+1}-C_n)+P(C_{n+2}-C_{n+1})+\dots+P(C_{n+i-1}-C_{n+i-2})$$

$$\Rightarrow P(A_n)=\lim_{i\to\infty} P(D_{n,i}) \le P(C_n)+\sum_{k=n}^{\infty} P(C_{k+1}-C_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} P(C_{k+1}-C_k) = J_n$$ تعریف می‌کنیم $$\Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} P(C_{k+1}-C_k) = -J_n+J$$

$$\Rightarrow P(A_n) = P(C_n)-J_n+J \Rightarrow \lim P(A_n)=0$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)=0 \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k\right)=0$$

سؤال ۶) بزرگترین عدد باید در سطر آخر قرار گیرد . اگر بخواهیم k که بزرگترین عدد ماست در سطر آخر قرار بگیرد اعداد قبل از آن هم باید برای $n-1$ سطر قبلی درست چیده شوند و در نتیجه احتمال آن $\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}$ می‌شود که بازگشتی حل می‌شود البته و اگر $f(n)=\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} f(n-1)$ فرض کنیم برای ردیف آخر n حل می‌شود

$$\Rightarrow f(n)=\frac{2}{n+1} f(n-1)$$

$$f(n-1)=\frac{2}{n} f(n-2) \quad \Rightarrow f(n)=\frac{2^n}{(n+1)!} f(1)=\frac{2^n}{(n+1)!}$$

$$\vdots$$

$$f(2)=\frac{2}{3} f(1)$$

۷- یک رشته دودویی نامحدود با طول متناهی در نظر بگیرید. مجموعه حالت هایی که عضوی از F پیشوند آن باشد را

K در نظر بگیرید، حال مجموعه حالاتی که عضوی با i حرف پیشوند داشته باشد را هم K_i در نظر بگیرید.

$i \le N$

توجه کنید ممکن نیست K_j و K_i ای پیشوند باشند و اشتراکی داشته باشند چون در صورت $j < i$، K_j پیشوند K_i می باشد.

$$\Leftarrow \quad K = \bigcup_{i\in N} K_i \quad \Leftarrow$$

$$P(K) = P\left(\bigcup_{i\in N} K_i\right) = \sum_{i\in N} P(K_i) \quad \text{و} \quad P(K_i) = \frac{N_i}{2^i} \Rightarrow P(K) = \sum_i \frac{N_i}{2^i}$$

باید با i حرفی شروع شود که انتخاب می شوند و کلاً 2^i حالت دارد

$$P(K) \le 1$$

$$\Leftarrow$$

$$\sum_i \frac{N_i}{2^i} \le 1$$