آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۲ ـ ۱۴۰۱

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان:

تمرین سری ۱

مقدمات احتمال

نکات مهم

- بخش تئوری را در قالب یک فایل pdf با اسم HW#_[STD-Num] آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز چهارشنبه ۱۸ آبان می‌باشد.
- سوالات ستاره دار، غیرتحویلی هستند و برای تمرین بیشتر قرار داده شده اند.
- هر کدام از تمرینات بارم برابری دارند و در هر سری تمرین بخش عملی ۶۰ درصد نمره و بخش عملی ۴۰ درصد نمره خواهد داشت.

مسئله‌ی ۱. مسابقه رمزنگاری

علی در مسابقه رمزنگاری شرکت کرده است. مسابقه سه مرحله دارد که باید حداقل از دو مرحله عبور کند. اگر علی رمزنگاری توانا باشد احتمال شکست خوردن در هر مرحله ۰/۳ و در غیر این صورت احتمال شکست خوردن به ۰/۸ افزایش می یابد. احتمال اینکه علی رمزنگاری توانا باشد ۰/۴ است. احتمال شرطی اینکه در مرحله سوم شکست بخورد به شرط هر یک از حالات زیر حساب کنید.

الف

در مرحله اول و دوم شکست خورده است.

ب

در یکی از مراحل اول و دوم شکست خورده و دیگری را با موفقیت پشت سر گذاشته است.

ج

هر دو مرحله اول را با موفقیت پشت سر گذاشته است.

مسئله‌ی ۲. زلف پریشان

فرض کنید n و r دو عدد نامنفی باشند به طوری که $0 < r < n$. حال $f(n,r)$ برابر با تعداد جایگشت های S_n است به طوری که دقیقا r نقطه در جای خودشان قرار گرفته باشند. ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n,r)}{n!} = \frac{1}{er!}$$

مسئله‌ی ۳. کمی خلاقیت

الف

دو متحرک از نقطه ی $x = ۰$ به حرکت می کنند. دو متحرک با هم گام برمی دارند و حرکت آن ها از یکدیگر مستقل است.(در هنگام برخورد از روی هم رد می شوند) و هر یک در هر گام به احتمال یکسان به چپ یا راست حرکت می کند. احتمال اینکه بعد از N قدم این دو متحرک در محل یکسانی باشند چقدر است؟

ب

دو متحرک در صفحه دو بعدی از مبدا مختصات شروع به حرکت می کنند. دو متحرک هم زمان گام بر می دارند و در هر گام به اندازه یک واحد با احتمال یکسان به یالا، پایین، چپ یاراست حرکت می کنند. احتمال اینکه پس از N گام دو متحرک در محل یکسانی باشند چقدر است؟

مسئله‌ی ۴. پیشکسوتان پاپ

ستار، گوگوش و معین در یک بازی قرعه کشی شرکت می کنند. هر یک از آنها حروف نام خود را (با احتساب تکرار) روی برگه های مجزا می نویسد و سپس همه‌ی برگه ها را درون یک کیسه می ریزند. قرار است یک نفر در هر مرحله یک برگه از کیسه خارج کند و کنار بگذارد. هر کسی که برگه های شامل حروف اسمش پیش از بقیه از کیسه بیرون بیاید، برنده است. مثلا اگر حروف خارج شده به ترتیب س،م،ش،ن،گ،و،ع،و،ی الی آخر باشد، برنده معین است. احتمال برنده شدن ستار را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۵. پیوستگی احتمال

الف

در هر دنباله کاهشی یا افزایشی از پیش آمدها ($E_n, n > ۱$)، ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n)$$

ب

فرض کنید $C_۱, C_۲, ...$ دنباله ای از پیش آمدها باشند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} Pr(C_n) = ۰$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Pr(C_{n+۱})}{Pr(C_n)} < \infty$$

باشد، نشان دهید:

$$Pr(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}C_k) = 0$$

مسئله‌ی ۶. مثلث شیطانی

فرض کنید $\frac{n(n+1)}{2}$ عدد متفاوت به صورت زیر در یک مثلث قرار گرفته اند:

$$\begin{array}{c} * \\ * \; * \\ * \; * \; * \\ . \\ . \\ . \\ * \; * \; * \quad * \; * \; * \end{array}$$

اگر M_k برابر با بزرگ ترین عدد در سطر k باشد، احتمال اینکه $M_1 < M_2 < ... < M_n$ باشد را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۷. کدهای هافمن طور

الف

فرض کنید F مجموعه ای متناهی از رشته های دودویی با طول متنهایی باشد و هیچ دو عضوی از F پیشوند دیگری نباشد. حال اگر N_i رشته هایی با طول i باشند ثابت کنید:

$$\sum_i \frac{N_i}{2^i} <= 1$$

ب*

فرض کنید F مجموعه ای متناهی از رشته های دودویی با طول متنهایی باشد. همچنین در نظر بگیرید که اهر دو شیوه‌ی متمایز الحاق کردن جفت رشته ها، حاصلش یک رشته‌ی متمایز است. حال اگر N_i رشته هایی با طول i باشند ثابت کنید:

$$\sum_i \frac{N_i}{2^i} <= 1$$

مسئله‌ی ۸. میمون خوش شانس*

یک میمون پشت یک ماشین تایپ می نشیند و به طور تصادفی هر ثانیه یک کلید را (احتمال فشار دادن هر کلید با گذشت زمان تغییر نمی کند) فشار می دهد. نشان دهید بالاخره بعد از مدتی در میان نوشته های میمون، نمایشنامه هملت ظاهر می شود!

موفق باشید :)

بنام خدا

* زلف پریشان *

برای حل سؤال ابتدا لازم است $f(n,2)$ را محاسبه کنیم

توجه کنید اگر دقیقاً ۲ نقطه $(2 \le n)$ از یک

جایگشت n تایی سر جای خود باشند، هیچ یک از $n-2$

عضو دیگر در سر جای خود قرار ندارند. پس بوضوح

این $n-2$ عضو دیگر، به $f(n-2,0)$ طریق

می‌توانند چیده شوند. همچنین $\binom{n}{2}$ حالت برای

انتخاب ۲ نقطه ثابت وجود دارد.

بنابر توضیحات فوق و اصل ضرب داریم:

$$f(n,2) = \binom{n}{2} f(n-2,0)$$

پس محاسبه $f(n,2)$ تقلیل پیدا می‌کند به

محاسبه $f(n,0)$.

* محاسبه $f(n,0)$: بدست بیاورید $f(n,0)$ همان فرمول پریش مرتبه n یا به عبارتی D_n است.

با استفاده از اصل شمول و عدم شمول D_n را محاسبه می‌کنیم.

فرض کنید A_I $(I \subseteq [n])$ مجموعه همه جایگشت‌های $1, 2, \ldots, n$ باشد که همه اعضای I سر جای خودشان هستند (ممکن است $A_I \cap A_J \neq \emptyset$)

به‌وضوح داریم:

$$|A_I| = (n - |I|)!$$

همچنین تعداد A_I ها برای I های با اندازه ثابت k برابر است با $\binom{n}{|I|}$.

پس طبق اصل شمول و عدم شمول داریم

$$D_n = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{|I|=k \\ I \subseteq [n]}} |A_I|$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$= n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \quad \blacksquare$$

حال به مسئله اصلی باز می‌گردیم.

$$f(n,r) = \binom{n}{r} D_{n-r}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n,r)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n-r)!\, r!} \times D_{n-r}}{n!}$$

$$= \frac{1}{r!} \lim_{n\to\infty} \frac{D_{n-r}}{n!}$$

$$= \frac{1}{r!} \lim \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{r!} \cdot e^{-1}$$

و حکم اثبات می‌شود!

Q.E.D

به نام خدا

* کمی خلاقیت *

الف) توجه کنید مکان هر متحرک پس از n گام، تنها به تعداد دفعاتی که به سمت راست حرکت کرده است بستگی دارد. پس دو متحرک به شرطی در یک جایگاه قرار می‌گیرند که هردو 0، 1، 2، ...، n حرکت به سمت راست انجام داده باشند.

دقت کنید هر متحرک در هر گام دو انتخاب دارد لذا 2^n حالت برای قدم برداشتن برای هر متحرک وجود دارد. همچنین به $\binom{n}{i}$ طریق می‌تواند دقیقا i گام به سمت راست بردارد. (از بین n قدم، i تاشان به جهت راست باشد) Ⓘ

فرض کنید A و B متحرک‌های ما باشند، و $P_A(i)$ و $P_B(i)$ به ترتیب برابر احتمال این باشد که A و B دقیقا i قدم به سمت راست برداشته باشند.

با توجه به (I) و مستقل بودن حرکات A , B از یکدیگر

$$P_A(i) = P_B(i) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \quad \text{(II)}$$

می‌دانیم اگر دو رویداد E_1 و E_2 مستقل از یکدیگر باشند

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2)$$

از آنجا که حرکات A و B مستقل از یکدیگرند، احتمال اینکه A و B هر دو i گام به سمت راست برداشته باشند از یکدیگر مستقل است. پس اگر X_A ، X_B به ترتیب بیانگر تعداد قدم‌های راست A و B باشند.

$$\mathbb{P}(X_A = i , X_B = i) = P_A(i) P_B(i) \quad \text{(III)}$$

همچنین مطلوب سؤال این است که $\mathbb{P}(X_A = X_B)$ را محاسبه کنیم.

$$\mathbb{P}(X_A = X_B) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_A = X_B = i)$$

(زیرا رویدادهای $X_A = X_B = i$ دو به دو برای i های متمایز مجزا هستند)

(II) (III)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_A = X_B) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

توجه کنید $\sum \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

اثبات:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

فرض کنید می‌خواهیم از میان اعداد $\{1, 2, \dots, 2n\}$ n تا یشان را انتخاب کنیم. بوضوح این کار به $\binom{2n}{n}$ طریق ممکن است.

از طرفی هر زیرمجموعهٔ n عضوی، می‌تواند $0, 1, 2, \dots, n$ عدد فرد درون خود داشته باشد. تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی با دقیقاً i عدد فرد برابر است با $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$

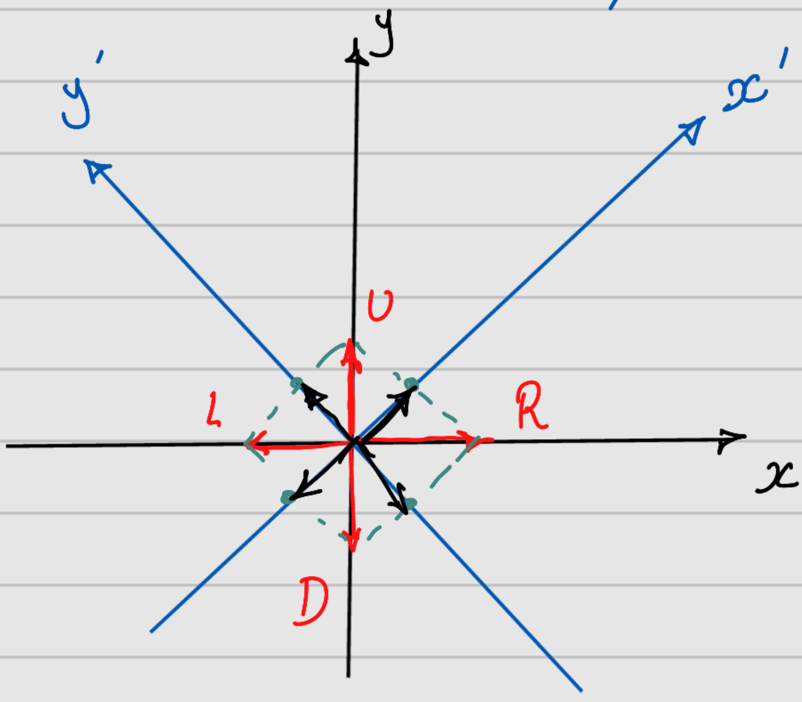
زیرا $\binom{n}{i}$ طریق می‌توان i عدد فرد و $\binom{n}{n-i}$ طریق $n-i$ عدد زوج انتخاب کرد.

$$\Rightarrow \sum \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \quad \blacksquare$$

بنابراین پاسخ سؤال برابر است با: $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$

ب) اینجا کمی خلاقیت لازم است. اگر با همان رویکرد «الف»، این مسئله حل کنید ممکن است با یک تیر از کارزار برگردید :)

محورهای مختصات را $\frac{\pi}{4}$ درجهت پادساعتگرد می‌چرخانیم:



توجه کنید هر حرکت R معادل یک گام (به طول $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

در جهت مثبت x' و یک گام در جهت منفی y' است.

همین طور به طریق مشابه تعبیر حرکت های L، D، U

نیز به حرکاتی روی x' و y' ترجمه می‌شوند.

ولی نکته جالب اینجاست که هر حرکت R, L, U, D

دقیقا یک تصویر روی محور x' و یک تصویر روی محور y'

دارد. اگر دقت کنید حرکت هر متحرک معادل

حرکت دو متحرک روی محورهای x' و y' است

که هر گامش دو انتخاب دارد (مشابه الف)

ضمنا حرکات روی x' و y' هر متحرک از یکدیگر

مستقل است.

پس تا اینجا هر متحرک روی صفحه xy را به دو متحرک مستقل روی

محورهای x' و y' متناظر کردیم.

حال اگر دو متحرک مستقل روی صفحه xy نخواهند پس

از n گام در یک نقطه قرار بگیرند، لازم است

متحرک‌های متناظرشان روی x و y پس از n گام
در یک جایگاه باشند

در بخش الف به دست آوردیم احتمال اینکه روی یک محور در یک جایگاه باشند برابر $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$ است.
پس احتمال اینکه هم روی x و هم روی y شرط صدق کند (و این‌ها مستقل‌اند) برابر است با

$$\left[\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right]^2$$

* اگر در یک فضای d بعدی و در راستای بردارهای $\pm e_i$ حرکت داشتیم هم می‌توانستیم با یک رویکرد مشابه هندسی مسئله را به فضای با بعد کمتر تقلیل دهیم؟

* اگر در راستاهایی غیر از محورها هم مجاز به حرکت بودیم (یا معادلاً یک توزیع احتمال روی حرکات اصلی داشتیم) چطور می‌توان مسئله را حل کرد؟

به نام خدا

* پیش گشتن با پاپ *

توجه داشته باشید حروف نام‌های گوگوش، مهین و ستار با یکدیگر اشتراک ندارند.

لذا مسئله را می‌توان این گونه بیان کرد:

13 توپ که 5 تا شان قرمز، 4 تا شان سبز و 4 تا شان آبی است را در یک کیسه قرار داده‌ایم. آن‌ها را به صورت تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم تا یک جایگشت 13 تایی از توپ‌ها به دست آید. چقدر احتمال دارد توپ‌های آبی زودتر از سایر توپ‌ها از کیسه بیرون آمده باشد؟

از آنجا که ترتیب بیرون آمدن حروف نام هر کس اهمیتی ندارد، میان توپ‌های همرنگ تمایزی قائل نمی‌شویم.

شاید برخی برای محاسبهٔ احتمال مطلوب، در تلاش شمارش تمامی حالت‌ها برآیند. شدنی است! ولی با اندکی

هوشمندها و دقت می‌توانید این محاسبات را دور بزنید :)

در این جایگشت 13 تایی ، اگر رنگ توپ آخر سبز باشد، قطعا سبز زودتر از بقیه خارج شده است ! یا اگر قرمز آخرین توپ باشد هم همین طور. این ایده می‌تواند اندکی راهگشا باشد.

بیایید حالت ساده‌تری از مسئله را حل کنیم.

← فرض کنیم دو رنگ توپ داریم و از هر کدام به ترتیب m و n تا!

بوضوح احتمال اینکه توپ‌های رنگ اول زودتر بیرون بیاید باتوجه به صحبت‌های قبلی برابر $\frac{n}{m+n}$ است.

زیرا به احتمال $\frac{n}{m+n}$، آخرین توپ از رنگ دوم است!

متوجه شویم حالت ۳ تایی مسئله با ایده‌ای که زدیم به سادگی حل می‌شود. حال کافیست به روشی حالت ۳ تایی را به حالت دوتایی تقلیل دهیم.

این کار هم ساده است. اگر توپ آخر از رنگ

قرمز باشد، در میان 12 جایگاه دیگر فقط چینش
توپ‌های سبز و آبی نسبت به یکدیگر است که برنده را
تعیین می‌کند. یعنی عملاً با حذف توپ‌های
قرمز، به حالت ۲ تایی مسئله می‌رویم!
و در این حالت احتمال زودتر تمام شدن آبی، برابر $\frac{4}{8}$
است. اگر توپ آخر سبز رنگ باشد، احتمال
برد آبی برابر $\frac{5}{9}$ خواهد شد (طبق حالت ۲ تایی مسئله)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{بردن آبی})$$

(چرا؟) $\frac{5}{13}$

$$= \mathbb{P}(\text{بردن آبی} \mid \text{آخر شدن قرمز})\, \mathbb{P}(\text{آخر شدن قرمز})$$

$$+ \mathbb{P}(\text{بردن آبی} \mid \text{آخر شدن سبز})\, \mathbb{P}(\text{آخر شدن سبز})$$

(چرا؟) $\frac{4}{13}$

$$= \frac{4}{8} \times \frac{5}{13} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{13}$$

* با توجه به صحبت های انجام شده بوضوح می توانیم
این مسئله را برای حالتی که n تا خواننده داریم
نیز حل کنیم. ولی پیدا کردن n خواننده قبلی که
حروف نامشان دو به دو مجزا است اندکی مشکل است :)

به نام خدا

* قضیه پیوستگی احتمال *

الف) خود قضیه پیوستگی احتمال!

مسئله را برای حالتی که $\{E_i\}$ صعودی باشد حل می‌کنیم
حالت نزولی نیز به خودی خود اثبات می‌شود.

دنباله‌ی $\{E_i\}$ از رویدادها را افزایشی یا صعودی
می‌نامیم هرگاه $\forall i \in \mathbb{N}: \quad E_i \subseteq E_{i+1}$

همچنین $\lim\limits_{i\to\infty} E_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$

تعریف کنید

$F_1 = E_1$

$F_2 = E_2 \setminus E_1 \ , F_3 = E_3 \setminus E_2 \ , \dots$

پس به وضوح داریم:

$$\forall n: \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_n$$

$$\mathbb{P}\left(\lim_{i\to\infty} E_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)$$

توجه داشته باشید تعریف $\{F_i\}$ برای این بود که به جای $\{E_i\}$ یک سری مجموعه دو به دو مجزا داشته باشیم که اجتماع هر n تای نخستشان برابر $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ باشد.

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\overbrace{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}^{E_n}\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

پس حکم ثابت شد.

برای حالت نزولی $\{E_i\}$ نیز یک ایده این است که به جای $\{E_i\}$ ، $\{E_i^c\}$ را در نظر بگیرید (که یک دنباله صعودی اند و با استفاده از حالت صعودی حکم را نتیجه بگیرید)

* حالا توابع پیوسته دوست داشتنی ترند ... چه خوب که تابع احتمال نیز چنین است :)

ب) اگر تعریف کنیم $E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} C_i$

بوضوح داریم:

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad E_{i+1} \subseteq E_i$$

$\Rightarrow$ یک دنباله نزولی اند $\{E_i\}$

$$\text{(الف)} \Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)}_{\text{مطلوب سؤال}} = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_i)$$

$D_1 = C_1 \; , \; \forall n > 1 : D_n = C_n \setminus C_{n-1}$ قرار دهید

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} C_i\right) = \mathbb{P}\left(C_n \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} D_i\right)$$

$$\leq \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} D_i\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} C_i}_{E_n}\Big) \leq \lim \left(\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} D_i\right)\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(C_n)}_{0 \text{ فرض}} + \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} D_i\right)$$

$$\le 0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(D_k)$$

می دانیم طبق فرض سؤال $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(D_k) = c$

و $c < \infty$. پس

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(D_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(c - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(D_i) \right)$$

$$= c - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(D_i)$$

$$= c - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(D_i) = 0$$

چون $0 \le \mathbb{P}(E)$

$$0 \le \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} C_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} C_i\right)$$

≤ 0 ~~حکم اثبات شد~~ Q.E.D

* اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(C_{n+1} \setminus C_n) = \infty$$

را نداشتیم آیا می‌توان به یکی از دو نتایج

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} C_i\right) = 0$$

یا

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} C_i\right) \neq 0$$

رسید؟ سعی کنید مثال نقض‌های خلاقانه بسازید.

به نام خدا

* مثلث شیبانی *

اگر در یک چینش اعداد $M_1 < M_2 < \dots < M_n$ رخ دهد، یعنی بزرگترین عدد در سطر آخر است.

(اگر M_n از همه M_i ها بزرگتر باشد یعنی از همه اعداد مثلث بزرگتر است)

احتمال اینکه بزرگترین عدد در سطر n باشد، برابر $\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}$ است زیرا از میان کل جایگاه‌ها

n تا شان برای قرار گرفتن بزرگترین عدد مناسب است.

حال در میان $n-1$ سطر دیگر، $\frac{n(n-1)}{2}$ عدد متمایز داریم!

اگر $M_1 < M_2 < \dots < M_{n-1}$ بخواهد رخ دهد لازم است

ماکزیممشان در سطر $n-1$ اُم باشد که احتمالش $\frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}}$ است.

اگر همین طور پیش برویم احتمال مطلوب
مسئله برابر می‌شود با

$$\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} \times \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} \times \cdots \frac{1}{\frac{2\times 1}{2}}$$

$$= \frac{2^n}{(n+1)!}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Kraft%E2%80%93McMillan_inequality