ایمان محمدی   ۹۹۱۰۲۲۰۷   تمرین ۲ آمار و احتمال مهندسی

سوال ۱)

$$\mathrm{Cov}(X,Y|Z) = E[(X-E[X|Z])(Y-E[Y|Z])|Z]$$

$$E(X+Y|Z) = E(X|Z) + E(Y|Z)$$

الف -

$$\mathrm{cov}(X,Y|Z) = E((XY - XE(Y|Z) - YE(X|Z) + E(X|Z)E(Y|Z)|Z)$$

E(X|Z) یک تابع از Z است پس در حالی که مقدار Z را می‌دانیم، می‌تواند از E بیرون آید

$$\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y|Z) = E(XY|Z) + E(X|Z)E(Y|Z) - \underbrace{E(XE(Y|Z)|Z)}_{E(X|Z)\,E(Y|Z)} - E(YE(X|Z)|Z)$$

$$\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y|Z) = E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z)$$

ب - طبق بخش الف خواهیم داشت:

$$E[\mathrm{cov}(X,Y|Z)] + \mathrm{cov}(E[X|Z],E[Y|Z]) = E[E[XY|Z] - E[X|Z]E[Y|Z]] + E[E[X|Z]E[Y|Z]] - E[E[X|Z]]\,E[E[Y|Z]]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) = \mathrm{cov}(X,Y)$$

ج - می‌دانیم $\mathrm{cov}(A,A) = \mathrm{var}(A)$ ⇐ با جایگذاری در بخش ب خواهیم داشت:

$$\mathrm{cov}(X,X) = E(\mathrm{cov}(X,X|Y)) + \mathrm{cov}(E(X|Y),E(X|Y))$$ و طبق الف: $\mathrm{cov}(X,X|Y) = E(X^2|Y) - E(X|Y)^2 = \mathrm{var}(X|Y)$

$$\Rightarrow \mathrm{cov}(X,X) = \mathrm{var}(X) = E(\mathrm{var}(X|Y)) + \mathrm{var}(E(X|Y))$$

سؤال ۲)

طبق قضیه حد مرکزی داریم $\Leftarrow$

چون X_i ها از یک توزیع پیروی می‌کنند

و مستقل هستند ، از توزیع نرمال پیروی می‌کنند درحالت $\leftarrow$ $\dfrac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$

$Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$

$n = 50$

$\sigma = \sqrt{var(X_i)} = 1$

$E(X_i) = \mu = 2$

$Y \sim N(n\mu, \sigma^2) = N(100, 1)$

$$\Rightarrow P(90 < \sum X_i < 110) = P\left(\overbrace{\frac{90-100}{\sqrt{50}}}^{-\sqrt{2}} < \overbrace{\frac{Y-100}{\sqrt{50}}}^{N(0,1)} < \overbrace{\frac{110-100}{\sqrt{50}}}^{+\sqrt{2}} \right)$$

$$= \Phi(\sqrt{2}) - \Phi(-\sqrt{2}) = 2\Phi(\sqrt{2}) - 1$$

$$\simeq 2\Phi(1/41) - 1 = 2(0/9206) - 1 = 0/8412 = \underline{\underline{2\Phi(\sqrt{2}) - 1}}$$

سؤال ۳) می دانیم $P(X=k)$ در $k=1,2,\dots$ نزولی است پس

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, P(X=x) \geq \sum_{x=1}^{k} x\, P(X=x) \geq \sum_{x=1}^{k} x\, P(X=k) = P(X=k) \sum_{x=1}^{k} x = P(X=k)\, \frac{k(k+1)}{2} \geq P(X=k)\, \frac{k^2}{2}$$

$$\Rightarrow E(X) \geq P(X=k)\, \frac{k^2}{2} \Rightarrow P(X=k) \leq \frac{2E(X)}{k^2}$$

ب -

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{y} x f_X(x)\, dx + \int_y^{+\infty} x f(x)\, dx \geq \int_0^{y} x f_X(x)\, dx \geq \int_0^{y} x f_X(y)\, dx = f_X(y) \int_0^{y} x\, dx$$

$$= f_X(y)\, \frac{x^2}{2}\Big|_0^y = \frac{y^2}{2} f(y) \Rightarrow \frac{y^2 f(y)}{2} \leq E(x) \Rightarrow f(y) \leq \frac{2E(x)}{y^2}$$

سوال ۱۶) ۴) خطای عدد i ام : X_i

$n = 50$

$(a, b) = (-0.5, 0.5)$

$Var(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \sigma^2$

$E(X_i) = \frac{a+b}{2} = \mu$

طبق قضیه حد مرکزی، $\frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ از توزیع نرمال استاندارد پیروی می‌کند

$\Rightarrow var(X_i) = \sigma^2 = \frac{1}{12}$

$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\mu = 0$

$\Rightarrow P(\sum X_i > 3) = P\left(\frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{3-0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)$

$P(\sum X_i < -3) = P\left(\frac{(\sum X_i - n\mu)}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{-3-0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)$

$\Rightarrow P($ خطا بیش از ۳ واحد $) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)\right)$

$= 2 - 2\Phi\left(\frac{3\sqrt{6}}{5}\right) \simeq 0.1416$

سؤال ۵)

$$P\left(\frac{\sum X_i}{n} - 0.5 \le \mu \le \frac{\sum X_i}{n} + 0.5\right) \ge 0.95 \Leftarrow P\left(\frac{-\sqrt{n}}{2\sigma} \le \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{\sqrt{n}}{2\sigma}\right)$$

طبق قضیه‌ی حد مرکزی $Z = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ، Z تقریباً از توزیع نرمال پیروی می‌کند.

$$\Rightarrow P\left(\frac{-\sqrt{n}}{4} \le N(0,1) \le \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \sim \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n}}{4}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1$$

$$\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \ge 1 + 0.95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \ge 0.975 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{4} \ge 1.96$$

$$\Rightarrow n \ge 61.4656 \Rightarrow$$ حداقل ۶۲ بار باید الگوریتم را اجرا کنیم

سوال ۶) به ازای هر b مثبت ⇐

$$P(X \geq a) = P(X+b \geq a+b) \leq P\left((X+b)^2 \geq (a+b)^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad P\left((x+b) \geq (a+b)\right) \text{ یا } P\left((x+b) \geq -(a+b)\right)$$

طبق نابرابری مارکوف ⇐

$$P(X \geq a) \leq \frac{E\left((X+b)^2\right)}{(a+b)^2} = \frac{var(X)+b^2}{a^2+b^2+2ab}$$

حال اگر قرار دهیم $b = \frac{var(x)}{a}$ ⇐

$$P(X \geq a) \leq \frac{var(X) + \frac{(var(X))^2}{a^2}}{a^2 + \frac{(var(x))^2}{a^2} + 2var(x)} = \frac{a^2\, var(X) + (var(X))^2}{(a^2+var(x))^2} = \frac{var(x)\,(a^2+var(x))}{(a^2+var(x))^2} = \frac{var(x)}{a^2+var(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad P(X \geq a) \leq \frac{var(x)}{a^2+var(x)}$$