



## مسئله‌ی ۱. سرگرمی

از آنجایی که به دوران شیرین امتحانات نزدیک می‌شویم و معمولاً راه‌های جدیدی برای اتلاف وقت خود پیدا می‌کنیم، نشسته‌ایم و ۵۰۰ بار یک تاس سالم را پرتاب کرده‌ایم. حال می‌خواهیم تعداد دفعاتی که تاس ۴ آمده را با دقت ۹۵ تخمین بزنیم. بازه اطمینان مورد نظر را بیابید.

## مسئله‌ی ۲. تخمین یکنواخت

از آنجا که امیرآقا بسیار به توزیع یکنواخت علاقه دارد از شما می‌خواهد سوالات زیر را درباره این توزیع حل کنید:

### الف

فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیر تصادفی‌های باشند که از توزیع یکنواخت  $U(0, \theta)$  می‌آیند. حال اگر  $x_1, \dots, x_n$  مشاهده‌های ما از این  $n$  متغیر تصادفی باشند، تخمینی برای  $\theta$  پیدا کنید.

### ب

ثابت کنید این تخمین گر Biased است.

## مسئله‌ی ۳. اضافه وزن نگران‌کننده

باتوجه به اینکه طبق آخرین تحقیقات، دانشجویان دانشکده مهندسی کامپیوتر دانشگاه شریف بسیار کم‌تحرک هستند، آقا مهراد می‌خواهد بررسی‌ای روی این موضوع انجام دهد؛ به این صورت که  $n$  نفر از دانشجویان را انتخاب می‌کند و وزن آن‌ها را  $X_1, \dots, X_n$  می‌نامد. فرض کنید توزیع وزن دانشجویان میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  داشته باشد. آقا مهراد با این توزیع آشنایی ندارد ولی می‌خواهد از روی نمونه‌هایی که دارد تخمین‌گری Unbiased برای  $\mu^2$  پیدا کند. به او کمک کنید تا بتواند این کار را انجام دهد و این تحقیقات مهم را به انجام برساند.

## مسئله‌ی ۴. شکارچی مهربان

امیرآقا که شکارچی مهربانی است در اولین شکاری که در این هفته داشته تمام بلدرچین‌هایی که گرفته را علامت‌گذاری کرده و آزاد می‌کند. فرض کنید ۳ بلدرچین گرفته بوده. هفته بعد که امیرآقا به شکار می‌رود متوجه می‌شود از بین ۶ بلدرچینی که این دفعه گرفته، ۲ بلدرچین علامت‌دار هستند. او با خود فکر می‌کند آیا می‌تواند با این داده‌ها تعداد کل بلدرچین‌ها را تخمین بزند؟

## الف

اگر از تخمین گر  $MLE$  استفاده کند به چه تخمینی می‌رسد؟

## ب\*

اگر در هفته اول  $M$  بلدرچین گرفته بود و علامت‌گذاری می‌کرد و در هفته دوم از بین  $n$  بلدرچینی که گرفته،  $m$  تایشان علامت داشتند، با استفاده از تخمین گر  $MLE$  به چه تخمینی برای کل تعداد بلدرچین‌های آن ناحیه می‌رسید؟

## مسئله ۵. اندازه‌گیری‌های حسین

حسین که حوصله‌اش سر رفته است شروع به اندازه‌گیری چیزهایی که دوست دارد می‌کند و برای این کار یک تخمین‌گر جادویی می‌سازد. تخمین‌گر جادویی حسین به این صورت کار می‌کند که هر مقدار  $\eta$  را با استفاده از  $n$  روش مختلف اندازه‌گیری می‌کند و مقادیر بدست آمده را  $x_1, \dots, x_n$  می‌نامد. فرض کنید

$$\forall 1 \leq i \leq n : x_i = \eta + \epsilon_i$$

که  $\epsilon_i$  درواقع خطای اندازه‌گیری حسین است و همچنین می‌دانیم:

$$\mathbb{E}[\epsilon_i] = 0 \quad \text{Var}(\epsilon_i) = \sigma_i^2$$

## الف

نقطه جادویی تخمین‌گر حسین این است که Unbiased، دارای کمترین واریانس و خطی است. منظور از خطی بودن این است که حسین برای تخمین زدن و پیدا کردن  $\hat{\eta}$  در پی یافتن  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  است تا به صورت زیر  $\hat{\eta}$  را بسازد.

$$\hat{\eta} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

سعی کنید با پیدا کردن  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  تخمین‌گر جادویی حسین را پیدا کنید.

## ب\*

سعی کنید همان بخش الف را بدون فرض خطی بودن حل کنید. یعنی بین تمامی تخمین‌گرهایی که Unbiased هستند، تخمین‌گری را بیابید که کمترین واریانس را داشته باشد.

## نکات مهم

- بخش تئوری را در قالب یک فایل pdf با اسم [STD-Num]\_HW# آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز جمعه ۱۶ دی می‌باشد و تا پایان روز یکشنبه تحویل با تاخیر باز خواهد بود.
- سوالات ستاره‌دار، غیرتحویلی هستند و برای تمرین بیشتر قرار داده شده‌اند.

موفق باشید (: