



میانترم

مسئله‌ی ۱. تاس بازی کامیار (۱۰ نمره)

کامیار که به جلسه مهم خود دیر رسیده است می‌خواهد زودتر نیز برود تا به کارهایش برسد. او میداند که مسئول جلسه تنها در صورتی اجازه خروج به او می‌دهد که در پرتاب‌های متوالی سکه شیر بیاورد. متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌های متوالی تا اولین شیر تعریف می‌کنیم. بنابراین $X = n$ به معنی این است که $n - 1$ پرتاب قبلی خط و پرتاب n ام شیر بوده است.

الف

$P(X > k)$ را حساب کنید

ب

اثبات کنید $P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$

مسئله‌ی ۲. تاس بازی حسین (۱۵ نمره)

محمدآقا و دوستش که حوصلشان سر رفته است سراغ حسین می‌روند و حسین به آن‌ها بازی ساده‌ای را پیشنهاد می‌کند. محمدآقا آنقدر تاس می‌اندازد تا ۶ بیاید. همزمان با تاس انداختن محمدآقا دوستش تعداد ۱ هارا می‌شمارد. تعداد تاس‌هایی که باید بیاندازیم تا ۶ بیاید را X مینامیم. متغیر Y را تعداد ۱‌ها در N پرتاب تاس مینامیم. $E[Y|X]$ را حساب کنید.

مسئله‌ی ۳. افسانه سه برادر (۱۵ نمره)

سه برادر که به تازگی سرزمین‌های ساو ساو پلید را فتح کرده‌اند نیاز به استقرار نیرو در این منطقه دارند. توزیع نیروهای آن‌ها به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x + y) & x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مقدار k را بدست آورید به طوری که f یک توزیع احتمال باشد. سپس $E[X], E[Y], E[XY], Cov(X, Y)$ را بدست آورید.

مسئله‌ی ۴. گنگ مترو (۲۰ نمره)

راننده مترو دو اندازه‌گیری برای رسیدن قطار به ایستگاه تأثیرشهر انجام می‌دهد که از توزیع نرمال استاندارد پیروی میکنند. همبستگی بین مقادیر بزرگتر و کوچکتر را پیدا کنید.

راهنمایی: توجه کنید که $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$ و $\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$
 راهنمایی ۲: اگر X و Y دو متغیر تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشند آنگاه $E[|X - Y|] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

مسئله ۵. حمله تایتان‌ها (۲۵ نمره)

تایتان‌ها به شریف حمله کرده اند. شما که از گارد مخفی حافظ شریف هستید فهمیده اید که توزیع تعداد تایتان‌های زن و مرد از توزیع پواسون با λ_f و λ_m پیروی میکند.

الف

T_2 را زمانی بگیرید که اولین تایتان به دانشگاه میرسد. $E[T_2]$ را حساب کنید

ب

T_1 زمانی است که حداقل یک تایتان زن و یک تایتان مرد به دانشگاه نفوذ کرده اند. $E[T_1]$ را حساب کنید.

ج

فرض کنید هیچ تایتان زنی در بازه $[0, 1]$ به دانشگاه نفوذ نکرده است. اگر چهار تایتان در بازه $[0, 2]$ به دانشگاه نفوذ کرده باشند احتمال اینکه دقیقاً ۲ تای آنها مرد بوده باشند را حساب کنید.

مسئله ۶. انتخاب سخت (۲۰ نمره)

سوالات پیشنهادی تیم تدریس آنقدر خوب بودند که انتخاب برای دکتر شریفی سخت شده است. او تصمیم گرفت از بین N سوال طراحی شده که G تای آنها خوب و B تای آنها بد هستند بدون جایگذاری سوال انتخاب کند. متغیر تصادفی X را تعداد انتخاب سوال تا اولین سوال خوب در نظر میگیریم. (خود سوال خوب هم حساب است)

الف

$E[X]$ را بدست آورید

ب

$Var[X]$ را بدست آورید

(دقت کنید که احتمال انتخاب هر سوال برابر است)

ج (۵ نمره)

لطفاً نظر خودتان درباره امتحان را بگویید

(موفق باشید:)