

ایمان محمدی

۹۹۱۵۲۲۰۷

تمرین ۶ آمار

سؤال ۱) ساعات درس خوانده شده در یک روز قبل و بعد از امتحان : ۵ و ۷ و ۸ و ۱۰
از نظر دگر ریسعی برای امتحان ساده : هر روز ۴ ساعت

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{13}{3} = 4\bar{3} = 4$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{(10+8+7+5)}{4} = 7.5$$

$$\Rightarrow S = 2$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 7.5$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \sum \bar{x}^2 = 13$$

↗ ۲(۵۶/۱۵)
↘ ۱۰۰+۶۴+۴۹+۲۵

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$\left[\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{بازه اطمینان} \Rightarrow$$

$$S \rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96$$

$$[9.46, 5.54]$$

صدی هر
بازه اطمینان نهایی :

H_0 : امتحان ساده = میانگین مطالعه با میانگین مشخص کنی H_1 : امتحان ساده نیست = H_0

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n} = 3.5$$

$$\Rightarrow p\text{-value} = 0.019$$

$$\Rightarrow p\text{-value} < 0.05$$

(سطح اطمینان ۰.۰۵)

ب) از $t\text{-test}$ استفاده می کنیم :
ساعات مطالعه از توزیع نرمال پیروی می کنند

ادعای سادگی امتحان رد می شود

(۴ ساعت در بازه بدست آمده نیست)

سوال ۲) سکه را n بار پرتاب می‌کنیم و k دفعه شیر می‌آید و $n-k$ دفعه خط (الف) $n=11$ و $k=2$ برسی فرضیه سالم بودن سکه با سطح اهمیت ۰.۰۵ درصد

H_0 : تاس سالم است و $\alpha = 0.05 \iff P_{Head} = P_{Tail} = \frac{1}{2}$

H_1 : تاس ناسالم است و $P_{Head} \neq P_{Tail} \neq \frac{1}{2}$ X : مقدار شیرها

تعداد بالایی پرتاب‌ها \leftarrow طبق قضیه مرکزی، X از توزیع نرمال پیروی می‌کند

$X = \sum_{i=1}^n X_i$ و $X_i \sim \text{bernouly}(\frac{1}{2}) \Rightarrow E[X] = \frac{n}{2}$

$X \sim N(E[X], \text{var}(n))$ $\text{var}(n) = n \sigma_{X_i}^2 = n p (1-p) = \frac{n}{4}$

$\Rightarrow Z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{var}(n)}} = \frac{2}{\sqrt{n}} (n - \frac{n}{2}) \iff \frac{\sqrt{n}}{2} Z + \frac{n}{2} = X$

$Z \sim N(0, 1) \Rightarrow P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$ پس بدست می‌آوریم:

با جایگذاری X خواهیم داشت:

$P(\frac{-\sqrt{n}}{2} 1.96 + \frac{n}{2} < X < \frac{+\sqrt{n}}{2} 1.96 + \frac{n}{2}) = 0.95$

می‌دانیم X باید صحیح باشد پس بازه‌ی اطمینان آن را بدست می‌آوریم:

$P(\frac{-9}{2} \times 1.96 + \frac{11}{2} < X < \frac{9}{2} \times 1.96 + \frac{11}{2}) = 0.95$

\Rightarrow k در این بازه نیست پس \Rightarrow بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی X : $[2, 5]$ سکه سالم نیست.

ب) $n=16$ و $\alpha=0.05 \iff$ ۹۵ درصد اطمینان $K_1 \leq k \leq K_2$

$\Rightarrow 1.96 \leq \frac{X-n}{\sqrt{n}} \leq 1.96 \Rightarrow 4.02 \leq X \leq 11.92$

\Rightarrow به اعداد صحیح تبدیل می‌کنیم $K_2=12$ $K_1=4$ $\bar{X} = [4, 12]$

سؤال ۳) الف - H_0 : میانگین امتیازات دانشجویان بیشتر یا مساوی $3/5$ است
 H_1 : میانگین امتیازات دانشجویان کمتر از $3/5$ است

ب -

$$\bar{X} = \frac{1\% + 2(100) + 3(200) + 4(220) + 5(140)}{1000} = 3.122$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} (\sum x_i^2 - n \bar{x}^2) \approx 1/49 \Rightarrow S \approx 1/22$$

$$\Rightarrow t\text{-value} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} = -7/244$$

$$\Rightarrow p\text{-value} = 4/207 \times 10^{-13} < 0.05 \quad \alpha = 0.05$$

ج - فرضیه رد می شود و

فرض H_1 درست است

سؤال ۴

$$X \sim \text{bern}(\mu)$$

$$Y \sim \text{binomial}(n, \mu)$$

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

الف

$$\alpha = P(\text{درست بودن فرض صفر} \mid \text{فرض صفر}) = P\left(\frac{Y}{n} > 0.12 \mid \mu = 0.1\right)$$

$$\Rightarrow P(Y > 1 \mid \mu = 0.1) = 1 - P(Y = 1 \cup Y = 0 \mid \mu = 0.1) = 1 - P(Y = 1 \mid \mu = 0.1) - P(Y = 0 \mid \mu = 0.1)$$

$$\Rightarrow P(Y = k \mid \mu = p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 - 0.122805 - 0.10709 = 0.77011 \quad \text{احتمال خطای نوع I}$$

ب

$$P(\text{رد فرض صفر} \mid \mu = 0.2) = P\left(\frac{Y}{n} > 0.12 \mid \mu = 0.2\right)$$

$$\Rightarrow = P(Y > 1 \mid \mu = 0.2) = 1 - P(Y = 1 \mid \mu = 0.2) - P(Y = 0 \mid \mu = 0.2)$$

$$= 1 - 0.1494 - 0.32768 = 0.52292$$

سوال ۵: H_0 : ادعای درست باشد و تمیزات مجازی و صفوری تفاوت قابل توجهی نداشته باشند
 H_1 : ادعای درست نباشد و تمیزات مجازی و صفوری تفاوت قابل توجهی داشته باشند
 از اوغباری که فرض H_1 دو طرفه است، به آزمون دو طرفه نیاز داریم.

ب -

$$\bar{X}_{\text{مجازی}} = 17/875 \quad S^2_{\text{مجازی}} = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x}_{\text{مجازی}})^2 \approx 1/55$$

$$\bar{X}_{\text{صفوری}} = 14/75 \quad S^2_{\text{صفوری}} = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x}_{\text{صفوری}})^2 \approx 3/92$$

$$T = \frac{\bar{X}_{\text{صفوری}} - \bar{X}_{\text{مجازی}}}{\sqrt{\frac{S^2_{\text{صفوری}}}{n} + \frac{S^2_{\text{مجازی}}}{n}}} = \frac{14/75 - 17/875}{\sqrt{\frac{3/92}{8} + \frac{1/55}{8}}} = -3/77$$

فرض صفر رد می شود $\Rightarrow p\text{-value} = 0/002 < 0/05 \Rightarrow$ degree of freedom = $2n - 2 = 14$

(ب) پس ادعای فرد درست نیست و تمیزات مجازی و صفوری تفاوت قابل توجهی دارند

مسئله ۶) بازی با ۳ بار پرتاب متوالی یک تاس \Rightarrow امتیاز برابر است با تعداد ۶های مشاهده شده

H_0 : تاس سالم است H_1 : تاس ناسالم است \Rightarrow بازه ۹۵٪ دوپای تعداد ۶ها جهت می آویزم

۱۰۰ بار آزمایش \leftarrow ۳ بار انداختن تاس \leftarrow ۷۴ بار ۶ آمدن (ترتیب مهم نیست و ۳ تاس را انداختیم)

$$\Rightarrow X_i = \begin{cases} 0 & \text{تاس غرضی} \\ 1 & \text{تاس ۶} \end{cases} \Rightarrow X_i \sim \text{bern}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{5}{36}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{6}$$

$$X = \sum_{i=1}^{300} X_i \xrightarrow{\text{حد مرکزی}} Z = \frac{X - nE[X_i]}{\sqrt{n \text{Var}(X_i)}}$$

$$\Rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{X - 300 \times \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1500}{36}}} = \frac{(n-50)(\frac{1}{6})}{10\sqrt{15}} \Rightarrow X = \frac{10}{9}\sqrt{15}Z + 50$$

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95 \Rightarrow P(43.15 < X < 56.85) = 0.95$$

\Rightarrow بازه اطمینان ۹۵ درصدی: $[43, 57]$

۷۴ بار ۶ آمده پس با $\alpha = 0.05$ به این نتیجه می‌رسیم که تاس سالم نیست و فرض ۵ رد می‌شود

A_i : تعداد بازی های با دقیقه i تا $i+1$

Chi-Square test

سؤال ۴ با راه حل

$$A_0 = 47$$

$$A_1 = 35$$

$$A_2 = 10$$

$$A_3 = 3$$

X_i : احتمال مساهمه دقیقه i تا $i+1$

$$P(X_i) = \binom{3}{i} \frac{0.2^i}{0.8^3}$$

$$E[X_i] = 100 \cdot P(X_i) = \binom{3}{i} \frac{100 \times 0.2^i}{0.8^3}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} E[X_0] &= 57.19 \\ E[X_1] &= 34.38 \\ E[X_2] &= 6.19 \\ E[X_3] &= 0.44 \end{aligned}$$

$$\text{Chi-Square test: } \chi^2 = \sum_{i=0}^3 \frac{(A_i - E[X_i])^2}{E[X_i]} = 25.42$$

$$\chi^2 \sim \chi^2_{(3)}$$



$$\Rightarrow p\text{-value} = 1 - P_{\chi^2_{(3)}}(x \leq 25.42) \approx 10^{-5}$$

(یعنی پس می‌گوییم که فرض سالم بودن قانس رد می‌شود)