مسئله‌ی ۱.

متغیرهای تصادفی X و Y را درنظر بگیرید. توزیع توأم این دو متغیر تصادفی به صورت زیر است :

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ۶e^{-(۲x+۳y)} & x,y \geqslant ۰ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

الف

آیا X و Y مستقل هستند؟

ب

مقدار عبارت زیر را پیدا کنید.

$$\mathbb{E}[Y|X > ۲]$$

ج

احتمال خواسته شده را محاسبه کنید.

$$\mathbb{P}[X > Y]$$

حل.

الف

در ابتدا توزیع هرکدام از X و Y را محاسبه میکنیم.

$$f_X(x) = \int_۰^\infty ۶e^{-(۲x+۳y)}\,dy = ۲e^{-۲x}$$

$$f_Y(y) = \int_۰^\infty ۶e^{-(۲x+۳y)}\,dx = ۳e^{-۳y}$$

با توجه به اینکه $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ میتوانیم بگوییم که X و Y مستقل میباشند.

ب

با توجه به اینکه X و Y مستقل میباشند شرط موجود در مقدار امیدریاضی بی‌تاثیر میباشد بنابراین داریم

$$\mathbb{E}[Y|X > ۲] = \mathbb{E}[Y] = \frac{۱}{\lambda} = \frac{۱}{۳}$$

ج

با انتخاب بازه‌های مناسب برای انتگرال میتوانیم مقدار احتمال خواسته شده را به دست آوریم.

$$\mathbb{P}[X > Y] = \int_{۰}^{\infty} \int_{y}^{\infty} ۶e^{-(۲x+۳y)}\,dx\,dy = \int_{۰}^{\infty} ۶e^{-۳y}e^{-۲y}\,dy = \frac{۳}{۵}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۲.

توزیع توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر است. با توجه به توزیع به موارد زیر پاسخ دهید.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leqslant y \leqslant ۱ \quad \text{and} \quad |x| \leqslant y \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

الف

مقدار $Cov(X, Y)$ را محاسبه کنید.

ب

بررسی کنید که آیا X و Y از هم مستقل هستند یا خیر ؟
حل.

در ابتدا توزیع X و Y را به طور جداگانه بدست می‌آوریم.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{|x|}^{۱} dy & -۱ \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases} = \begin{cases} ۱ - |x| & -۱ \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-y}^{y} dx & ۰ \leqslant y \leqslant ۱ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases} = \begin{cases} ۲y & ۰ \leqslant y \leqslant ۱ \\ ۰ & \text{o.w} \end{cases}$$

الف

حال با توجه به توزیع‌های بدست آمده مقدار میانگین هرکدام را حساب میکنیم.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-۱}^{۱} x(۱ - |x|)\,dx = ۰$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{۰}^{۱} ۲y^{۲}\, dy = \frac{۲}{۳}$$

حال با استفاده از LOTUS مقدار $\mathbb{E}[XY]$ را محاسبه میکنیم.

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{۰}^{۱} \int_{-y}^{y} xy\, dx\, dy = \int_{۰}^{۱} (۰)\, dy = ۰$$

از مقادیر بدست آمده میتوانیم نتیجه بگیریم که $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = ۰$

ب

با توجه به اینکه $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ میتوانیم نتیجه بگیریم که این دو متغیر تصادفی مستقل نمیباشند. دقت کنید که از $Cov(X,Y) = ۰$ نمیتوانیم نتیجه بگیریم که این دو متغیر تصادفی مستقل هستند چرا که استقلال شرط قویتری میباشد. $\triangleright$

موفق باشید :)