

Prove $E[aX + b] = aEX + b$ (linearity of expectation).

Let $U \sim \text{Uniform}(0, 1)$ and $X = -\ln(1 - U)$. Show that $X \sim \text{Exponential}(1)$.

Let X be a random variable with PDF given by

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Find the constant c .
- Find EX and $\text{Var}(X)$.
- Find $P(X \geq \frac{1}{2})$.

I roll a fair die n times. Let X be the number of 1's that I observe and let Y be the number of 2's that I observe. Find $\text{Cov}(X, Y)$ and $\rho(X, Y)$. *Hint:* One way to solve this problem is to look at $\text{Var}(X + Y)$.

سه متغیر تصادفی X_1, X_2 و X_3 از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda_i}$ پیروی می کنند.

الف

$E[X_1 + X_2 + X_3 | X_1 > 1, X_2 > 2, X_3 > 3]$ را بر حسب λ_i ها بیابید.

ثابت کنید $Pr(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

ج

$Pr(X_1 = \min(X_1, X_2, X_3))$ را بیابید.

راهنمایی: سعی کنید احتمال خواسته شده را با استفاده از X_1 و $\min(X_2, X_3)$ بیان کنید. توزیع کمینه ی چند متغیر نمایی را به یاد بیاورید و از نتایج قسمت ب استفاده کنید.

فرض کنید که X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع هندسی با پارامتر p باشند.

الف

بدون محاسبات، بنظر شما مقدار عبارت زیر چیست؟

$$P\{X = i | X + Y = n\}$$

راهنمایی: فرض کنید که یک سکه را که با احتمال p رو می‌آید به طور متوالی پرتاب می‌کنیم، اگر بار دومی که سکه رو می‌آید بار n ام باشد، تابع چگالی احتمال اولین باری که سکه رو می‌آید چیست؟

ب

مقدار عبارت بالا را حساب کنید.