آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۱۴۰۰-۱۳۹۹

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: نام افراد

سری ششم

تست های آماری

مسئله‌ی ۱. پایان ترم جبرخطی

ااز ممد آقا به عنوان بالاترین نمره جبرخطی در ترم پیش سوال شده است که برای پایان ترم این درس در هر روز چقدر وقت گذاشته است.او هم جواب داد در ۴ روز قبل از پایان ترم به ترتیب ۵ و ۷و ۸و ۱۰ ساعت درس خوانده است و همچنین معتقد است که پایان ترم به شدت آسون بود. ولی دکتر ربیعی معتقد است قبل از پایان ترم ساده باید هر روز ۴ ساعت درس خواند.

الف

بازه میانگین درس خواندن ممد آقا را با دقت ۹۵ درصد اعلام کنید.

ب

صحت ادعای ممد آقا مبنی بر سادگی امتحان را بررسی کنید.

حل.

الف

می دانیم آماره $\frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}}$ از توزیع تی با درجه آزادی ۳ پیروی میکند و لذا:

$$\mathbb{P}(-۳/۱۸ \leqslant \frac{\hat{\mu}-\mu}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{۴}}} \leqslant ۳/۱۸) \geqslant ۹۵\% \Rightarrow \mathbb{P}(-۳/۳ \leqslant \hat{\mu}-\mu \leqslant ۳/۳) \geqslant ۹۵\%$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(۴/۲ \leqslant \mu \leqslant ۱۰/۸) \geqslant ۹۵\%$$

ب

اگر آماره قسمت قبل را با فرض $\mu = ۴$ محاسبه کنیم به داریم:

$$\frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}} = \frac{۷/۵-۴}{۱/۰۴} = ۳/۳۶$$

که برای درجه آزادی ۳ و آزمون دو طرفه مقدار p-value برابر ۰/۰۴۳ به ما می‌دهد و لذا فرض صفر رد می‌گردد و امتحان ساده نبوده. ▷

مسئله‌ی ۲. سکه نامرغوب

سکه‌ای را n بار پرتاب می‌کنیم و k دفعه شیر می‌آید.با توجه به این آزمایش، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف

فرضیه سالم بودن سکه را به ازای $k = ۲۷$و $n = ۸۱$ با سطح اهمیت ۵ درصد بررسی کنید.

ب

اگر $n = ۱۶, \alpha = ۰/۰۵$ باشد،$k_۱, k_۲$ را به گونه‌ای بیابید که فرض سالم بودن سکه پذیرفته شود.

$$k_۱ \leqslant k \leqslant k_۲$$

حل.

الف

اگر فرض صفر را برابر سالم بودن سکه در نظر بگیریم توزیع سکه ها میانگین ۰/۵ و واریانس ۰/۲۵ خواهد داشت و بنابر قضیه حد مرکزی آماره زیر از توزیع نرمال استاندارد پیروی خواهد کرد:

$$z_{value} = \frac{\frac{۲۷}{۸۱} - ۰/۵}{\frac{۰/۵}{\sqrt{۸۱}}} = -۳$$

و لذا فرض سالم بودن سکه رد می شود.

ب

بنابر قضیه حدمرکزی می‌دانیم که اگر k تعداد سکه های رو آمده باشد آماره $\frac{\frac{k}{۱۶} - ۰/۵}{\frac{۰/۵}{\sqrt{۱۶}}}$ از توزیع نرمال استاندارد پیروی می‌کند. و لذا برای ساختن بازه اطمینان می‌نویسیم:

$$z_{\frac{\alpha}{۲}} \leqslant \frac{k - ۸}{۲} \leqslant z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \Rightarrow ۴ \leqslant k \leqslant ۱۲$$

۲ $\triangleright$

مسئله‌ی ۳. استاد محبوب

استاد یکی از درس های دانشکده ریاضی ادعا میکند من از نظر دانشجویانم حتما امتیازی بالای ۷۰ درصد دارم. در پی این موضوع دانشجویان نظرسنجی بین ۱۰۰۰ نفر از دانشجویان این استاد انجام میدهند و به آن ها می‌گویند از ۱ تا ۵ به او نمره بدهند. نتایج به دست آمده به شرح زیر است:

۱	۲	۳	۴	۵
۱۴۰	۱۰۰	۳۰۰	۳۲۰	۱۴۰

الف

فرض صفر و فرض جایگزین را بیان کنید.

ب

با استفاده از t-test مقدار p-value را به دست آورید.

ج

با در نظر گرفتن خطای نوع اول ۵ درصد ادعای این استاد را مورد بررسی قرار دهید.

حل.

الف

فرض صفر این گونه خواهد بود که استاد از نظر دانشجویانش امتیاز ۷۰ دارد و فرض جایگزین یعنی امتیاز استاد از نظر دانشجویانش کمتر از ۷۰ می باشد. چون فقط کمتر بودن امتیاز برای ما مهم است از آزمون یک طرفه استفاده می‌کنیم.

ب

ابتدا میانگین و واریانس نمونه را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{x} = ۳/۲۲, \hat{\sigma} = ۱/۴۹$$

حال آماره t را محاسبه می‌کنیم:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} = \frac{۰/۲۸}{\frac{۱/۴۹}{\sqrt{۱۰۰۰}}} = ۷/۲۵$$

که با درجه آزادی ۹۹۹ مقدار p-value بسیار کمتر از۰/۰۵ را به ما می‌دهد.

ج

با توجه به این که p-value کمتر از ۰/۰۵ حاصل شد ادعای استاد رد می‌گردد. ▷

مسئله‌ی ۴. سمپل برنولی

متغیر تصادفی X از توزیع برنولی با پارامتر μ پیروی میکند.برای آزمون فرض ۵ سمپل از این توزیع را در نظر میگیریم و اگر میانیگن آن ها بیشتر از ۰/۲ بود فرض صفر $\mu = ۰/۱$ را رد میکنیم.

الف

احتمال ارتکاب خطای نوع اول چقدر است؟

ب

اگر واقعا $\mu = ۰/۲$ به چه احتمالی فرض صفر را رد می‌کنیم.

حل.

الف

این که میانگین سمپل ها بزرگتر از ۰/۲ با شد معادل این است که جمع آن ها بزرگتر از ۱ باشد. با توجه به این که هر کدام از سمپل ها از توزیع برنولی پیروی می‌کند جمع آن ها از توزیع دوجمله‌ای پیروی خواهد کرد:

$$\mathcal{P}(\sum x_i) > ۱ = ۱ - \mathcal{P}(\sum x_i = ۰) - \mathcal{P}(\sum x_i = ۱) = ۱ - (۰/۹)^۵ - ۵ * (۰/۱) * (۰/۹)^۴ = ۰/۰۸$$

ب

کافیست محاسبات بالا را برای توزیع برنولی با پارامتر ۰/۲ انجام دهیم.

$$\mathcal{P}(\sum x_i) > ۱ = ۱ - \mathcal{P}(\sum x_i = ۰) - \mathcal{P}(\sum x_i = ۱) = ۱ - (۰/۸)^۵ - ۵ * (۰/۸) * (۰/۲)^۴ = ۰/۲۶$$

▷

مسئله‌ی ۵. دردسر های حضوری

فردی ادعا کرده که نمرات دانشجویان در ترم های مجازی تفاوت قابل توجهی با نمرات در ترم های حضوری ندارد. برای سنجش صحت این ادعا، بخشی از نمرات درس ریاضی را در دو ترم مختلف بررسی خواهیم کرد. فرض کنید واریانس نمرات در ترم مجازی و حضوری یکسان است.

ترم حضوری	۱۷	۱۴	۱۲	۱۵	۱۴	۱۵	۱۸	۱۳
ترم مجازی	۱۷	۱۸	۱۶	۱۸	۱۹	۱۷	۲۰	۱۸

الف

فرض صفر و فرض جایگزین را مطرح کرده و با ذکر دلیل معین کنید آیا نیاز به آزمون یک طرفه هست یا دو طرفه.

ب

با استفاده از t-test مقدار p-value را محاسبه کنید. آیا با سطح اهمیت ۵ درصد ادعای این فرد رد می‌شود؟

حل.

الف

$$H_۰ : \mu_۱ = \mu_۲, H_۱ : \mu_۱ \neq \mu_۲$$

نیاز به آزمون دو طرفه است.

ب

از تی تست برای حل سوال استفاده می‌کنیم.

$$\bar{X_۱} = ۱۴/۷۵, S_{x_۱}^۲ = ۳/۹۲۸۵$$

$$\bar{X_۲} = ۱۷/۸۷۵, S_{x_۲}^۲ = ۱/۵۵۳۵$$

$$t = \frac{\hat{X}_۱ - \hat{X}_۲}{\sqrt{\frac{S_{x_۱}^۲ + S_{x_۲}^۲}{۸}}} = -۳/۷۷۵۰$$

که اگر در جدول t-score با ۱۴ درجه آزادی نگاه کنیم مقدار p-value متناظر برابر ۰/۰۰۲ خواهد بود و لذا با سطح اهمیت ۵ درصد ادعای این فرد رد می‌شود. ▷

مسئله‌ی ۶. قمارباز طماع

قماربازی در حال انجام یک بازی است که شامل سه بار پرتاب متوالی یک تاس می‌باشد. امتیاز قمار باز دقیقا برابر تعداد ۶ های مشاهده شده خواهد بود.پس از انجام ۱۰۰ آزمایش تعداد دفعاتی که ۰ تا ۳ بار ۶ آمده در جدول زیر یادداشت شده‌اند.

۰	۱	۲	۳
۴۷	۳۵	۱۵	۳

عادلانه بودن تاس را با استفاده از تست های آماری بررسی کنید.

حل. تعداد تاس های ۶ آمده از توزیع برنولی با پارامتر $\frac{۱}{۶}$ پیروی میکند.و لذا مقدار مورد انتظار ما برای تعداد دفعات وقوع هر تعداد برابر خواهد بود با:

$$\mathbb{P}(X = ۰) = \frac{۵}{۶}^{۳} = \frac{۱۲۵}{۲۱۶} = ۰/۵۷۹$$

$$\mathbb{P}(X = ۱) = \binom{۳}{۱}\frac{۵}{۶}^{۲} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۷۵}{۲۱۶} = ۰/۳۴۷$$

$$\mathbb{P}(X = ۲) = \binom{۳}{۲}\frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۶}^{۲} = \frac{۵}{۲۱۶} = ۰/۰۶۹$$

$$\mathbb{P}(X = ۳) = \frac{۱}{۶}^{۳} = \frac{۱}{۲۱۶} = ۰/۰۰۴۶$$

حال آماره $\chi^۲$را برای مشاهدات محاسبه می‌کنیم.

$$\chi^۲ = \frac{(۴۷ - ۵۸)^۲}{۵۸} + \frac{(۳۵ - ۳۴/۵)^۲}{۵۸} + \frac{(۱۵ - ۷)^۲}{۷} + \frac{۳ - ۰/۵)^۲}{۰/۵} = ۲/۰۸ + ۰/۰۰۷ + ۹/۱۴ + ۱۲/۵ = ۲۳/۷۲۷$$

با بررسی مقدار به دست آمده با مقدار متناظر ۵ درصد در جدول $\chi^۲$ با درجه آزادی ۳ که برابر ۷/۸۱۵ می باشد فرض سالم بودن تاس رد می‌شود. ▷

نکات مهم

- بخش تئوری را در قالب یک فایل pdf با اسم HW#_[STD-Num] آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ... می‌باشد.
-

موفق باشید :)