



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری یازدهم

مسئله‌ی ۱*. جایگشت

محمد که در حال مرور درس‌های گذشته‌اش بود، با یک سوال مواجه می‌شود. صورت سوال به شکل زیر است: مسئله مرتب سازی را در نظر بگیرید. فرض کنید اعداد به صورت دقیق مشخص نیستند. در عوض برای هر عدد، یک بازه‌ی بسته روی اعداد حقیقی داریم که می‌دانیم آن عدد متعلق به آن بازه است. یعنی n بازه به صورت $[a_i, b_i]$ داریم، که در آن $a_i \leq b_i$. هدف این است که این بازه‌ها مرتب کنیم؛ یعنی یک جایگشت $\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle$ از بازه‌ها بسازیم به طوری که برای هر $j = 1, 2, \dots, n$ ، مقادیر $c_j \in [a_{i_j}, b_{i_j}]$ موجود باشند که در نامساوی $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ صدق کنند. فرض کنید که هر بازه، حداقل با $d-1$ بازه‌ی دیگر هم‌پوشانی داشته باشد. الگوریتمی از $O(n \log(\frac{n}{d}))$ ارائه دهید که این n بازه با درجه d را مرتب کند. بدین ترتیب، اگر $d = \Theta(n)$ باشد، الگوریتم در زمان $O(n)$ اجرا خواهد شد. هم‌چنین اگر $d = \Theta(1)$ باشد، الگوریتم در زمان $O(n \log(n))$ اجرا خواهد شد.

حال محمد که دیگر کلاً این چیزها یادش رفته است، از شما می‌خواهد که راه این سوال را به او بگویید. اگر هم محمد اشتباه می‌کند باید به او ثابت کنید که این کار شدنی نیست. (یگانه قره‌داغی)

مسئله‌ی ۲*. نابه‌جا

۱. در یک آرایه، یک نابه‌جایی برابر یک جفت جایگاه است که عدد داخل جایگاه اولی بزرگتر از عدد داخل جایگاه دومی باشد. برای مثال در یک آرایه مرتب‌شده تعداد نابه‌جایی‌ها برابر صفر است و در یک آرایه مرتب‌شده برعکس، این تعداد برابر $\binom{n}{2}$ است. ثابت کنید اگر تعداد نابه‌جایی‌های یک آرایه d باشد و بخواهیم از الگوریتم sort insertion استفاده کنیم، عملیات مرتب‌سازی در $O(n + d)$ انجام می‌شود.

۲. حال فرض کنید یک آرایه‌ی نامرتب داریم به طوری که هر عضو با جای اصلی خود حداکثر ۱۰ خانه فاصله دارد. برای مثال عدد کمینه حداکثر در اندیس ۱۰ است. با ارائه روشی مناسب برای مرتب‌سازی ثابت کنید این کار در زمان $O(n)$ ممکن است.

(یگانه قره‌داغی)

مسئله‌ی ۳. میانه

در دنیایی فرضی، می‌توان میانه یک آرایه با n عضو را در $O(\sqrt{n})$ بدست آورد. آیا می‌توان با استفاده از این قابلیت یک آرایه n عضوی را در $O(n)$ مرتب کرد؟

مسئله ۴*. کوئری

الگوریتمی را توصیف کنید که روی n عنصر از ۱ تا k که به عنوان ورودی دریافت می‌کند، پیش‌پردازشی از $O(n+k)$ انجام می‌دهد و سپس می‌تواند هر پرسش مربوط به اینکه چه تعداد از این n عنصر در بازه $[a, b]$ قرار می‌گیرند را در $O(1)$ پاسخ دهد. (یگانه قره‌داغی)

مسئله ۵*. بازه مرتب

آرایه‌ای شامل n عدد در بازه‌ی ۱ تا n^4 داریم. الگوریتمی ارائه دهید تا در بدترین حالت این آرایه را در زمان $O(n)$ مرتب کند. (پانید حلواچی)

مسئله ۶*. یک تیر و دو نشان

نشان دهید دومین کوچکترین عضو یک آرایه با n عدد را می‌توان با $2 - \lceil \log n \rceil + n$ مقایسه در بدترین حالت یافت.

مسئله ۷*. حد پایینی برای تعداد مقایسه‌ها

نشان دهید حد پایین تعداد مقایسه‌های موردنیاز برای تعیین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با $2 - \lceil \frac{3n}{4} \rceil$. (پانید حلواچی)

مسئله ۸*. شبکه‌ی اجتماعی

فرض کنید می‌توانیم یک شبکه‌ی اجتماعی را با یک ماتریس مجاورت $n \times n$ مدل‌سازی کنیم که n نشان‌دهنده‌ی تعداد افراد ثبت‌نامی در شبکه است. روابط در شبکه‌ی اجتماعی ۱ طرفه است و می‌خواهیم ببینیم آیا سلبریتی‌ای در این شبکه ثبت‌نام کرده است یا خیر. سلبریتی کسی است که تمام افراد شبکه با او آشنا هستند ولی او با کسی آشنا نیست. الگوریتمی با زمان $O(n)$ پیدا کنید که وجود یا عدم وجود سلبریتی را مشخص کند. (آریا جلالی)

مسئله ۹*. مشت و مال گراف

فرض کنید برای فرآیند استخدام در یک شرکت، ابتدا باید گراف G چند تغییر جزئی یابد. به دلیل کمبود موقعیت شغلی، لازم است در هر مورد سریع‌ترین زمان ممکن برای انجام این تغییرات را بیابید:

- فرض کنید گراف G به صورت یک لیست همسایگی به ما داده شده است و می‌خواهیم لیست همسایگی گراف G^T را در پیچیدگی زمان $O(|V| + |E|)$ بدست آوریم. برای این کار الگوریتمی پیشنهاد دهید. دقت کنید ماتریس همسایگی گراف G^T از ترانواده کردن ماتریس همسایگی گراف G بدست می‌آید.

- فرض کنید همانند بخش قبل گراف G به صورت یک لیست همسایگی به ما داده شده است و می‌خواهیم لیست همسایگی گراف G^2 را بدست آوریم. الگوریتمی بهینه برای این کار پیشنهاد دهید. دقت کنید اگر بین ۲ راس u و v گراف G مسیری به طول حداکثر ۲ وجود داشته باشد، یال (u, v) در گراف G^2 وجود خواهد داشت.

(آریا جلالی)