



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تقریرین سری دهم

مسئله‌ی ۱*. ضیافت کپل‌ها

جایی در دوردست‌ها، سیاره‌ای هست که در آن موجوداتی به نام کپل زندگی می‌کنند. کپل‌ها به طور کلی به سه دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول عاشق پیتزا، دسته دوم عاشق پاستا و دسته سوم عاشق لازانیا هستند. کپل شاه، تصمیم گرفته است مهمانی بزرگی برگزار کند و n کپل را به مراسم دعوت کند. برای چیدن میز غذاها، کپل شاه تصمیم گرفته است که مهمانان را جوری مرتب کند که دسته اول در سمت چپ، دسته دوم وسط و دسته سوم در سمت راست قرار گیرند. از آنجایی که کپل‌ها با دیدن غذا هوش و حواسشان را از دست می‌دهند، فقط دو نوع عملیات را می‌توانیم روی آنها انجام دهیم:

۱. می‌توانیم غذایی که دوست دارند را از آن‌ها بپرسیم پس عملیات $ask(i)$ از کپل i ام، غذای مورد علاقه‌اش را می‌پرسد.

۲. می‌توانیم هر بار از دو تای آنها بخواهیم جایشان را با یکدیگر عوض کنند پس عملیات $Swap(i, j)$ جای کپل i و j را با هم عوض می‌کند.

* هر عملیات چند ثانیه زمان نیاز دارد

الگوریتمی ارائه دهید که این مرتب‌سازی را در $O(n)$ ثانیه انجام دهد همچنین حافظه ما محدود است و در هر لحظه فقط ۷ عدد از بین اعداد ۰ تا $n - ۱$ را می‌توانیم حفظ کنیم. درستی الگوریتم خود را از نظر حافظه و زمان اثبات کنید. (پوریا ممتاز)

مسئله‌ی ۲. ناظم برجسب‌گذار

ناظم یک مدرسه، دانش آموزان یک کلاس را به صف کرده است و می‌خواهد دانش آموزان را به شکلی در این صف مرتب کند که آن‌هایی که معدل بالای ۱۰ دارند در جلوی صف و آن‌هایی که معدلشان زیر ۱۰ است پشت این گروه قرار بگیرند اما در عین حال نمی‌خواهد ترتیب قرار گیری معدل‌های زیر ۱۰ نسبت به هم و معدل‌های بالای ۱۰ نسبت به هم، خراب شود و صرفاً قرار است این دو گروه از هم جدا شوند و نیازی به مرتب‌سازی اعضا در هر گروه نیست و جایگاه آنها نسبت به یکدیگر باید ثابت بماند. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n \log n)$ و با حافظه اضافه $O(n)$ این مساله را برای ناظم حل کند.

مسئله‌ی ۳*. تابلوی جوان

تابلوی young یک ماتریس $N * N$ است که ورودی‌های هر سطر از چپ به راست و ورودی‌های هر ستون از بالا به پایین مرتب شده‌اند.

۱. الگوریتمی ارائه دهید که با استفاده از یک تابلوی young N در N^2 ، عدد را در زمان $O(N^3)$ به صورت صعودی مرتب کند.

۲. الگوریتمی ارائه دهید که یک عدد داده شده را در تابلوی young پیدا کند. الگوریتم خود را تحلیل کنید.

(پوریا ممتاز)

مسئله‌ی ۴*. ایستگاه قطار

جدول زمان‌بندی ایستگاه قطاری به ما داده شده است به طوری که ساعت ورود و خروج n قطار در دو لیست مجزا موجود است. می‌خواهیم حداقل تعداد سکوها مورد نیاز برای توقف قطارها را حساب کنیم تا آنها بدون تداخل بر اساس جدول زمان‌بندی وارد و خارج شوند. الگوریتمی از زمان $O(n \log n)$ ارائه دهید تا این مساله را برای n قطار حل کند. (پوریا ممتاز)

مسئله‌ی ۵*. جابه‌جایی پر در درسر

یک آرایه از اعداد صحیح داریم که همه اعداد آن مرتب شده هستند اما فقط جای دو عدد با هم عوض شده است و ترتیب را به هم ریخته است. الگوریتمی خطی برای مرتب سازی کامل این آرایه ارائه دهید و زمان و حافظه استفاده شده الگوریتم خود را تحلیل کنید. (پوریا ممتاز)

مسئله‌ی ۶*. مرتب‌سازی ترکیبی

در جلسات گذشته با روش مرتب‌سازی سریع آشنا شدیم. در این پرسش قرار است با یک روش مرتب‌سازی جدید آشنا شده و آن را تحلیل کنیم. در این روش ابتدا پارامتر $K \geq 1$ را انتخاب می‌کنیم. سپس در صورتی که اندازه آرایه‌ای که می‌خواهیم آن را مرتب کنیم از K بزرگ‌تر باشد ($n > K$) آن را به شیوه مرتب‌سازی سریع مرتب می‌کنیم و در غیر این صورت آن را به شیوه مرتب‌سازی درجی مرتب می‌کنیم. با توجه به مقدار پارامتر K زمانی اجرای این الگوریتم را بررسی کنید. به ازای چه مقادیری از K این الگوریتم در زمان $O(n \log n)$ اجرا می‌شود. (علی ونکی)

مسئله‌ی ۷*. دیوانه

به شما یک DVD داده شده است که در آن n مقدار ذخیره شده است. هدف شما پیدا کردن میانه داده‌های ذخیره شده در این DVD می‌باشد. از آنجایی که این DVD در حالت Read-only می‌باشد، شما نمی‌توانید داده‌های موجود در آن را جابه‌جا کنید. حال الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log n)$ ارائه دهید تا بتوانید با استفاده از آن میانه داده‌های ذخیره شده در این DVD را پیدا کنید. (علی ونکی)

مسئله‌ی ۸. اعداد نزدیک

مجموعه S با تعداد $n \geq 2$ عضو متفاوت مفروض است. برای راحتی کار به ازای مقدار دلخواه k در نظر بگیرید $n = 2^k + 1$. جفت اعداد متفاوت $x, y \in S$ در مجموعه S به هم نزدیک هستند اگر:

$$|x - y| \leq \frac{1}{n-1} (\max_{z \in S} z - \min_{z \in S} z)$$

الف) به شکل کامل توضیح دهید به چه دلیل حتما در مجموعه S حداقل یک جفت نزدیک به هم پیدا می‌شوند.

ب) فرض کنید حول محور $p \in S$ مجموعه S را به دو زیرمجموعه

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in S \mid x \leq p\} \\ S_2 &= \{x \in S \mid x \geq p\} \end{aligned}$$

تقسیم می‌کنیم. نشان دهید هر جفت عضو نزدیک در مجموعه S_1 یا S_2 در مجموعه S هم نزدیک به هم می‌باشند.

ج) الگوریتم با زمان $O(n)$ ارائه دهید تا به وسیله آن بتوانیم یک جفت عدد نزدیک در مجموعه S پیدا کنیم. به شکل واضح توضیح دهید چرا این الگوریتم صحیح می‌باشد و زمان اجرای آن را تحلیل کنید.

مسئله‌ی ۹*. پیچ و مهره

مجموعه‌ای از N پیچ و N مهره با اندازه‌های متفاوت داریم. در این مجموعه هر پیچ به صورت منحصر به فرد متعلق به یک مهره می‌باشد و برعکس. در این مجموعه ما می‌توانیم هر پیچ و مهره را با هم مقایسه کنیم و متوجه شویم که کدام یک بزرگ‌تر می‌باشد. البته امکان مقایسه دو پیچ و یا دو مهره را با یکدیگر در این پرسش نخواهیم داشت. الگوریتم با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ پیدا کنید که به وسیله آن بتوانیم پیچ و مهره متناظر با هم را پیدا کنیم.

(علی ونکی)