



مسئله‌ی ۱. متوازن کن

یک درخت AVL را در نظر بگیرید که در وضعیت متوازن است. فرض کنید عنصری به این درخت اضافه می‌کنیم که آن را از وضعیت متوازن خارج می‌کند. در نتیجه یک و یا چند گره وجود دارند که دیگر شرط متوازن برای آن‌ها صدق نمی‌کند.

الف) یک مثال از این وضعیت بزنید.

ب) نشان دهید که این گره‌ها روی مسیر مشترک نسبت به ریشه‌ی درخت قرار دارند.

پ) با انجام چه عملیات یا عملیات‌هایی می‌توان این درخت را به وضع متوازن برگرداند؟

مسئله‌ی ۲*. توزیع کن

فرض کنید خزانه‌دار دربار هستید و به عنوان خزانه‌دار وظیفه توزیع و نگهداری اموال دربار را برعهده دارید. شما ۳ وظیفه‌ی اصلی دارید.

- کیسه‌ی اموال را دریافت کرده و از آن نگهداری کنید. روی هر کیسه مقدار پولی که درونش است نوشته شده است.

- یکی از کیسه‌ها را به بخش مورد نیاز تحویل دهید.

- بگویید چندتا از کیسه‌هایی که در اختیار دارید، مقدار پولشان در بازه‌ی $[a, b]$ است.

توضیح دهید این وظیفه را به چه صورت می‌توان با درخت AVL انجام داد و مرتبه‌ی زمانی هر کار چقدر است؟

(پویا معینی)

مسئله‌ی ۳*. شمارش

فرض کنید آرایه‌ای به طول n به شما داده می‌شود. حال الگوریتمی از $O(n \log n)$ طراحی کنید که تعداد عناصری که از همه‌ی عناصر قبل خود بیشتر و حداقل از k عنصر سمت راست خود بیشتر باشد را محاسبه کند.

(پویا معینی)

مسئله‌ی ۴*. بشمار

فرض کنید آرایه‌ی $arr[]$ را در اختیار دارید که شامل اعداد صحیح غیر تکراری است. آرایه‌ی $temp[]$ را به گونه‌ای بسازید که $temp[i]$ برابر تعداد عناصر سمت راست عنصر $arr[i]$ باشد به گونه‌ای که از این عدد کوچکتر باشند. توضیح دهید ساخت این آرایه با درخت AVL به چه صورت است و مرتبه‌ی زمانی آن را نیز به دست آورید.
(پویا معینی)

مسئله‌ی ۵*. مسئله باغبانی ۱

در یک مسابقه باغبانی با m شرکت‌کننده، به هر باغ امتیازی داده می‌شود و قرار است که به k باغ برتر از لحاظ امتیاز، جایزه‌ای اهدا شود. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(m + k \log m)$ برای پیدا کردن k باغ برتر ارائه دهید.
(امیررضا باقری)

مسئله‌ی ۶*. مسئله باغبانی ۲

پس از اعتراض به نحوه انتخاب افراد برتر در مسابقه باغبانی ۱، تصمیم گرفته می‌شود که به باغ‌هایی جایزه تعلق بگیرد که حداقل x امتیاز کسب کرده باشند. فرض کنید که یک هرم بیشینه از باغ‌ها بر اساس امتیازشان داریم. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n_x)$ برای پیدا کردن باغ‌های واجد شرایط ارائه دهید. (n_x تعداد باغ‌های واجد شرایط است) (امیررضا باقری)

مسئله‌ی ۷*. تحلیل هرم‌های k تایی

هرم k تایی شبیه هرم دودویی است، ولی با این استثنا که گره‌های غیر برگ، به جای دو فرزند، k فرزند دارند.
الف) هرم k تایی را چگونه در آرایه نشان می‌دهید؟
ب) ارتفاع هرم k تایی با n عنصر، برحسب n و k چیست؟
ج) پیاده‌سازی بهینه‌ای از deleteMin برای هرم کمینه k تایی ارائه دهید. زمان اجرای آن را برحسب k و n تحلیل کنید.
د) پیاده‌سازی بهینه‌ای از insert برای هرم کمینه k تایی ارائه دهید. زمان اجرای آن را برحسب k و n تحلیل کنید.
ه) یکی از روش‌های تبدیل یک آرایه با n عنصر، به یک هرم کمینه k تایی، یکی یکی اضافه کردن عناصر به هرم است. نشان دهید که در بدترین حالت، این الگوریتم از مرتبه زمانی $\Omega(n \log n)$ پیروی می‌کند.
(امیررضا باقری)

مسئله‌ی ۸*. عنصریابی

در یک هرم بیشینه با n عنصر، الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(k \log k)$ ارائه دهید که k امین عنصر بزرگ هرم را بیابد و خروجی دهد. (امیررضا باقری)