



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهاردهم

مسئله‌ی ۱*. درخت پوشای بیشینه

درخت پوشای بیشینه در یک گراف وزن‌دار، همبند و بدون جهت، درختی با بیشینه‌ی مجموع وزن یال‌هاست که شامل تمام رئوس گراف است و همه‌ی یال‌های آن از یال‌های گراف اصلی انتخاب شده‌اند. با این توصیف اگر الگوریتم کراسکال را تنها با ایجاد این تفاوت اجرا کنیم که در هر مرحله به جای سبکترین یال، سنگین‌ترین یال را انتخاب کند، آیا برای گراف ورودی یک درخت پوشای بیشینه حاصل می‌شود؟ اگر بله ادعای خود را ثابت کنید. اگر نه مثال نقض بیاورید. (محمدعلی محمدخانی)

مسئله‌ی ۲*. تخریب درخت

فرض کنید G یک گراف همبند، وزن‌دار و بدون جهت است که T یکی از درخت‌های پوشای کمینه‌ی آن است. اکنون وزن یال e از گراف G را تغییر می‌دهیم.

توضیح دهید در چه صورت تغییر وزن یال e منجر می‌شود T دیگر درخت پوشای کمینه نباشد.

در شرایطی که در اثر تغییر اعمال شده، T دیگر درخت پوشای کمینه نباشد، الگوریتمی بهینه ارائه دهید که با ایجاد کمترین تغییرات در T آن را به درخت پوشای کمینه‌ی گراف G تبدیل کند. توجه کنید که بدیهتاً نباید وزن هیچ‌یک از یال‌های گراف G را تغییر دهید. (محمدعلی محمدخانی)

مسئله‌ی ۳*. درخت کوتاه‌ترین مسیر

گراف G و راس v از این گراف را در نظر بگیرید. درخت کوتاه‌ترین مسیر راس v زیر درختی از گراف است که شامل یال‌هایی از گراف است که در کوتاه‌ترین مسیر از v به سایر راس‌ها مشارکت دارند. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان مناسب برای یک گراف با یال‌های با وزن مثبت و زیردرخت داده‌شده T از آن بررسی کند که آیا T درخت کوتاه‌ترین مسیر راس v از گراف G است؟ (محمدعلی محمدخانی)

مسئله‌ی ۴. مسیر کمینه

آیا مسیر بین دو راس در درخت پوشای کمینه لزوماً کوتاه‌ترین مسیر بین این دو راس در گراف است؟ اگر آری، اثباتی ارائه دهید. در غیر این صورت مثال نقضی ذکر کنید.

فرض کنید وزن یال‌های این گراف دو به دو متمایز هستند. آیا مسیر بین دو راس در درخت پوشای کمینه لزوماً کوتاه‌ترین مسیر بین این دو راس در گراف است؟ اگر آری، اثباتی ارائه دهید. در غیر این صورت مثال نقضی ذکر کنید.

مسئله‌ی ۵*. یال اضافه

فرض کنید گراف وزن‌دار G ، درخت پوشای کمینه‌ی T را دارد (این گراف n راس و m یال دارد). اگر یال $e = (u, v)$ با وزن w را به این گراف اضافه کنیم، الگوریتمی ارائه دهید که درخت پوشای کمینه گراف $G + e$ را پیدا کند. الگوریتم شما باید در زمان $O(n)$ اجرا شود. (محمد جعفری)

مسئله‌ی ۶*. ایستگاه مخابراتی

شرکت مخابرات می‌خواهد n ایستگاه مخابراتی در سطح کشور را به هم متصل کند. هر جفت از این ایستگاه‌های مخابراتی دارای پهنای باندی متفاوت است. شرکت مخابرات می‌خواهد با انتخاب کردن $n - 1$ کانال ارتباطی این کار را انجام دهد به طوری که پهنای باند کل (مجموع پهنای باند کانال‌های انتخاب شده) بیشینه باشد. الگوریتم بهینه‌ای برای این مسئله ارائه دهید. (گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید که در آن، V مجموعه ایستگاه‌های مخابراتی، E مجموعه کانال‌های میان ایستگاه‌ها و $w(e)$ پهنای باند کانال e است.) (محمد جعفری)

مسئله‌ی ۷*. گراف صحیح

گراف G با n راس و m یال را در نظر بگیرید. اگر وزن همه یال‌ها عدد صحیحی در بازه $[1, n]$ باشد، الگوریتمی ارائه دهید که درخت پوشای کمینه این گراف را در زمان $O(m \log^* n)$ به دست آورد. (محمد جعفری)