



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری سی‌زدهم

مسئله‌ی ۱*. یکی کم یکی زیاد

گرافی بدون جهت را در نظر بگیرید که در آن وزن یال‌ها یکی در میان کم و زیاد میشود. با استفاده از دایکسترا، کوتاه‌ترین مسیر این گراف را (در صورت وجود) بیابید. (سپهر اشرف‌زاده)

مسئله‌ی ۲*. خوش مسیر

فرض کنید یک گراف n راسی و m یالی بدون جهت داریم که هر یال آن دارای آن دو وزن مثبت است. بار اول که از یک یال عبور میکنیم باید به اندازه‌ی وزن بیشتر آن یال هزینه دهیم و بارهای بعدی به اندازه‌ی وزن کمتر هزینه میپردازیم. میخواهیم از راس a شروع کنیم و به راس c برویم و در مسیر از راس b هم عبور کنیم. الگوریتمی از مرتبه $O(n \log(n + m))$ بیابید که مسیر با کمترین وزن را پیدا کند. (سپهر اشرف‌زاده)

مسئله‌ی ۳. ۰ و ۱

فرض کنید گرافی m یالی داریم که مقدار وزن هر یال آن ۰ یا ۱ است. روی هر راس آن کلیدی وجود دارد که در صورت فشردن آن، مقدار وزن تمامی یال‌های متصل به آن راس عوض میشود. آیا میتوان در $O(m \log m)$ مقدار تمامی یال‌ها را برابر با ۰ کرد؟

مسئله‌ی ۴*. آرام‌سازی

فرض کنید G یک گراف وزن‌دار جهت‌دار بدون دور منفی است و به دنبال کوتاه‌ترین مسیرها از رأس مبدأ s هستیم. ثابت کنید یک توالی از $|V| - 1$ آرام‌سازی وجود دارد که برای همه $v \in V$ ، $d[v] = \delta(s, v)$ (همه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها) را تولید می‌کند. (علی مهدوی‌فر)

مسئله‌ی ۵*. مجمع‌الجزایر

کشوری n جزیره دارد که هر جزیره دارای یک مختصات جغرافیایی (x_i, y_i) است. فردی می‌خواهد با شنا کردن از جزیره شماره ۱ به جزیره شماره n برود. او می‌تواند میان هر دو جزیره شنا کند، اما پس از مدتی شنا کردن خسته می‌شود و باید در یک جزیره استراحت کند. به او مسیری پیشنهاد دهید که بیشینه مسافتی که باید بی‌وقفه شنا کند (فاصله بین هر دو جزیره مجاور در مسیر) کمینه شود. (علی مهدوی‌فر)

مسئله ۶*. صرافی

ماتریس $A_{n \times n}$ حاوی نرخ‌های تبدیل n ارز مختلف داده شده است، به گونه‌ای که هر یک واحد ارز شماره i قابل تبدیل به a_{ij} واحد ارز شماره j است. اگر دنباله $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$ از ارزها وجود داشته باشد که نامساوی زیر برقرار باشد:

$$a_{i_1 i_2} \times a_{i_2 i_3} \times \dots \times a_{i_{k-1} i_k} \times a_{i_k i_1} > 1$$

می‌توانیم با داشتن یک واحد پول از ارز i_1 و طی کردن یک دور از تبدیل‌ها، به مقدار بیشتری از پول اولیه برسیم. الگوریتمی ارائه دهید که در صورت وجود چنین دنباله‌ای، آن را نمایش دهد. (علی مهدوی‌فر)

مسئله ۷*. فلوید پیشرفته

گراف وزن‌دار و جهت‌دار $G = (V, E)$ به همراه دو رأس v و w و عدد صحیح $|V| \leq k$ داده شده است. الگوریتمی طراحی کنید که کوتاه‌ترین مسیر (نه لزوماً ساده) از v به w با دقیقاً k یال را بیابد. (علی مهدوی‌فر)