



داده ساختار

نیم سال اول ۹۹-۱۴۰۰
مدیر: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

زمان: ۱۸۰ دقیقه

میان ترم

توضیحات:

- برای پاسخ به سوالات تا ساعت ۱۲ مهلت دارید.
- پاسخ هر کدام از سوالات را بر روی یک برگه جداگانه بنویسید.
- بر روی هر برگ نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی درج شده باشد.
- پاسخ‌های خود را در کوئرا آپلود کنید.
- بعد از ساعت ۹:۳۰ در طول آزمون اگر سوالی داشتید می‌توانید به این لینک گوگل میتینگ وارد شوید.
- اگر در طول آزمون به علت بسته شدن کلاس به بیرون پرتاب شدید، لطفا مجددا بعد از چند دقیقه به کلاس بازگردید.
- اعلان‌های عمومی در کلاس اعلام می‌شود.
- نگران بسته شدن ارسال پاسخ‌ها نباشید. تا زمان ارسال پاسخ توسط آخرین فرد سامانه باز خواهد بود. در صورت هر مشکلی می‌توانید پاسخ‌ها را به ایمیل seddighin.masood@gmail.com ارسال کنید.
- از بند ارسال به ایمیل، صرفا در صورتی که مشکل داشتید استفاده کنید. جهت حصول اطمینان نیاز نیست که مجددا به ایمیل هم ارسال کنید!

مسئله‌ی ۱. پیاده‌سازی صف با استک (۲۰ نمره)

یک صف را با استفاده از دو استک پیاده‌سازی کنید و نشان دهید هزینه سرشکن هر عمل enq و یا deq در صف برابر $O(1)$ است. این امر را با استفاده از تابع پتانسیل انجام دهید. برای هزینه هم تعداد $push$ ها و pop ها را در نظر بگیرید (در صورت تحلیل با استفاده از روش حسابداری ۵ نمره کمتر خواهید گرفت).

مسئله‌ی ۲. درخت (۱۰ نمره)

پیمایش پیشوندی و پسوندی یک درخت به ترتیب به صورت $ABC/ - AK/L - * - A/BC - /AKL$ است. درخت عبارت مربوط به این عبارت‌ها را رسم کنید. همچنین متن میانوندی پرانتزگذاری شده آن را نیز مشخص کنید.

مسئله‌ی ۳. استک (۳۰ نمره)

الف) فرض کنید آرایه‌ای A شامل n عدد طبیعی متمایز داده شده است. می‌خواهیم به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، بزرگترین اندیس j را پیدا کنیم که $i < j$ است و همچنین $A[j] < A[i]$ است (اگر چنین اندیسی هم وجود ندارد ۱- برگرداند). به عنوان نمونه، اگر آرایه A به شکل

۴, ۶, ۷, ۵

باشد، مقدار محاسبه شده برای هر اندیس به شکل

۱, ۲, ۱, ۱-

خواهد بود.

الگوریتمی ارائه دهید که با استفاده از یک استک، این کار را در زمان سرشکن $O(1)$ به ازای هر اندیس انجام دهد.

ب) فرض کنید آرایه A شامل n عدد طبیعی متمایز به ما داده شده است. همچنین n عدد بطری داریم. عدد i ام نشان‌دهنده میزان شیری است که در بطری i ام وجود دارد. به ما اجازه داده شده است که تعدادی بطری پشت سر هم را انتخاب کنیم و از هر کدام مقدار یکسانی شیر بخوریم. برای مثال، اگر ۴ بطری با مقدار شیر ۳, ۵, ۷, ۳ داشته باشیم، می‌توانیم بطری اول و دوم و سوم را انتخاب و از هر کدام ۳ لیتر شیر بخوریم که در مجموع می‌شود ۹ لیتر. دقت کنید که چون بطری اول ۳ لیتر شیر دارد، بیشتر از این نمی‌توانیم از این سه بطری شیر بخوریم. انتخاب دیگر این بود که فقط بطری دوم و سوم را انتخاب کنیم و از هر کدام ۵ لیتر شیر بخوریم که می‌شود در مجموع ۱۰ لیتر. هدف ما خوردن بیشترین شیر ممکن است. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n)$ مشخص کند بیشترین شیری که می‌توانیم بخوریم چقدر است. طبعاً قسمت الف می‌تواند در حل این قسمت راهگشا باشد!

مسئله‌ی ۴. اهرام مصر (۲۵ نمره)

تعداد m آرایه، هر کدام شامل تعدادی عدد طبیعی به صورت مرتب شده داده شده است. می‌دانیم کل تعداد اعداد ذخیره شده

در تمام آرایه‌ها برابر با n است. هدف ما پیدا کردن یک بازه $[a, b]$ است، به گونه‌ای که طول بازه (یعنی $b - a$) کمینه شود و هر کدام از آرایه‌ها حداقل یکی از اعداد ذخیره شده‌اش در این بازه باشد. الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log m)$ ارائه دهید که این کار را انجام دهد.

مسئله‌ی ۵. درخت ریشه‌دار (۲۵ نمره)

یک درخت ریشه دار به ما داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که با پیش‌پردازش $O(n)$ به ازای هر دو راس مشخص کند آیا یکی جد دیگری هست یا نه؟

مسئله‌ی ۶. درهم سازی جهانی (۳۵ نمره)

فرض کنید در یک درهم سازی، کلیدها مجموعه اعداد b بیتی است و توابع درهم سازی هر کلید را به یک عدد k بیتی تبدیل می کنند ($m = 2^k$). در این صورت نشان دهید این خانواده از توابع در هم سازی، یک خانواده جهانی است: مجموعه تمام ماتریس های $k \times b$ شامل درایه های صفر و یک. برای محاسبه مقدار $hash$ یک کلید s با استفاده از ماتریس A مقدار $s \times A$ را محاسبه می کنیم.

مسئله‌ی ۷. سوال چالش برانگیز (سوال با زمان یک هفته‌ای - ۳۵ نمره)

فرض کنید ورودی شما یک مجموعه عدد است که تعداد آنها بسیار زیاد است و شما قرار است مشخص کنید چه تعداد عدد متمایز در این ورودی وجود دارد؟ برای مثال اگر ورودی $4, 4, 7, 4, 6, 7, 4$ باشد، پاسخ ۳ است. زیرا تنها ۳ عدد متمایز $4, 6, 7$ در ورودی آمده است.

اما مشکل آن است که به دلیل این که تعداد اعداد بسیار زیاد است، نمی‌توانید آنها را ذخیره کنید. در این مساله، از شما می‌خواهیم با استفاده از ایده هش‌های جهانی، راه حلی ارائه دهید که با صرف حافظه $O(1)$ بتواند با احتمال بالا تخمین نسبتاً خوبی از تعداد اعداد مختلف ورودی به ما بدهد (به عبارتی، پاسخی که حساب می‌کنیم ممکن است دقیقاً درست نباشد، اما می‌خواهیم با احتمال بالایی نزدیک به مقدار صحیح باشد). ممکن است برای ذخیره تابع درهم‌سازی (دقت کنید! تابع، نه آرایه درهم‌سازی) نیاز به حافظه اضافی داشته باشید که اشکالی ندارد. اما به غیر از آن تنها می‌توانید از حافظه $O(1)$ استفاده کنید. به این سوال می‌توانید تا انتهای هفته فکر کنید و پاسخ را بفرستید.