



# ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

## تمرین سری ششم

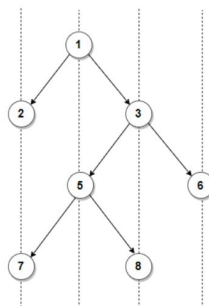
### مسئله‌ی ۱\*. برو و برگرد

درختی با  $n$  رأس را به روش فرزند چپ-برادر راست پیاده‌سازی کرده‌ایم؛ الگوریتمی غیر بازگشتی با زمان اجرای  $O(n)$  پیدا کنید، که تمامی رأس‌های این درخت را پیمایش کند.

(یاسمن زلفی)

### مسئله‌ی ۲\*. درخت پربار

درخت دودویی (درختی که هر رأس آن حداکثر دو فرزند داشته باشد) با  $n$  رأس را به گونه‌ای رسم کرده‌ایم که فرزند چپ و راست هر رأس با آن زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد و فاصله‌ی همه‌ی رأس‌ها با فرزندان خود یکسان است. تراکم افقی را برابر مجموع رأس‌هایی تعریف می‌کنیم که روی یک خط عمودی قرار دارند. بیشینه‌ی تراکم افقی این درخت را پیدا کنید. (الگوریتم از مرتبه‌ی زمانی  $O(n)$  باشد).



(یاسمن زلفی)

### مسئله‌ی ۳. شجره‌نامه

شجره‌نامه‌ی کوروش، درختی است که از خود کورورش تا نوادگان کنونی او در آن ذخیره شده‌اند. در این درخت هر شخص به فرزند یا فرزندان خود متصل است. فرض کنید در این خانواده رسم بوده که هر خانواده حداکثر ۲ فرزند داشته باشد.

الف) جوان‌ترین جد مشترک دو فرد  $x$  و  $y$  را پیدا کنید. (الگوریتمی با حافظه‌ی کمکی  $O(1)$  ارائه دهید).

ب) طولانی‌ترین مسیر بین دو نفر در این درخت را پیدا کنید.

## مسئله ۴\*. سنگین ترین مسیر

وزن یک مسیر بین دو راس را مجموع عناصر روی آن مسیر تعریف می کنیم. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان خطی سنگین ترین مسیر در درخت دودویی (درختی که هر رأس آن حداکثر دو فرزند داشته باشد) را پیدا کند.

(یاسمن زلفی)

## مسئله ۵\*. درخت لگاریتمی

فرض کنید  $T$  یک درخت دودویی کامل با  $n$  گره و به ارتفاع  $\log n$  است. می خواهیم مسیر ساده ای بین یک رأس  $u$  به یک رأس  $v$  بیابیم. می دانیم که هر گره از این درخت به گره های فرزند و گره ی پدر خود دسترسی دارد. این کار را در چه مرتبه ی زمانی می توان انجام داد؟ (یاسمن زلفی)

## مسئله ۶. تست توازن

درخت متوازن درختی است که عمق تمام برگ ها در آن حداکثر ۱ واحد اختلاف داشته باشند. الگوریتمی بهینه پیدا کنید که بررسی کند آیا یک درخت دودویی متوازن است یا خیر.

## مسئله ۷\*. پدر، پسر، روح القدس

صدف به تازگی شجره نامه خود را پیدا کرده و سوالی که ذهنش را درگیر کرده این است که اگر دو راس از درخت شجره نامه را در نظر بگیرد، چگونه می تواند بفهمد که از بین این دو راس یکی جد دیگری است. به صدف کمک کنید تا با پیش پردازش  $O(n)$  به ازای دو راس دلخواه در این درخت، به این سوال پاسخ دهد. (امیررضا باقری)

## مسئله ۸\*. دنباله غلط انداز

به الهام یک د.د.ج به همراه یک دنباله از اعدادی که داخل درخت هستند داده شده است و وظیفه او این است که بفهمد آیا این دنباله می تواند دنباله ای باشد که در هنگام جستجو در د.د.ج دیده شده است یا خیر. برای مثال اگر اعداد بین ۱ تا ۱۰۰۰ را در یک د.د.ج داشته باشیم، در آن صورت دنباله ۳۶۳، ۳۶۰، ۳۹۰، ۳۰۰، ۶۲۰، ۳۴۰، ۲۷۰، ۹۳۰ نمی تواند یک دنباله درست باشد. (امیررضا باقری)

## مسئله ۹\*. کاتالونیا

آ. فرض کنید  $b_n$  نشان دهنده تعداد درخت های دودویی متفاوت با  $n$  راس باشد. نشان دهید در صورتی که  $b_0 = 1$  در آن صورت خواهیم داشت:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k}$$

ب. نشان دهید:

$$b_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

(امیررضا باقری)