



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

سؤالات آمادگی میان‌ترم

مسئله‌ی ۱. هم‌وزن

به شما یک سکه داده شده است و وزن آن را نمی‌دانید. همچنین در مقابل شما ۲۰ سکه چیده شده است که وزن آن‌ها را هم نمی‌دانید ولی می‌دانیم به ترتیب صعودی وزن‌شان چیده شده‌اند. تمامی سکه‌ها در مسئله به لحاظ ظاهری یکسان هستند. شما یک ترازوی کفه‌ای دقیق دارید که هر بار می‌توانید سکه‌ی خود را با یک سکه‌ی دیگر وزن کنید. هدف این است که با کمترین استفاده از ترازو، اگر سکه‌ای هم‌وزن سکه‌ی شما وجود دارد آن را پیدا کنید و اگر وجود ندارد، بگویید وجود ندارد. با حداکثر چند بار استفاده از ترازو می‌توانید پاسخ مسئله را بدهید؟

اگر به جای ۲۰ سکه n سکه داشتیم، آن وقت حداکثر چند بار استفاده از ترازو لازم است؟

مسئله‌ی ۲. هفته آخر شهریور

شبه‌کد الگوریتم ساده‌ی ضرب دو عدد n بیتی را ارائه کنید و تحلیل‌های زمانی در بهترین حالت و بدترین حالت را انجام دهید. فرض کنید دو عدد ورودی در آرایه‌های A و B هستند و خروجی در آرایه‌ی C ریخته می‌شود.

مسئله‌ی ۳. پالیندروم

یک پالیندروم، رشته‌ای است که از دو طرف یکسان خوانده می‌شود. اگر اجازه دهیم که یک پالیندروم تنها شامل یک حرف باشد، هر رشته‌ای را می‌توان به صورت دنباله‌ای از پالیندروم‌ها دید. ما می‌خواهیم با داشتن رشته‌ی s مقدار $MinPal(s)$ را محاسبه کنیم که برابر است با کمینه مقدار پالیندروم‌هایی که می‌توان با آن‌ها رشته s را ساخت. یعنی کمترین k ممکن که s را بتوان به صورت $w_1 w_2 \dots w_k$ نوشت به طوری که همه‌ی w_1, w_2, \dots, w_k پالیندروم باشند. الگوریتمی طراحی کنید که در زمان $O(n^3)$ که n طول رشته است، مقدار $MinPal(s)$ را محاسبه کند.

مسئله‌ی ۴. سریع

به شما یک آرایه مرتب‌شده (صعودی اکید) A از n عدد صحیح مجزا داده می‌شود که می‌توانند مثبت، منفی یا صفر باشند. شما می‌خواهید تصمیم بگیرید که آیا اندیس i به گونه‌ای وجود دارد که $A[i] = i$ باشد یا خیر. برای حل این مسئله سریع‌ترین الگوریتم را طراحی کنید.

مسئله‌ی ۵. ضرب سریع (تقسیم و غلبه)

دو عدد $2n$ رقمی را به گونه‌ای در هم ضرب کنید که زمانی از اردر $O(\log^3)$ داشته باشد.

مسئله‌ی ۶. دوطرفه

فرض کنید صف دوطرفه‌ای (با امکان درج و حذف از ابتدا و یا انتهای صف) داریم که به کمک سه پشته با اندازه‌ی مشخص پیاده‌سازی شده است؛ یک پشته شامل «سر»، یک پشته شامل «بدنه» و یک پشته نیز شامل «دم» داده‌ساختار است. برای افزودن (push) مقدار به این صف، مقدار جدید را در پشته‌ی «سر» یا «دم» - بسته به جهت درج - افزوده و برای برداشتن (pop) مقدار از این صف، مقدار را از پشته‌ی «سر» یا «دم» - بسته به جهت برداشتن - حذف می‌کنیم. لازم است الگوریتمی برای این داده‌ساختار طراحی شود تا هنگام خالی بودن پشته‌های دو سر طی عملیات pop بتواند از پشته‌ی میانی بهره‌گیر که عملیات pop تا زمانی که داده‌ای درون این صف موجود است، با شکست مواجه نشود. فرض کنید که pop از یک پشته و بلافاصله push به یک پشته‌ی دیگر، به عنوان یک عملیات در نظر گرفته می‌شود.

الف) روش پیشنهادی خود برای چگونگی پیاده‌سازی pop را به طور دقیق، توضیح دهید، به گونه‌ای که زمان اجرای سرشکن این عمل، از زمان چندجمله‌ای سریع‌تر باشد.

ب) مرتبه‌ی زمانی الگوریتم بیان شده توسط خود در تابع pop را با روش تابع پتانسیل، محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۷. قطعه‌کد عجیب

اگر $array$ آرایه‌ای شامل n عضو بوده و تمامی اعضای آن صفر باشند، در صورت فراخوانی n بار از تابع زیر، هزینه‌ی سرشکن هر بار اجرا را به کمک روش تابع پتانسیل به دست آورید.

Algorithm 1: Insert

```
1: procedure INSERT(ELEMENT)
2:    $n = n + 1$ 
3:    $temp = element$ 
4:   for  $i = 0$  to  $ceil(log_2(n))$  :
5:     if  $array[i] == 0$  :
6:        $array[i] = temp$ 
7:       return
8:   else:
9:      $temp += array[i]$ 
10:     $array[i] = 0$ 
```

مسئله‌ی ۸. نصفش رو پاک کن

داده‌ساختاری از اعداد طراحی کنید که اگر n عنصر در آن قرار داشته باشد، هر یک از دو عملیات «درج یک عدد جدید» و «حذف $\frac{n}{2}$ عنصر بزرگ‌تر» را در $O(1)$ به صورت سرشکن انجام دهد. در فرآیند حل سوال، تحلیل‌های سرشکن را توسط روش «حساب‌داری» انجام دهید.

مسئله‌ی ۹. پاپوش

با استفاده از پشته، داده ساختار صف را پیاده‌سازی کنید به طوری که هزینه عملیات اضافه کردن به صف در آن از $O(1)$ باشد. هزینه سرشکن n عمل اضافه و حذف از صف را با استفاده از روش تابع پتانسیل تحلیل کنید. فرض کنید هزینه‌ها معادل تعداد درج‌ها و حذف‌ها است.

مسئله‌ی ۱۰. لیست

در لیست L اعمال زیر تعریف شده اند:

$Insert(L, x)$: عنصر x را به انتهای L اضافه می‌کند.

$Delete(L)$: عنصر انتهایی L را حذف می‌کند.

$multi - Delete(L, k)$: عنصر انتهایی L را k حذف می‌کند.

اگر n تا از اعمال فوق به ترتیب صحیح و دلخواه روی لیست L که در ابتدا تهی است اعمال شود، هزینه هر عمل به صورت سرشکن چقدر خواهد بود؟

مسئله‌ی ۱۱. آرایه

فرض کنید که A یک آرایه به طول n از اعداد است. برای هر اندیس i اولین خانه سمت راستش که مقداری بزرگتر مساوی A_i دارد را در پیچیدگی زمانی $O(n)$ بیابید.

مسئله‌ی ۱۲. برعکس

راهی غیر بازگشتی با زمان $\theta(n)$ و حافظه‌ی اضافی $\theta(n)$ ارائه کنید که یک لیست پیوندی یک طرفه با n عنصر را معکوس می‌کند.

مسئله‌ی ۱۳. پیوندی عجیب

توضیح دهید چگونه می‌توان یک لیست پیوندی دو طرفه را با استفاده از فقط یک فیلد اشاره‌گر np به جای دو فیلد $prev$ و $next$ در هر عنصر پیاده‌سازی کرد. نشان دهید چگونه می‌توان عملیات $Search$ و $Insert$ و $Delete$ را روی چنین لیستی پیاده‌سازی کرد. هم‌چنین نشان دهید چونه می‌توان چنین لیستی را در زمان $O(1)$ معکوس کرد. راهنمایی: فرض کنید اشاره‌گرها اعداد صحیح k بیتی هستند و $x.next = x.prev XOR k$ و فرض کنید $Null$ (در فیلد $next$ عنصر آخر و $prev$ عنصر اول) با 0 نشان داده می‌شود.

مسئله‌ی ۱۴. زیر درخت

نشان دهید در یک درخت دودویی با n برگ (که $n \geq 2$)، زیردرختی وجود دارد که اگر برگ‌های آن را m بنامیم آن گاه داریم:

$$\frac{n}{3} \leq m \leq \frac{2n}{3}$$

مسئله‌ی ۱۵. درخت لگاریتمی

فرض کنید T یک درخت دودویی کامل با n گره و به ارتفاع $\log n$ است. می‌خواهیم مسیر ساده‌ای بین یک رأس u به یک رأس v بیابیم. می‌دانیم که هر گره از این درخت به گره‌های فرزند و گره‌ی پدر خود دسترسی دارد. این کار را در چه مرتبه‌ی زمانی می‌توان انجام داد؟

مسئله‌ی ۱۶. درخت‌سازی

پیمایش پیش‌ترتیب و میان‌ترتیب یک درخت دودویی داده شده است. الگوریتمی پیدا کنید که درخت مربوط به آن را ایجاد کند.

$preorder(T) : ۶, ۲, ۴, ۳, ۵, ۸, ۷, ۱$

$inorder(T) : ۴, ۲, ۶, ۸, ۵, ۷, ۳, ۱$

مسئله‌ی ۱۷. بی تو هرگز

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده همبند باشد. فرض کنید $T_s = (V, F)$ درختی در G باشد که با DFS و شروع از راس s بدست بیاید. ثابت کنید s بیش از ۱ فرزند در T_s دارد اگر و تنها اگر حذف کردن s از G این گراف را ناهمبند کند.

مسئله‌ی ۱۸. د.د.ج

آ. فرض کنید یک د.د.ج با درج متوالی مقادیر متفاوت در درخت ساخته شده باشد. نشان دهید تعداد گره‌هایی که برای جست‌وجوی یک مقدار در درخت دیده می‌شوند یکی بیش از تعداد گره‌های دیده‌شده در زمان درج آن مقدار در درخت است.

ب. آیا عمل حذف در د.د.ج یک عمل جابجایی‌پذیر است؟ یعنی در صورتی که ابتدا عنصر x و سپس y را حذف کنیم معادل است با اینکه ابتدا y و سپس x را حذف کنیم؟ این گزاره را اثبات یا رد کنید.

مسئله‌ی ۱۹. پیمایش برعکس

درخت عبارت T را در نظر بگیرید. آیا ممکن است که پیمایش پیش‌ترتیب، راس‌ها را در جهت مخالف پیمایش پس‌ترتیب طی کند؟ اگر آری، مثالی ارائه دهید. در غیر این صورت علت ممکن نبودن آن را شرح دهید.

مسئله‌ی ۲۰. تبدیل عبارت ۲

نمایش میان‌ترتیب عبارت زیر داده شده است. نمایش پیش‌ترتیب این عبارت را بدست آورید.

$$(((A \times (B + (C \div D)))) \times E) - F)$$

مسئله‌ی ۲۱. تبدیل عبارت ۳

نمایش پیش‌ترتیب عبارت زیر داده شده است. نمایش پس‌ترتیب این عبارت را بدست آورید.

$$\times + a - bc \div -de - f + gh$$

مسئله‌ی ۲۲. تعداد تعویض‌ها

درخت دودویی با n راس داده می‌شود. حداقل تعداد تعویض‌های لازم برای تبدیل درخت مذکور به یک درخت دودویی جستجو را بیابید.

مسئله‌ی ۲۳. ادراج!

تعداد راه‌های درج کردن اعداد ۱ تا n در یک د.د.ج با حداکثر ارتفاع ممکن چقدر است؟ برای $n = 5$ این مقدار را بیابید.

مسئله‌ی ۲۴. پیش به پس

الف) پیمایش پیش‌ترتیب دو د.د.ج به ترتیب به صورت زیر هستند:

۳۴, ۲۴, ۲۹, ۷۴, ۹۴

۱۳, ۸, ۱۰, ۹, ۱۸, ۱۶, ۱۴, ۱۷

پیمایش پس‌ترتیب این دو د.د.ج چگونه خواهد بود؟

ب) در حالت کلی پیچیدگی زمانی تبدیل پیمایش پیش‌ترتیب یک د.د.ج به پس‌ترتیب آن با n عنصر چقدر خواهد بود؟ (بدون بدست آوردن خود درخت)

مسئله‌ی ۲۵. پیش به خود

اگر پیمایش پیش‌ترتیب یک د.د.ج به شما داده شود، کارآمدترین الگوریتم از نظر پیچیدگی زمانی برای پیدا کردن این د.د.ج را ارائه دهید.

مسئله‌ی ۲۶. شمارش

فرض کنید آرایه‌ای به طول n به شما داده می‌شود. حال الگوریتمی از $O(n \log n)$ طراحی کنید که تعداد عناصری که از همه‌ی عناصر قبل خود بیشتر و حداقل از k عنصر سمت راست خود بیشتر باشد را محاسبه کند.

مسئله‌ی ۲۷. تبدیل

الگوریتمی از مرتبه ی $O(n)$ ارائه دهید که یک درخت دودویی جستجو نامتوازن را به یک درخت دودویی جستجو متوازن از نظر ارتفاع تبدیل کند. (منظور از درخت دودویی جستجو متوازن از نظر ارتفاع درخت دودویی جستجویی است که ارتفاع زیر درخت های چپ و راست آن برای هر راس حداکثر یک واحد اختلاف داشته باشند)

مسئله‌ی ۲۸. درج و حذف کن

یک درخت AVL در نظر بگیرید که عناصر زیر به ترتیب در آن درج شده است.

۲۲, ۲۷, ۳۰, ۹, ۱۴, ۲۴, ۲۸, ۴, ۱۸, ۱۵

الف) این درخت را پس از درج شدن عناصر ۹, ۴ و ۱۵ نشان دهید.

ب) حال فرض کنید که عناصر ۴, ۳۰ و ۲۴ را از این درخت حذف کنیم. در هر مرحله درخت حاصل را رسم کنید و مراحل را توضیح دهید.

مسئله‌ی ۲۹. بررسی کن

به خانواده‌ای از درخت‌ها متوازن می‌گوییم هرگاه ارتفاع هر درخت عضو این مجموعه $O(\log(n))$ باشد. درستی یا نادرستی موارد زیر را بررسی کنید (برای درست، اثبات و برای نادرست مثال نقض).

- هر گره‌ای یا برگ است یا دو فرزند دارد
- میانگین عمق گره‌ها $O(\log n)$ است.
- یک عدد ثابت c وجود دارد به گونه‌ای که برای هر گره، اختلاف ارتفاع فرزندانش حداکثر c باشد

مسئله‌ی ۳۰. تمرین هرم

برای هر آرایه داده شده، آن را به صورت یک درخت دودویی کامل (پر کردن از چپ به راست) رسم کنید و سپس تعیین کنید که درخت بدست آمده، یک هرم بیشینه یا یک هرم کمینه یا هیچکدام است. اگر درخت به شکل هرم نبود، با تعویض کردن مکان گره‌های مجاور در درخت، آن را به یک هرم کمینه تبدیل کنید و مراحل تبدیل درخت به هرم کمینه را نشان دهید.

- $[۴, ۱۲, ۸, ۲۱, ۱۴, ۹, ۱۷]$
- $[۷۰۱, ۲۵۳, ۲۴, ۲۲۹, ۱۷, ۲۲]$
- $[۲, ۹, ۱۳, ۸, ۰, ۲]$
- $[۱, ۳, ۶, ۵, ۴, ۹, ۷]$

مسئله‌ی ۳۱. بچرخونشون

دو درخت دودویی جست و جو T_1 و T_2 را در نظر بگیرید که شامل کلید های برابر و غیر تکراری هستند. نشان دهید با انجام تعداد محدودی عملیات های Rotation می توان این دو درخت را به هم تبدیل کرد.

مسئله‌ی ۳۲. هرم اتفاقی

آرایه $[A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L]$ نشان دهنده یک هرم کمینه دوتایی با ۱۲ گره است که هر گره نشانگر یک عدد صحیح است. تعیین کنید که کدام گره (ها) دارای ویژگی های زیر می توانند باشند.

الف) کوچکترین عدد صحیح

ب) سومین عدد صحیح کوچک

ج) بزرگترین عدد صحیح

د) دومین عدد صحیح بزرگ