ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۰–۱۴۰۱

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

نمونه سوال امتحان پایانترم

مسئله‌ی ۱*. محور عجیب (مرتب‌سازی سریع)

در یک نوع نادر از مرتب‌سازی سریع، ابتدا از میان n عنصر، $2\sqrt{n}+1$ عنصر اول آن را انتخاب کرده و با الگوریتم مرتب‌سازی درجی آنها را مرتب می‌کنیم.محور را برابر میانه‌ی قسمت مرتب‌شده در نظر گرفته و در ادامه مشابه مرتب‌سازی سریع عمل می‌کنیم. بدترین زمان اجرای الگوریتم فوق با محور عجیب انتخاب شده را به دست آورید.

مسئله‌ی ۲*. نقطه‌ی تاریک (بخش‌بندی)

یک خیابان k چراغ دارد که با شماره‌های ۰ تا $k-1$ مشخص شده‌اند. آرایه A شامل n عنصر متمایز است و هر عنصر آن برابر با شماره‌ی یکی از چراغ‌ها است. اگر شماره‌ی چراغی در آرایه A موجود باشد، آنگاه آن چراغ روشن خواهد بود و در غیر این صورت نقطه‌ی تاریک نامیده می‌شود. هم‌چنین می‌دانیم که در هر لحظه حداقل یک نقطه‌ی تاریک وجود دارد.
الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $\mathcal{O}(n)$ و حافظه‌ی اضافی $\mathcal{O}(1)$ ارائه دهید تا یک نقطه‌ی تاریک را پیدا کند. هم‌چنین فرض کنید امکان اضافه کردن اطلاعات اضافی به آرایه را نداریم و تنها می‌توانیم اعضای آن را با هم جا به جا کنیم.

مسئله‌ی ۳*. دسته‌بندی سه تایی (مرتبه آماری)

در الگوریتم میانه میانه‌ها آرایه به دسته‌های ۵ تایی افراز می‌شود. پیچیدگی زمانی این الگوریتم را در حالتی که آرایه به دسته‌های ۳ تایی افراز شود، تعیین کنید.

مسئله‌ی ۴. کمینه و بیشینه عمق (مرتب‌سازی تصادفی عادی)

فرض کنید که در هنگام پارتیشن الگوریتم مرتب سازی سریع آرایه به نسبت $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ تقسیم می‌شود که $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ یک عدد ثابت است. نشان دهید کمینه و بیشینه عمق یک برگ در درخت بازگشتی به ترتیب تقریبا برابر است با $-\frac{logn}{log\alpha}$ و $-\frac{logn}{1-log\alpha}$.
راهنمایی حل : کمینه عمق معادل آن است که در هر مرحله زیر مسئله با اندازه α و بیشینه عمق معادل آن است که در مرحله زیر مسئله با اندازه $\alpha - 1$ را برداریم.

مسئله‌ی ۵. مرتب سازی سریع

در مرتب‌سازی سریع اگر محور هر بار در جایگاه $n/4$ قرار گیرد، مرتبه زمانی الگوریتم در بدترین حالت چه می‌شود؟

مسئله‌ی ۶*. بارانی (درخت تصمیم و مرتب‌سازی سریع تصادفی)

n فرد و n بارانی داریم. هربار می‌توانیم یک بارانی را به یک نفر بپوشانیم و ببنیم که آیا اندازه‌ی آن فرد هست یا خیر. تضمین می‌شود که هیچ دو فردی و هیچ دو بارانی با یک سایز نداریم. همچنین نمی‌توانیم دو فرد یا دو بارانی را با هم مقایسه کنیم.
ثابت کنید کران پایین تعداد مقایسه‌های لازم برای حل این سوال، از مرتبه $\mathcal{O}(nlogn)$ است و یک الگوریتم تصادفی از مرتبه زمانی $\mathcal{O}(nlogn)$ برای آن ارائه دهید.

مسئله‌ی ۷. لیست‌های مرتب (درخت تصمیم)

k لیست مرتب داریم که طول هر یک $\frac{n}{k}$ است. ثابت کنید هر الگوریتم مقایسه‌ای برای ادغام این k لیست حداقل به $\Omega(nlogk)$ مقایسه نیاز دارد.(راهنمایی : $(\frac{n}{e})^n < n!$)

مسئله‌ی ۸. **رشته‌ها (مرتب‌سازی خطی)

یک آرایه از رشته‌ها با طول‌های مختلف داریم. جمع طول همه‌ی رشته‌ها برابر n است. الگوریتمی از مرتبه زمانی $\mathcal{O}(n)$ ارائه دهید که رشته‌ها را مرتب کند.

مسئله‌ی ۹. **مرتب سازی های مختلف (مرتب‌سازی)

می خواهیم آرایه های زیر را مرتب کنیم. برای هر کدام از آنها از کدام یک از الگوریتم های مرتب سازی استفاده کنیم تا در سریع ترین زمان آرایه را مرتب شده داشته باشیم (n را عددی صحیح بسیار بزرگ فرض کنید و $k < \log n$)

- یک آرایه از n عنصر که به طور کاملا تصادفی در آن قرار دارند.
- یک آرایه از n عنصر که همه آنها به جز k عنصر که به طور تصادفی در آرایه پخش شده اند و در جای خود قرار ندارند، مرتب شده اند (در صورت حذف این k عنصر آرایه مرتب است)
- یک آرایه از n عنصر که همه ی آنها به جز k جفت عنصرهمسایه که به صورت تصادف؟ی درآرایه انتخاب شده و با هم جابه جا (swap) شده اند، مرتب اند (هر عنصر حداکثر جزئی از یک جفت است).
- آرایه ای از n عنصر که همه اعدادی صحیح و تصادفی از ۰ تا k هستند.

مسئله‌ی ۱۰. تشخیص جایگشت

فرض کنید دو جایگشت از اعداد یک تا n وجود دارد که از ترتیب آن‌ها بی‌خبریم و در هر مرحله می‌توانیم دو عدد را بپرسیم و جوابی که برای ما می‌آید ترتیب این دو عدد در دو جایگشت است، برای مثال در دو جایگشت (۲ ,۳ ,۱) و (۱ ,۲ ,۳) اگر دو عدد ۱ و ۳ پرسیده شوند جواب (کوچکتر، بزرگتر) می‌آید که به معنی زودتر آمدن یک در جایگشت اول و زودتر آمدن سه در جایگشت دوم است. ثابت کنید کمینه تعداد پرسش مورد نیاز را پیدا کنید که بتوانیم با این تعداد حتما ترتیب هر دو جایگشت را پیدا کنیم از $\Omega(n\log n)$ است.

مسئله‌ی ۱۱. بنزین گران شد

روشی برای مرتب‌سازی n عدد با حداکثر d رقم بدهید که از $O(nd)$ باشد.

مسئله‌ی ۱۲. مساله انتخاب

توضیح دهید در الگوریتم انتخاب $O(n)$ چرا به جای دسته‌های ۵ تایی نمی‌توانیم از دسته‌های ۳ تایی استفاده کنیم.

مسئله‌ی ۱۳. عنصر غیرمیانه

اگر در الگوریتم انتخاب به جای میانه ۵ عنصر، دومین عنصر را انتخاب کنیم آیا باز الگوریتم موفق خواهد بود؟ پیچیدگی زمانی آن را تحلیل کنید.

مسئله‌ی ۱۴*. مسیر هامیلتونی

گراف جهت‌دار بدون دوری داریم که n راس و m یال دارد.

الف) با الگوریتمی از $O(m+n)$ لیستی از رئوس بسازید که هر راس قبل از راس‌هایی بیاید که به آن ها یال خروجی دارد.

ب) الگوریتمی از $O(m+n)$ ارائه دهید که تشخیص دهد این گراف مسیر هامیلتونی دارد یا خیر؟

مسئله‌ی ۱۵. **تک فرد

در یک گراف ساده می‌خواهیم یال ها را به شکلی جهت‌دهی کنیم که حداکثر یک راس با درجه خروجی فرد وجود داشته باشد. برای این کار الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n+m)$ ارائه دهید.

مسئله‌ی ۱۶. ملخ

یک جدول $n \times ۱$ در نظر بگیرید که در هر خانه‌ی آن یکی از اعداد ۰ ، ۱ ، ۲ ، ...، ۹ نوشته شده است. یک ملخ در ابتدا در خانه‌ی سمت چپ جدول است و می‌خواهد با کمترین تعداد گام به خانه‌ی سمت راست برسد. در هر گام، ملخ می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد.

- به یکی از خانه‌های مجاور خانه‌ی فعلی برود.
- به یکی از خانه‌هایی که عدد نوشته‌شده در آن با عدد نوشته‌شده در خانه‌ی فعلی یکسان است بپرد.

الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(n^۲)$ برای پیدا کردن کمترین تعداد گام ارائه دهید.

مسئله‌ی ۱۷*. مضرب کمینه

به ازای عدد طبیعی n ، کمینه‌ی مجموع ارقام بین تمام مضارب n را پیدا کنید. الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(n\log n)$ برای این کار ارائه دهید. به عنوان مثال به ازای $n = ۶$ مجموع ارقام $۱۲ = ۶ \times ۲$ یعنی ۳ بین تمام مضارب ۶ کمینه است.

مسئله‌ی ۱۸*. درخت کوتاه ترین مسیر (کوتاه ترین مسیر)

گراف G و راس v از این گراف را در نظر بگیرید. درخت کوتاهترین مسیر راس v، زیردرختی از گراف است که شامل یالهایی از آن گراف است که در کوتاه ترین مسیر از v به سایر راس ها مشارکت دارند. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان مناسب برای یک گراف با یال های با وزن مثبت و زیردرخت داده شده T از آن بررسی کند که آیا T درخت کوتاه ترین مسیر راس v از گراف G است؟

مسئله‌ی ۱۹*. درخت کوتاه ترین مسیر (کوتاه ترین مسیر)

یک گراف وزن دار همبند جهت دار G داده شده است. فرض کنید در این گراف یک راس v وجود دارد که به همه راسهای دیگر مسیر جهت دار دارد (در واقع، گراف تنها یک راس منبع دارد). الگوریتمی ارائه دهید که کوتاهترین مسیر از v را به همه راس های دیگر گراف پیدا کند.

مسئله‌ی ۲۰. دور باطل

گرافی وزن‌دار و جهت‌دار با n راس و m یال داریم. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا این گراف دوری دارد که جمع وزن یال‌هایش منفی باشد یا نه.

الف_ در صورتی که گراف قویا همبند باشد، الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(mn)$ برای این کار ارائه دهید.

ب_ بدون شرط همبندی، الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(n^3)$ برای این کار ارائه دهید.

مسئله‌ی ۲۱*. درخت پوشا (درخت پوشای کمینه)

یک «درخت پوشای همگن» از گراف وزن‌دار G گراف پوشایی است که وزن سنگین‌ترین یال آن در بین تمام درخت‌های پوشای G کم‌ترین باشد. نشان دهید هر درخت پوشای کمینه یک درخت پوشای همگن است.

مسئله‌ی ۲۲*. جواب دلخواه (درخت پوشای کمینه)

الگوریتم کراسکال می‌تواند به ازای ورودی یکسان، جواب‌های متفاوتی برگرداند. جواب الگوریتم بستگی به آن دارد که یال‌های به چه ترتیبی مرتب شوند. نشان دهید به ازای هر درخت پوشای کمینه T در گراف G، ترتیبی از یال‌های G وجود دارد که الگوریتم به ازای آن، T را برمی‌گرداند.

مسئله‌ی ۲۳. **حذف برعکس (درخت پوشای کمینه)

ثابت کنید اگر از یک گراف، یال ها را به ترتیب نزولی حذف کنیم، به شرطی که با حذف آن یال گراف باقی مانده همبند بماند، درخت نهایی یک درخت پوشای کمینه برای گراف اولیه است.

مسئله‌ی ۲۴*. وزن مسیر (مجموعه‌های مجزا)

وزن هر مسیر در گراف را برابر با کمینه یال‌های آن مسیر تعریف می‌کنیم. برای دو رأس x و y تابعی به نام $f(x,y)$ را تعریف می‌کنیم که برابر با بیشینه وزن مسیرهای بین x و y است. به ازای تمامی x و y جمع مقادیر $f(x,y)$ را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۲۵. ووپی خسته

آقای ووپی در جایی زندگی می‌کند که خیابان‌ها و کوچه‌ها شیب زیادی دارند. او می‌خواهد صبح از خانه تا محل کار را پیاده‌روی کند. محل زندگی او به صورت n تقاطع و e راه یک طرفه بین تقاطع‌ها مدل شده است که هر تقاطع یک ارتفاع منحصربه‌فرد دارد. خانه و محل کار آقای ووپی هم هر کدام یک تقاطع هستند. مسیر آقای ووپی از خانه به محل کار باید به صورتی باشد که ابتدا ارتفاع مسیر طی شده صعودی باشد، سپس در یک تقاطع کمی استراحت کند و آب بنوشد و سپس ارتفاع ادامه مسیر طی شده نزولی باشد. در بین این مسیرها آقای ووپی می‌خواهد کوتاه‌ترین مسیر را پیدا کند. برای این کار یک الگوریتم کارا پیشنهاد دهید.

مسئله ووپی و استنلی رئیس آقای ووپی، آقای استنلی برای پیاده‌روی از منزل به محل کار به دنبال راه ایده‌آل از نظر خودش است. مدل تقاطع‌ها و راه‌ها مثل قسمت قبل است(بدون درنظر گرفتن ارتفاع‌ها). در هر کدام از e راه گفته شده در سوال قبل، حداقل یک سگ ولگرد زندگی می‌کند. آقای استنلی از سگ‌ها می‌ترسد و برای همین به دنبال راهی است که با کمترین سگ در مسیر خود روبه‌رو شود. اگر تعداد سگ‌ها k باشد، الگوریتمی با زمان $O(k)$ برای این کار طراحی کنید.

مسئله‌ی ۲۶. ووپی و ترافیک

آقای ووپی می‌خواهد از محل کار خود به یک جلسه مهم برود. با توجه به این که ساعت اوج ترافیک است، او می‌خواهد خود را با ماشین به یک ایستگاه مترو برساند و با مترو به محل جلسه برود. مدل تقاطع‌ها و راه‌ها مثل دو سوال قبل است و m ایستگاه مترو نیز در تقاطع‌های مربوط به خود وجود دارند. هدف این است که آقای ووپی را در سریع‌ترین زمان ممکن به یک ایستگاه مترو برسانیم. الگوریتم بهینه‌ای برای این کار پیشنهاد دهید.

مسئله‌ی ۲۷. مثبت منفی

یک گراف جهت‌دار G داریم که یال‌های آن وزن مثبت یا منفی دارند. الگوریتمی با زمان $O(ne)$ پیشنهد دهید که مشخص کند آیا مسیری از s به t وجود دارد که وزن آن حداقل w باشد یا خیر؟

مسئله‌ی ۲۸. کات کمینه

یک راس در گراف بدون جهت G برشی است اگر و تنها اگر حذف آن از گراف، تعداد مولفه‌های همبندی گراف را بیشتر کند.

- فرض کنید جست‌وجوی عمق اول را از یک راس دلخواه اجرا می‌کنیم. ثابت کنید راس غیربرگ و غیر ریشه v از درخت DFS برشی است گر و تنها اگر زیردرخت یکی از فرزندان v یال برگشتی به اجداد v نداشته باشد.
- از این ایده استفاده کنید و الگوریتمی با زمان اجرای $O(n+e)$ برای پیدا کردن همه راس‌های برشی یک گراف ارائه داده و اثبات کنید.

مسئله‌ی ۲۹. درهم سازی ادبیات

در این مساله، کلمه دنبالی‌ای حداکثر ۱۰ حرفی از حروف الفبای فارسی تعریف می‌شود. همچنین جمله دنبالی‌ای از کلمه‌ها تعریف می‌شود. دو جمله $A = (a_1, ..., a_k)$ و $B = (b_1, ..., b_k)$ یکریخت هستند اگر الگوری تکرار کلمات در آن‌ها یکسان باشد، یعنی برای هر i و j ، $a_i = a_j$ باشد اگر و تنها اگر $b_i = b_j$. در مثال زیر، جمله‌های آ و پ یکریخت هستند زیرا کلمات ۵ ام و ۷ ام در هر کدام از آن‌ها یکسان هستند و بقیه کلماتشان متمایز هستند؛ ولی جمله‌های آ و ب یکریخت نیستند.

آ = (رنج، گرانم، را، به، صحرا، می‌دهم، صحرا، نمی‌گیرد)

ب = (رمز، میستان، همه، تو، راز، نیستان، همه، تو)

پ = (اشک، روانم، را، به، دریا، می‌دهم، دریا، نمی‌گیرد)

لیستی از n جمله به شما داده شده که هر جمله دقیقا از k کلمه تشکیل شده است. یک الگوریتم با زمان $O(nk)$ طراحی کنید که جمله‌ها را به دسته‌های یکریخت افراز کند.