ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۰۱ــ۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

یادآوری جلسه دوم — بهترین حالت، بدترین حالت و حالت متوسط

در جلسه قبل، به طور مختصر در رابطه با تحلیل در بهترین حالت، بدترین حالت و حالت متوسط صحبت کردیم. به طور کلی هدف، بررسی این مساله بود که یک الگوریتم در بهترین ورودی، بدترین ورودی و در حالت متوسط به چه میزان زمان برای حل مساله نیاز دارد. بهترین حالت معمولا یک حالت بی ارزش است و عموما تحلیل یک الگوریتم در بهترین حالت، مختصات دقیقی از آن الگوریتم به ما نمی‌دهد. در مقابل، دو حالت بدترین و حالت متوسط از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند.

برای تحلیل در حالت متوسط، نیاز است که اطلاعاتی در مورد توزیع ورودی داشته باشیم زیرا در این تحلیل، همه حالات ورودی را در نظر گرفته و زمان محاسبه(اجرای الگوریتم) را برای همه آنها را با هم میانگین‌گیری می‌کنیم.

برای تحلیل بهترین حالت، ما کران پایین زمان اجرای الگوریتم را در نظر می‌گیریم و در تحلیل بدترین حالت، کران بالا مدنظر ماست.

برای مثال الگوریتم مرتب‌سازی حبابی را با هم بررسی می‌کنیم. به کد زیر توجه کنید:

```
begin BubbleSort(list)

   for all elements of list
      if list[i] > list[i+1]
         swap(list[i], list[i+1])
      end if
   end for

   return list
```

برای محاسبه زمان الگوریتم در بهترین، بدترین و حالت متوسط، تعداد مقایسه‌ها را در هر کدام از این حالت‌ها حساب می‌کنیم.

- بهترین حالت: در بهترین حالت، الگوریتم حداقل یک دور، کل آرایه را پیمایش می‌کند و لذا تعداد مقایسه‌ها $n-۱$ است $\simeq O(n)$.
- بدترین حالت: بدترین حالت این است که آرایه برعکس باشد و در واقع از بزرگ به کوچک مرتب شده باشد. در این حالت $n-۱$ مرحله داریم که در هر مرحله $n-۱, n-۲, \ldots$ مقایسه لازم است و لذا تعداد مقایسه‌ها برابر $n(n-۱)/۲$ خواهد بود $\simeq O(n^۲)$.
- حالت متوسط: قبل از بررسی حالت متوسط، تعریف نابه‌جایی [1] را مرور می‌کنیم. جفت اندیس i و j به گونه ای که $i > j$ ولی $A[i] < A[j]$ ، یک نابه‌جایی در آرایه است.

حال در بررسی حالت میانگین، به جای شمردن تعداد مقایسه‌ها، تعداد جابه‌جایی‌هایی که رخ می‌دهد را می‌شماریم. ادعا داریم که هر جابه‌جایی تعداد نابه‌جایی‌ها را ۱ واحد تغییر می‌دهد.(چرا؟)

پس اگر در حالت متوسط تعداد نابه‌جایی‌ها را پیدا کنیم، یک حد پایین به دست می‌آوریم. پس مسئله ما به این سوال تبدیل می‌شود:

سوال: تعداد نابه‌جایی‌های یک آرایه در حالت متوسط چه‌قدر است؟ فرض می‌کنیم تمام $n!$ حالت، احتمال یکسان داشته باشند.

در پاسخ به این سوال باید گفت که به وضوح $\binom{n}{۲}$ جفت عدد در این آرایه وجود دارند که هر یک به احتمال $\frac{۱}{۲}$ ممکن است نابه‌جا باشند. لذا تعداد نابه‌جایی‌ها در حالت متوسط برابر است با :

$$\binom{n}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۴}$$

و لذا تحلیل حالت متوسط مسئله نیز $\simeq \Omega(n^۲)$ است.

سوال: تابع $f(x) = ۱۰۰x + ۵۰$ و $g(x) = x^۲ + ۳$ را در نظر بگیرید.

یک مقدار $n_۰$ مشخص کنید که به ازای هر $n > n_۰$، داشته باشیم

$$f(n) < ۳g(n).$$

پاسخ‌های خود را تا قبل از شروع کلاس به این آدرس ارسال کنید.

---

[1] inversion