یادآوری جلسه هفتم

تحلیل سرشکن

مهدی علیزاده

در جلسه قبلی در رابطه با تحلیل سرشکن صحبت کردیم. در تعریف هزینه سرشکن، اگر زمان اجرای m بار عملیات x در **بدترین حالت**، برابر $T(m)$ باشد، در این صورت هزینه سرشکن هر بار عمل x برابر $\frac{T(m)}{m}$ است. به عنوان نمونه، مساله شمارنده دودویی را مورد بررسی قرار دادیم.

شمارنده دودویی: فرض کنید یک شمارندهٔ دودویی n بیتی داریم که درابتدا عدد ۰ را نشان می‌دهد. در هر مرحله عددی که این نمایشگر نشان می‌دهد یک واحد زیاد می‌کنیم. فرض کنید برای تغییر هر بیت از این شمارنده باید یک عملیات انجام دهیم.

سوال: زمان عملیات در صورتی که m بار عمل افزایش انجام شود، چقدر است؟

با استفاده از تحلیل سرشکن به این سوال پاسخ می‌دهیم.

روش تجمیع: در این روش تعداد کل عملیات‌های انجام شده را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که شماره ۱ (کم ارزش‌ترین بیت) به ازای هر بار اجرای عملیات تغییر می‌کند. در نتیجه بیت اول m بار تغییر می‌کند. بیت دوم نیز $\frac{m}{2}$ بار تغییر می‌کند. بیت سوم هم $\frac{m}{4}$ بار تغییر می‌کند. به همین ترتیب تعداد تغییر بیت iام برابر $\frac{m}{2^{i-1}}$ است. در نتیجه:

$$T(m) = m + \frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \frac{m}{8} + \ldots + 1 = m(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots)$$

که می‌دانیم عبارت داخل پرانتز کمتر مساوی ۲ است. لذا $F(m) \leq 2m$. بنابراین هزینه سرشکن هربار عملیات افزایش برابر $\frac{2m}{m} = 2$ = $O(1)$ است.

روش حساب‌داری: فرض می‌کنیم به ازای هربار تغییر بیت بایستی ۱ ریال بپردازیم. این پرداخت را به این صورت انجام می‌دهیم که با هربار تغییر بیت از ۰ به ۱، یک ریال بپردازیم و یک ریال در حساب ذخیره کنیم (در مجموع ۲ ریال هزینه می‌کنیم)، و با هربار تغییر بیت از ۱ به ۰، یک ریال از حساب بپردازیم (در این حالت هزینه‌ای نمی‌کنیم و پول از حساب پرداخت می‌شود). اگر بتوانیم نشان دهیم همواره پول کافی در حساب وجود دارد، آنگاه از آنجا که در هر افزایش تنها یک بیت از صفر به یک تغییر می‌کند، کل هزینه ما برابر با $2m$ خواهد بود. دلیل این که حساب هیچ‌گاه خالی نمی‌شود نیز این است که هر بیت که از ۱ به ۰ تغییر می‌کند قبلا از ۰ به ۱ تبدیل شده و یک ریال در حساب به ازای آن ذخیره کرده است بنابراین همیشه پول کافی در حساب وجود دارد.

پس هزینه سرشکن هربار عملیات افزایش برابر $\frac{2 \times m}{m} = 2 = O(1)$ است.

روش تابع پتانسیل: برای حل سوال با استفاده از این روش ابتدا متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

- A_i : آرایه A پس از انجام عملیات i ام
- Φ_i : تعداد یک‌های آرایه A_i
- c_i : هزینه انجام عملیات i ام

حال برای محاسبه تعداد کل عملیات‌های انجام شده کافی است مقدار $\sum_{i=1}^{m} c_i$ را حساب کنیم. برای محاسبه راحت‌تر تعریف می‌کنیم: $\hat{c}_i = c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$.

از طرفی داریم:

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = c_1 + \Phi_1 - \Phi_0 + c_2 + \Phi_2 - \Phi_1 + \ldots + c_m + \Phi_m - \Phi_{m-1} = \sum_{i=1}^{m} c_i + \Phi_m - \Phi_0$$

از آنجایی که مقدار $\Phi_m - \Phi_0$ مثبت است پس: $\sum_{i=1}^{m} c_i \leq \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i$. بنابراین به جای حساب کردن مجموع c_iها می‌توانیم مجموع $\hat{c}_i$ها را حساب کنیم. حال برای حساب کردن این مجموع، فرض کنیم در آرایه A_{i-1} تعداد یک‌های سمت راست آرایه تا قبل از رسیدن به اولین صفر برابر r است. در آرایه A_i همه‌ی این یک‌ها، صفر شده، اولین صفر یک می‌شود و مابقی آرایه تغییری نمی‌کند. بنابراین $\Phi_i - \Phi_{i-1} = -r + 1$ می‌شود و مقدار تغییرات انجام شده نیز برابر $r + 1$ است. در نتیجه: $\hat{c}_i = 1 - r + r + 1 = 2$ است. در نتیجه:

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i = 2m \geq \sum_{i=1}^{m} c_i$$

پس هزینه سرشکنن عملیات افزایش برابر $\frac{2m}{m} = 2 = O(1)$ است.