



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

سؤالات سری اول

مسئله‌ی ۱*. جستجوی خطی نامتوازن

یک لیست شامل n عدد متمایز a_1, a_2, \dots, a_n را در نظر بگیرید. می‌خواهیم یک عدد خاص مانند x را به روش جستجوی خطی بین اعداد جستجو کنیم. منظور از جستجوی خطی این است که از عنصر نخست لیست شروع کرده و مقدار مورد جستجو (اینجا یعنی x) را به ترتیب با تک‌تک عناصر لیست مقایسه کنیم. دقت کنید که فرآیند جستجو را تا زمانی ادامه می‌دهیم که یا عنصری برابر با x یافت شود (جستجوی موفق) و یا به پایان لیست برسیم (جستجوی ناموفق) حال فرض کنید می‌دانیم احتمال اینکه $a_i = x$ باشد برابر با $\frac{i}{\sum_{i=1}^n i}$ است. در این صورت زمان اجرای این الگوریتم را در حالت بهترین، بدترین و متوسط به دست آورید. چه روشی برای جستجوی بهتر در این روش پیشنهاد می‌کنید؟ (سید پارسا نشائی)

مسئله‌ی ۲*. ای آقا!

رشته‌ای به طول n از پرانتز باز و بسته داده شده است و می‌خواهیم بدانیم آیا رشته‌ی پرانتزها معتبر است و یا خیر.

مثال ۱:

ورودی:

((()((()))))

خروجی: بله

مثال ۲:

ورودی:

((()((()())()

خروجی: خیر

آیا می‌توانید الگوریتمی ارائه دهید که در بدترین حالت بیشتر از $5 \cdot n$ عملیات انجام ندهد و خروجی را اعلام کند (منظورمان از عملیات هر یک از عملیات‌های جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و یا تخصیص است)؟ پس از آن که درستی الگوریتم خود را اثبات کردید، بگویید الگوریتم شما در بهترین و بدترین حالت چطور عمل می‌کند؟

(حسین آقامحمدی)

مسئله ۳*. وارونگی (بهترین حالت، بدترین حالت و حالت متوسط)

آرایه A شامل n عدد داده شده است. در این مساله هدف پیدا کردن یک وارونگی در آرایه است. یک وارونگی در آرایه به این صورت تعریف می شود:

$$i, j \quad s.t. \quad i > j \text{ and } A[i] < A[j]$$

(الف) برای این کار الگوریتم زیر پیشنهاد شده است:

```
for i:1 -> n-1 do
  for j:i+1 -> n do
    if A[i] > A[j] then
      return (i, j)
    end
  end
end
```

تعداد مقایسه‌ها در این الگوریتم را در بهترین حالت و بدترین حالت محاسبه کنید.

(ب) آیا می‌توانید حدی برای تعداد مقایسه‌ها در حالت متوسط (با فرض این که تمام $n!$ حالت مختلف احتمال یکسان دارند) محاسبه کنید؟

(ج) روشی ارائه دهید که حداکثر با n مقایسه یک وارونگی در آرایه محاسبه کند.

اگر بدانیم اعداد متمایز بوده و احتمال رخداد هر جایگشت از آن‌ها یکسان و برابر است، تعداد مقایسه‌های لازم این الگوریتم را در بهترین حالت، بدترین حالت و حالت متوسط تعیین کنید. (حسین آقامحمدی)

مسئله ۴*. محاسبه‌ی چندجمله‌ای!

ضابطه‌ی یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی n داده شده است.

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

برای محاسبه‌ی این تابع در نقطه‌ای خاص به روش معمول، ابتدا ورودی را n بار در خودش ضرب می‌کنیم و سپس در ضریب a_n ؛ بعد، ورودی را $n-1$ بار در خودش ضرب می‌کنیم و سپس در ضریب a_{n-1} و با حاصل قبلی جمع می‌کنیم و الی آخر که در نهایت تنها ضریب a_0 را با حاصل نهایی جمع می‌کنیم. اگر تعداد عملیات‌های (ضرب و جمع) لازم این الگوریتم به شکل $An^2 + Bn + C$ باشد، ضرایب ثابت A ، B و C را به دست آورید. الگوریتمی ارائه دهید که به شکل $Dn + E$ عملیات برای محاسبه‌ی تابع کار ببرد و ضرایب ثابت D و E را مشخص کنید. دقت کنید که تعریف عملیات در سؤال ۳ آمده است. (حسین آقامحمدی)

مسئله ۵. جستجوی خطی

مساله جستجوی عنصر x در آرایه A شامل n عنصر را در نظر بگیرید. فرض کنید اطلاع داریم که توزیع ورودی به این صورت است که احتمال حضور عنصر x در نیمه دوم آرایه سه برابر احتمال حضور آن در نیمه اول است

و همچنین برای هر نیمه، احتمال حضور در هر خانه یکسان است. با این فرض، الگوریتم جستجوی خطی را در بدترین، بهترین و حالت متوسط بررسی کنید.