ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

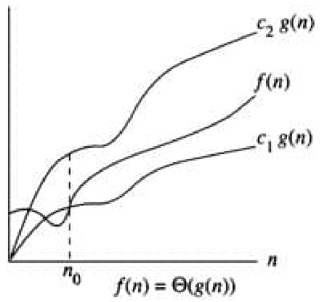
نیم‌سال اول ۰۱ــ۰۰
مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

یادآوری جلسه سوم | تحلیل مجانبی | سید امیرعلی مقدسی

در جلسه قبل، به طور مختصر در رابطه با نمادهای مجانبی O و Ω و Θ صحبت کردیم. برای دو تابع $f(n)$ و $g(n)$ (با ورودی و خروجی طبیعی)، این نمادها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

- $f(n) = O(g(n))$ اگر وجود داشته باشد n_0 و c به گونه‌ای که برای هر $n \geq n_0$ رابطه‌ی $f(n) \leq cg(n)$ برقرار باشد.
- $f(n) = \Omega(g(n))$ اگر وجود داشته باشد $n_0 \in \mathbb{N}$ و $c > 0$ به گونه‌ای که برای هر $n \geq n_0$ رابطه‌ی $f(n) \geq cg(n)$ برقرار باشد.
- $f(n) = \Theta(g(n))$ اگر وجود داشته باشد n_0 و c_1 و c_2 به گونه‌ای که برای هر $n \geq n_0$ رابطه‌ی $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ برقرار باشد.



مثال۱) فرض کنید $f(n) = 3x^2$ و $g(n) = x^2$. می‌خواهیم ثابت کنیم $f(n) = O(g(n))$.
برای حل این مثال کافی است n_0 و c را طوری بیابیم که در تعریف صدق کند؛ یعنی:

$$\forall n \geq n_0 \qquad 3x^2 \leq cx^2$$

کافی است $c = 3$ و $n_0 = 1$ را در نظر بگیریم.

مثال۲) فرض کنید $f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + ... + a_k n^k$ و $g(n) = n^k$ که در $f(n)$ تمام a_iها مثبت هستند.می‌خواهیم ثابت کنیم $f(n) = \Omega(g(n))$. از آنجایی که به ازای هر i مقدار $a_i \geq 0$ است، داریم:

$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + ... + a_k n^k \geq a_k n^k$$

بنابراین برای $c = a_k$ و $n_0 = 1$ داریم: $\forall n \geq a_k \quad cg(n) \leq f(n)$.

مثال۳) می‌خواهیم نشان دهیم به ازای هر $x \geq 2$ داریم: $\log_x n = \theta(\log_2 n)$ $(x \geq 2)$. برای این کار باید ثابت کنیم:

$$\exists n_0, c_1, c_2 \quad \forall n \geq n_0 \qquad c_1 \log_2 n \leq \log_x n \leq c_2 \log_2 n.$$

واضح است c_2 را می‌توانیم برابر با ۱ بگیریم (چرا؟). همچنین می‌دانیم که $\log_x n = log_2 n \times \log_x 2$. پس c_1 را می‌توانیم برابر با $\log_x 2$ در نظر بگیریم. لذا با در نظر گرفتن $n_0 = 1, c_1 = \log_x 2, c_2 = 1$ نامساوی برقرار خواهد بود. دقت کنید که این رابطه برای هر مقدار ثابت x برقرار است و تنها محدود به $x \geq 2$ نمی‌شود.

پرسش: تابع $f(n) = 4n^2 + 17n + 33$ و $g(n) = n^2$ را در نظر بگیرید.
مقادیر n_0 و c_1 و c_2 را به گونه‌ای انتخاب کنید که نشان دهد $f(n) = \theta(g(n))$. پاسخ‌های خود را تا قبل از شروع کلاس به این آدرس ارسال کنید.