



# ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

## تمرین سری چهارم

### مسئله‌ی ۱\*. بزرگ‌ترین زیررشته

فرض کنید آرایه‌ای از  $n$  عدد صحیح داریم می‌خواهیم زیردنباله‌ای را به دست آوریم که بیشترین مجموع را داشته باشد. اگر تمامی اعداد منفی باشند جواب صفر خواهد بود. برای حل سوال از روش تقسیم و غلبه استفاده کنید و برای آن الگوریتمی ارائه دهید. پیچیدگی زمانی الگوریتم پیشنهادی را با روش تقسیم و غلبه محاسبه کنید.

(سجاد فقفور مغربی)

### مسئله‌ی ۲\*. صادق

به عنوان ورودی به شما یک آرایه مرتب نشده از  $n$  عدد متمایز داده می‌شود و  $n$  توانی از دو است. یک الگوریتم ارائه دهید که دومین عدد بزرگ آرایه را مشخص می‌کند و حداکثر از  $2 - \log_2 n + n$  مقایسه استفاده کنید.

(سجاد فقفور مغربی)

### مسئله‌ی ۳\*. الگوریتم باز

الف) به شما یک آرایه تک بعدی از  $n$  عنصر متفاوت داده شده است. به این شکل که ورودی‌های آن تا جایی از آرایه که قله نامیده می‌شود به ترتیب در حال افزایش هستند، و پس از آن عناصر آن در حال کاهش هستند. یک الگوریتم برای یافتن عنصر قله که در زمان  $O(\log(n))$  اجرا می‌شود ارائه بدهید.

ب) به شما یک آرایه مرتب شده (صعودی اکید)  $A$  از  $n$  عدد صحیح مجزا داده می‌شود که می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشند. شما می‌خواهید تصمیم بگیرید که آیا اندیس  $i$  به گونه‌ای وجود دارد که  $A[i] = i$  باشد یا خیر. برای حل این مسئله سریع‌ترین الگوریتم را طراحی کنید.

(سجاد فقفور مغربی)

### مسئله‌ی ۴. به یاد قدیم‌ها

دوست دوران مهدکودک‌تان حمید شما را به چالش دعوت می‌کند. سطل آهن‌ربای او را مرتب کنید. او یک سطل دارد که در آن  $n$  آهن‌ربا هست که به نظر یکسان می‌رسند، اما برخی از آنها دارای بار مثبت هستند و برخی از آنها بار منفی دارند. تعداد آهن‌رباهای دارای بار مثبت بیشتر از منفی هستند. وقتی دو آهن‌ربا با بار مخالف را کنار هم بگذارید یکدیگر را جذب می‌کنند و در غیر این صورت یکدیگر را دفع می‌کنند. الگوریتمی از بهترین زمان ممکن ارائه کنید که با یک ایده‌ی تقسیم و غلبه این آهن‌رباها را به دو دسته مثبت و منفی تقسیم‌بندی کند. همچنین اردر زمانی آن را بررسی کنید.

### مسئله‌ی ۵\*. مرتب‌سنج

آرایه  $A$  به طول  $n$  داده شده است. می‌خواهیم بررسی کنیم این دنباله که از اعداد ۱ تا  $n$  تشکیل شده است چقدر مرتب شده است. برای این کار یک معیار را تعریف می‌کنیم. به این ترتیب که امتیاز یک آرایه را برابر با تعداد جفت‌های  $(i, j)$  که  $i < j$  و  $A[i] > 2 \times A[j]$  نظر می‌گیریم. برای محاسبه امتیاز یک آرایه راه‌حلی از اردر  $O(n \log(n))$  ارائه دهید و ادعای خود را اثبات کنید.

(سجاد فقفور مغربی)

### مسئله‌ی ۶\*. اتاقت را تمیز کن!

مادر علی پس از تلاش فراوانی که در جهت ترغیب علی به تمیز کردن اتاقش و قرار دادن وسایل روی زمین بر سر جای خود در کمدها به کار برد، در نهایت توانست علی را به کمک انگیزه‌ی مالی، وادار به تمیز کردن اتاقش کند. مادر علی، در ابتدا به علی قول داد که به ازای هر شی که از روی زمین جمع می‌شود، وی ۱۰۰۰ تومان به حساب علی واریز خواهد کرد؛ اما علی این مبلغ را در درازمدت به صرفه ندانست و پس از چانه‌زنی‌های فراوان، مادرش را متقاعد کرد که به ازای هر یک از  $i$  امین شی جمع شده از روی زمین، اگر  $i$  توانی از ۲ بود،  $i$  هزار تومان و در غیر این صورت، ۱۰۰۰ تومان به حساب علی واریز کند. مادر علی، به صورت سرشکن با هر شی که علی از روی زمین برمی‌دارد، از مرتبه‌ی چند تومان ضرر خواهد کرد؟

(سید پارسا نشایی)

### مسئله‌ی ۷\*. چند آرایگی

فرض کنید  $m$  آرایه داریم که جمعا  $n$  عنصر را درون خود ذخیره می‌کنند که آن‌ها را به صورت  $arr_{m-1}$  تا  $arr_0$  نام‌گذاری کرده‌ایم. طول آرایه‌ی  $i$  ام،  $2^i$  است. هر یک از این  $m$  آرایه، به خودی خود مرتب شده نگاه‌داری شده است، اما لزوماً اعداد یک آرایه از آرایه‌ی بعدی خود، کوچک‌تر یا بزرگ‌تر نیستند. اعداد، به گونه‌ای در داده‌ساختار نگاه‌داری شده‌اند که هنگام درج عدد جدید، این عدد در  $arr$  درج شده و سپس آرایه‌های دیگر، متناسب با مقدار جدید، تنظیم می‌شوند تا خاصیت ترتیب در داده‌ساختار حفظ شود. نشان دهید که زمان سرشکن درج در این داده‌ساختار،  $O(\log n)$  است.

(سید پارسا نشایی)

### مسئله‌ی ۸\*. عجیب بشمر

الف) با مثال شمارنده‌ی دودویی و تحلیل آن به روش سرشکن، در کلاس آشنا شده‌اید. فرض کنید که در شمارنده‌ی بررسی شده در کلاس، تغییری اعمال کنیم تا به جای صفر، از عددی شروع کند که شامل  $m$  بیت ۱ است. در این شمارنده، به تعداد بیش‌تر یا مساوی  $cm$  بار، عملیات افزایش یک واحد را اجرا می‌کنیم ( $c$  یک ثابت است). هزینه‌ی هر افزایش یک واحدی ( $Increment$ ) را به صورت سرشکن به دست آورید.

ب) آیا در صورتی که عمل  $Decrement$  را به شمارنده اضافه کنیم، هزینه سرشکن همان  $O(1)$  می‌ماند؟

(سید پارسا نشایی)