



سوالات تحلیل مجانبی

مسئله‌ی ۱. درست یا نادرست؟

دو تابع $f(n) = \Omega(\log n)$ و $g(n) = \mathcal{O}(n)$ داده شده‌اند. درستی یا نادرستی هر کدام از عبارات‌های زیر را با اثبات یا مثال نقض نشان دهید.

الف) $f(n) \in \Omega(\log(g(n)))$

ب) $f(n) \in \Theta(\log(g(n)))$

پ) $f(n) \in \mathcal{O}(2^{g(n)})$

ت) $f(n) + g(n) \in \Omega(\log n)$

مسئله‌ی ۲.*. حل روابط بازگشتی ۱

روابط بازگشتی زیر را با استفاده از درخت بازگشت حل کنید.

الف)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + n, & n > 1 \end{cases}$$

ب)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(\frac{n}{4}) + T(\frac{3n}{4}) + n^2, & n > 1 \end{cases}$$

(هانیه احسانی)

مسئله‌ی ۳.* حل روابط بازگشتی ۲

روابط بازگشتی زیر را با استفاده از درخت بازگشت حل کنید.

(الف)

$$T(n) = T(n-a) + T(a) + cn, c > 0, a \geq 1$$

(ب)

$$T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + cn$$

(هانیه احسانی)

مسئله‌ی ۴. خاص!

دو تابع T و S در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند. پیچیدگی زمانی T را به دست آورید.

$$T(n) = S(n/2) + T(n/4) + 2\sqrt{n}$$

$$S(n) = S(n/4) + T(n/8) + \sqrt{n}$$

مسئله‌ی ۵.* اگه میتونی حلم کن!

پیچیدگی زمانی رابطه بازگشتی زیر را به صورت مستقیم به دست آورید (راهنمایی: فرض کنید $g(n) = nf(n)$).

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{1+n(n-1)f(n-1)}{n^2+1}, & n > 0 \end{cases}$$

(هانیه احسانی)

مسئله‌ی ۶. تیپیکال مقایسه

توابع زیر را بر حسب نرخ رشد مجانبی از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$(n!)^{n!}, n^{n^n}, (n!)!, (n^n)!$$

مسئله‌ی ۷.* لاگ استار!

نماد $\log^* n$ را تعریف می‌کنیم:

$$\log^* n = \min \left\{ i \geq 0 : \log^{(i)} n \leq 1 \right\}$$

بین $\log^*(\log n)$ و $\log(\log^* n)$ کدام نرخ رشد مجانبی بزرگتری دارد؟ (منظور از $\log^{(i)} n$ i بار $\log(\log(\dots \log(n)\dots))$ است و $\log^{(0)} n = n$).

(پارسا حسینی)

مسئله‌ی ۸.* تو در تو

پیچیدگی زمانی قطعه کدهای زیر را بررسی کنید.

(الف)

```
k ← 0
for(i ← 1; i ≤ n; i ← i + 1)
    for(j ← 1; j ≤ n/i; j ← j + 1)
        k ← k + 1
```

(ب)

```
x ← 0
for(i ← 1; i ≤ n; i ← 2i)
    for(j ← 1; j ≤ n; j ← 4j)
        for(k ← 1; k ≤ j; k ← k + 1)
            x ← x + 1
```

(پارسا حسینی)

مسئله‌ی ۹.* کران چندجمله‌ای

آیا می‌توان گفت ثابت $c > 0$ وجود دارد که $[\log n]! = \mathcal{O}(n^c)$ ؟
برای $[\log \log n]!$ چطور؟

(پارسا حسینی)