

#### توضیحات:

- پاسخ هر کدام از سوالات را بر روی یک برگه جداگانه بنویسید.
- بر روی هر برگ نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی درج شده باشد.
- پاسخ‌های خود را در کوئرا آپلود کنید.
- از ساعت ۹:۴۵ الی ساعت ۱۱:۱۵ اگر سوالی داشتید می‌توانید به این لینک گوگل میتینگ وارد شوید.
- اگر در طول آزمون به علت بسته شدن کلاس به بیرون پرتاب شدید، لطفا مجددا بعد از چند دقیقه به کلاس بازگردید. اعلان‌های عمومی در کلاس اعلام می‌شود.
- نگران بسته شدن ارسال پاسخ‌ها نباشید. تا زمان ارسال پاسخ توسط آخرین فرد سامانه باز خواهد بود. در صورت هر مشکلی می‌توانید پاسخ‌ها را به ایمیل [seddighin.masood@gmail.com](mailto:seddighin.masood@gmail.com) ارسال کنید.
- از بند ارسال به ایمیل، صرفا در صورتی که مشکل داشتید استفاده کنید. جهت حصول اطمینان نیاز نیست که مجددا به ایمیل هم ارسال کنید!



## داده ساختار

نیم‌سال اول ۹۹-۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

زمان: ۱۵۰ دقیقه

پایان‌ترم

مسئله‌ی ۱. درخت  $DFS$  (۱۵ نمره)

شکل زیر درخت  $DFS$  مربوط به یک گراف می باشد. با فرض این که می دانیم این گراف تنها یک راس برشی دارد، درجه راس  $A$  در این گراف چند است؟ اگر می دانستیم که این گراف دو راس برشی دارد، آنگاه در مورد درجه راس  $A$  چه می توانستیم بگوییم؟ (حداقل - حداکثر)



## مسئله‌ی ۲. ۱ و ۰ (۱۵ نمره)

فرض کنید گرافی  $m$  یالی داریم که مقدار وزن هر یال آن ۰ یا ۱ است. روی هر راس آن کلیدی وجود دارد که در صورت فشردن آن، مقدار وزن تمامی یال‌های متصل به آن راس عوض میشود (صفر به یک یا یک به صفر). آیا میتوان در  $O(m \log m)$  مرحله مقدار تمامی یال‌ها را برابر با ۰ کرد؟

## مسئله‌ی ۳. مسیر رنگی (۲۰ نمره)

گراف ساده بدون وزن  $G$  داده شده است. هر کدام از یال‌های این گراف به یکی از سه رنگ قرمز، آبی یا زرد رنگ شده است. هدف پیدا کردن کوتاهترین مسیر بین راس ۱ تا  $n$  است، به طوری که هر دو یال پشت سر هم در مسیر دارای رنگ متفاوت باشند. الگوریتمی برای این کار ارائه دهید.

## مسئله‌ی ۴. کوتاهترین مسیر (۳۰ نمره)

گراف وزن‌دار و جهت‌دار  $G$  شامل  $n$  راس و  $m$  یال جهت‌دار داده شده است. فرض کنید در این گراف راس‌ها نشان دهنده شهرهای مختلف و یال‌ها نیز جاده‌های بین شهرها هستند. همچنین، طول یک جاده زمانی را نشان می‌دهد که با ماشین نیاز است تا آن جاده طی شود. علی در شهر ۱ قرار دارد و می‌خواهد در کمترین زمان ممکن به شهر  $n$  برسد. به علی این اجازه داده شده است که تنها در یکی از یال‌های مسیری که مقصد از هواپیما استفاده کند. اگر برای حرکت بر روی یک یال با وزن  $w$  به جای ماشین از هواپیما استفاده کنیم، زمان لازم برای رسیدن به راس انتهای یال  $w/10$  خواهد بود. دقت کنید که برای سفر با هواپیما بین دو شهر حتماً باید یال جهت‌داری در جهت حرکت هواپیما بین آن دو شهر وجود داشته باشد. الگوریتمی ارائه دهید که به علی کمک کنید تا مسیر مناسب را پیدا کند.

مسئله‌ی ۵. درخت پوشای کمینه (۳۰ نمره)

درخت پوشای بیش‌کمینه یک گراف وزن‌دار، یک زیردرخت فراگیر از آن درخت است که در آن وزن یال با وزن بیشینه کمترین مقدار ممکن باشد. درستی و نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

- هر درخت پوشای بیش‌کمینه یک درخت پوشای کمینه است.
- هر درخت پوشای کمینه یک درخت پوشای بیش‌کمینه است.

مسئله‌ی ۶. مجموعه مجزا (۳۵ نمره – تحویل تا یک روز قبل از ارسال نمرات)

در مساله مجموعه‌های مجزا، بهبود دوم به این صورت بود که در هنگام عمل `find` پدر تمام راس‌های داخل مسیر جستجو را به راس ریشه تغییر می‌دادیم. اگر به جای این کار، پدر هر راس در مسیر `find` را به پدر بزرگش تغییر دهیم، آیا باز هم هزینه سرشکن هر عملیات  $O(\log^* n)$  باقی می‌ماند؟ (با جزئیات کامل توضیح دهید)