



در جلسه قبل، به طور مختصر در رابطه با روش‌های محاسبه عدد n ام فیبوناچی صحبت کردیم. در این مساله، عدد n به عنوان ورودی داده شده است، و ما باید عدد n ام فیبوناچی را به خروجی بدهیم. برای این مساله سه راه حل را بررسی نمودیم:

- راه حل بازگشتی: در این راه حل، با استفاده از یک تابع بازگشتی مقدار $f(n)$ را محاسبه کردیم.

```
int f(int n)
{
    if (n <= 2)
        return 1;
    return f(n-1) + f(n-2);
}
```

در ادامه، نشان دادیم که تعداد دفعاتی که دو خط مشخص شده با علامت + به ازای ورودی n اجرا می‌شوند، از $f(n)$ (عدد n ام فیبوناچی) بیشتر است. در نتیجه، انتظار نداریم که این راه مثلا برای n های بیشتر از ۵۰ در زمان معقولی خروجی بدهد:

$$f(50) = 12586269025.$$

- راه حل پویا: در این روش، به جای محاسبه بازگشتی، ابتدا مقدار فیبوناچی را به ازای مقدار کمتر حساب کرده و در حافظه ذخیره می‌کنیم تا از محاسبه چندباره یک مقدار فیبوناچی پرهیز گردد:

```
int f(int n)
{
    F[2] = F[1] = 1;
    for (i: 3 -> n)
        F[i] = F[i-1] + F[i-2];
    return F[n];
}
```

برای این روش نشان دادیم که تعداد دفعاتی که دو خط علامت دار اجرا می‌شوند در مجموع n بار است. در نتیجه می‌توان انتظار داشت که این روش برای n های بزرگ نیز جواب دهد.

- روش سوم: روش ماتریسی. این روش برای n های خیلی بزرگ (مثلا $n = 2^{100}$) مناسب است. در این روش، ابتدا با استفاده از استقرا نشان دادیم که اگر

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

باشد، آنگاه داریم:

$$A^n = \begin{pmatrix} f(n+1) & f(n) \\ f(n) & f(n-1) \end{pmatrix}$$

در نتیجه، با فرض این که $n = 2^k$ است، برای محاسبه $f(n)$ کافی است ماتریس بالا را k بار در خود ضرب کنیم:

$$A^n = (((A^2)^2) \dots)^2 \quad (k \text{ times}).$$

حال، به عنوان مثال برای محاسبه $f(2^{100})$ کافی است ماتریس A را هزار بار در خود ضرب و سپس درایه $A_{1,2}$ را برگردانیم. بنابراین، میتوان انتظار داشت که تا زمانی که مقدار $\log n$ عدد خیلی بزرگی نشود، این روش در زمان معقولی پاسخ را مشخص کند.

سوال: اگر n توانی از دو نباشد، آیا می‌توان در این روش تغییری ایجاد کرد که با حداکثر $2k$ عدد ضرب ماتریس ($k = \lceil \log n \rceil$) مقدار $f(n)$ را محاسبه کند؟

این جلسه، نیازی به ارسال پاسخ به این سوال نیست. تنها در خلوت خود به این سوال فکر کنید!

در این لینک می‌توانید روش‌های مختلف یافتن عدد n ام فیبوناچی را ببینید.

