~~مسئله ۱~~ اعمال محمدی شماره دانشجویی ۹۹۱۰۲۲۰۷ کوییز سری ۱ :

مسئله ۱) بررسی الگوریتم اول $\Rightarrow$ از خونه اول شروع می کنه، دونه دونه مقایسه می کنه اگر پیدا کرد که هیچی اگر پیدا نکرد از خونه دوم دوباره مقایسه را شروع می کنه $\Rightarrow$ تو خونه اول و دوم تکراری وجود داشته باشد : Best case

پس بهترین حالت $\Rightarrow$ تعداد مقایسه $=1$

worst case : حالتی که همه اعداد دو به دو باهم مقایسه می شوند و وارونگی در حالت های ابتدایی بدست نمی آید و مجبور به مقایسه کل یک حالات هستیم $\Rightarrow$ تعداد مقایسه $= \binom{n}{2}$

Averag case : ورودی به $n!$ حالت و با احتمال یکسان چیده شده پس داریم

$$\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \times (n-i)! \times (i-2)! \times (i-1)!$$

که i عضو از n عضو را انتخاب می کنیم و بقیه اعضا را رندوم می چینیم پس داریم $\binom{n}{i}$ و $(n-i)!$ و از i عضوای انتخاب شده جایگشت های اعضای وسط را حساب می کنیم $(i-2)!$ و نیاز به $i-1$ تا سنجش داریم پس :

$$\text{Average case} : \sum_{i=2}^{n} \frac{\binom{n}{i} \times (n-i)! \times (i-2)! \times (i-1)}{n!} \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leq \int \frac{1}{x}\,dx \simeq \log x = O(\log n)$$

بررسی الگوریتم دوم $\Rightarrow$ ابتدا خونه های متوالی کنارهم با فاصله ۰ را چک می کند سپس با فاصله ۱ سپس با فاصله ۲ و ...

Best case : در مقایسه اول به جواب برسیم و وارونگی بین دو تا عضو اول وجود داشته باشد $\Rightarrow$ تعداد مقایسه $=1$

Worst case : آرایه sort باشد و تمام حالات ممکن چک شود یعنی برای تمام اعضا، مقایسه با فاصله های ممکنشان چک شود که می شود :

$$\text{تعداد مقایسه} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Average case : برای تمام $n!$ جایگشت داریم

$$\frac{1}{2} \times 1$$

$$\frac{1}{4} \times 2$$

$$\frac{1}{8} \times 3 \quad \Rightarrow \quad \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^n} \times n$$

$$\Rightarrow \leq 1 + \lceil \log n \rceil = O(\log n)$$

احلام محمدی   شماره دانشجویی ۹۹۱۰۲۲۰۷   کوییز سری ۱

مسئله ۲) الف -

$\log^* n = \min\{i \geq 0 : \log^{(i)} n \leq 1\}$

یعنی انقدر از n لگاریتم بگیریم که جوابش کمتر یا مساوی ۱ بشود. این تعداد باری که لگاریتم می‌گیریم می‌شود $\log^* n$

مثلا:

$\log^* 2 = 1$
$\log^* 4 = 2$
$\log^* 16 = 3$
$\log^* 65536 = 4$
$\log^* 2^{65536} = 5$

~~حالا را اثبات می‌کنیم~~ می‌دانیم $\log^* n = \log^*(\log n) + 1$

$$\Rightarrow \log^* n = \min\{i \geq 0 : \log^{(i)} n \leq 1\} \Rightarrow \log^*(\log n) = \min\{i' \geq 0 : \log^{(i')}(\log n) \leq 1\}$$

حالا می‌خواهیم اثبات کنیم $\log(\log^* n) = o(\log^*(\log n))$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log^* n)}{\log^*(\log n)} \quad \underset{\log^* n - 1 = \log^*(\log n)}{\overset{f(n) = \log^* n,\ n\to\infty \Rightarrow f(n)\to\infty}{=}} \quad \lim_{f(n)\to\infty} \frac{\log f(n)}{f(n)-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{f(n)\to\infty} \frac{\log f(n)}{f(n)-1} \overset{\text{Hop}}{=} \lim_{f(n)\to\infty} \frac{\frac{f'(n)}{f(n)\ln 2}}{f'(n)} = \lim_{f(n)\to\infty} \frac{1}{f(n)\ln 2} = 0$$

$\frac{1}{\infty}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log^* n)}{\log^*(\log n)} = 0$$

پس رشد مجانبی $\log^*(\log n)$ بسیار بیشتر از رشد مجانبی $\log(\log^* n)$ است.

ب - حالا برای اینکه عضو نیمه اکثریت رو پیدا کنیم، آرایه A را به دوتا آرایه تقسیم می‌کنیم و بعد داخل هرکدوم دنبال عنصری که بیشتر از $\frac{1}{4}$ تکرار می‌شود. (بیشتر از $\frac{1}{4}$ طول اون آرایه) چون عضو نیمه اکثریت اگر بیش از $\frac{n}{4}$ در A تکرار شده، باید عضو نیمه اکثریت زیرآرایه‌ی دیگر یا حتی همه زیرآرایه‌ها باشد زیرا اگر نباشد، در مجموع کمتر از $\frac{n}{4}$ در A تکرار شده است.

پس اینجا ۳ حالت پیش می‌آید: ۱- در زیرآرایه‌ها، هیچ عنصری بیش از $\frac{1}{4}$ تعداد اعضای اون زیرآرایه تکرار نشده

۲- در زیرآرایه‌ها دقیقا یک عنصر در هرکدوم بیش از $\frac{1}{4}$ تعداد اعضای اون‌ها تکرار شده که با جستجوی خطی روی آرایه بدست می‌آوریم که عنصر نیمه اکثریت داریم یا نه

۳- در زیرآرایه‌ها دو عنصر باشند که بیش از $\frac{1}{4}$ تعداد اعضای آن زیرآرایه را دارند پس با جستجوی خطی برای هر کدام از آن عنصرها روی آرایه کلی بدست می‌آوریم که عضو نیمه اکثریت داریم یا نه

~~در~~ پس در روش بازگشتی یا ۰ یا ۱ یا ۲ جواب می‌گیریم