



ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

مدرس: مسعود صدیقین

تمرین سری پانزدهم

مسئله‌ی ۱*. پدربزرگ

با استفاده از مجموعه‌های مجزا الگوریتمی ارائه دهید که بتوان پایین‌ترین جد مشترک دو راس دلخواه u و v را در درخت T پیدا کرد.

(مهرداد میرزائی)

مسئله‌ی ۲*. دورداد

با استفاده از مجموعه‌های مجزا، الگوریتمی ارائه دهید که وجود دور در گراف را تشخیص دهد.

(مهرداد میرزائی)

مسئله‌ی ۳*. فشار درسی

دارا n تکلیف برای n تا درس متفاوت دارد که همگی این درس‌ها نیز ۳ واحدی هستند! اساتید او که بی‌رحم هستند، تنها در صورتی نمره‌ی هر کدام از این تکالیف را به دارا می‌دهند که پیش از ددلاین تکلیفش را تحویل داده باشد. در غیر این صورت هیچ نمره‌ای به تکلیف دارا تعلق نمی‌گیرد. بارم هر کدام از ددلاین‌های دارا نیز از ۰ (در کمال تعجب!) تا ۲۰ نمره متغیر است، اما زمانی که دارا برای انجام هر تکلیف صرف می‌کند یکسان است. همچنین دارا می‌تواند در هر لحظه روی یکی از تمارین خود وقت بگذارد! به دارا کمک کنید تا زیرمجموعه‌ای از ددلاین‌های فراوانش را طوری انتخاب کند تا بیشترین نمره ممکن از همه‌ی دروس را بگیرد، بلکه این ترم مشروط نشود!

(مهرداد میرزائی)

مسئله‌ی ۴*. پرینتر

می‌خواهیم عملیات $print(X)$ را به داده ساختار مجموعه‌های مجزا اضافه کنیم، به گونه‌ای که همه‌ی اعضای مجموعه‌ای که X در آن است را در مرتبه‌ی زمانی تعداد اعضای مجموعه‌ی X چاپ کند. روشی ارائه دهید تا بدون تغییر در مرتبه‌ی زمانی سایر عملیات‌های مجموعه‌های مجزا، این کار امکان‌پذیر باشد.

(مهرداد میرزائی)

مسئله‌ی ۵*. ایچ

ایچ دانشجویی کر و کثیف است که هرگز حاضر به حمام رفتن نمی‌شود! وی n تا تیل به شماره‌های ۱ تا n دارد که آن‌ها بر خلاف خودش تمیزند و این موضوع باعث رنجش خاطر ایچ شده! لذا ایچ می‌خواهد m مرحله تیل‌بازی کند

تا همه‌ی تیلها در حالت جذاب قرار بگیرند! از نظر او یک حالت جذاب است اگر از هر دو تیل‌ی بهم چسبیده‌ای، دقیقاً یکی کثیف باشد، زیرا از نظر او این‌گونه کثیفی انتشار می‌یابد! بازی به این شکل است که او هر بار سعی می‌کند دو تیل‌ی متمایز را بهم بچسباند و تا زمانی که آن‌ها را از هم جدا نکند، آن دو کنار هم می‌مانند. او همواره سعی می‌کند جذابیت گوی‌ها حفظ شود و لذا اگر نتواند تیل‌های تمیز را کثیف و یا تیل‌های کثیف را تمیز کند طوری که شرط جذابیت آن‌ها رعایت شود، دو تیل‌ی دیگر را انتخاب می‌کند! تمیز یا کثیف کردن هر گوی نیز ۱ واحد ایج را خسته می‌کند. روشی به ایج ارائه کنید که وی حداکثر $O((n + m)\log n)$ واحد خسته شود بلکه حال داشته باشد حمام کند!

(مهرداد میرزائی)

مسئله‌ی ۶*. سلسله عملیات

یک ترتیب از m تا عملیات $make_set$ ، $find_set$ و $union$ ارائه دهید به طوری که اگر n بار عملیات $make_set$ روی داده ساختار مجموعه‌های مجزا پیاده شود و تنها از $union$ by rank استفاده شود، زمان لازم $\Omega(m\log n)$ باشد.

(مهرداد میرزائی)

مسئله‌ی ۷*. هم‌سلولی

الگوریتمی ارائه دهید که برای یافتن تعداد مولفه همبندی‌های یک گراف با n راس و m یال، به زمان و حافظه‌ای از $O(m + n)$ نیاز داشته باشد.

(مهرداد میرزائی)