کوییز دوم درس DS استاد صدیقین امان محمدی ۹۹۱۰۲۲۰۷

سؤال ۱) در این سؤال برای پیدا کردن نابجایی ها، اوّل روی کل آرایه loop می زنیم و هر عنصر را با عنصر جلوی خودش مقایسه می کنیم، درصورتی که هر عنصر از عنصر جلوی خودش بزرگتر بود، نابجایی رخ داده است و می فهمیم یا خود عنصر یا عنصر جلوی آن، درست sort نشده اند. پس یک min heap می سازیم و هر زمان با این پدیده مواجه شدیم، هر دو عنصر (خود عنصر و عنصر جلوییش) را در min heap می ریزیم و از آرایه خارج می کنیم هر دو خانه را.

(دلیل اینکه هر دو عنصر را در min heap می ریزیم این است که یا عنصر اوّل یا عنصر دوم یا هر دو در مکان اشتباه هستند!)

حالا ۱۰ عنصر در min heap داریم. از اوّل آرایه شروع می کنیم و هر بار، کوچکترین عضو min heap را در خانه خالی (به ترتیب) اضافه می کنیم. وقتی که هر ۱۰ تا عنصر موجود در min heap به آرایه اضافه شدند، یک آرایه مرتب شده داریم.

پیچیدگی زمانی: اردر آن $O(n+10\log 10)=O(n)$ است.

نکته: تعداد اعضای min heap بین ۶ تا ۱۰ تا است. اگر همه عناصر نابجا پشت سرهم باشند، ۶ تا عضو خواهد داشت و اگر هیچکدام مجاور هم نباشند، ۱۰ تا عضو خواهد داشت. چون حداکثر ۱۰ تا عضو می تواند داشته باشد، برای ۱۰ تا حساب کردم!

سؤال ۲)

کوییز دوم درس DS استاد صدیقین ایمان محمدی ۹۹۱۰۲۲۰۷

عدد رنگی گراف G همان $\chi(G)$ است.

الف) G دوبخشی با حداقل یک یال است. گراف دوبخشی در هر بخش بین رأس ها هیچ یالی وجود ندارد پس اگر هر بخش را یک رنگ کنیم، فقط دو رنگ نیاز است!

ب) درجه هر رأس حداکثر برابر با k است. نشان می دهیم $\chi(G) \leq k+1$

از رأسی که حداکثر درجه ممکن یعنی k را دارد شروع می کنیم، آن را رنگ می کنیم سپس هر k همسایه آن را یک رنگ متفاوت می کنیم. تا اینجا k+1 رنگ استفاده شده است. حالا همین کار را برای همسایه های همین رأس ها انجام می دهیم. درنهایت چون هر رأس ماکسیمم k همسایه دارد و ما k+1 رنگ استفاده می کنیم، حداقل ۱ رنگ برای هر رأس وجود دارد که آن را با این رنگ کنیم و با رنگ همسایه هایش یکسان نباشد.

ج) فرض می کنیم در گراف G، از هر رأس حداکثر k دور با طول فرد عبور می کند. پس نشان می دهیم $\chi(G) \leq 2k+2$

اول، روی G از یک رأس دلخواه، الگوریتم BFS را اجرا می کنیم تا گراف به یک درخت BFS با طبقه های مختلف تبدیل شود. اگر در هر طبقه یالی بین رأس ها وجود نداشته باشد، با دو رنگ آن ها را رنگ می کنیم. اگر یالی وجود داشته باشد، دور فرد به وجود می آید و رنگ های بیشتر نیاز است.

حالا رأس ریشه حداکثر k دور با طول فرد دارد پس در هر طبقه اگر یال هایی که از هر رأس به طبقات دیگر داریم را در نظر نگیریم، حداکثر درجه یک رأس k است.

(چون اگر k+1 باشد پس k+1 دور فرد شامل ریشه وجود دارد.)

پس طبق قسمت ب می توان بدون در نظر گرفتن یال های خارج شده از یک طبقه، می توان آن طبقه را با حداکثر k+1 رنگ، رنگ کرد.

حالا اگر طبقات زوج را با k+1 رنگ و همینطور طبقات فرد را با k+1 رنگ دیگر، رنگ کرد مسئله حل شده است

چون اثبات کردیم درخود طبقه مشکلی نداریم و بین طبقه بالا و پایینی نیز مشکلی نداریم چون از k+1 تا رنگ دیگر استفاده کردیم پس حداکثر $k+1 + k+1 = 2k+2$ رنگ لازم است