



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

سوالات نمونه

مجموعه‌ی ۳: سیستم‌های اثبات

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال دوم ۰۲ - ۰۱

سیستم فرمال Łukasiewicz

سیستم فرمال^۱ معرفی شده در درس دارای سه اصل موضوعه^۲ و یک قاعده‌ی استنتاج^۳ به شرح زیر می‌باشد.

1. Axioms

- $A_1 : (p \rightarrow (q \rightarrow p))$
- $A_2 : ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
- $A_3 : (((\neg p) \rightarrow (\neg q)) \rightarrow (q \rightarrow p))$

2. Inference Rules

- Modus Ponens (MP) : $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ [MP]

¹Formal System

²Axiom

³Inference Rule

با استفاده از سیستم فرمال معرفی شده، درستی^۴ هر کدام از عبارات زیر در منطق گزاره‌ای^۵ را اثبات کنید.

گزاره‌ی a

- $(p \rightarrow p)$

پاسخ:

1. $p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)$ (A_1)
2. $(p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$ (A_2)
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$ $((1) \text{ and } (2) \text{ and modus ponens})$
4. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (A_1)
5. $p \rightarrow p$ $((4) \text{ and } (3) \text{ and modus ponens})$

⁴Validity

⁵Propositional Logic

گزاره‌ی b

- $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

پاسخ:

1. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))))$ (A_1)
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (A_2)
3. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ ((1) and (2) and MP)
4. $((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \rightarrow$
5. $((((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))))$ (A_2)
6. $((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ ((3) and (4,5) and MP)
7. $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ (A_1)
8. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ((6) and (7) and MP)

گزاره‌ی c

- $(p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$

پاسخ:

1. $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$ (A_2)
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (lemma 1)
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$ ((1) and (2) and modus ponens)
4. $((((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)) \rightarrow ((p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))))$ (lemma 2)
5. $(p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$ ((3) and (4) and modus ponens)
6. $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p)$ (A_1)
7. $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$ ((5) and (6) and modus ponens)

گزاره‌ی d

- $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

پاسخ:

فرمول‌ها را به شکل زیر نام گذاری می‌کنیم،

- $A = p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- $B = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $C = (q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

سپس به سراغ اثبات می‌رویم (صفحه‌ی بعد).

1. $(A) \rightarrow (B)$ (A_2)
2. $(B) \rightarrow (C)$ (lemma 2)
3. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (lemma 2)
4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ ((2) and (3) and modus ponens)
5. $A \rightarrow C$ ((4) and (1) and modus ponens)
6. $(A \rightarrow C) \rightarrow (((A) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ((A) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))))$ (A_2)
7. $((A) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ((A) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)))$ ((5) and (6) and modus ponens)
8. $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ (A_1)
9. $(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((A) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q)))$ (A_1)
10. $(A) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))$ ((8) and (9) and modus ponens)
11. $(A) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ ((7) and (10) and modus ponens)
12. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ ((11) and definition of A)

گزاره‌ی e

- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

پاسخ:

1. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (based on the proof of (b))
2. $((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ (based on the proof of (d))
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ((1) and (2) and modus ponens)

موفق باشید