



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۲

موعد تحویل: جمعه ۱۴۰۲/۰۲/۰۸

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال دوم ۰۲ - ۰۱

۲۸ فروردین ۱۴۰۲

۱. عبارت‌های منظم

۱.۱

مجموعه $\Sigma = \{ (,) \}$ را به عنوان الفبا در نظر بگیرید. می‌دانیم که زبان شامل همه رشته‌های شامل یک پرانتزگذاری معتبر (رشته‌های خوش پرانتز)، زبانی نامنظم است و عبارت منظمی برای توصیف آن وجود ندارد (به بخش سوم همین تمرین مراجعه کنید). حال تابعی با عنوان عمق یک پرانتزگذاری معتبر تعریف می‌کنیم، که عبارت است از حداکثر تعداد پرانتز باز بسته نشده در هر نقطه‌ای از رشته. به عنوان مثال، عمق رشته $((()))$ برابر ۳ است و عمق رشته $((()))()$ برابر ۲ است و عمق رشته ϵ برابر ۰ است. حال زبان L را به این صورت تعریف می‌کنیم که شامل تمام رشته‌های شامل یک پرانتزگذاری معتبر به عمق حداکثر ۴ است. به عنوان مثال $((())) \in L$ اما $((((())) \notin L$. عبارت منظمی برای توصیف زبان L ارائه دهید. دقت داشته باشید که عبارت منظم شما باید تمامی رشته‌های زبان را تولید کند و نیز رشته‌ی اضافه بر این زبان تولید نکند. نشان دهید که عبارت مربوطه، این خواسته‌ها را برآورده می‌کند.

۲.۱

برای هر رشته مانند w تابع $stammer$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$stammer(w) = \begin{cases} \epsilon, & \text{if } w = \epsilon. \\ aa \cdot stammer(x), & \text{if } w = ax \text{ for some symbol } a \text{ and some string } x. \end{cases}$$

با فرض منظم بودن زبان L و با استفاده از توصیف یک زبان منظم به شکل عبارت منظم، اثبات کنید زبان زیر منظم است.

$$stammer^{-1}(L) = \{w \mid stammer(w) \in L\}$$

۳.۱

همانی‌های زیر را به کمک لیست همانی‌های پایه که در صفحه‌ی درس قرار گرفته است، اثبات کنید. در مورد دوم، تنها مجاز به استفاده از همانی‌های ۱ تا ۱۲ هستید.

a) $(xy^*z)^*(xyz(xy^*z)^*)^* = (xy^*z)^*$

$$b) (x \cup y)^* = (x^*y)^*x^* = x^*(yx^*)^*$$

۲. هم‌ارزی عبارتهای منظم و ماشین‌های متناهی

۱.۲

مجموعه $\Sigma = \{a, b\}$ را به عنوان الفبا در نظر بگیرید. زبان L را همه‌ی رشته‌های شامل a, b تعریف می‌کنیم، به شکلی که تعداد a و b برابر باشد و همچنین برای هر رشته مانند w که عضو زبان L است، از ابتدای رشته به ازای هر حرفی که جلو می‌رویم اختلاف تعداد a ها b ها هیچگاه بیشتر از ۲ نشود.

برای مثال رشته‌ی $aababb$ عضو این زبان است، زیرا تعداد a ها و b ها برابر است و اختلاف آن‌ها هیچگاه بیشتر از ۲ نشده است، اما رشته $aaabbb$ برای این زبان نیست زیرا با وجود اینکه تعداد a ها و b ها برابر است، اما پس از طی کردن سه حرف ابتدایی، اختلاف آن‌ها به ۳ رسیده است که بیشتر از ۲ است.

آ) به کمک عبارات منظم زبان L را توصیف کنید.

ب) با استفاده از عبارت منظم به دست آمده در بخش قبل، ماشین متناهی قطعی توصیف کننده زبان L را با ذکر مراحل طراحی کنید.

ج) به کمک قسمت قبل ماشین متناهی توصیف کننده‌ی مکمل زبان L را به دست بیاورید و سپس، باتوجه به ماشین جدید طراحی شده، عبارت منظم توصیف کننده مکمل زبان L را با ذکر تمامی مراحل به دست آورید.

۳. زبان‌های نامنظم و لم تزریق

۱.۳

مجموعه‌ی الفبای $\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ را در نظر بگیرید. هر رشته‌ای که از این الفبا تولید شود متشکر از دو سطر شامل صفر و یک خواهد بود. هر سطر را معادل یک عدد دودویی در نظر بگیرید. حال زبان‌های داده شده‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$a) L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{the top row of } w \text{ is a larger number than is the bottom row}\}$$

$$b) L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{the bottom row of } w \text{ is the reverse of the top row}\}$$

برای درک بهتر این زبان‌ها، به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in L_1, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \notin L_1, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in L_2, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \notin L_2$$

برای هر یک از زبان‌های فوق، بررسی کنید که آیا این زبان از رده‌ی زبان‌های منظم است یا خیر. ادعای خود را ثابت کنید.

۲.۳

یک رشته‌ی خوش‌پرانتز^۱، رشته‌ای است روی الفبای $\{ (,) \}$ به شکلی که تعداد پرانتزهای چپ آن با تعداد پرانتزهای راست آن برابر است و در هر پیشوندی از آن رشته، تعداد پرانتزهای چپ آن حداقل برابر با تعداد پرانتزهای راست آن می‌باشد. به‌طور مثال رشته‌ی $((()()))()$ یک رشته‌ی خوش‌پرانتز است، اما رشته‌ی $((()()))()$ خوش‌پرانتز نیست. نشان دهید که زبان تمام رشته‌های خوش‌پرانتز از رده‌ی زبان‌های منظم نیست.

۳.۳

تنها به کمک خواص بستاری زبان‌های منظم ثابت کنید که زبان‌های زیر نامنظم هستند. در تمامی بخش‌ها اجازه دارید نامنظم بودن زبان $L_1 = \{a^i b^i \mid i > 0\}$ را دانسته شده فرض کنید، اما اجازه استفاده از لم تزریق را ندارید.

a) $L_2 = \{0^x 1^y 0^y \mid x \geq 0, y \geq 0\}$

b) $L_3 = \{0^x 1^y 2^z \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \text{ if } x = 1 \text{ then } y = z\}$

¹well-parenthesised