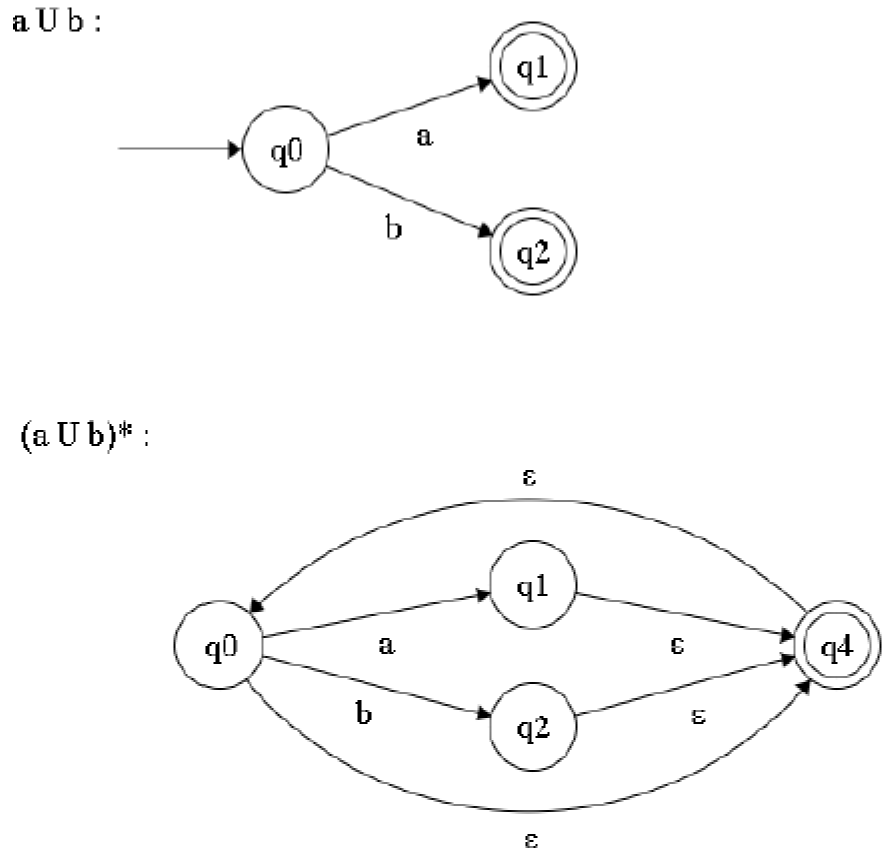
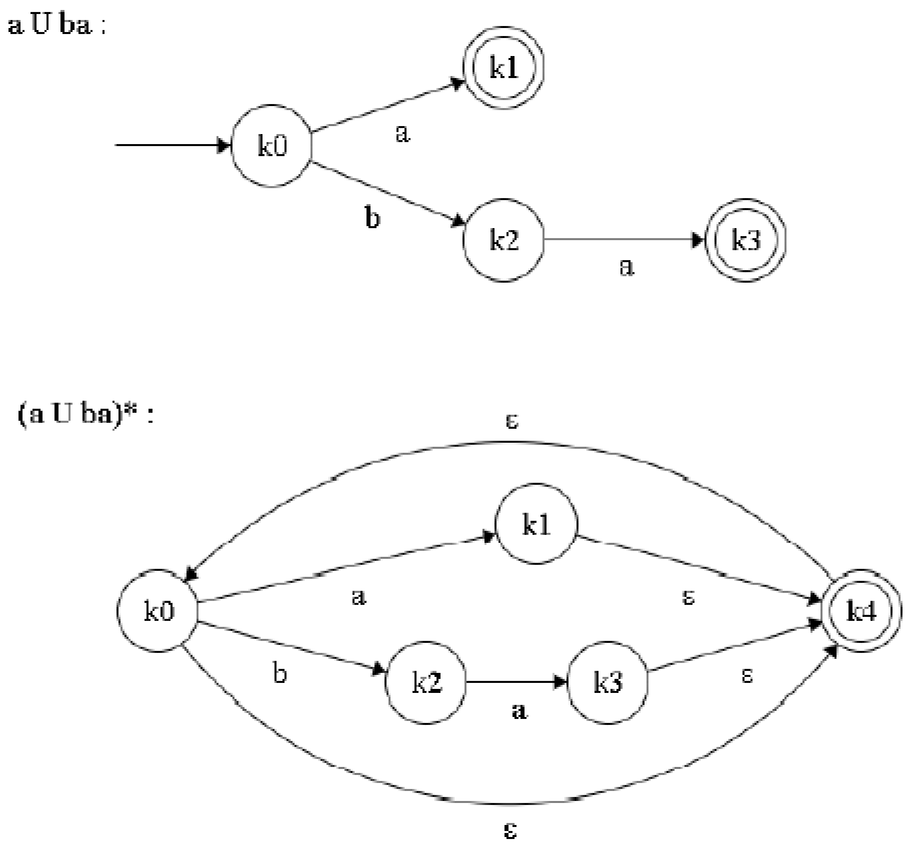
1.1

(a

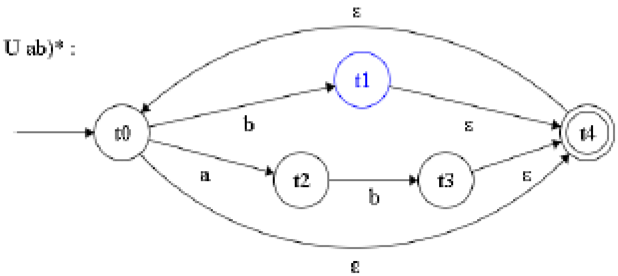


مراحل تولید nfa برای (aUb)*



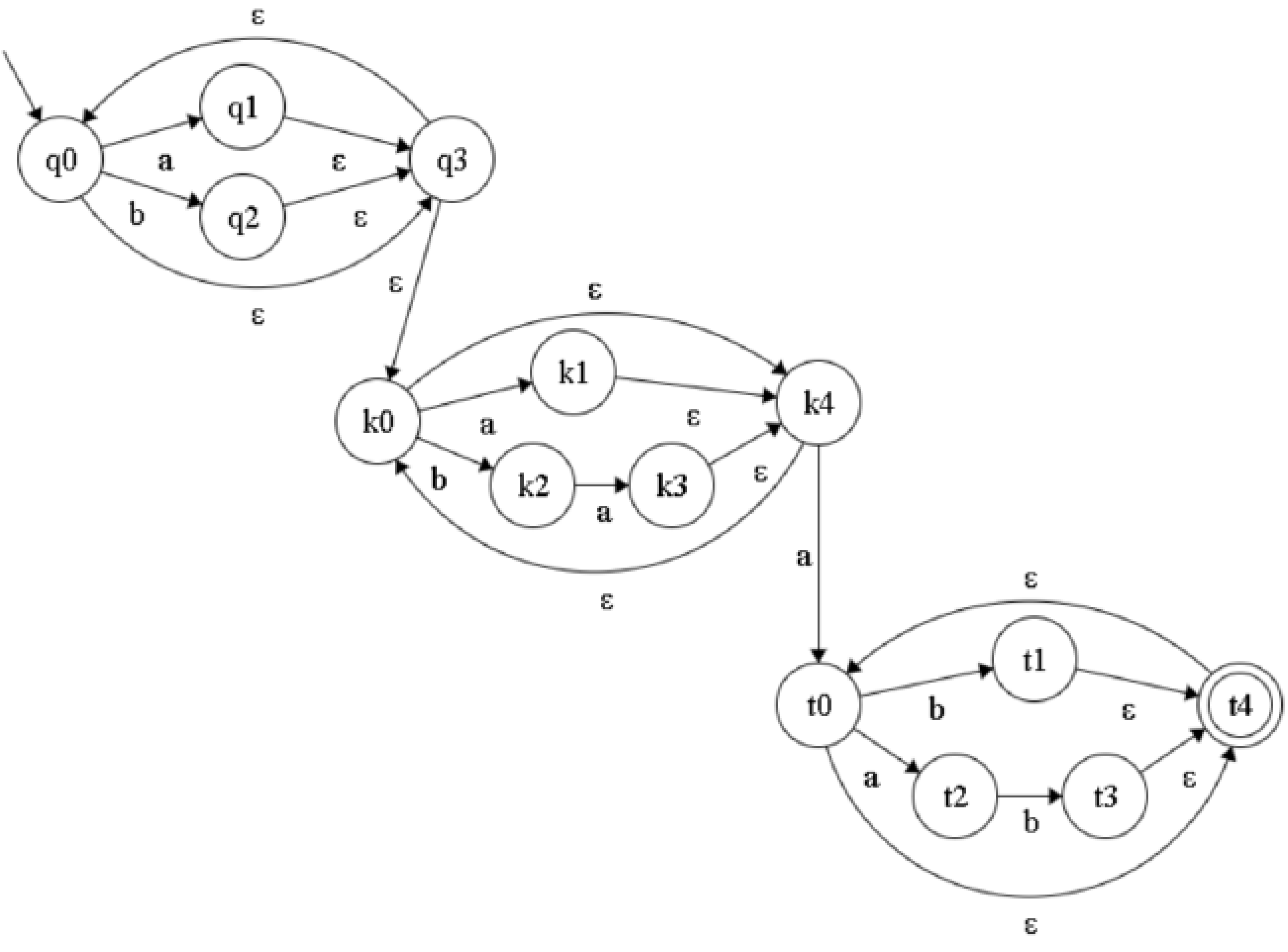
مراحل تولید nfa برای (aUba)*

(b U ab)* :



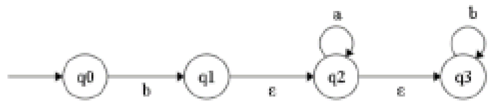
به طریق مشابه (b U ab)* را طراحی می کنیم

حال کافیست یدور حاصل کانکت (aUba)* با a و سپس با (bUba)* را طراحی میکنیم و حاصل را با (aUb)* کانکت می کنیم:

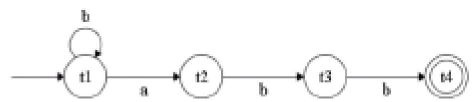


(b

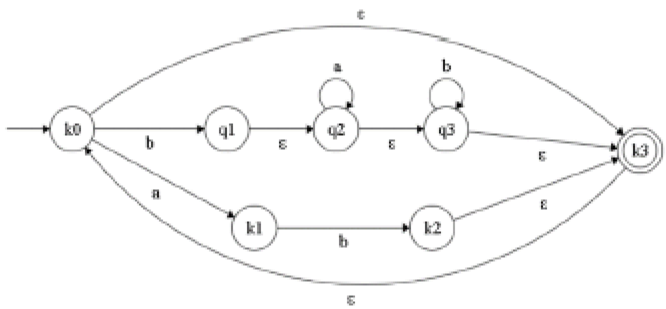
ba*b* :



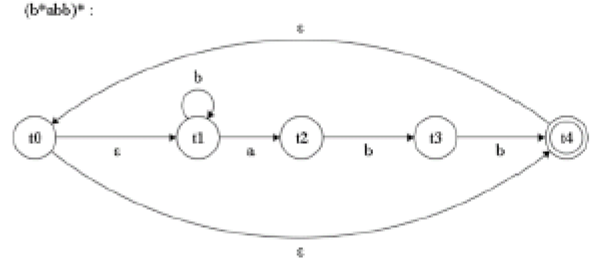
b*abb :



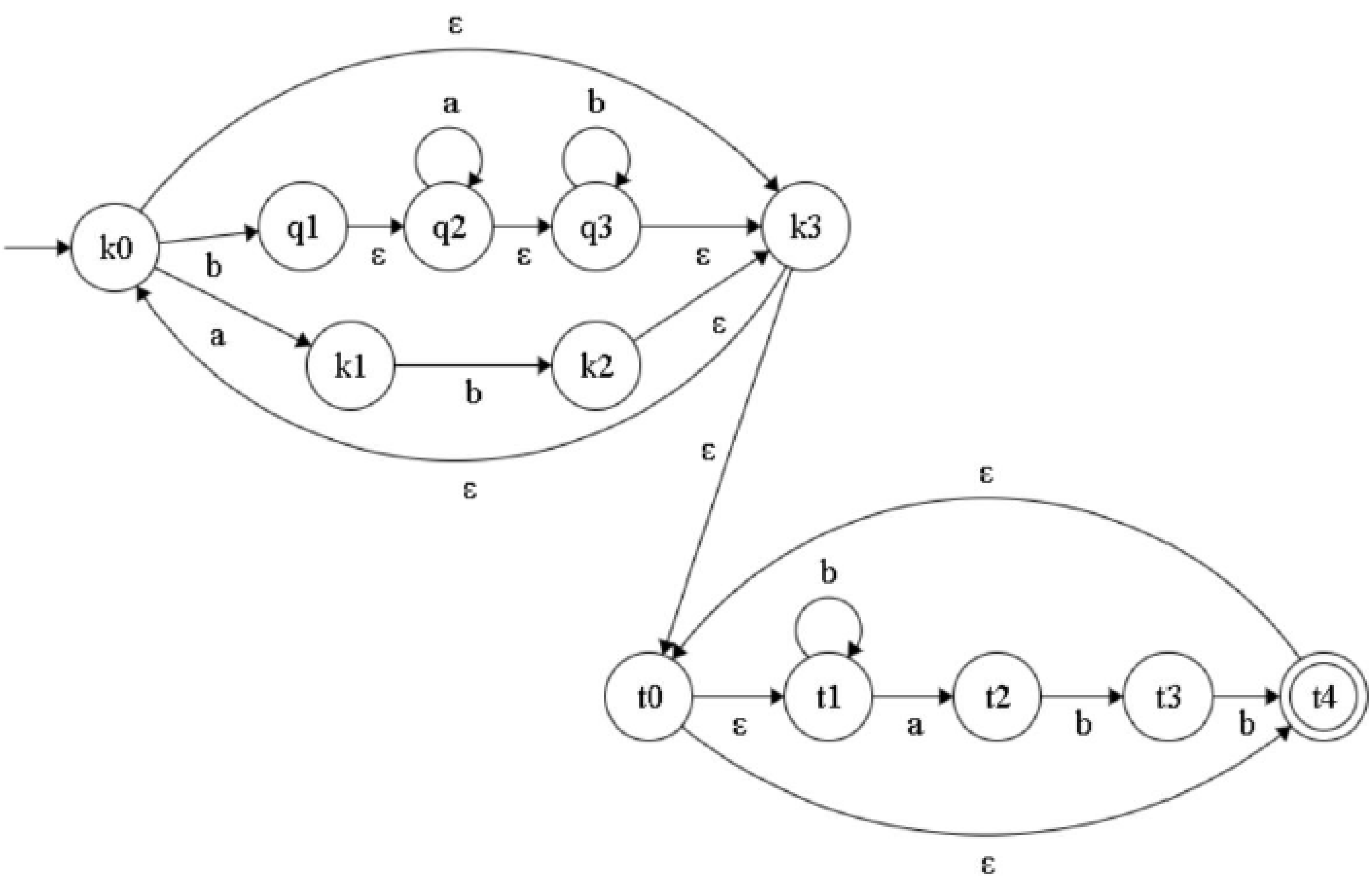
(ab U ba*b*)* :



(b*abb)* :



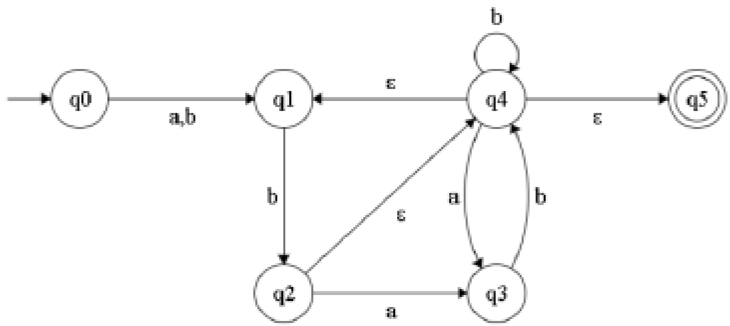
حال که برای (b*abb)* و (ab U ba*b*)* توانستیم nfa طراحی کنیم، این 2 را کانکت می کنیم:



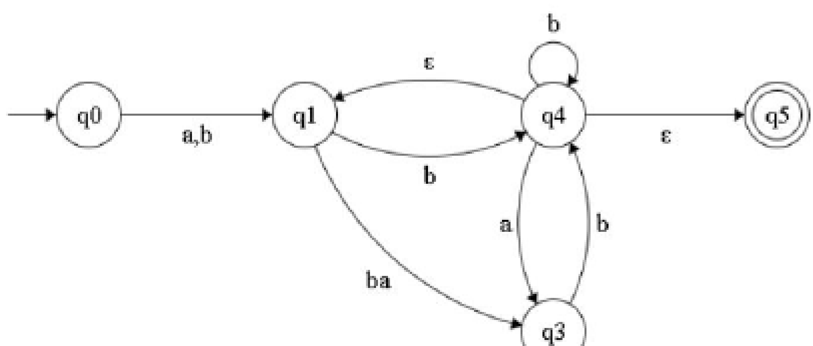
2.1

الف)

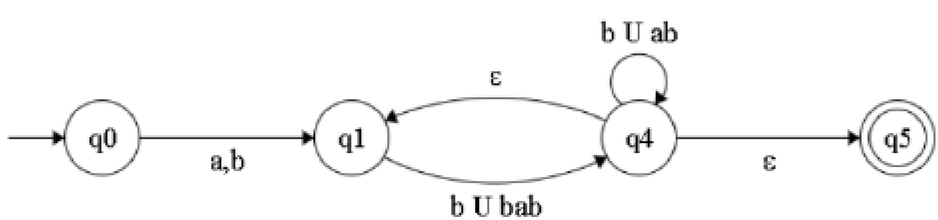
اول از همه این ماشین را به یک gnfa تبدیل می کنیم، سپس مرحله به مرحله استیت ها را حذف می کنیم:



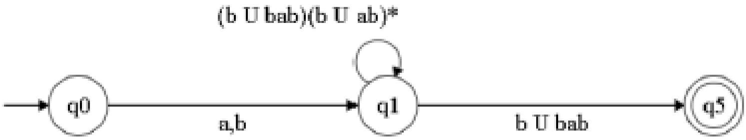
حذف استیت q2:



حذف استیت q3:



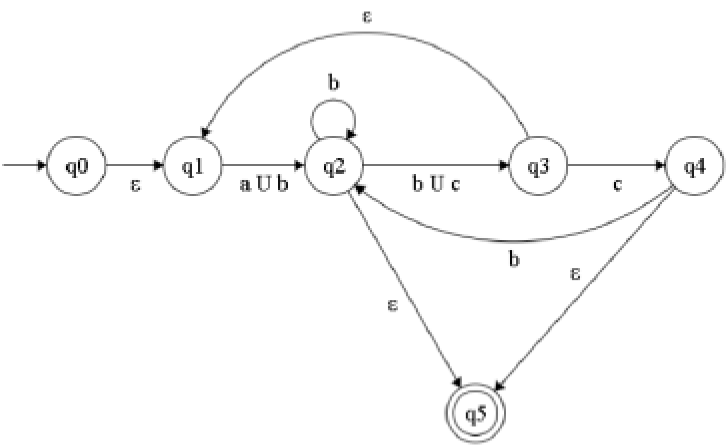
حذف استیت q4:



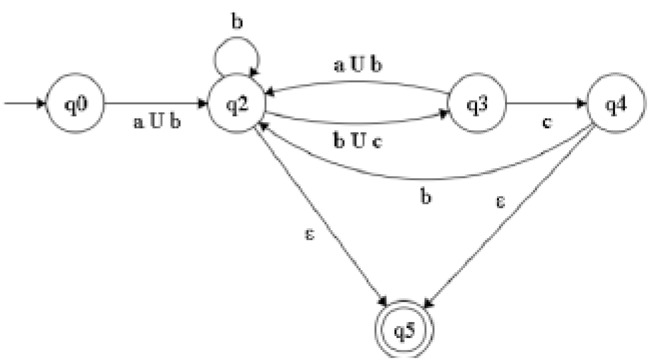
حذف استیت q1:

ب)

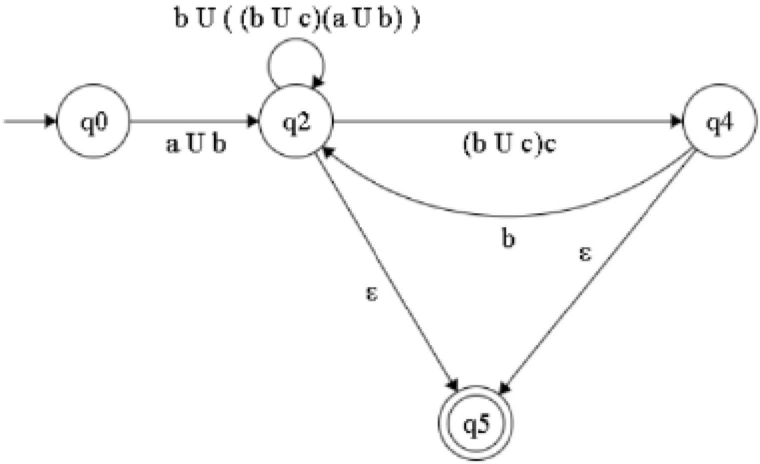
اول این ماشین را به یک gnfa تبدیل می کنیم:



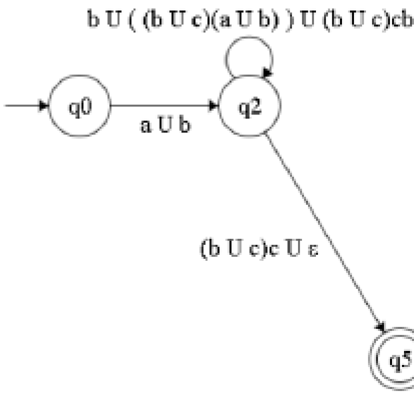
اول میاییم و q1 را حذف می کنیم:



سپس q3 را حذف می کنیم:



حذف q4:



و در نهایت با حذف q2 داریم:

3.1

(a

$$(x \cup y)^* \equiv (x \cup yx^*)^* \xrightarrow{x \to x^*} (x^* \cup y)^* \equiv (x^* \cup y(x^*)^*)^* \xrightarrow{x^*=(x^*)^*}$$

$$(x^* \cup y)^* \equiv (x^* \cup yx^*)^*$$

$$\to (x \cup y)^* \equiv (x^* \cup y)^* \equiv (x^* \cup yx^*)^*$$

(b

$$\xrightarrow{(M \cup N)L \equiv (ML \cup NL)} y^*(x \cup \varepsilon)\, y^* \equiv y^*(x\, y^* \cup \varepsilon\, y^*) \equiv y^*(x\, y^* \cup y^*) \equiv (y^*x\, y^* \cup y^*y^*)$$

دقت کنید که $y^*y^* \equiv y^*$ چوت کافیست در قاعده 14 بجای x همان y را قرار دهیم که داشته باشیم:

$$y \equiv (y \cup y)$$

$$\xrightarrow{y=(y \cup y)} y^* \equiv (y \cup y)^* \xrightarrow{14-c} (y \cup y)^* \equiv y^*(y \cup y)^* \equiv y^*y^*$$

پس داریم که:

$$(y^*(x \cup \varepsilon)y^*)^* \equiv (y^*xy^* \cup y^*y^*)^* \equiv (y^*xy^* \cup y^*)^*$$

اگر در بخش a، جای x و y را عوض کنیم داریم که $(x \cup y)^* \equiv (y \cup x)^* \equiv (y^* \cup xy^*)^*$، حال در این رابطه به جای x قرار دهید y^*x، پس داریم که $(y \cup y^*x)^* \equiv (y^* \cup y^*xy^*)^*$ ، حالا از این رابطه در رابطه ای که قبل تر داشتیم استفاده می کنیم:

$$(y^*(x \cup \varepsilon)y^*)^* \equiv (y^*xy^* \cup y^*)^* \equiv (y \cup y^*x)^*$$

حال دقت کنید که اگر در رابطه 14-g جای x و y را عوض کنیم داریم که $(y \cup x)^* = (y^*x)^*y^*$، و اگر در این رابطه بجای x قرار دهیم y^*x، داریم که $(y \cup y^*x)^* = (y^*y^*x)^*y^*$، پس داریم که:

$$(y^*(x \cup \varepsilon)y^*)^* \equiv (y^*xy^* \cup y^*)^* \equiv (y \cup y^*x)^* \equiv (y^*y^*x)^*y^* \equiv (y^*x)^*y^*$$

$$\xrightarrow{14-g} (y^*(x \cup \varepsilon)y^*)^* \equiv (y^*x)^*y^* \equiv (y \cup x)^*$$

1.2

(L_1

در زبان L_1 می دانیم که *n* و *m* و *k* هر 3 برابر نبوده اند. پس برای اثبات نامنظم بودن این زبان تلاش می کنیم با کمک لم *pumping* رشته ای پیدا کنیم که تعداد a,b و c های برابری داشته باشد.

فرض کنید *dfa* ای که زبان L_1 را توصیف می کند، استیت هایش q_0 تا q_s باشد.

فرض کنید که یک رشته به شکل $x = a^n b^m c^m$ داریم که $m>n>s+1$، پس این رشته عضو L_1 است.

دقت کنید که $s+1$ حرف اول رشته x همه حرف a هستند، و اگر در dfa این زبان نگاه کنیم، حتما در این s+1 حرف اول استیتی وجود داشته که 2 بار تکرار شده، که این به ما اجازه pump کردن میدهد، اما نکته ای که می خواهم به آن اشاره کنم این است که مقدار عدد m هیچ تاثیری در طول رشته ای که *pump* می کنیم ندارد، چون مقدار m هرچیزی باشد، $s+2$ استیتی که اول کار به آنها میرویم تغییری نمی کنند، چون ماشین ما یک *dfa* است و مستقل از مقدار m، s+2 استیتی که در اول به آنها میرفتیم یکتا تایین میشوند. پس اگر طول رشته ای که قراره *pump* کنیم t باشد، مقدار m را برابر با $n+t$ قرار میدهیم، در این صورت با یک بار *pump* کردن میفهمیم که $a^{n+t} b^{n+t} c^{n+t}$ عضو زبانمان است، اما این تناقض است، و از این تناقض میفهمیم این زبان منظم نبوده است.

L_2)

طبق لم pumping می دانیم که عدد k وجود دارد که برای هر رشته که طولش حداقل k است داشته باشیم که آن را می توان به صورت xyz نوشت که $|xy|\leq k$ و رشته y را می توان pump کرد. پس اگر اینجا p و q را طوری انتخاب کنیم که $pq\geq k$ داریم که رشتمان را می توانیم به صورت xyz بنویسیم به طوری که $|y|>0$ و xy^nz عضو L_2 است.

چون رشته ما کاملا از حرف a تشکیل شده است، لم پامپینگ در اصل دارد می گوید که اگر $|y|=t$ پس $a^{pq+nt}\epsilon L_2$

$$n=pq \Rightarrow a^{pq+pqt}\epsilon L_2 \Rightarrow$$

در نتیجه $pq(t+1)$ را باید بتوان به صورت ضرب 2 عدد اول نوشت، اما دقت کنید که تا همینجا به صورت ضرب 2 تا عدد اول ضرب در $(t+1)$ آن را نوشته ایم، و با توجه به یکتایی تجزیه اعداد به عوامل اول، امکان نداشته این عدد را هیچ جوره به صورت ضرب فقط 2 عدد اول بنویسیم. پس ازین تناقض می فهمیم که این زبان منظم نبوده است.

2.2

فرض خلف کنید و فرض کنید این زبان منظم است.

قبل از حل سوال به یک نکته ای اشاره می کنم، اگر فرض کنیم dfa این زبان ما، p تا استیت داشته باشد، و فرض کنیم z یک رشته ای باشد که زبان L آن را میپذیرد، به طوری که p تا حرف اول رشته z تماما از حرف b باشد، در این صورت اگر همان روند لم پامپینگ را پیش بریم، میبینیم که رشته ای مثل w وجود دارد که کاملا از حرف b تشکیل شده باشد و می توانیم رشته w را در یک جایی از p تا حرف اول z، تزریق کنیم.

حالا نکته ای که به آن می خوام دقیق تر اشاره کنم این است که طول رشته w از ادامه رشته z مستقل است، یعنی برای هر رشته ای دیگه ای در زبان L مثل z' که p حرف اول z' تماما حرف b باشد، رشته ای که در زبان b' می توانیم pump کنیم با رشته ای که در زبان z می توانیم pump کنیم برابر است، چون p حرف اول z و z' در dfa زبان L دقیقا از استیت های یکسانی گذشته اند.

در نتیجه برای هر z در زبان L، که p حرف اولش b باشد میتوان گفت که عدد ثابت ناصفر t وجود دارد که

$$b^{nt}z\epsilon L$$

که اینجا t همان طول رشته w است.

فرض کنید که $n\geq p$ عددی زوج باشد، x و y را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x = \underbrace{bbb\ldots b}_{n}\underbrace{ccc\ldots c}_{2t-1}$$

$$y = \underbrace{ccc \dots c}_{n+2t-1}$$

دقت کنید که این t همان مقدار t ای است که قبل تر بهش اشاره کردیم.

حال داریم که:

$$Value(x) = \underbrace{b \times b \times b \dots \times b}_{n} \times \underbrace{c \times c \times c \dots \times c}_{2t-1} = a \times \underbrace{b \dots \times b}_{n-2} \times \underbrace{c \times c \times c \dots \times c}_{2t-1} = \cdots =$$
$$= a \times \underbrace{c \times c \times c \dots \times c}_{2t-1} = \underbrace{c \times c \times c \dots \times c}_{2t-1} = a \times \underbrace{c \times c \times c \dots \times c}_{2t-3} = \cdots = a \times c = c$$

$$Value(y) = \underbrace{c \times c \times c \dots \times c}_{n+2t-1} = a \times \underbrace{c \times c \times c \dots \times c}_{n+2t-3} = \underbrace{c \times c \times c \dots \times c}_{n+2t-3} = \cdots = a \times c = c$$

پس داریم که |x|=|y| و Value(x)=Value(y) در نتیجه می توان گفت xy∈L.

حالا دقت کنید که xy رشته ای است که p تا حرف اول آن همه b هستند، در نتیجه داریم که:

$b^{4t}xy \in L$

پس داریم که:

$$b^{4t}xy = \underbrace{bbb \dots b}_{4t}\underbrace{bbb \dots b}_{n}\underbrace{ccc \dots c}_{n+4t-2} = \underbrace{bbb \dots b}_{n+4t}\underbrace{ccc \dots c}_{n+4t-2}$$

و اگر قرار باشد رشته بالا به 2 قسمت x′ و y′ تقسیم شود که طول x′ و y′ برابر باشد، داریم که:

$$x' = \underbrace{bbb \dots b}_{n+4t-1}$$

$$y' = b\,\underbrace{ccc \dots c}_{n+4t-2}$$

پس داریم که x′y′∈L، پس در نتیجه Value این 2 رشته باید برابر باشد:

$$Value(x') = \underbrace{b \times b \times b \dots \times b}_{n+4t-1} = a \times \underbrace{b \dots \times b}_{n+4t-3} = \cdots = a$$

$$Value(y') = b \times \underbrace{c \times c \times c \dots \times c}_{n+4t-2} = b \times \underbrace{c \times c \times c \dots \times c}_{n+4t-3} = \cdots = b \times c = b$$

که این تناقض است، و از این تناقض می فهمیم که این زبان منظم نبوده است.