تمرین ۱ **ایمان محمدی ـ ۹۹۱۰۲۲۰۷**

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ــ۱۴۰۲ **زمان آپلود: ۲۹ فروردین**

سوال ۱. سوال ۱

برای هر کدام از زبان‌های منظم زیر، یک ماشین متناهی قطعی طراحی می‌کنیم که رشته‌های آن زبان را بپذیرد.

۱.۱.۱

فرض می‌کنیم
$$N = (Q, \Sigma, \delta, q_{\cdot}, F)$$
یک DFA با شرایط زیر باشد:

$$\begin{aligned}
Q &= P(\Sigma) \\
\Sigma &= \{p, q, r, s\} \\
\delta(q, a) &= q \cup a \\
q_{\cdot} &= \{\} \\
F &= \{q \mid |q| \neq ۴\}
\end{aligned}$$

درستی این DFA از تعریف آن آشکار است. بدین شکل که آن همه‌ی رشته‌های قابل تعریف روی الفبای مذکور را که هر کدام فاقد دست کم یکی از این کاراکترها هستند، خروجی می‌دهد.

۱.۱.۲

فرض می‌کنیم
$$N = (Q, \Sigma, \delta, q_{\cdot}, F)$$
یک DFA با شرایط زیر باشد: (در این‌جا $\pi(q)$ مجموعه‌ی همه‌ی جایگشت‌های رشته‌ی q. می‌باشد.)

$$\begin{aligned}
Q &= \{(?\,,?\,,?\,,?\,) | ? \in \{a, b, c, .\}\} \\
\Sigma &= \{a, b, c\} \\
\delta(q, a) &= \begin{cases} q & |q| = ۴ \wedge q \notin F \\ q \ll a & O.w \end{cases} \\
q_{\cdot} &= \{., ., ., .\} \\
F &= \{q \mid q \notin B\} \\
B &= \{(bbbb), (abba), (cbbc), (acba), (abca), (cabc), (cbac)\} \\
&\quad \cup \pi(bbba) \cup \pi(bbbc) \cup \pi(bbac)
\end{aligned}$$

۱.۲

از استقرا استفاده می‌کنیم برای اثبات این بخش. در ابتدا پایه‌ی استقرا را تعریف کرده و سپس گام استقرا را اثبات می‌کنیم تا اثبات تکمیل شود. این‌جا روی طول ω استقرا می‌زنیم. پایه‌ی استقرا: فرض می‌کنیم طول ω صفر است. در نتیجه با توجه به تعریف، داریم:

$$\begin{aligned} &\hat{\delta}^*(q_0, \epsilon) = \{q_0\} \\ &\delta^*(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\} \\ \implies &\hat{\delta}^*(q_0, \epsilon) = \delta^*(\{q_0\}, \epsilon) \end{aligned}$$

حالا فرض می‌کنیم برای $\omega = \omega_1\omega_2 \dots \omega_k$ نیز درست باشد. پس داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^*(q_0, \omega_1 \dots \omega_k) &= \delta^*(\{q_0\}, \omega_1 \dots \omega_k) \\ \hat{\delta}^*(q_0, \omega_1 \dots \omega_{k+1}) &= \hat{\delta}(\hat{\delta}^*(q_0, \omega_1 \dots \omega_k), w_{k+1}) = \bigcup_{r \in \hat{\delta}^*(q_0, \omega_1 \dots \omega_k)} \hat{\delta}(r, w_{k+1}) \\ \delta^*(\{q_0\}, \omega_1 \dots \omega_{k+1}) &= \delta(\delta^*(\{q_0\}, \omega_1 \dots \omega_k), \omega_{k+1}) = \bigcup_{r \in \delta^*(\{q_0\}, \omega_1 \dots \omega_k))} \hat{\delta}(r, w_{k+1}) \\ \implies \hat{\delta}^*(q_0, \omega_1 \dots \omega_{k+1}) &= \delta^*(\{q_0\}, \omega_1 \dots \omega_{k+1}) \blacksquare \end{aligned}$$

در نتیجه اثبات کامل است.

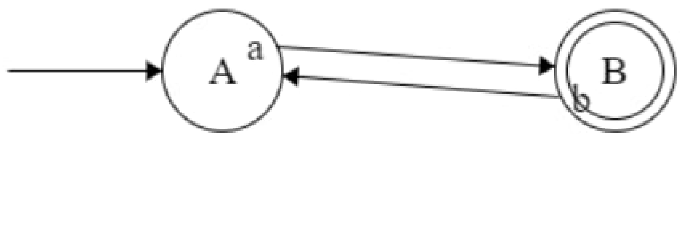
۱.۳

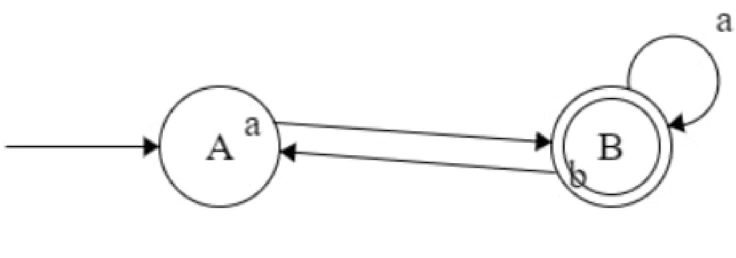
در این بخش کافی‌ست برای هر یک از موارد گفته شده، یک مثال نقض آوریم. یک ماشین ساده‌ی دو استیتی را نیز اگر در نظر بگیریم می‌توانیم رد کنیم موضوع مطرح شده را.

در مثال زیر، ماشین M به صورت

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

می‌باشد.



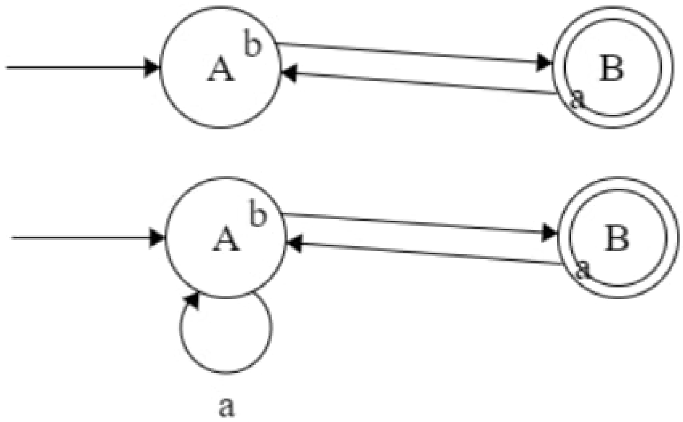


در ماشین بالا ابتدا رشته‌های به فرمت $a\{ba\}*$ را می‌پذیریم. اگر از یکی دو روش گفته شده استفاده کنیم، ماشین پایینی بدست می‌آید. این ماشین رشته‌های به فرمت $a\{ba\}*a*$ را می‌پذیرد، همچنین رشته‌های اشتباهی نیز می‌پذیرد مانند $aaaaba$؛ پس این روش‌ها حتما درست کار نمی‌کنند و مثال نقض زدیم.

برای حالت بعدی نیز داریم که ماشین N به صورت

$$N = (Q, \Sigma, \delta, q_\cdot, F)$$

می‌باشد. در این ماشین، رشته‌های به فرمت $b\{ab\}*$ پذیرفته می‌شوند. حالا اگر به روش گفته شده در شرح سوال، یال اضافه کنیم، رشته‌های به فرمت $a * b\{ab\}*$ را هم می‌پذیریم، اما برای مثال رشته‌ای مانند $baaaab$ را هم می‌پذیریم که مثال نقض است و در نتیجه روش گفته شده لزوما درست کار نمی‌کند.



سوال ۲. سوال ۲

۲.۱

برای ماشین متناهی غیرقطعی داده شده، ماشین متناهی قطعی‌ای طراحی کردیم که پذیره‌ی همان زبان است صرفا. (رشته‌های عضو زبان را می‌پذیرد و رشته‌های غیرعضو زبان را نمی‌پذیرد.)

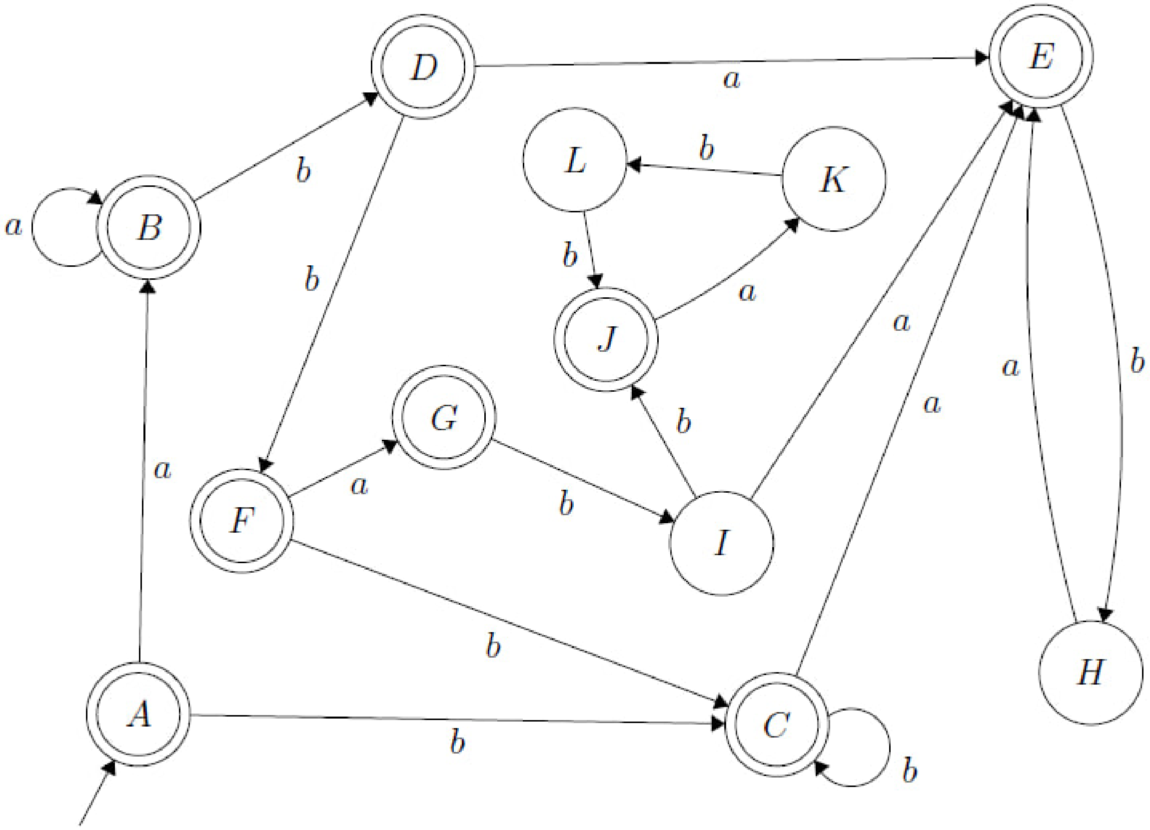
در ابتدا استیت‌ها و تابع انتقال DFA مذکور را می‌نویسیم.

$\delta(q,b)$	$\delta(q,a)$	q
۵۷۶	۱۲۳۵۶	۱۲۵۶
۵۶۷۴	۱۲۳۵۶	۱۲۳۵۶
۵۷۶	۶	۵۷۶
۵۶۷۲	۶	۵۶۷۴
۵۷۶	۶۳	۵۷۶۲
۷	$\varnothing$	۶
$\varnothing$	۶	۷
۷۴	$\varnothing$	۶۳
۲	۶	۷۴
$\varnothing$	۳	۲
۴	$\varnothing$	۳
۲	$\varnothing$	۴
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

حالا از Alphabet استفاده می‌کنیم برای ساده‌سازی.

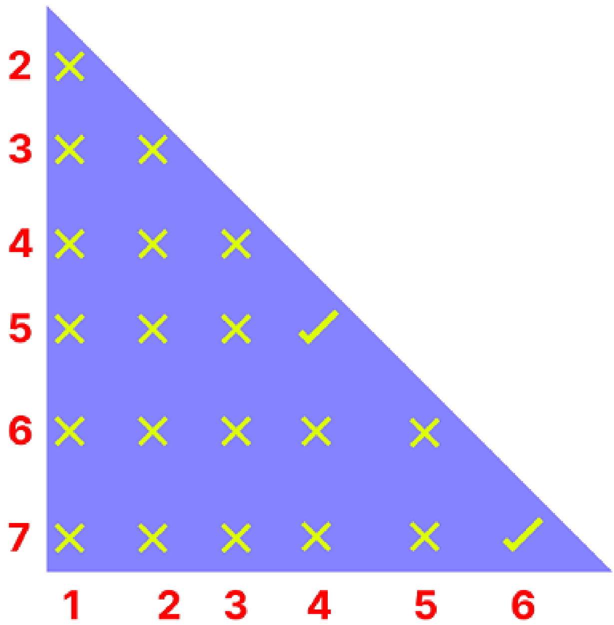
$\delta(q,b)$	$\delta(q,a)$	q
C	B	A
D	B	B
C	E	C
F	E	D
C	G	F
H	$\varnothing$	E
$\varnothing$	E	H
I	$\varnothing$	G
J	E	I
$\varnothing$	K	J
L	$\varnothing$	K
J	$\varnothing$	L
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

حالا DFA این NFA را می‌کشیم.

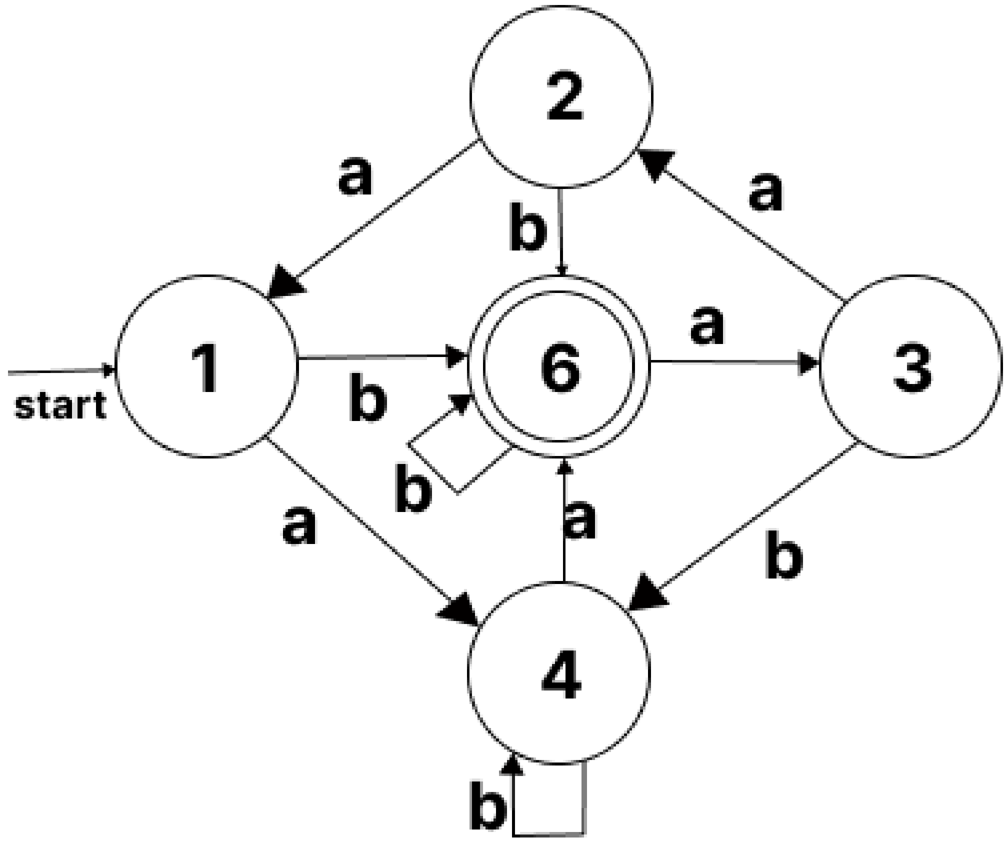


۲.۲

برای این کاهش جدول مثلثی شکلی تشکیل می‌دهیم و سطر و ستون‌های شامل استیت‌های فاینال را دایره می‌کشیم. در نهایت هر دو استیت را بررسی می‌کنیم.



حالا unreachable نداریم پس کافی‌ست حالات مشابه را فقط در نظر بگیریم. در این‌جا حالات ۴ و ۵ و همچنین ۶ و ۷ مشابه هستند پس DFA آن را می‌کشیم.



سوال ۳. سوال ۳

۳.۱

می‌دانیم L۱ و L۲ و L۳ سه زبان منظم روی الفبای Σ هستند. حالا بررسی می‌کنیم که عملگرها نسبت به رده‌ی زبان‌های منظم بسته هستند یا خیر.

برای اثبات بسته بودن اولین عملگر، ماشینی تعریف می‌کنیم. در این‌جا فرض می‌کنیم دو ماشین M و N دو زبان L۱ و L۲ را می‌شناسند.

$$M = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$$

$$N = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$$

حالا ماشین جدیدی با تعریف زیر ایجاد می‌کنیم:

$$Q = Q_1 \star Q_2$$

این‌جا الفبا حاصل اجتماع دو الفبا است و شروع حالت $q. = \{q_1, q_2\}$ می‌باشد. حالا طبق حل تمرین، از اجتماع و اشتراک استفاده می‌کنیم.

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

$$\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$$

پس در نهایت برای همه‌ی حالات مورد قبول داریم:

$$F = ((F_۱ * Q_۲) \cup (Q_۱ * F_۲)) - (F_۱ * F_۲)$$

در نتیجه این عملگر، نسبت به زبان‌های منظم فوق بسته می‌باشد.

۳.۲

برای این بخش، ماشین B را روی زبان L۳ به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$B = (Q_۳, \Sigma_۳, \delta_۳, q_۳, F_۳)$$

حالا به شکل ساختاری تعریف می‌کنیم. (یعنی یک تعریف صوری مشابه اسلایدها از ماشین مربوطه ارائه می‌دهیم.)

ایده‌ای که داریم این است که ۳ لایه از حالات مشابه بسازیم به این صورت که لایه‌ی اول همان ماشین L۳ باشد، لایه‌ی سوم یک کپی از این لایه باشد و لایه‌ی دوم نیز مشابه این دو ولی با این شرط که به ازای هر حرکت، از روی یک لایه به لایه‌ی سوم می‌رود. در نتیجه برای نهایی شدن حالات به حالاتی که در لایه‌ی سوم هستند، باید کلمه‌ای را بشناسیم که یک حرف کمتر از کلمات موجود در L۳ دارد (در واقع یعنی یک حرف از کلمات موجود در L۳ گویا حذف شده است.).

پس برای پیاده‌سازی این ایده، دو کپی از state ها می‌گیریم با اسامی $Q'_۳$ و $Q''_۳$ و برای هر q و a که موجود هستند اضافه می‌کنیم:

$$\delta_۳(q, a) = q_۲$$

در نتیجه یک کپی از state ها و روابط گرفتیم. حالا تعدادی یال جدید ایجاد می‌کنیم با این شرط که به ازای هر دو حالت $q۱$ و $q۲$ ، دو حرف a و b وجود داشته باشد در صورتی که

$$\delta_۳(\delta_۳(q_۱, a), b) = q_۲ => \delta_۳(q۱', a) = q''_۲$$

ایجاد می‌کنیم.

و در ادامه نیز به ازای هر $q_i \in Q$ داریم:

$$\delta_۳(q_i, \epsilon) = q'_i$$

در نهایت ماشین جدید بدین صورت می‌باشد:

$$B' = (Q_۳ \cup Q'_۳ \cup Q''_۳, \Sigma_۳, \delta_۳, q_۳, F_۳)$$

موفق باشید.