



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

سوالات نمونه

مجموعه‌ی ۱: مقدمات درس

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال دوم ۰۲ - ۰۱

۱

بدون به کارگیری جدول درستی، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را با ذکر هر مرحله اثبات کنید.

$$a) \neg (p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p$$

$$b) \neg ((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$c) p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \equiv p \vee q \vee r$$

$$d) (\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q \wedge r) \equiv p \wedge q$$

۲

با استفاده از برهان خلف و به کارگیری قواعد استنتاج^۱، گزاره‌های زیر را اثبات کنید.

$$a) (p \rightarrow q) \implies (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$b) [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \implies \neg p$$

$$c) [(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \implies (q \vee r)$$

¹Rules of Inference

برای هر کدام از استدلال‌های زیر، یا با به کارگیری قواعد استنتاج، شیوه‌ی اثبات مستقیم حکم را مرحله به مرحله نشان دهید؛ و یا با ذکر یک مثال نقض، نشان دهید که استدلال مربوطه نامعتبر است. برای مثال نقض، مقادیر درستی را به نحوی اختصاص دهید که پیش‌فرض‌ها درست، اما حکم نادرست باشد.

a)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg r \end{array}$$

$$\therefore \neg(p \vee r)$$

b)

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \vee \neg s \\ \neg s \rightarrow q \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore s$$

c)

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow r \\ p \rightarrow (q \vee \neg r) \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore s$$

d)

$$\begin{array}{l} (\neg p \vee q) \rightarrow r \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \neg s \wedge \neg u \\ \neg u \rightarrow \neg t \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore p$$

e)

$$\begin{array}{l} \neg p \vee q \rightarrow r \\ s \vee \neg q \\ \neg t \\ p \rightarrow t \\ \neg p \wedge r \rightarrow \neg s \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore \neg q$$

f)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ q \rightarrow r \\ p \wedge s \rightarrow t \\ \neg r \\ \neg q \rightarrow u \wedge s \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore t$$

۴

نشان دهید که گزاره‌ی زیر، به ازای هر $n \geq 1$ صدق می‌کند:

$$(p \rightarrow r_1) \wedge (r_1 \rightarrow r_2) \wedge \cdots \wedge (r_n \rightarrow q) \implies (p \rightarrow q)$$

۵

الفبای Σ را در نظر گرفته و فرض کنید که $L \subset \Sigma^*$ صدق کند. در رابطه‌ی R بر روی L داریم که xRy هر گاه دو رشته‌ی $u, v \in \Sigma^*$ وجود داشته باشند، به‌طوری که $x = uv$ و $y = vu$. آیا R یک رابطه هم‌ارزی^۲ است؟ بررسی کنید.

۶

فرض کنید که A مجموعه‌ای از دایره‌های توپر در فضای \mathbb{R}^2 باشد که با یکدیگر اشتراک ندارند. نشان دهید که مجموعه‌ی A لزوماً شمارا^۳ است.

۷

سوال قبلی را در شرایطی در نظر بگیرید که دایره‌ها، توخالی باشند. اثبات کنید که مجموعه‌ی حاصل، می‌تواند ناشمارا^۴ باشد.

۸

اثبات کنید که اگر A و B هر دو مجموعه‌ی دلخواه نامتناهی شمارا باشند، $A \times B$ نیز یک مجموعه‌ی نامتناهی شمارا خواهد بود.

^۲Equivalence Relation

^۳Countable

^۴Uncountable