دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

سوالات نمونه

پاسخ‌نامه‌ی مجموعه‌ی ۴ : زبان‌های منظم - بخش ۱

استاد: دکتر علی موقر

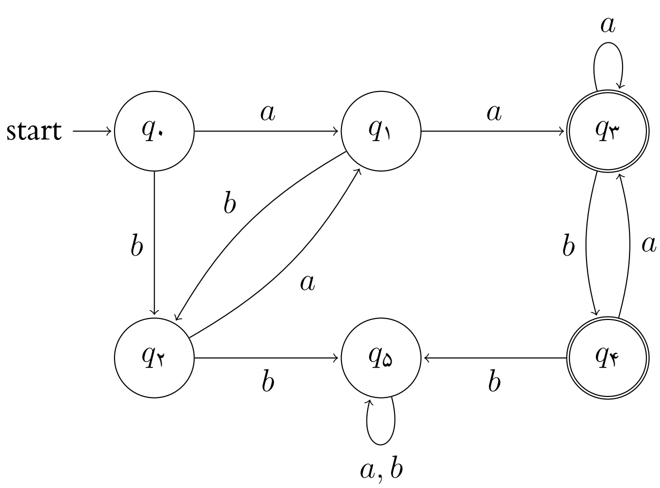
تیم دستیاران درس - نیم‌سال دوم ۰۲ - ۰۱

۴ اردیبهشت ۱۴۰۲

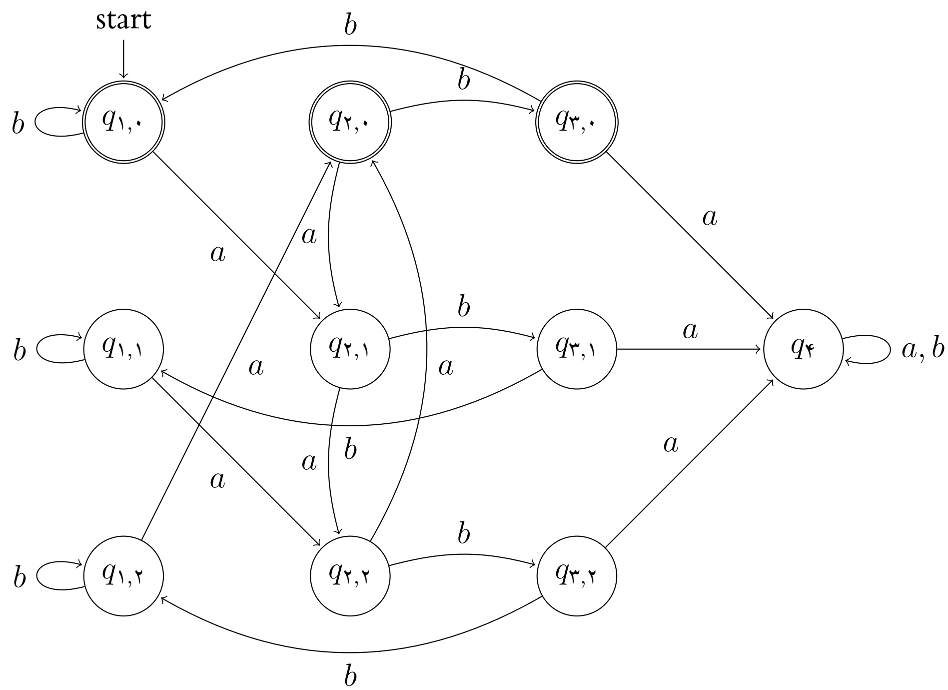
۱. مفاهیم ماشین‌های حالت متناهی

۱.۱

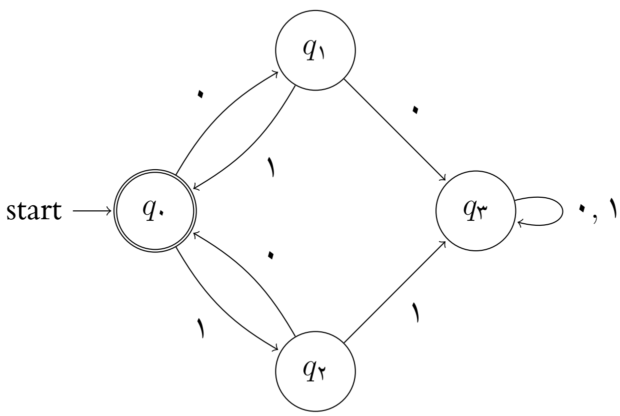
الف) در اتوماتای زیر در هر صورتی اگر دو کاراکتر b متوالی بیایند به استیت $q_۵$ می‌رویم و در آن استیت گیر می‌افتیم. اگر دو کاراکتر a متوالی نیز بیاید به استیت $q_۳$ می‌رسد و از این استیت به بعد در استیت‌های نهایی $q_۳$ و $q_۴$ می‌مانیم مگر اینکه دو کاراکتر b متوالی بیاید و به استیت $q_۵$ برویم.



ب) در اتوماتا زیر استیت‌های با شماره $q_{i,j}$ بصورتی هستند که اگر در این استیت باشیم تعداد a های ورودی داده شده مود ۳ برابر j بوده و عدد i نیز تعداد کارکترهایی است که از رشته aba با انتهای رشته مچ شده‌است.

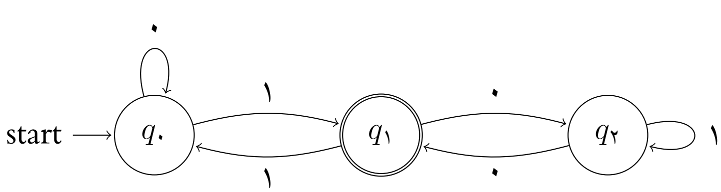


پ) در ۴ استیت این اتومات ۴ حالت در مورد اختلاف تعداد ۱ و ۰ های رشته نگهداری می‌شود. در استیت q_0، q_1 و q_2 بترتیب احتلاف تعداد ۰ و ۱ها برابر ۰، ۱ و ۱− است. استیت q_3 نیز حالتی غیر از این سه حالت دارد که نشان‌دهنده این است که رشته نباید قبول شود. به همین علت وقتی وارد این استیت شویم در آن باقی می‌مانیم.

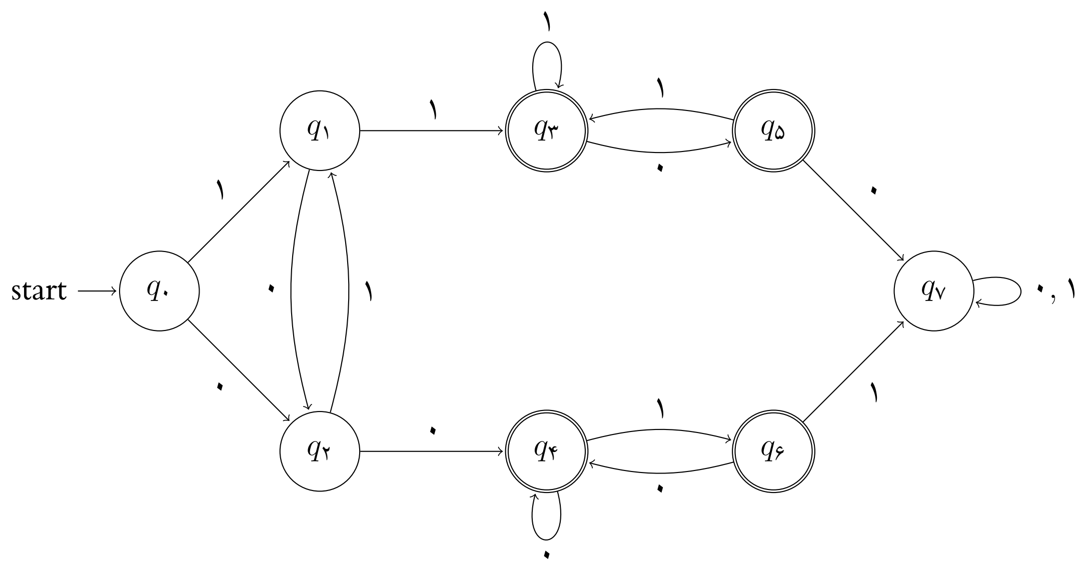


ت) در این قسمت اتوماتا طوری طراحی شده‌است که شماره استیت باقیمانده تقسیم عدد بر ۳ را نشان می‌دهد. به‌طور دقیق تر اگر رشته وارد شده تا لحظه i برابر $a_1 \cdots a_i$ باشد و ورودی بعدی a_{i+1} باشد داریم:

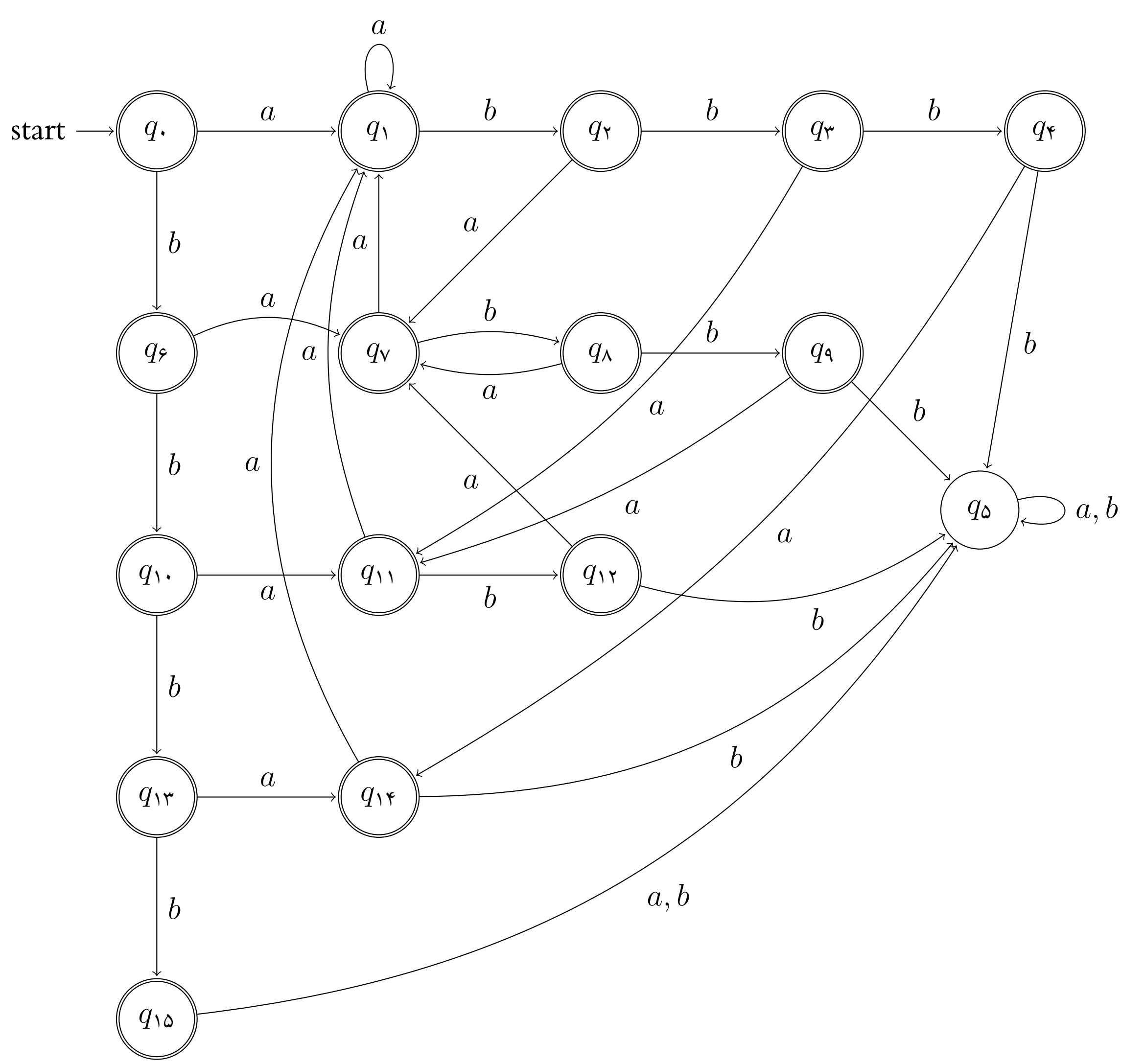
$$\overline{(a_1 \cdots a_{i+1})}_2 \equiv 2 \times \overline{(a_1 \cdots a_i)}_2 + a_{i+1} \pmod 3$$



ث) این اتوماتا به‌صورتی طراحی شده‌است که هرگاه ۰۰ و ۱۱ هردو بیایند به استیت q_7 می‌رسیم و در آنجا گیر می‌افتیم. در بقیه استیت‌ها نیز رشته قابل قبول است.



ج) اتوماتای ۱۶ استیتی زیر سعی می کند دنبال پترن‌های $bbbbb$، $abbbb$، $babbb$، $bbabb$، $bbbab$ و $bbbba$ بگردد و هرکدام را دید وارد یک استیت غیرنهایی می‌شود و دیگر رشته را قبول نمی‌کند. بقیه استیت‌ها نیز استیت اکسپت شوند.



۲.۱

پاسخ.

با استقرا روی $|w_2|$ حکم را اثبات می کنیم.

پایه: حکم را به ازای $|w_2| = 0$ که همان $w_2 = \epsilon$ است اثبات می کنیم.

$$\delta^*(q, w_1w_2) = \delta^*(q, w_1\epsilon) = \delta^*(q, w_1) = \delta^*(\delta^*(q, w_1), \epsilon) = \delta^*(\delta^*(q, w_1), w_2)$$

فرض می کنیم حکم سوال برای همه w_2 ها با اندازه $n - 1$ برقرار است. w_2 را رشته ای با طول n در نظر میگیریم از آنجا که این طول حداقل یک است حرف آخر این رشته را در نظر بگیرید و آن را a بنامید.($w_2 = w_2'a$ به طوری که $|w_2'| = n - 1$)

با توجه به فرض استقرا می دانیم:

$$\delta^*(q, w_1w_2') = \delta^*(\delta^*(q, w_1), w_2')$$

از نتایج بالا می توانیم نتیجه بگیریم:

$$\delta^*(q, w_1w_2) = \delta^*(q, w_1w_2'a) = \delta(\delta^*(q, w_1w_2'), a) = \delta(\delta^*(\delta^*(q, w_1), w_2'), a) =$$
$$\delta^*(\delta^*(q, w_1), w_2'a) = \delta^*(\delta^*(q, w_1), w_2)$$

۳.۱

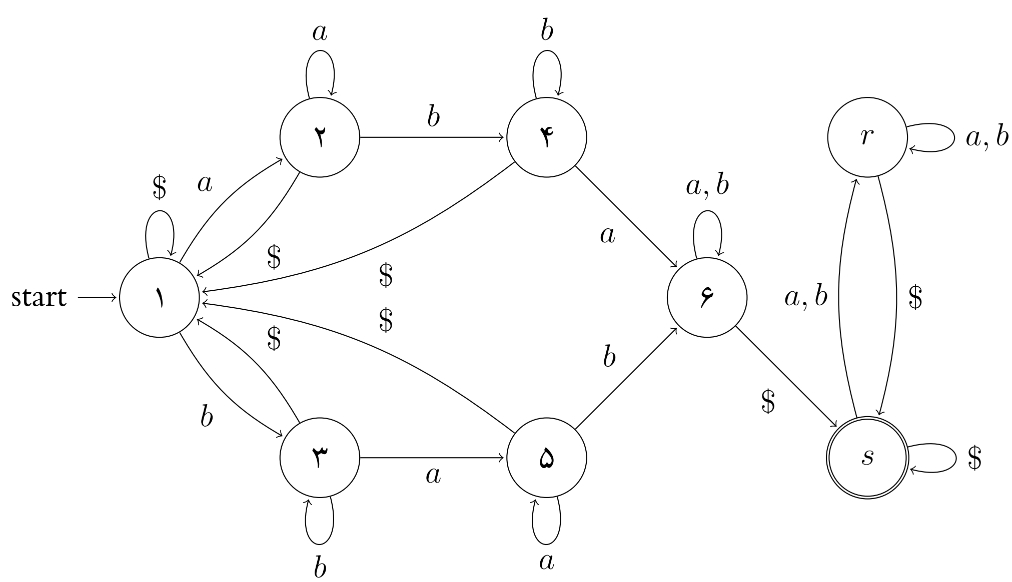
الف) ابتدا ساختار اتوماتا جدید را توضیح داده و سپس زبان اتوماتا جدید را توصیف می‌کنیم.

این اتوماتا از دو بخش تشکیل شده است که بخش اول شامل اتوماتا اولیه است و بخش دوم شامل دو استیت جدید r و s است. اگر در بخش اول باشیم حروف داخل σ بصورت قبلی عمل می‌کنند. ولی کاراکتر $\$$ وابسته به استیتی که هستیم مانند یک دکمه ریست عمل می‌کند و مارا به استیت اولیه می‌برد اگر در استیتی نهایی نباشیم و یا مارا به بخش دوم اتوماتا می‌برد اگر در استیتی نهایی باشیم. بخش دوم اتوماتا نیز دو حالت دارد که وقتی کاراکتر ورودی $\$$ باشد به استیت s می‌رود و در غیر اینصورت به استیت r می‌رود. لازم به ذکر است که پس از ورود به این قسمت هیچوقت از آن خارج نمی‌شویم.

پس می‌توان گفت اگر در رشته ω تمام کاراکترهای $\$$ را حذف کنیم و به چند بخش $\omega_۱, \cdots, \omega_k$ تقسیم شود حداقل یکی از این قسمت‌ها باید عضوی از $L(A)$ باشد تا به بخش دوم اتوماتا برسیم. همچنین برای اینکه در بخش دوم اتوماتا در استیت نهایی s باشیم این است که رشته ω با کاراکتر $\$$ تمام شود. پس م .توان گفت زبان ماشین A' بصورت زیر است.

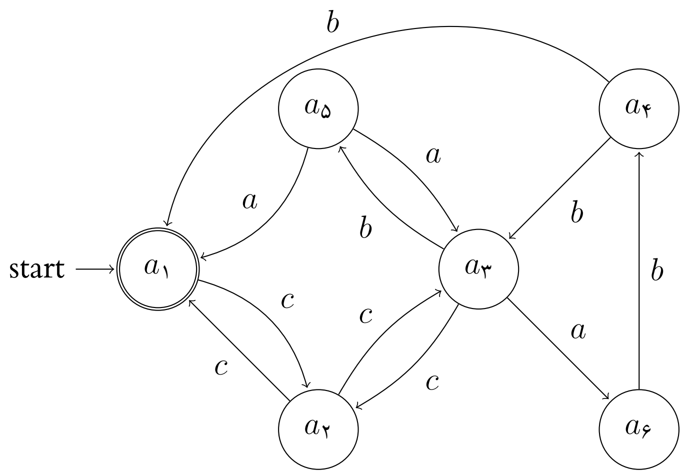
$$L(A') = (\{\epsilon\} \cup (\{a, b, \$\}^*\$))L(A)\$(\{\epsilon\} \cup (\{a, b, \$\}^*\$))$$

ب) دیاگرام ماشین A بصورت زیر است.

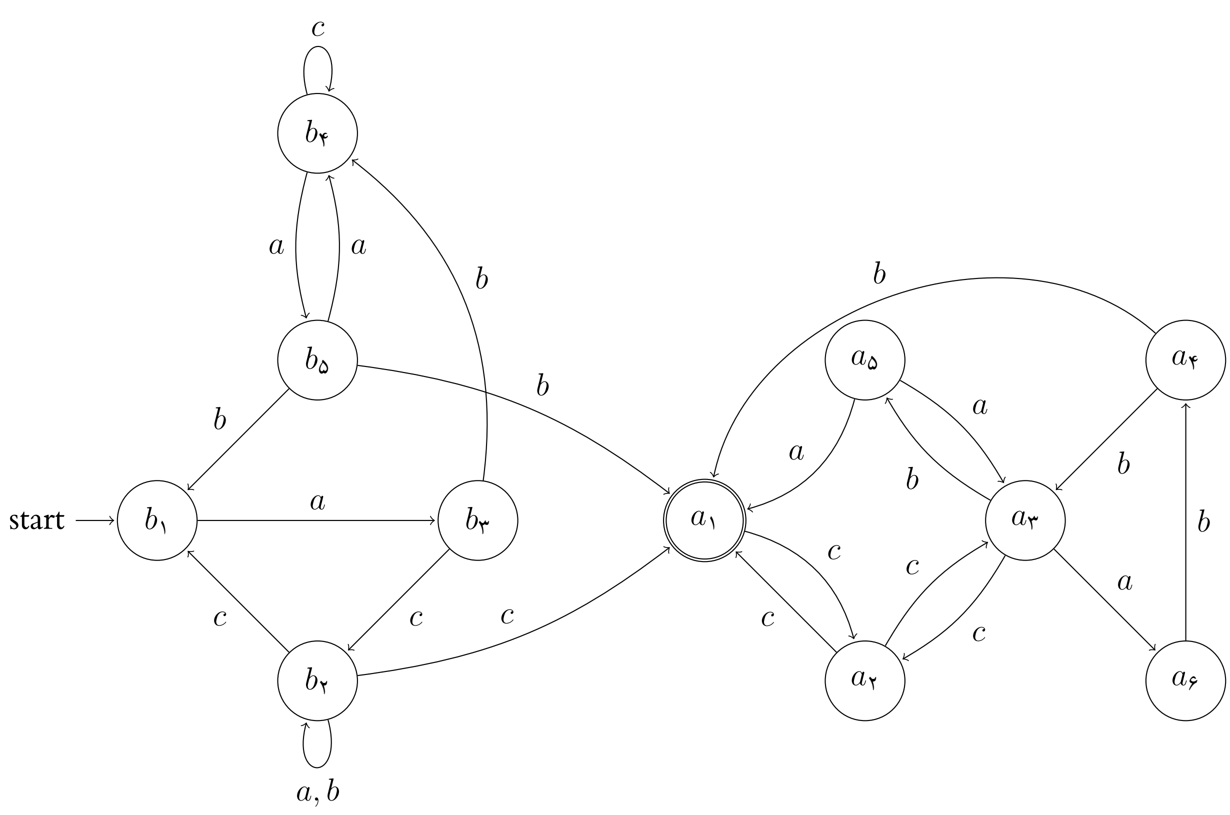


۴.۱

الف) تغییرات روی ماشین به این صورت است که اگر از یک استیت q با کاراکتر t به استیتی نهایی نرسیم با همین کاراکتر یک یال به استیت $a_۱$ می‌کشیم و استیت $a_۱$ را نیز تبدیل به تنها استیت نهایی می‌کنیم.



ب) دیاگرام این اتوماتا بصورت زیر است.



۵.۱

ابتدا به توضیح در مورد تابع گذارِ δ' می‌پردازیم. اگر DFA در حالت q قرار داشته و ورودی $t \in \Sigma$ باشد، حالت بعدی به صورت زیرِ تعیین می‌شود.

- q در DFA اولیه حالت پذیرش باشد.

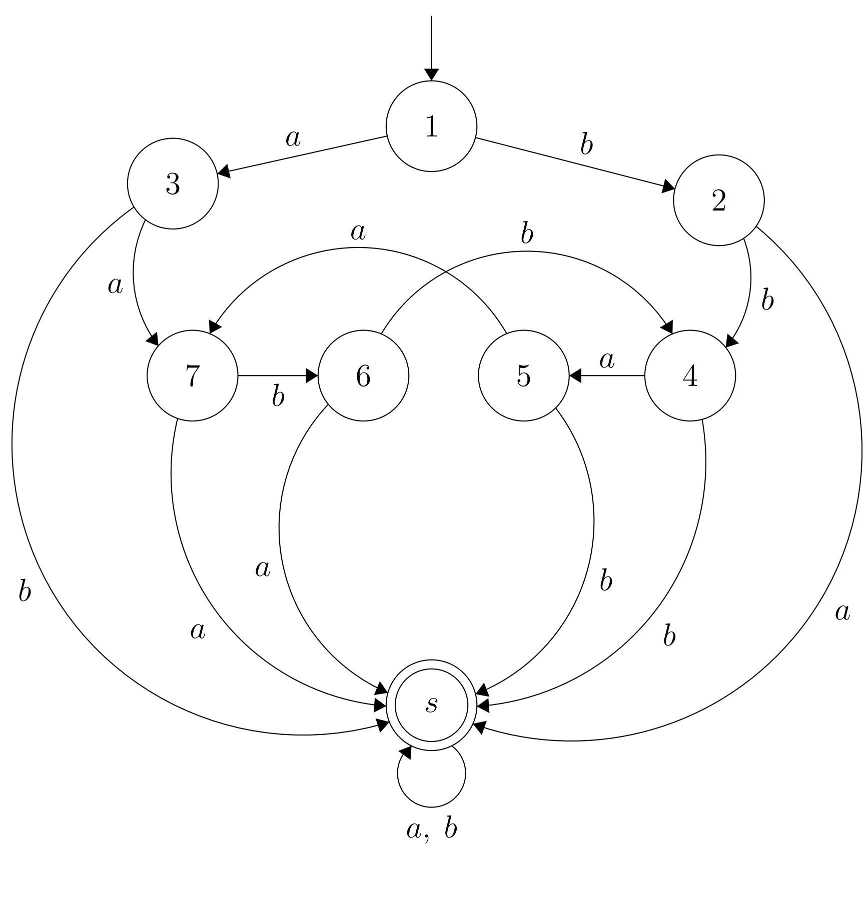
در این حالت اگر در DFA اولیه بتوان با t به حالت q وارد شد، DFA جدید، از حالت q با t به حالت s خواهد رفت.

- q در DFA اولیه حالت پذیرش نباشد.

در این حالت اگر شرط زیر برقرار باشد، DFA جدید از حالت q با t به حالت s خواهد رفت.

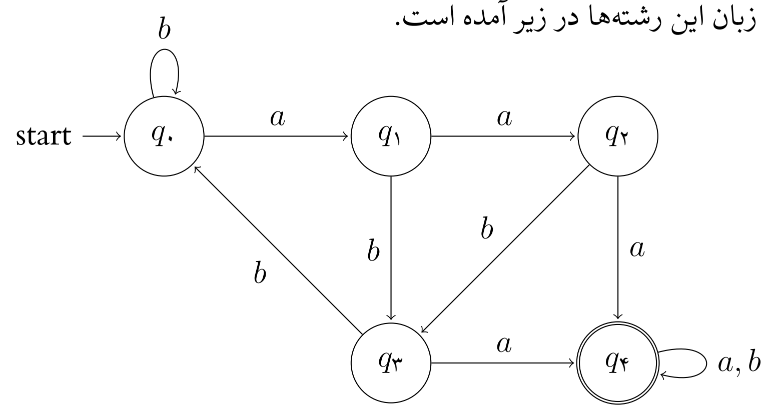
"اگر در DFA اولیه می‌توان از حالتی مثل p به حالت q رفت، آنگاه DFA اولیه باید از هر حالت p که چنین ویژگی دارد با تمام حروف الفبا مگر t به q برود."

- در صورتی که شرایط هیچکدام از دو حالت بالا برقرار نباشد، تابع δ' درست مشابه δ عمل م کند.

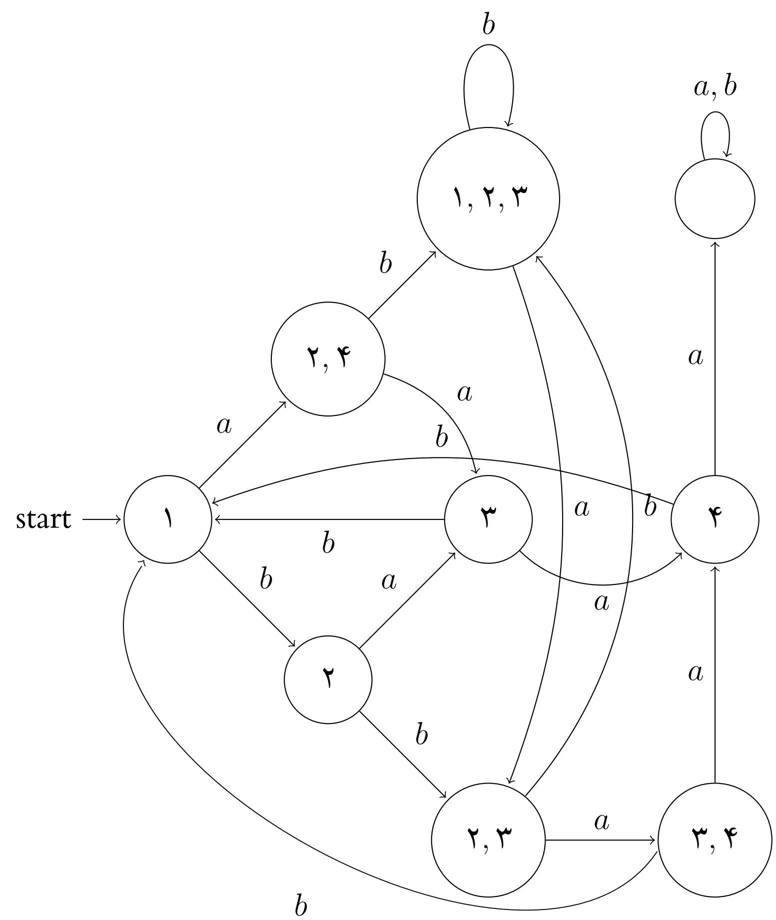


۲. هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

الف) در این قسمت به‌جای ایجاد DFA ۱۶ استیتی و ساده‌سازی آن ابتدا زبان ماشین را فهمیده و DFA متناظرش را طراحی می‌کنیم. به‌راحتی داریم تنها رشته‌هایی که یکی از aaa یا aba را به‌عنوان زیررشته دارند قبول می‌شوند. تصویر ماشین متناظر با زبان این رشته‌ها در زیر آمده است.

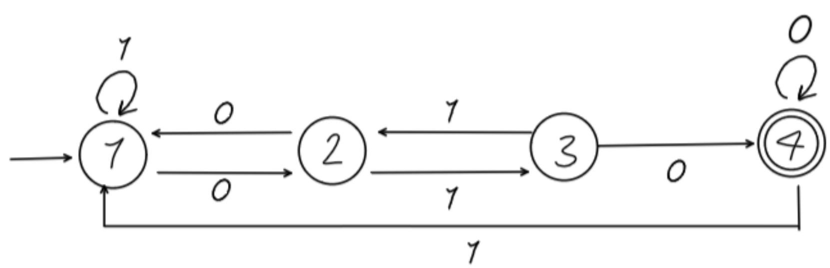


ب) در این مسئله در ابتدا تمام زیرمجموعه‌های ۴ استیت را گرفتیم و ماشین گفته شده در کلاس را ایجاد کردیم. سپس در این ماشین ۱۶ استیتی، استیت‌های غیر قابل دسترسی را حذف کردیم. در انتها نیز دو استیت یکسان مربوط به مجموعه‌های $\{۲, ۳\}$ و $\{۲, ۳, ۴\}$ را یکی کردیم و در انتها به ماشین ۹ استیتی زیر رسیدیم.

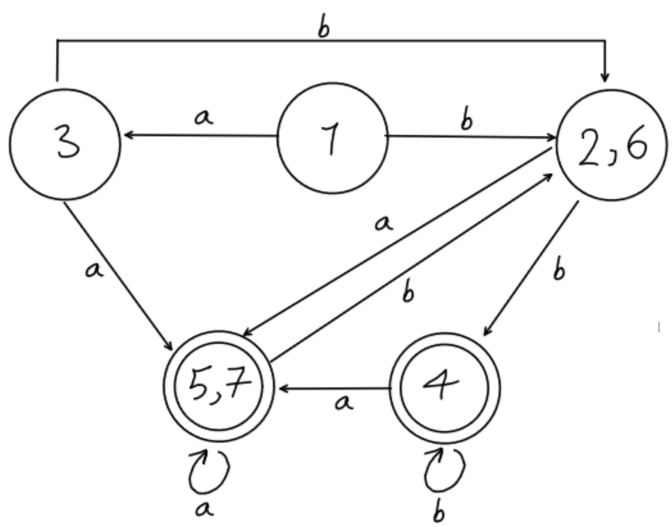


۳.   کمینه‌سازی ماشین‌های متناهی قطعی

الف)



ب)



۴. خواص بستاری زبان‌های منظم

۱.۴

پاسخ. با توجه به منظم بودن دو زبان A و B هر کدام یک DFA دارند که به شکل $M_A = (Q_A,\ \Sigma,\ \delta_A,\ q_A,\ F_A)$ و $M_B = (Q_B,\ \Sigma,\ \delta_B,\ q_B,\ F_B)$ هستند. ماشین $M = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q,\ F)$ را برای زبان حاصل از در هم سازی به این شکل می سازیم که:

به ازای هر استیت از ماشین A و هر استیت از ماشین B و یکی از حروف A یا B یک استیت در M می گذاریم در واقع :

$$Q = Q_A \times Q_B \times \{A, B\}$$

q را برابر استیت آغازین هر دو ماشین و شروع از A قرار می دهیم.

$$q = (q_A, q_B, A)$$

هر استیت که هر دو استیت آن در ماشین های A وB اکسپت باشند و در نوبت ماشین A باشد را اکسپت می کنیم. در واقع:

$$F = F_A \times F_B \times \{A\}$$

با توجه به اینکه عنصر سوم چیست نوبت مشخص می شود و با توجه به اینکه نوبت کیست در آن ماشین حرکت می کنیم و نوبت نغییر خواهد کرد. در واقع:

$$\delta((q_A, q_B, A), a) = (\delta_A(q_A, a), q_B, B)$$
$$\delta((q_A, q_B, B), a) = (q_A, \delta_B(q_B, a), B)$$

در واقع قصدمان این است که به نوبت یک بار در ماشین اول و یک بار در ماشین دوم به ترتیب حرکت کنیم و هر زمان به انتهای هر دو رسیدیم اکسپت شود.

سه رشته $a = a_۱a_۲ \ldots a_n$ $b = b_۱b_۲ \ldots b_n$ $c = a_۱b_۱a_۲b_۲ \ldots a_nb_n$ را در نظر بگیرید که $a \in A$ و $b \in B$ است. ادعا می کنیم $\delta^*(q, c) = (\delta^*_A(q_A, a), \delta^*_B(q_B, b), A)$ و ادعای خود را با استقرا به روی n اثبات می کنیم. پایه استقرا به ازای n=۰ برقرار است چرا که در این صورت هر سه رشته ϵ است و در همان استیت اولیه باقی خواهد ماند.

اگر حکم برای n-۱ برقرار باشد برای n داریم:

$$\delta^*(q, ca_nb_n) = delta^*((\delta^*_A(q_A, a), \delta^*_B(q_B, b), A), a_nb_n) = \delta((\delta^*_A(q_A, aa_n), \delta^*_B(q_B, b), B), b_n) = (\delta^*_A(q_A, aa_n), \delta^*_B(q_B, bb_n), A)$$

حال c عضو L(M) است اگر و تنها اگر $\delta^*(q, c)$ استیت اکسپت باشد با توجه به بالا $\delta^*(q, c) = (\delta^*_A(q_A, a), \delta^*_B(q_B, b), A)$ و این یعنی c در زبان است اگر و تنها اگر هر کدام از رشته های a و b به تنهایی در زبان های مربوطه وجود داشته باشد .