



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

سوالات نمونه

مجموعه‌ی ۱۰: زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال دوم ۰۲ - ۰۱

۴ خرداد ۱۴۰۲

۱. ماشین‌های تورینگ و زبان‌های تورینگ-تشخیص پذیر (شمارش پذیر بازگشتی)

۱.۱

برای هر کدام از موارد زیر، یک ماشین تورینگ طراحی کنید که پذیرنده‌ی رشته‌های زبان مربوطه باشد.

a) $L = \{a^i b a^j \mid 0 \leq i < j\}$

b) $L = \{a^n b^n a^n b^n \mid n \neq 0\}$

۲.۱

مدل ماشین تورینگ، علاوه بر پذیرش زبان‌های تورینگ-تشخیص پذیر^۱ (زبان‌های شمارش پذیر بازگشتی^۲)، می‌تواند محاسبه‌کننده‌ی توابع جزئی^۳ هم باشد.

ماشین تورینگ $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ را محاسبه‌کننده‌ی تابع f با دامنه‌ی $D \subseteq (\Sigma^*)^k$ می‌نامیم، چنانچه هر کدام از مقادیر دامنه را به مجموعه‌ی Γ^* تصویر کند. به عبارت دیگر، به ازای هر (x_1, x_2, \dots, x_k) عضو دامنه‌ی f داشته باشیم:

$$q_0 x_1 \sqcup x_2 \dots \sqcup x_k \vdash_T^* q_{accept} f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

زمانی که دامنه‌ی تابع، زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد، از سیستم یگانی^۴ برای نمایش اعداد کمک می‌گیریم؛ به این شیوه که هر عدد n را با 1^n نمایش می‌دهیم:

$$q_0 1^{n_1} \sqcup 1^{n_2} \dots \sqcup 1^{n_k} \vdash_T^* q_{accept} f(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

با توجه به توضیحات بالا، برای هر کدام از موارد زیر یک ماشین تورینگ طراحی نمایید که تابع ریاضی مربوطه را محاسبه نماید. در تمامی موارد، دامنه و هم‌دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی اعداد طبیعی \mathbb{N} است.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \lceil \log_2(x+1) \rceil$

¹Turing-Recognizable

²Recursively enumerable

³Partial Function

⁴Unary Numeral System

۳.۱

یک نسخه‌ی تغییر یافته از ماشین‌های تورینگ را در نظر بگیرید که در آن به جای قابلیت حرکت به سمت چپ، ماشین می‌تواند روی همان خانه از نوار توقف کند. به عبارت دیگر، تعریف تابع گذار به شیوه‌ی زیر تغییر می‌یابد که S نشانه‌ی توقف است:

$$\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{R, S\}$$

نشان دهید که ماشین‌های تعریف بالا، پذیرنده‌ی زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر نیستند. توضیح دهید که این ماشین‌ها کدام کلاس از زبان‌ها را تشخیص می‌دهند.

۴.۱

ماشین‌های صف‌دار^۵ مشابه با ماشین‌های پشته‌ای^۶ هستند، با این تفاوت که به جای پشته، یک صف قرار گرفته است. صف، در حکم یک نوار است که نمادها صرفاً از انتهای چپ نوشته و از انتهای راست خوانده می‌شوند. درست مشابه با ماشین‌های پشته‌ای، ورودی‌ها روی یک نوار جداگانه قرار می‌گیرند که ماشین تنها می‌تواند از آن بخواند و امکان نوشتن روی این نوار را ندارد. نوار ورودی، شامل یک نماد خالی است که برای تشخیص انتهای رشته‌ی ورودی به کار می‌رود. ماشین صف‌دار، ورودی را تنها در شرایطی پذیرش می‌کند که به یک حالت پذیرش برسد. نشان دهید که ماشین‌های صف‌دار دارای قطعیت^۷، همان کلاس زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر را نمایندگی می‌کنند. برای تعریف قطعیت، همان تعریف مربوط به ماشین‌های پشته‌ای را در نظر بگیرید.

۲. ماشین‌های خطی کران‌دار و یک کلاس جدید از زبان‌ها

هر ماشین خطی کران‌دار^۸ را درست مانند یک ماشین تورینگ به شکل یک هفت‌تایی $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ تعریف می‌کنیم، با این تفاوت که دو نماد اضافی^۹ [و] هم تعریف می‌شوند که عضو Γ نیستند. پیکربندی^۹ اولیه‌ی ماشین به صورت $q_0[x]$ است و در جریان محاسبه، هد روی نوار اجازه ندارد که براکت‌ها را با نماد دیگری جایگزین کرده یا از محدوده‌ی تعریف شده توسط آن‌ها عبور کند.

^۵Queue Automaton

^۶Push-down Automaton

^۷Deterministic

^۸Linear Bounded Automaton

^۹Configuration

کلاس زبان‌هایی که برای آن‌ها ماشین خطی کران‌دار قابل تعریف است، تحت عنوان زبان‌های حساس به متن^{۱۰} شناخته می‌شوند. این کلاس، زیرمجموعه‌ی محض کلاس زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر است و نیز کلاس زبان‌های مستقل از متن^{۱۱} (منهای رشته‌ی تهی) زیرمجموعه‌ی محض آن است. با توجه به توضیحات بالا، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

۱.۲

برای هر کدام از زبان‌های زیر، یک ماشین خطی کران‌دار دارای قطعیت طراحی کنید.

a) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

b) $L = \{\omega\omega \mid \omega \in \{a, b\}^*\}$

۲.۲

یک گرامر حساس به متن $G = (V, \Sigma, R, S)$ را گرامری تعریف می‌کنیم که تمام قواعد آن به فرمت زیر باشند؛ که $X \in V$ ، α, β, γ اعضای مجموعه‌ی $(V \cup \Sigma)^*$ هستند. این گرامرها، همانطور که از اسمشان برمی‌آید، تولیدکننده‌ی زبان‌های حساس به متن هستند.

$$\alpha X \gamma \longrightarrow \alpha \beta \gamma \quad \text{where} \quad \beta \neq \epsilon$$

ابتدا تعیین کنید که گرامر زیر چه زبانی را توصیف می‌کند، سپس آن را به نحوی تغییر دهید که یک گرامر حساس به متن به دست آید.

$$S \rightarrow ACaB$$

$$aD \rightarrow Da$$

$$Ca \rightarrow aaC$$

$$AD \rightarrow AC$$

$$CB \rightarrow DB$$

$$aE \rightarrow Ea$$

$$CB \rightarrow E$$

$$AE \rightarrow \epsilon$$

¹⁰Context-sensitive Languages

¹¹Context-free Languages

۳. تشخیص پذیری و تصمیم پذیری

۱.۳

قضیه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

قضیه: اگر S_1 یک مجموعه‌ی شمارا و S_2 یک مجموعه‌ی ناشمارا باشد، و $S_1 \subset S_2$ صدق کند، S_2 الزاماً بی‌شمار عنصر را در برمی‌گیرد که عضو S_1 نیستند.

با به‌کارگیری قضیه‌ی بالا، اثبات کنید که به ازای هر الفبای ناتهی Σ ، بی‌نهایت زبان روی این الفبا قابل تعریف‌اند که تورینگ-تشخیص‌پذیر نیستند.

۲.۳

اثبات کنید که چنانچه زبان‌های L و \bar{L} هر دو تورینگ-تشخیص‌پذیر باشند، هر دوی آن‌ها تورینگ-تصمیم‌پذیرند^{۱۲}.

۳.۳

می‌دانیم که زبان‌های مستقل از متن نسبت به عمل مکمل بسته نیستند. اثبات کنید که مکمل یک زبان مستقل از متن الزاماً تورینگ-تصمیم‌پذیر است (امتیازی - با مطالعه‌ی مقاله‌ی مربوطه، تلاش کنید که صرفاً یک کلیت از اثبات ارائه دهید).

۴.۳

فرض کنید A و B دو زبان تورینگ-تصمیم‌پذیر و C یک زبان تورینگ-تشخیص‌پذیر باشد. ثابت کنید:

الف) زبان‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ تورینگ-تصمیم‌پذیر هستند.

ب) زبان A^R تورینگ-تصمیم‌پذیر و C^R تورینگ-تشخیص‌پذیر است.

ج) زبان \bar{A} تورینگ-تصمیم‌پذیر است ولی زبان \bar{C} لزوماً تورینگ-تشخیص‌پذیر نیست.

¹²Turing-Decidable

۴. کاهش پذیری و دیگر روش های اثبات تصمیم ناپذیری

۱.۴

با استفاده از روش کاهش^{۱۳}، نشان دهید مسائلی که در ادامه می آیند، تصمیم ناپذیر^{۱۴} هستند:

الف) مسئله ی تعیین این که آیا ماشین تورینگ T هر رشته ی ورودی را می پذیرد.

ب) مسئله ی تعیین این که به ازای ماشین های T_1 و T_2 آیا $L(T_1) \subseteq L(T_2)$ می باشد.

ج) مسئله ی تعیین این که آیا زبان T نامتناهی است یا نه.

۲.۴

قضیه ی رایس^{۱۵} یک قضیه ی مهم در مبحث تصمیم پذیری است. ابتدا به تعاریف زیر دقت نمایید:

تعریف ۱: هر زیرمجموعه از مجموعه ی زبان های تورینگ-تشخیص پذیر را یک ویژگی^{۱۶} نام گذاری می کنیم.

تعریف ۲: یک ویژگی ماشین های تورینگ غیربدیهی است، اگر تهی نباشد و شامل همه ی زبان های تورینگ-تشخیص پذیر نباشد. به عبارت دیگر، حداقل یک ماشین تورینگ وجود داشته باشد که دارای این ویژگی نباشد و یک ماشین تورینگ باشد که این ویژگی را داشته باشد (زبان ماشین، عضو مجموعه ی مربوطه باشد).

قضیه ی رایس: اگر R یک ویژگی زبانی غیربدیهی ماشین های تورینگ باشد، آن گاه مسئله P_R به شرح زیر تصمیم ناپذیر است:

آیا ماشین تورینگ T ویژگی R را دارد؟

الف) قضیه ی رایس را اثبات کنید. (امتیازی)

ب) با توجه به قضیه ی رایس، نشان دهید مسئله ی «به ازای یک ماشین تورینگ T ، آیا حداقل یک رشته در $L(T)$ وجود دارد؟» تصمیم ناپذیر است.

(امتیازی)

¹³Reduction

¹⁴Undecidable

¹⁵Rice's Theorem

¹⁶Property