



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۴

موعد تحویل: چهارشنبه ۱۴۰۲/۰۳/۱۷

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال دوم ۰۲ - ۰۱

۴ خرداد ۱۴۰۲

۱. ماشین تورینگ

۱.۱

برای هر یک از موارد زیر ماشین تورینگ قطعی طراحی کنید که پذیرنده زبان باشند.

$$۱. L = \{a^n : 2 \mid n \vee 3 \mid n \vee 5 \mid n\}$$

$$۲. L = \{a^n b^{n^2} : n \geq 0\}$$

۲.۱

در این سؤال با دو نسخه‌ی جدید از ماشین تورینگ برخورد می‌کنیم. نسخه‌ی اول، **ماشین تورینگ چند بعدی** است که در آن نوار ماشین با یک نوار k بعدی جایگزین شده است. در هر مرحله، هد در یکی از خانه‌های این «نوار» قرار گرفته و با توجه به اطلاعات داخل آن و حالت فعلی، ماشین تصمیم می‌گیرد که به چه حالتی برود و همچنین در هر کدام از بُدها، هد را چند خانه به جلو یا عقب حرکت بدهد. برای مثال، در حالت $k = 3$ ، ممکن است هد در خانه‌ی $(1, 5, 7)$ قرار داشته باشد و پس از مشاهده‌ی محتوای خانه‌ی آن و توجه به حالت فعلی، ماشین تصمیم بگیرد آن را با بردار $(3, 1, -2)$ انتقال دهد، و در نتیجه مختصات جدید هد $(4, 6, 5)$ خواهد بود. به صورت فرمال، تابع انتقال به صورت

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \mathbb{Z}^k$$

$$\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{k\text{بار}}$$

قابل تعریف است. در ابتدا، هد در مختصات

قرار دارد و اگر ورودی برابر رشته s باشد، در خانه‌های

$$(0, 0, \dots, 0),$$

$$(0, 0, \dots, 1),$$

$$\vdots$$

$$(0, 0, \dots, |s| - 1)$$

قرار داده شده است.

در نسخه‌ی دیگر، با جایگزین کردن نوار ماشین تورینگ کلاسیک با محور اعداد حقیقی، به تعریف **ماشین تورینگ حقیقی** می‌پردازیم. ماشین در هر گام محتوای نقطه‌ای که هد نوار در آن قرار دارد را می‌خواند، با توجه به حالت خود تصمیم می‌گیرد که به چه حالتی برود و هد را چه مقدار به چپ یا راست انتقال دهد، یا این که احیاناً پردازش را متوقف کرده و ورودی را بپذیرد یا رد کند. هد نوار در ابتدا در مختصات $x = 0$ قرار دارد. اگر ورودی ماشین مورد نظر رشته s باشد، محتوای اولیه‌ی نوار به این صورت است که در تمامی نقاط محور کاراکتر پوچ قرار داده شده است، به غیر از نقاط $x = 0, 1, \dots, |s| - 1$ ؛ که در آن‌ها به ترتیب کاراکترهای s نوشته شده‌اند. این بار تابع انتقال به این صورت قابل تعریف می‌باشد:

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \mathbb{R}$$

۱. نشان دهید که مدل ماشین تورینگ k بعدی معادل مدل ماشین تورینگ کلاسیک است. به عبارت دیگر، به ازای هر ماشین تورینگ k بعدی M یک ماشین تورینگ کلاسیک T موجود است که $L(T) = L(M)$ و به ازای هر ماشین تورینگ کلاسیک T ماشین تورینگ k بعدی M به طوری موجود است که $L(M) = L(T)$.

۲. نشان دهید که مدل ماشین تورینگ حقیقی معادل مدل ماشین تورینگ کلاسیک است. برای نشان دادن این حکم می‌توانید از لم زیر بدون اثبات استفاده کنید.

لم. اگر

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

مجموعه‌ای شامل k عدد حقیقی باشد، مجموعه‌ی

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

از اعداد حقیقی وجود دارد به طوری که هر عضو $s \in S$ را بتوان به طور یکتا به صورت

$$s = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n$$

نوشت، با این شرط که تمام a_i ها اعدادی صحیح باشند.

۲. تشخیص پذیری و تصمیم پذیری

۱.۲

ثابت کنید زبان C تشخیص پذیر است اگر و تنها اگر زبان تصمیم پذیر D وجود داشته باشد به طوری که

$$C = \{x : \exists y \langle x, y \rangle \in D\}.$$

۲.۲

گزاره‌ی زیر را ثابت یا رد کنید:

□ زبان L تورینگ-تشخیص پذیر است اگر و تنها اگر زبان L^* تورینگ-تشخیص پذیر باشد.

۳.۲

ثابت کنید زبان زیر تصمیم پذیر است.

$$L = \{\langle D \rangle : D \text{ is a DFA and } \forall w \in L(D), w = w^R\}$$

۴.۲

یک حالت در اتوماتای پشته‌ای^۱ دست نیافتنی^۲ اگر به ازای هیچ رشته ورودی وارد آن حالت نشویم. نشان دهید زبان زیر تصمیم پذیر است.

$$L = \{\langle P \rangle : P \text{ is a PDA that has an unreachable state}\}$$

^۱PDA

^۲Unreachable

۳. کاهش پذیری و تصمیم ناپذیری

۱.۳

۱. نشان دهید که تعداد ماشین‌های تصمیم گیرنده^۲ شمارا است.

۲. زبان L را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$L = \{ \langle M \rangle : M \text{ is a Turing decider such that } \langle M \rangle \notin L(M) \}$$

نشان دهید که L تصمیم ناپذیر است.

۲.۳

نشان دهید که زبان تورینگ-تصمیم پذیر L موجود است، به نحوی که هر زبان تورینگ-تصمیم پذیر A به L کاهش می‌یابد. یک نمونه از چنین زبانی را مثال بزنید و سپس نشان دهید که اگر زبان A به L کاهش یابد، آنگاه A تورینگ-تصمیم پذیر است.

۳.۳

فرض کنید به یک ماشین تورینگ M ، طلایی می‌گوییم در صورتی که شرط

$$w \in L(M) \Leftrightarrow w^R \in L(M)$$

در آن صدق کند. فرض کنید زبان T برابر مجموعه تمام ماشین‌های تورینگ طلایی است. ثابت کنید T تشخیص پذیر نیست.

³Decider