تمرین ۵ — **ایمان محمدی ــ ۹۹۱۰۲۲۰۷**

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ــ۱۴۰۲ — **زمان آپلود: ۱۵ اردیبهشت**

سوال ۱.

الف

ابتدا مقدار $P(P_1|P_2, \neg P_3)$ را با روش استنتاج با استفاده از $Enumeration$ بدست می‌آوریم:

$$P(P_1|P_2, \neg P_3) = \frac{P(P_1, P_2, \neg P_3)}{P(P_2, \neg P_3)} = \frac{P(P_1)P(P_2|P_1)P(\neg P_3|P_2)}{P(P_2)P(\neg P_3|P_2)}$$

$$= \frac{P(P_1)P(P_2|P_1)}{P(P_2|P_1)P(P_1) + P(P_2|\neg P_1)P(\neg P_1)} = \frac{0.4 \times 0.8}{0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.6} = \frac{16}{31} \approx 0.52$$

حالا مقدار $P(\neg P_3)$ را بدست می‌آوریم:

$$P(\neg P_3) = 1 - \sum_{P_1, P_2} P(P_1, P_2, P_3) = 1 - \sum_{P_1, P_2} P_1 \times P_2|P_1 \times P_3|P_2 = 0.064 + 0.024 + 0.06 + 0.09 = 0.238$$

و حالا مقدار $P(P_2|\neg P_3)$ را با استفاده از اعدادی که بالاتر بدست آوردیم و همچنین $Enumeration$ بدست می‌آوریم:

$$P(P_2|\neg P_3) = \frac{P(P_2, \neg P_3)}{P(\neg P_3)} = \frac{P(\neg P_3, P_2)P_2}{P(\neg P_3)} = \frac{62 \times 8}{762} = 0.65$$

ب

$$P(P_3) = \sum_{P_2} \sum_{P_1} P(P_1, P_2, P_3) = \sum_{P_2} \sum_{P_1} P(P_1)P(P_2|P_1)P(P_3|P_2)$$

$$= \sum_{P_2} P(P_3|P_2) \sum_{P_1} P(P_1)P(P_2|P_1)$$

$$\rightarrow P(+P_1, +P_2) = 0.32 \qquad P(+P_1, -P_2) = 0.08$$

$$P(-P_1, +P_2) = 0.3 \qquad P(-P_1, -P_2) = 0.3$$

حالا با $Eliminate$ کردن P_1 بدست می‌آوریم:

$$P(+P_2) = 0.62 \qquad P(-P_2) = 0.38$$

حالا برای P_2, P_3 نیز محاسبه می‌کنیم:

$$\rightarrow P(+P_۲,+P_۳)=۰/۱۲۴ \qquad P(+P_۲,-P_۳)=۰/۴۹۶$$

$$P(-P_۲,+P_۳)=۰/۱۱۴ \qquad P(-P_۲,-P_۳)=۰/۲۶۶$$

حالا با $Eliminate$ کردن $P_۲$ بدست می‌آوریم:

$$P(+P_۳)=۰/۲۳۸ \qquad P(-P_۳)=۰/۷۶۲$$

$$\rightarrow P(P_۲|\neg P_۳)=\frac{P(P_۲,\neg P_۳)}{P(\neg P_۳)}=\frac{۰/۴۹۶}{۰/۷۶۲}\approx ۰/۶۵$$

سوال ۲.

الف

در ابتدا احتمالاتی که در آن‌ها $X_۱$ داریم را باید محاسبه کنیم و $Elimination$ انجام دهیم. با توجه به این‌که هر کدام از متغیرها دو حالت دارند، یک جدول (بزرگ‌ترین جدول ممکن) با سایز $۶۴ = ۲^۶$ خواهیم داشت در مرحله‌ای که می‌خواهیم $X_۱$ را حذف کنیم که برابر $X_۱$ تا $X_۶$ می‌باشد. برای کوچک‌تر کردن سایز جدول هم می‌توان حاصل احتمالاتی که در آن‌ها $X_۲, X_۳, ..., X_۶$ وجود دارند با ضرب و جمع را بدست آوریم و سایز جدول را کوچک‌تر کنیم در نتیجه بزرگ‌ترین سایز جدول ۶۴ می‌باشد. در این شبکه‌های بیزین چون حین $join$ راس $X_۱$ ، همه‌ی بچه‌های آن نیز باید جوین شوند، از $X_۲$ تا $X_{n+۱}$ ، و چون هر کدام دو حالت دارند و تعداد فرزندان $X_۱$ نیز n است، در کل $۲^{n+۱}$ حالت داریم.

ب

در ابتدا $X_۲$ تا $X_۵$ را حذف می‌کنیم و در نهایت نیز $X_۱$ را حذف می‌کنیم. از آن‌جایی که بعد از حذف هر کدوم، فقط با $X_۱$ ارتباط خواهند داشت، پس جدول ما $۴ = ۲^۲$ حالت خواهد داشت.

ج

اگر به ازای هر زیردرخت، فرزندها را ابتدا $join$ کنیم و پس از $join$ آخرین فرزند، به سراغ ریشه برویم، در نهایت جدولی با سایز ۴ خواهیم داشت حین عملیات $join$ چون همه‌ی $n-۱$ فرزند قبلی، $join$ و $eliminate$ شده‌اند و دیگر در جدول حضور ندارند.

پس هر دو ترتیب زیر جواب‌گو هستند برای خواسته‌ی سوال:

$$X_۵, X_۶, X_۷, X_۸, X_۹, X_{۱۰}, X_۲, X_۳, X_۴, X_۱$$

$$X_۵, X_۶, X_۲, X_۷, X_۸, X_۳, X_۹, X_{۱۰}, X_۴, X_۱$$

سوال ۳.

الف

مشاهدات موجود ما $+f$ و $-r$ هستند، پس نمونه‌هایی که مخالف این مشاهدات هستند را حذف می‌کنیم:

$$+r \quad +e \quad +w \quad -m \quad -f$$

$$-r \quad -e \quad +w \quad -m \quad -f$$

$$+r \quad -e \quad -w \quad +m \quad -f$$

$$+r \quad -e \quad +w \quad +m \quad -f$$

$$+r \quad -e \quad -w \quad +m \quad +f$$

ب

با اثبات

$+f$ و $-r$ احتمال ایجاد نمونه با شرط ثابت کردن این ۲ را محاسبه می‌کنیم:

$$w_۱ \to -r \quad -e \quad +w \quad +m \quad +f$$

$$w_۱ = ۰/۶ \times ۰/۲ \times ۰/۴ \times ۰/۱۵ = ۰/۰۰۷۲$$

$$w_۲ \to -r \quad -e \quad -w \quad +m \quad +f$$

$$w_۲ = ۰/۶ \times ۰/۴ \times ۰/۸ \times ۰/۸۵ = ۰/۱۶۳۲$$

$$w_۳ \to -r \quad -e \quad -w \quad +m \quad +f$$

$$w_۳ = ۰/۶ \times ۰/۴ \times ۰/۲ \times ۰/۱۵ = ۰/۰۰۷۲$$

$$w_۴ \rightarrow -r \quad -e \quad -w \quad +m \quad +f$$

$$w_۴ = ۰/۶ \times ۰/۶ \times ۰/۸ \times ۰/۷۵ = ۰/۲۱۶$$

ج

$$P(+e|-r,+f,+m,-w) = \frac{P(+e,-r,+f,+m,-w)}{P(-r,+f,+m,-w)} =$$

$$\frac{P(-r)P(+e|-r)P(-w|-r)P(+m|+e,-w)P(+f|-w)}{\sum_E P(-r)P(+e|-r)P(-w|-r)P(+m|+e,-w)P(+f|-w)} =$$

$$\frac{۰/۴۵ \times ۰/۶}{۰/۹ + ۰/۴۵} = ۰/۲$$

د

$$P(+m|-r,+f) = \frac{P(+m,-r,+f)}{P(-r,+f)} = \frac{P(-r)P(+m|E,w)P(+f,w)}{P(-r,+f) =}$$
$$\frac{۰/۶ \times ۰/۳۵ \times ۰/۱۵}{۰/۶ \times ۰/۱۵} = ۰/۳۵$$

سوال ۴.

۱. درست است. مسیر غیرفعال داریم، پس مستقل است.

۲. نمی‌توان مشخص کرد. مسیر فعال داریم.

۳. نمی‌توان مشخص کرد. مسیر فعال داریم.

۴. نمی‌توان مشخص کرد چون مسیر فعال از U به Z داریم.

۵. نمی‌توان مشخص کرد چون مسیر فعال از U به Z داریم.

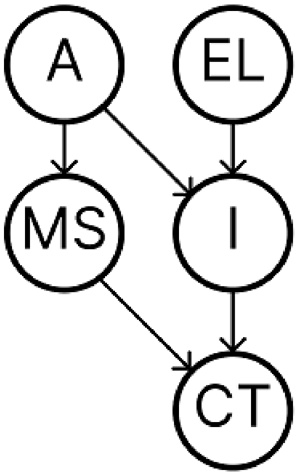
۶. درست است.

۷. نمی‌توان مشخص کرد. مسیر فعال داریم.

۸. درست است.

سوال ۵.

الف



ب

$$P(MS=\cdot|I=\cdot,CT=\cdot)=\frac{P(MS=\cdot,I=\cdot,CT=\cdot)}{P(I=\cdot,CT=\cdot)}=$$

$$\frac{\sum_{A,EL}P(A)P(MS|A)P(EL)P(I|A,EL)P(CT|I,MS)}{\sum_{A,EL,MS}P(A)P(MS|A)P(EL)P(I|A,EL)P(CT|I,MS)}$$

سوال ۶.

الف

در این بخش، تعداد متغیرهای وابسته به هر یک از متغیرها را بررسی می‌کنیم:

متغیر A : به B وابسته است پس جدول ۴ حالت دارد.

متغیر B : به متغیری وابسته نیست پس جدول ۲ حالت دارد.

متغیر C : به B وابسته است پس جدول ۴ حالت دارد.

متغیر D : به B وابسته است پس جدول ۴ حالت دارد.

متغیر E : به B و C وابسته است پس جدول ۸ حالت دارد.

متغیر F : به E و C و D وابسته است پس جدول ۱۶ حالت دارد.

در کل به ۶ جدول برای ذخیره‌سازی نیاز است.

ب

خیر. ممکن است یال اضافی رسم شده باشد. همچنین هر یال نشان‌گر وابستگی دو متغیر به یکدیگر است و می‌توان جهت یال‌ها را نیز عوض کرد و باز هم جواب درست گرفت.

ج

نمی‌توان شبکه‌ی دیگری کشید که معادل این شبکه باشند.

د

برای گراف کامل معنای خاصی ندارد حتما. اگر تمامی رئوس به همدیگر وصل باشند، همه‌ی متغیرها به هم وابسته هستند که بی‌معنا است و شبکه نیست. اگر شبکه بدون یال باشد نیز به معنی مستقل بودن همه‌ی متغیرها است. اگر گراف بدون راس باشد نیز به معنی وجود نداشتن متغیر و وجود نداشتن شبکه است.

موفق باشید.