تمرین ۷ | **ایمان محمدی ـ ۹۹۱۰۲۲۰۷**

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ـ۱۴۰۲ | **زمان آپلود: ۱۵ اردیبهشت**

سوال ۱. با استفاده از فرض همگرایی و یکتا بودن بردار مربوط به حالت ایستا، داریم:

$$\pi_\infty = \pi_{\infty+1}$$

پس

$$\pi_\infty = \pi_\infty P$$

$$\pi(i) = \Sigma_{j=1}^{k} \pi(j) P_{ji} \quad x = [x_1, x_2, x_3, ..., x_k]$$

$$\Sigma_{j=1}^{k} \pi(j) = 1$$

اگر توزیع یکنواخت را π_∞ در نظر بگیریم، پس $\pi_\infty = [\frac{1}{k}, ..., \frac{1}{k}]$ پس داریم

$$\Sigma_{i=0}^{k} \frac{1}{k} P_{ij} = \frac{1}{k} = x_j$$

پس در نهایت برای توزیع یونیفرم x داریم:

$$xP = x$$

و x همان حالت ایستای چنین ماتریس انتقالی است.

سوال ۲. به محاسبه‌ی نقاط مرزی تابع که بپردازیم می‌بینیم که مقادیر $f(0)$ و $f(4)$ برابر با ۰ هستند. حالا مقادیر $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$ را محاسبه می‌کنیم با توجه به این‌که هر سطر احتمال رفتن به دیگر حالت‌ها را می‌دهد.

$$f(1) = p(1+0) + q(1+f(2)) = p + q + qf(2) = 1 + qf(2)$$

$$f(2) = p(1+f(1)) + q(1+f(3)) = p + q + pf(1) + qf(3) = 1 + pf(1) + qf(3)$$

$$f(3) = p(1+f(2)) + q(1+0) = p + q + pf(2) = 1 + pf(2)$$

پس بدست می‌آوریم:

$$f(1) = 1 + \frac{2q}{q - 2pq}$$

$$f(2) = \frac{2}{1 - 2pq}$$

$$f(۳) = ۱ + \frac{۲p}{۱ - ۲pq}$$

پس در نهایت مقدار هر کدام می‌شود:

$$f(۱) = ۳$$

$$f(۲) = ۴$$

$$f(۳) = ۱$$

و داریم:

$$f(n) = ۴n - n^۲$$

سوال ۳.

الف

تعداد پارامترهای لازم در این بخش برابر است با پارامترهای بردار اولیه به علاوه‌ی پارامترهای مورد نیاز برای ماتریس انتقال و همچنین نشان دادن احتمال مربوط به مشاهدات:

$$k^۲ + k + km$$

ب

الگوریتم Forward یکی از الگوریتم‌های مهم در حوزه بیزین (Bayesian) است و برای تخمین احتمالات پسین (posterior probabilities) متغیرهای نهان در مدل‌های گرافیکی بیزین استفاده می‌شود.

این الگوریتم برای محاسبه احتمالات پسین متغیرهای نهان با استفاده از داده‌های مشاهده شده به کار می‌رود. به طور کلی، الگوریتم Forward بر اساس فرآیند تکراری اطلاعات جدید را درباره احتمالات پسین بروز می‌دهد.

برای شروع، احتمال پیشین (prior probability) متغیرهای نهان را تعیین می‌کنیم. سپس با استفاده از این احتمال پیشین و اطلاعات مشاهده شده، احتمالات پیشین تا زمان فعلی را محاسبه می‌کنیم.

با توجه به الگوریتم forward و توالی اتفاقات، احتمال هر کدام را می‌نویسیم.

$$P(A, O_۱) = ۰/۸ \times ۰/۹۹ = ۰/۷۹۲$$

$$P(B, O_۱) = ۰/۱ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۰۱$$

$$P(A, O_{۱|۲}) = ۰٫۲ \times ۰٫۷۸۴۱۸ = ۰٫۱۵۸$$

$$P(B, O_{۱|۲}) = ۰٫۹ \times ۰٫۰۰۸۰۱۹ = ۰٫۰۰۷۲$$

$$P(A, O_{۱}|۳) = ۰٫۸ \times ۰٫۷۸۴۱۸$$

$$P(B, O_{۱|۳}) = ۰٫۱ \times ۰٫۰۰۹۴۹$$

ج

الگوریتم Backward یکی از روش‌های استفاده شده در الگوریتم‌های الگوی مخفی مارکوف (Hidden Markov Models) است. این الگوریتم برای تخمین متغیرهای نهان مدل مارکوف مخفی بر اساس داده‌های مشاهده شده استفاده می‌شود.

در Backward algorithm ، ما به دنبال محاسبه احتمال مشاهده شدن تمام دنباله‌ها تا یک زمان مشخص در آینده هستیم. برای این کار، از پس‌بینی (backtracking) برای حساب کردن این احتمالات استفاده می‌شود.

برای شروع، ما از زمان پایانی به زمان شروع عقب می‌رویم و در هر مرحله محاسبات خاصی را انجام می‌دهیم. احتمال پایانی را در زمان پایانی به عنوان شرط اولیه قرار می‌دهیم و سپس احتمال تمام دنباله‌ها تا زمان قبلی را محاسبه می‌کنیم.

در این بخش باید احتمال‌ها را برعکس و از جلو به عقب محاسبه کنیم، پس داریم:

$$P_{۳}(A) = ۰٫۸ \times ۰٫۹۹ + ۰٫۰۰۱ =$$

$$P_{۳}(B) = ۰٫۸ \times ۰٫۰۱ + ۰٫۱ \times ۰٫۹۹ = ۰٫۱۰۷$$

$$P_{۲}(A) = ۰٫۷۹۳ \times ۰٫۱۹۸ + ۰٫۱۰۷ \times ۰٫۰۰۹ = ۰٫۱۵۸$$

$$P_{۲}(B) = ۰٫۷۹۳ \times ۰٫۰۰۲ + ۰٫۱۰۷ \times ۰٫۸۹۱ = ۰٫۰۹۵$$

$$P_{۱}(A) = ۰٫۱۵۸ \times ۰٫۷۹۲ + ۰٫۰۹۵ \times ۰٫۰۰۱$$

$$P_{۱}(B) = ۰٫۱۵۸ \times ۰٫۰۰۸ + ۰٫۰۹۵ \times ۰٫۰۹۹$$

د

همان forward است که به جای جمع، ماکسیمم می‌گیریم پس داریم:

$$P(A, O_۱) = ۰/۸ \times ۰/۹۹ = ۰/۷۹۲$$

$$P(B, O_۱) = ۰/۱ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۰۱$$

$$P(A, O_{۱|۲}) = ۰/۲ \times max(۰/۷۸۴۰۸, ۰/۰۰۰۱) = ۰/۱۵۸$$

$$P(B, O_{۱|۲}) = ۰/۹ \times max(۰/۰۰۷۹۲, ۰/۰۰۰۹۹) = ۰/۰۰۷$$

$$P(A, O_۱|۳) = ۰/۸ \times max(۰/۱۵۵۴۳, ۰/۰۰۰۰۸)$$

$$P(B, O_{۱|۳}) = ۰/۱ \times max(۰/۰۰۱۵۷, ۰/۰۰۷۹۲)$$

سوال ۴.

الف

$$P(O_۶ = ۵, O_۷ = ۸ | S_۶ = ۷, S_۷ = ۸, C_۶ = +, C_۷ = -) =$$

$$P(O_۶ = ۵ | S_۶ = ۷, C_۶ = +) P(O_۷ = ۸ | S_۷ = ۸, C_۷ = -) =$$

$$E(+, ۲) \times E(-, ۰) = ۰/۰۶$$

و همچنین داریم:

$$P(O_۶ = ۵, O_۷ = ۸ | S_۶ = ۶, S_۷ = ۶, C_۶ = +, C_۷ = -) =$$

$$E(+, ۱) \times E(-, ۲) = ۰$$

ب

$$P(O_۶ = ۵, O_۷ = ۸ | S_۶ = ۷, S_۷ = ۸) =$$

$$(۰/۵ \times E(+, ۲) + ۰/۵ \times E(-, ۲)) \times (۰/۵ \times E(+, ۰) + ۰/۵ \times E(-, ۰)) = ۰/۵ \times (۰/۱ + ۰) \times (۰/۱ + ۰) = ۰/۰۵$$

و به طریق مشابه بدست می‌آوریم:

$$P(O_۶ = ۵, O_۷ = ۸ | S_۶ = ۶, S_۷ = ۶) =$$

$$۰/۵ \times (۰/۲ + ۰/۲) \times (۰/۱ + ۰) = ۰/۰۱$$

ج

احتمال تبدیل شدن به ذره‌ی $S_۷ = ۶, S_۸ = ۶$ برابر با ۰ است.
برای حالت دیگر داریم:

$$P(S_۷ = ۷, S_۸ = ۶ | S_۶ = ۶, S_۷ = ۷) =$$

$$F(۱, ۰) = ۰/۳$$

موفق باشید.