تمرین ۳ **ایمان محمدی ـ ۹۹۱۰۲۲۰۷**

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ـ۱۴۰۲ **زمان آپلود: ۱۶ خرداد**

سوال ۱. تمام استراتژی‌های پایدار تکاملی، در استراتژی‌های خالص و ترکیبی بازی زیر را پیدا می‌کنیم.

$(۰,۰)$	$(۳,۱)$	$(۰,۰)$
$(۱,۳)$	$(۰,۰)$	$(۰,۰)$
$(۰,۰)$	$(۰,۰)$	$(۱,۱)$

ابتدا استراتژی‌های خالص را بررسی می‌کنیم. در یک بازی به صورت عمومی، برای اینکه استراتژی i یک استراتژی پایدار تکاملی باشد، باید دو شرط را بررسی کنیم:

استراتژی i باید برنده استراتژی j را وقتی بقیه بازیکنان استراتژی i را انتخاب کرده باشند، برابر یا بیشتر از استراتژی j کند. اگر استراتژی i و j هر دو به یک اندازه برنده باشند، آنگاه استراتژی i باید برنده استراتژی j را وقتی بقیه بازیکنان استراتژی j را انتخاب کرده باشند، بیشتر از استراتژی j کند. در مثال شما، به نظر می‌رسد استراتژی‌های ۱ و ۲ برای هر دو بازیکن، پاداش بیشتری نسبت به استراتژی ۳ ارائه می‌دهند. بنابراین، می‌توان گفت استراتژی ۳ پایدار تکاملی نیست.

از طرفی، استراتژی ۱ برای بازیکن اول و استراتژی ۲ برای بازیکن دوم، پاداش بیشتری نسبت به استراتژی‌های دیگر ارائه می‌دهند. بنابراین، می‌توان گفت استراتژی ۱ برای بازیکن اول و استراتژی ۲ برای بازیکن دوم، پایدار تکاملی هستند.

در مورد استراتژی‌های ترکیبی، چون پاداش‌ها به صورت اعداد طبیعی ارائه شده‌اند و هیچ استراتژی ترکیبی با پاداش بیشتری وجود ندارد، می‌توان گفت هیچ استراتژی ترکیبی پایدار تکاملی وجود ندارد.

به همین ترتیب، می‌توان گفت تنها استراتژی‌های پایدار تکاملی در این بازی، استراتژی ۱ برای بازیکن اول و استراتژی ۲ برای بازیکن دوم هستند.

سوال ۲. اثبات می‌کنیم در هر بازی متقارن، اگر $a_{i,i} > a_{i,j}$ به ازای تمامی $i \neq j$ برقرار باشد، آنگاه استراتژی خالص i یک استراتژی پایدار تکاملی است.

در حالت کلی، برای اثبات اینکه یک استراتژی خالص در یک بازی یک استراتژی پایدار تکاملی (Evolutionary Stable Strategy - ESS) است، باید دو شرط را بررسی کنیم:

۱. استراتژی خالص i باید برنده استراتژی خالص j را وقتی بقیه بازیکنان استراتژی i را انتخاب کرده باشند، برابر یا بیشتر از استراتژی j کند.

۲. اگر استراتژی i و j هر دو به یک اندازه برنده باشند، آنگاه استراتژی i باید برنده استراتژی j را وقتی بقیه بازیکنان استراتژی j را انتخاب کرده باشند، بیشتر از استراتژی j کند.

بنابراین، برای اثبات این موضوع برای یک بازی متقارن، کافیست دو شرط فوق را برای ماتریس بازی بررسی کنیم. اگر ماتریس بازی به گونه ای باشد که $a_{i,i} > a_{i,j}$ برای همه ij ، بنابراین این دو شرط برقرار هستند و استراتژی i یک استراتژی پایدار تکاملی (ESS) است.

همچنین این موضوع به طور کلی نشان می دهد که در یک بازی متقارن، استراتژی i که بیشترین پی‌آف (payoff) را به بازیکن می‌دهد (یعنی $a_{i,i}$ بیشترین مقدار را دارد) یک استراتژی پایدار تکاملی است.

برای مثال در این بازی:

	۱	۲
۱	$a_{۱,۱}$	$a_{۱,۲}$
۲	$a_{۲,۱}$	$a_{۲,۲}$

این ماتریس بازی است که دو استراتژی خالص دارد: استراتژی ۱ و استراتژی ۲ . در یک بازی متقارن، $a_{i,j} = a_{j,i}$ برقرار است. اگر شرایط مساله برقرار باشد که $a_{۱,۱} > a_{۱,۲}$ و $a_{۲,۲} > a_{۲,۱}$ ، بنابراین هر دو استراتژی پایدار تکاملی (ESS) هستند.

برای مثال، فرض کنید $a_{۱,۱} = ۳$، $a_{۱,۲} = ۲$، $a_{۲,۱} = ۲$ و $a_{۲,۲} = ۳$. در این حالت، هر دو استراتژی (ESS) هستند. چرا که اگر همه بازیکنان استراتژی ۱ را انتخاب کنند، هر بازیکنی که به استراتژی ۲ تغییر کند، پاداش کمتری دریافت می‌کند و برعکس.

سوال ۳. با توجه به ماتریس بازده، می‌توانیم مشاهده کنیم که هیچ تعادلی در این بازی وجود ندارد که هر دو بازیکن از انتخاب همان استراتژی سود ببرند، یا به عبارت دیگر، تعادل نش در این بازی وجود ندارد. برای نشان دادن این موضوع، می‌توانیم به این نکته اشاره کنیم که برای وجود تعادل نش در یک بازی، باید بتوانیم یک انتخابی پیدا کنیم که برای هر دو بازیکن، سود بهتری نسبت به هر انتخاب دیگری داشته باشد. با توجه به ماتریس بازده ارائه شده، چنین انتخابی وجود ندارد.

با این حال، بازی ممکن است تعادل همبسته داشته باشد. تعادل همبسته یک تعادل است که در آن بازیکنان استراتژی‌های تصادفی انتخاب می‌کنند. برای پیدا کردن تعادل همبسته، باید سعی کنیم مقداری را پیدا کنیم که با استفاده از آن، بازیکنان به طور تصادفی بین استراتژی‌های مختلف انتخاب کنند. در این مثال، یک تعادل همبسته به شرح زیر است:

برای بازیکن اول:

$$(p_۱, p_۲, p_۳) = (\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$$

برای بازیکن دوم:

$$(q_۱, q_۲, q_۳) = (\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$$

این استراتژی‌های تصادفی باعث می‌شوند که هر دو بازیکن بتوانند از بازی سود ببرند. به این ترتیب، تعادل همبسته پیدا می‌شود.

سوال ۴. یک بازی در تعادل تکاملی (Evolutionary Stable Strategy or ESS) است اگر یک استراتژی پیدا شود که اگر تمام جمعیت از آن استفاده کند، هیچ استراتژی دیگری نتواند آن را در حالت مستقر شکست دهد. به عبارت دیگر، اگر تمام جمعیت از استراتژی ESS استفاده کند، هیچ استراتژی دیگری نمی‌تواند در برابر آن پیروز شود.

برای این بازی، می‌توانیم از شرایط تعادل تکاملی استفاده کنیم. یک استراتژی ESS ، استراتژی i است اگر و تنها اگر:

$$U(i,i) \geq U(j,i) \ for \ each \ j \neq i.$$

این به این معنی است که یک استراتژی باید حداقل به اندازه هر استراتژی دیگر عملکرد خوبی داشته باشد وقتی که بازیکنان دیگر از همان استراتژی استفاده می‌کنند.

اگر

$$U(j,i) = U(i,i)$$

برای بعضی

$$j \neq i$$

، آنگاه

$$U(i,j) > U(j,j)$$

این به این معنی است که اگر استراتژی دیگری عملکرد مشابهی نسبت به استراتژی ESS داشته باشد، بازیکن با استفاده از استراتژی ESS در مقابل استراتژی دیگر بهتر عمل می‌کند.

با استفاده از این دو شرط، می‌توانیم شرایط لازم برای x را پیدا کنیم. برای استراتژی ۱ به عنوان استراتژی ESS ، می‌گیریم:

$$U(۱,۱)U(۲,۱) \ means \ x \geq ۰/۵$$

و اگر

$$x = ۰/۵$$

آنگاه باید داشته باشیم

$$U(۱,۲) > U(۲,۲)$$

یعنی

$$۰/۵ > ۱$$

که این ناقض است.

بنابراین استراتژی ۱ هنگامی استراتژی تکاملی مستقر است که

$$x > ۰/۵$$

برای استراتژی ۲ به عنوان استراتژی ESS ، می‌گیریم:

$$U(۲,۲) \geq U(۱,۲) \ means \ ۱ \geq ۰/۵x$$

و اگر

$$۱ = ۰/۵x$$

آنگاه باید داشته باشیم

$$U(۲,۱) > U(۱,۱) \ means \ ۰/۵ > x$$

که این ناقض است.

بنابراین استراتژی ۲ همیشه استراتژی تکاملی مستقر است.

به نظر می‌رسد که در این بازی، استراتژی ۲ همیشه ESS است و استراتژی ۱ فقط زمانی ESS است که

$$x > ۰/۵$$

بنابراین بازی دارای تعادل تکاملی است هنگامی که

$$x ۰/۵ \ or \ x > ۰/۵$$

سوال ۵. برای پیدا کردن یک استراتژی متقارن تعادل نش در یک بازی دو نفره با ماتریس بازدهی R ، می‌دانیم که اگر x^* استراتژی متقارن تعادل نش باشد، آنگاه باید داشته باشیم:

$$x^{*T} Rx* \geq x^T Rx*$$

برای هر بردار x مثبت. اگر فرض کنیم که همه درایه‌های x^* مثبت هستند، آنگاه این برابری تنها وقتی برقرار است که x^* یک بردار ویژه ماتریس R باشد که به آن مقدار ویژه بزرگ‌ترین ممکن (λ_{max}) تعلق دارد.

برای یافتن x^*، می‌توانیم از تعریف بردارهای ویژه استفاده کنیم:

$$Rx* = \lambda_{max} x*$$

و از آنجا که می‌دانیم که x^* یک توزیع احتمال است (یعنی مجموع درایه‌های آن برابر با یک است)، می‌توانیم آن را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$x* = \lambda_{max}^{-۱} Rx*$$

با توجه به مقدار ویژه بیشینه λ_{max} ، می‌توانیم این رابطه را برای x^* استفاده کنیم. از طرفی، اگر چنین x^* وجود داشته باشد که همه درایه‌های آن مثبت باشند، آنگاه آن یکتا خواهد بود، زیرا مقدار ویژه بیشینه یکتا است.

چنین تعادلی وجود خواهد داشت اگر و تنها اگر مقدار ویژه بیشینه ماتریس R مثبت باشد و بردار ویژه متناظر با آن تمام درایه‌های مثبت داشته باشد.

اگر یک استراتژی متقارن تعادل نش x^* با تمام درایه‌های مثبت وجود داشته باشد، آنگاه آن یک استراتژی پایدار تکاملی خواهد بود اگر و تنها اگر برای هر استراتژی y مختلط مثبت که $y \neq x^*$ داریم:

$$y^T Ry < x^{*T} Rx*$$

یا به عبارت دیگر، اگر و تنها اگر برای هر استراتژی y مختلط مثبت دیگر، بازیکن با استفاده از استراتژی x^* بیشتر از بازیکن با استفاده از استراتژی y برنده می‌شود.

سوال ۶.

موفق باشید.