تمرین ۱ بخش دوم **ایمان محمدی ـ ۹۹۱۰۲۲۰۷**

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ـ۱۴۰۲ **زمان آپلود: ۸ فروردین**

سوال ۱. سوال ۱

در این سوال برای هر کدوم از بازی‌ها، تعادل‌های نش رو با حذف استراتژی‌های مغلوب و مشخص کردن بهترین پاسخ هر استراتژی حریف پیدا می‌کنیم.

الف

در این بخش از دو جدولی که داریم، زمانی که بهترین پاسخ‌ها رو مشخص کنیم، هیچ نقطه‌ای از جدول نیست که هر ۳ عدد آن بهترین پاسخ باشند در نتیجه تعادل نش خالص نداریم.

پس احتمال برای هر کدام فرض می‌کنیم و به محاسبه‌ی Mixed Strategy Nash Equilibrium می‌پردازیم.

اگر بازیکن سمت چپ، با احتمال p استراتژی T را بازی کند و بازیکن سمت بالا، با احتمال q استراتژی L را بازی کند و بازیکن سوم استراتژی X را با احتمال k بازی کند، خواهیم داشت:

$$E(U_۱) = ۲qk + ۲q - ۵k + ۱ = ۳qk - ۴q + ۲k$$

$$\rightarrow k = \frac{۶p + ۱}{p + ۷}$$

$$E(U_۲) = ۲pk + ۲p - ۵k + ۱ = ۳pk - ۴p + ۲k$$

$$\rightarrow k = \frac{۶q + ۱}{q + ۷}$$

$$E(U_۳) = -۶pq + ۴q + ۴p - ۲ = -۶pq + ۲q + ۲p$$

$$\rightarrow p = ۱ - q$$

از اون‌جایی که مقدار p و q در بخش‌های مختلف معادله مثل این‌که فقط جای‌شان فرق کرده است پس داریم:

$$p = q = \frac{۱}{۲}$$

و با توجه به این دو بدست می‌آوریم:

$$r = \frac{۸}{۱۵}$$

پس برای تعادل نش خواهیم داشت:

$$(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}), (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}), (\frac{۸}{۱۵}, \frac{۷}{۱۵})$$

ب

در ابتدا برای هر کدام از استراتژی‌های X و Y و Z احتمال در نظر می‌گیریم.

احتمال X را p در نظر می‌گیریم.

احتمال Y را q در نظر می‌گیریم.

احتمال Z را $۱ - q - p$ در نظر می‌گیریم.

سپس برای هر کدام از استراتژی‌های A و B و C احتمال در نظر می‌گیریم.

احتمال A را m در نظر می‌گیریم.

احتمال B را n در نظر می‌گیریم.

احتمال C را $۱ - m - n$ در نظر می‌گیریم.

حالا سعی می‌کنیم استراتژی‌های مغلوب را حذف کنیم و بین باقی استراتژی‌های به دنبال تعادل‌های ترکیبی بگردیم.

استراتژی A توسط استراتژی‌های B و C مغلوب است، پس به حذف آن می‌پردازیم و عملیات‌ها را بین باقی استراتژی‌ها انجام می‌دهیم.

حالا تساوی‌ها را برای استراتژی‌های مختلف می‌نویسیم و مقدار هر کدام از احتمال‌ها را با توجه به تساوی‌ها بدست می‌آوریم:

$$p \times ۰ + q \times ۲ + (۱ - p - q) \times ۴ = p \times ۰ + q \times ۱ + (۱ - p - q) \times ۳$$

$$\rightarrow p = ۱, q = ۰$$

$$n \times -۱ + (۱ - n) \times ۴ = n \times ۲ + ۳ \times ۱ - n = ۲n + ۳ - ۳n$$

$$\rightarrow n = \frac{۱}{۴}$$

برای تعادل نش داریم:

$$((۱, ۰, ۰), (۱, \frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴}))$$

با توجه به این‌که میزان پوینت بازیکن چپ اگر با استراتژی Y یا Z بازی کند، بیشتر از استراتژی X می‌شود با توجه به مقادیز بدست اومده، با حذف استراتژی X و سپس مغلوب شدن استراتژی B در جدول جدید، برای تعادل نش نهایی به این مقدار خواهیم رسید:

مقدار n همواره از $\frac{۱}{۴}$ بیشتر می‌شود، پس داریم برای تعادل نش:

$$((۰, q, ۱ - q), (۰, n, ۱ - n))$$

مقادیر q بین ۰ و ۱ ، مقادیر n نیز بین $\frac{۱}{۴}$ و ۱ می‌باشد.

سوال ۲. سوال ۲

الف

برای نشان دادن اینکه ارزش بازی برابر با صفر است، می‌توانیم نشان دهیم که برای هر استراتژی ترکیبی که نفر اول انتخاب می‌کند، نفر دوم می‌تواند یک استراتژی انتخاب کند که امتیاز نفر اول را صفر کند. سپس نشان می‌دهیم که برای هر استراتژی ترکیبی که نفر دوم انتخاب می‌کند، نفر اول می‌تواند استراتژی‌ای انتخاب کند که امتیاز نفر دوم را صفر کند.

اگر نفر اول راس i را انتخاب کند، نفر دوم می‌تواند راس i را انتخاب کند و بنابراین امتیاز نفر اول برابر با $W_i - w_{ii}$ خواهد بود. اما طبق تعریف $W_i = \sum_{j=۱}^{n} w_{ij}$ ، بنابراین $W_i - w_{ii} = \sum_{j=۱,j\neq i}^{n} w_{ij}$ که مقدار نامنفی است. بنابراین، نفر دوم می‌تواند استراتژی‌ای انتخاب کند که امتیاز نفر اول را صفر یا کمتر از صفر کند.

اگر نفر دوم راس i را انتخاب کند، نفر اول می‌تواند هر راس j را انتخاب کند به طوری که $w_{ji} = ۰$. در این حالت، امتیاز نفر اول برابر با صفر خواهد بود. بنابراین، نفر اول می‌تواند استراتژی‌ای انتخاب کند که امتیاز نفر دوم را صفر یا کمتر از صفر کند.

بنابراین، ارزش بازی برابر با صفر است.

ب

به طور مشابه، می‌توان نشان داد که بردار x وجود دارد که درایه‌های آن نامنفی هستند و مجموع درایه‌های آن برابر یک است و $x^T A = ۰$.

به طور خاص، می‌توانیم بردار x را به گونه‌ای انتخاب کنیم که x_i برابر با $\frac{۱}{n}$ برای هر i از ۱ تا n باشد. در این حالت، می‌توان نشان داد که $x^T A = ۰$.

به این صورت که:

$$
\begin{aligned}
x^T A &= \sum_{i=۱}^{n} x_i a_{ij} \\
&= \sum_{i=۱}^{n} (۱/n) * (w_{ij} ۱_{i=j} * W_i) \\
&= \sum_{i=۱}^{n} w_{ij}/n - \sum_{i=۱}^{n} ۱_{i=j} * W_i/n \\
&= \sum_{i=۱}^{n} w_{ij}/n - W_j/n \\
&= W_j/n - W_j/n \\
&= ۰
\end{aligned}
$$

بنابراین، بردار x وجود دارد به طوری که درایه‌های آن نامنفی هستند و مجموع درایه‌های آن برابر یک است و $x^T A = ۰$.

سوال ۳. سوال ۳

برای پیدا کردن تعادل نش در بازی دو نفره، ما ابتدا باید بازی را به صورت یک جدول سودمندی نمایش دهیم. در این بازی، مجموعه اعمال ممکن برای هر بازیکن عدد انتخابی از مجموعه ۱ تا k است. بنابراین، جدول سودمندی بازی به صورت یک جدول $k \times k$ خواهد بود.

سودمندی هر بازیکن را می‌توان با توجه به این که آیا اعداد انتخابی توسط آن‌ها با هم برابر است یا خیر تعیین کرد. اگر حمید و مجید عدد یکسانی را انتخاب کنند، مجید به حمید ۱ ریال می‌دهد. در این صورت سودمندی حمید ۱ خواهد بود و سودمندی مجید ۱− خواهد بود. در غیر این صورت، سودمندی هر دو بازیکن ۰ خواهد بود.

یک استراتژی ترکیبی برای یک بازیکن استراتژی‌ای است که بازیکن در آن به جای انتخاب یک عمل خاص، احتمالاتی را برای انتخاب هر عمل مشخص می‌کند. بنابراین، برای این بازی، یک استراتژی ترکیبی به این معنی است که حمید و مجید احتمالاتی را برای انتخاب هر عدد از ۱ تا k مشخص می‌کنند.

اگر استراتژی ترکیبی حمید و مجید به ترتیب p و q باشد، سودمندی حمید $E_p(q)$ و سودمندی مجید $E_q(p)$ خواهد بود. این بازی یک تعادل نش دارد اگر و فقط اگر هیچ یک از بازیکنان نتوانند سودمندی خود را با تغییر استراتژی خود افزایش دهند. به عبارت دیگر، اگر $p*$ و $q*$ تعادل نش باشد، آنگاه برای هر استراتژی p و q داریم:

$E_q(p*) \leq E_q*(p*)$ و $E_p(q*) \leq E_p*(q*)$

در این بازی، تعادل نش وجود دارد اگر و فقط اگر $p*$ و $q*$ به گونه‌ای باشند که حمید و مجید به صورت تصادفی عددی از ۱ تا k انتخاب می‌کنند. به عبارت دیگر، اگر $p* = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, ..., \frac{1}{k})$ و $q* = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, ..., \frac{1}{k})$ باشد. در این صورت، سودمندی انتظاری هر دو بازیکن برابر با ۰ خواهد بود و هیچ یک از آن‌ها نمی‌توانند سودمندی خود را با تغییر استراتژی خود افزایش دهند.

می‌توان نشان داد که این تعادل تنها تعادل نش بازی است. اگر یک استراتژی تعادل نش دیگر وجود داشته باشد، باید بتوان سودمندی انتظاری حمید یا مجید را افزایش داد. اما، اگر حمید یا مجید احتمال بیشتری را برای انتخاب یک عدد خاص قرار دهند، بازیکن دیگر می‌تواند با انتخاب همان عدد سودمندی خود را افزایش دهد. بنابراین، تنها تعادل نش که در این بازی وجود دارد تعادلی است که در آن هر دو بازیکن به صورت تصادفی عددی از ۱ تا k انتخاب می‌کنند.

سوال ۴. سوال ۴

الف

	۱	۲	۳	۴	۵
۱	(۰, ۰)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)
۲	(۲, ۱)	(۰, ۰)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)
۳	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۰, ۰)	(۳, ۴)	(۳, ۵)
۴	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۰, ۰)	(۴, ۵)
۵	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۰, ۰)

با مغلوب شدن استراتژی‌ها نهایتا به این جدول می‌رسیم:

	۳	۴	۵
۳	(۰, ۰)	(۳, ۴)	(۳, ۵)
۴	(۴, ۳)	(۰, ۰)	(۴, ۵)
۵	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۰, ۰)

توجه کنید که در یک تعادل متقارن، هر بازیکن با احتمال برابر بین چند عدد متفاوت انتخاب می‌کند. اگر بازیکنی عدد ۱ یا ۲ را انتخاب کند، بازیکن دیگر می‌تواند با انتخاب یک عدد بزرگتر از آن، امتیاز بیشتری کسب کند. بنابراین،

در تعادل متقارن، این دو عدد با احتمال ناصفر بازی نمی‌شوند. به طور مشابه، اگر بازیکنی عدد ۵ را انتخاب کند و بازیکن دیگر عددی کوچکتر انتخاب کند، امتیاز آن کمتر خواهد بود. بنابراین، در تعادل، عدد ۵ نیز با احتمال ناصفر بازی نمی‌شود. پس تعادل متقارن در این بازی به صورتی است که هر بازیکن با احتمال برابر بین اعداد ۳ و ۴ انتخاب می‌کند.

ب

حال می‌خواهیم نشان دهیم که اعداد ۱ تا C در هیچ کدام از تعادل‌ها با احتمال ناصفر بازی نمی‌شوند، که C برابر است با

$$C = [n - \frac{\sqrt{۸n + ۱} - ۱}{۲}]$$

در تعادل متقارن، اگر بازیکنی عدد i را انتخاب کند (که i کمتر از C است)، بازیکن دیگر می‌تواند با انتخاب عدد j (که j بیشتر از i و کمتر از n است)، امتیاز بیشتری کسب کند. پس اعداد کمتر از C در هیچ کدام از تعادل‌ها با احتمال ناصفر بازی نمی‌شوند.

برای تشخیص چرا مقدار C دقیقاً به شکل نشان داده شده تعریف می‌شود، ابتدا باید به طرز کلی بازی را در نظر بگیریم. در بازی ما، هر بازیکن در هر دور از بازی یکی از اعداد ۱ تا n را انتخاب می‌کند. اگر دو بازیکن عدد متفاوتی انتخاب کنند، بازیکنی که عدد بزرگ‌تر را انتخاب کرده است، امتیاز بیشتری می‌گیرد.

اگر بازیکنی عددی کوچکتر از C را انتخاب کند، بازیکن دیگر می‌تواند با انتخاب عددی بزرگتر از عدد انتخاب شده (اما کوچکتر از n)، امتیاز بیشتری کسب کند. بنابراین، بهترین استراتژی برای هر بازیکن این است که عددی را انتخاب کند که حداقل برابر با C باشد.

پس برای یافتن مقدار دقیق C ، باید یک معادله را حل کنیم که نشان می‌دهد که انتخاب هر عدد کوچکتر از C امتیاز کمتری نسبت به انتخاب هر عدد بزرگتر از آن می‌دهد. این معادله به شکل زیر است:

$$\frac{C(C + ۱)}{۲} = \frac{n(n + ۱)}{۲} - \frac{C(C + ۱)}{۲}$$

این معادله بیان می‌کند که مجموع اعداد از ۱ تا C برابر است با تفاوت مجموع اعداد از ۱ تا n و مجموع اعداد از ۱ تا C .

حالا با حل معادله می‌رسیم به:

$$C = [n - \frac{\sqrt{۸n + ۱} - ۱}{۲}]$$

از این جا می‌توانیم ببینیم که اگر هر بازیکن عددی را انتخاب کند که کمتر از C است، بازیکن دیگر همیشه می‌تواند با انتخاب عددی بزرگ‌تر، امتیاز بیشتری کسب کند. پس استراتژی بهینه برای هر بازیکن این است که عددی را انتخاب کند که حداقل برابر با C باشد.

موفق باشید.