سوال ۱. این بازی در واقع همان Minimax است و هر بازیکن سعی می‌کند در نوبت خودش، بدترین پاسخ را حذف کند و بهترین پاسخ را انتخاب کند. پس از آخر شروع می‌کنیم و به اول می‌رسیم.

در ابتدا راسی که یال k از پایین به آن وصل می‌شود را می‌خواهیم حذف کنیم و یک ۳ تایی به آن نسبت دهیم.

$$(۰/۵ \times ۳۰۰ + ۰/۵ \times ۰, ۰/۵ \times ۴۰ + ۰/۵ \times ۶۰, ۰/۵ \times ۰ + ۰/۵ \times ۴۰)$$

حالا تک‌تک حرکات حالت‌ها را تشخیص می‌دهیم.

بازیکن اول، حرکت k و پاداش ۲۰۰ را انتخاب می‌کند.

بازیکن سوم، حرکت I و پاداش ۱۵۰ را انتخاب می‌کند.

همچنین در یک جای دیگر، بازیکن سوم حرکت E را بین E و F انتخاب می‌کند.

همچنین بازیکن دوم بین حرکات G و H ، حرکت G را انتخاب می‌کند.

حالا در ادامه و در راسی که C به آن وصل می‌شود از پایین، باید احتمال‌ها را به عدد صحیح تبدیل کنیم و امید ریاضی پاداش‌های این راس بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{۳} \times ۵۰ + \frac{۲}{۳} \times ۲۰۰, \frac{۱}{۳} \times ۲۰ + \frac{۲}{۳} \times ۵۰, \frac{۱}{۳} \times ۱۵۰ + \frac{۲}{۳} \times ۰$$

$$= (۱۵۰, ۴۰, ۵۰)$$

در نتیجه بازیکن دوم بین حرکات C و D ، حرکت D را انتخاب می‌کند.

در ادامه و در راسی که B به آن وصل می‌شود از پایین، باید احتمال‌ها را به عدد صحیح تبدیل کنیم و امید ریاضی پاداش‌های این راس بدست می‌آید:

$$۰ + \frac{۱}{۱۰} \times ۱۰۰۰, ۰ + \frac{۱}{۱۰} \times ۱۵۰۰, ۰ + \frac{۱}{۱۰} \times ۵۰۰$$

$$= (۱۰۰, ۱۵۰, ۵۰)$$

در نتیجه بازیکن اول بین حرکات A و B ، حرکت A را انتخاب می‌کند.

پس تعادل نش این بازی به کمک استقرای بازگشتی می‌شود:

$$۱A۲D۳E$$

در واقع نیز استراتژی هر بازیکن بدین شکل است که بازیکن اول، A و K را انتخاب می‌کند، بازیکن دوم، D و G را انتخاب می‌کند و بازیکن سوم نیز I و E را انتخاب می‌کند.

سوال ۲. در این سوال و با توجه به این‌که بازی بی‌نهایت دور تکرار می‌شود، برای پیدا کردن تعادل نش، به بهترین جواب‌ها مراجعه می‌کنیم.

حالا داریم که بازیکن سمت چپ هیچ‌گاه A بازی نمی‌کند چون هر دو مقدار پاداش وی از حالت بازی B کمتر است و همچنین بازیکن سمت راست هیچ‌گاه B بازی نمی‌کند چون هر دو مقدار پاداش وی از حالت بازی A کمتر است.

در نتیجه نقاط (A,A) و (B,B) هیچ‌گاه تعادل نش نخواهند بود.

حالا چون بازی تکرارشونده است، پس افراد می‌توانند با توافق، سود بیشتری داشته باشند.

پس برای مثال می‌توانند توافق کنند که هر دو دور در کل ۵ تا سود ببرند و در واقع هر دور یکی ۵ سود ببرد و یکی ۰ و در نتیجه نسبت به حالت تعادل نش غیرتکرارشونده، سود بیشتری خواهند داشت.

اما با توجه به این‌که discount در این‌جا مطرح است، اگر نرخ تخفیف کم باشد، مشخص نیست که همچین تصمیمی در آینده بگیریم و ممکن است تصمیم ما تغییر کند و در واقع همیشه این تصمیم درست است در صورتی که همین میزان پاداش را همواره داشته باشیم و در بلند مدت تغییری نداشته باشیم در این میزان از پاداش و نباید در این یک دور در میان، نرخ تحفیف باعث ضرر ما شود.

در نتیجه در صورتی که نرخ تخفیف بالا و نزدیک به ۱ باشد، حالت ایده‌آل سوال رخ می‌دهد.

اما برای بدست آوردن مقدار دقیق تخفیف، باید سیاست جریمه‌ی grim را بررسی کنیم چون اگر جواب برای این سیاست درست باشد، برای دیگر سیاست‌ها درست است قطعا.

سیاست grim یک استراتژی برای بازی‌های تکرارشونده است که در آن بازیکن در ابتدا همکاری می‌کند و همکاری را ادامه می‌دهد تا زمانی که بازیکن دیگر خیانت کند. در این نقطه، بازیکن grim هرگز دوباره همکاری نمی‌کند.

با نوشتن میزان payoff های بازیکنان و مقایسه‌ی آن‌ها با توجه به δ که میزان discount است، بدست می‌آوریم:

$$۵\frac{\delta^{۲k-۱}}{۱-\delta^{۲}} \geq \frac{\delta^{۲k}}{۱-\delta}$$

$$\rightarrow \delta \geq \frac{۱}{۴}$$

سوال ۳.

الف

در این‌حا مشابه با سوال ۱ پیش می‌رویم:

در ابتدا بازیکن ۲ بین شاخه‌های C و D به خاطر ۵ > ۰ شاخه‌ی C را انتخاب می‌کند.

و در سمت راست نیز بین شاخه‌های E و F به خاطر ۲ > ۰ شاخه‌ی F را انتخاب می‌کند.

حالا بازیکن ۱ بین A و B انتخاب دارد و اگر x از ۲ بزرگ‌تر باشد، B را انتخاب می‌کند و اگر x از ۲ کوچک‌تر باشد، A را انتخاب می‌کند.

اگر x برابر با ۲ باشد نیز فرقی ندارد و تمایزی قائل نمی‌شود.

ب

در این بخش درخت تصمیم را به جدول تبدیل می‌کنیم.
جدول انتخاب‌های بازیکن‌های اول و دوم بدین شکل است:

$none$	DF	DE	CF	CE
A	۱, ۰	۱, ۰	۲, ۵	۲, ۵
B	x, ۲	۱, ۰	x, ۲	۱, ۰

حالا با فرض ۳ $= x$ تعادل نش با استراتژی ترکیبی را بدست می‌آوریم.

	DF	DE	CF	CE	
A	۱, ۰	۱, ۰	۲, ۵	۲, ۵	p
B	۳, ۲	۱, ۰	۳, ۲	۱, ۰	$1-p$
	$1-a-b$		b	a	

با توجه به این‌که ستون DE اکیدا مغلوب است، یک بار بدون حذف استراتژی‌های مغلوب ضعیف و یک بار با حذف استراتژی‌های مغلوب ضعیف، تعادل ترکیبی را پیدا می‌کنیم.
بدون حذف استراتژی‌های مغلوب ضعیف:

$$U_A = U_B \rightarrow 2a + 2b + (1 - a - b) = a + 3b + 3(1 - a - b)$$

$$\rightarrow 3a + b = 4$$

$$\rightarrow 0 \leq a, b \leq 1 \rightarrow 3a + b \leq 4$$

$$\rightarrow a = b = 1 \rightarrow we \ \ know \ \ that \ \ 0 \leq 1 - a - b \leq 1$$

$$\rightarrow False$$

بدون حذف استراتژی‌های مغلوب ضعیف:
در این‌جا CE را حذف می‌کنیم چون نسبت به CF مغلوب ضعیف است.

	CF	DF
A	۲, ۵	۱, ۰
B	۳, ۲	۳, ۲

همچنین A نسبت به B اکیدا مغلوب است و آن را نیز حذف می‌کنیم.

	CF	DF
B	۳, ۲	۳, ۲

نهایتا می‌توانیم یکی را حذف کنیم یا استراتژی یکسان در نظر بگیریم.

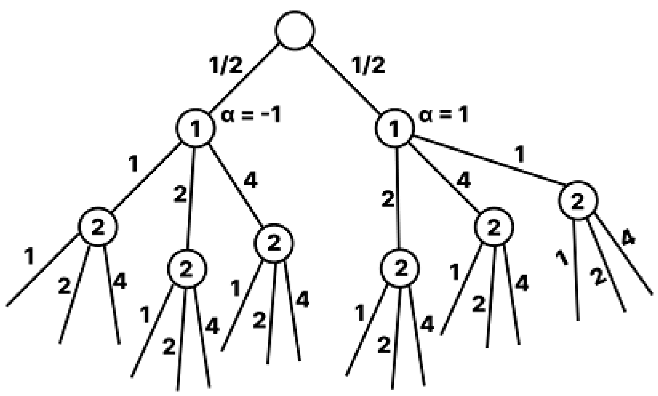
سوال ۴.

الف

در این درخت، راس اول نمایانگر انتخاب اولیه عدد α است که می‌تواند یا ۱ یا ـ۱ باشد.

سپس بازیکن اول (بازیکن x) می‌تواند از میان ۱ ، ۲ یا ۴ انتخاب کند.

بعد از انتخاب بازیکن اول، بازیکن دوم (بازیکن y) همچنین می‌تواند از میان ۱ ، ۲ یا ۴ انتخاب کند.



راس‌های شامل عدد ۲ اطلاعات یکسان دارند.

ب

برای یافتن استراتژی بهینه، باید با توجه به تابع سودی هر بازیکن به تحلیل بازی بپردازیم. این یک بازی صفر جمعی است، به این معنی که سود یک بازیکن به اندازه‌ی زیان بازیکن دیگر است. تابع سودی بازیکنان به شکل زیر است:

$$u_۱ = axy, u_۲ = -axy$$

هدف بازیکن اول افزایش $u_۱$ و هدف بازیکن دوم کاهش $u_۱$ (یا به عبارت دیگر، افزایش $u_۲$) است.

با توجه به اینکه بازیکنان هر دو می‌توانند از بین اعداد ۱ ، ۲ ، و ۴ انتخاب کنند و مقدار a می‌تواند ۱ یا ۱ـ باشد، انتخاب بهینه برای هر دو بازیکن به شکل زیر است:

بازیکن اول (x) : با توجه به اینکه می‌خواهد $u_۱$ را افزایش دهد، باید x را برابر بزرگ‌ترین مقدار ممکن، یعنی ۴، قرار دهد.

بازیکن دوم (y) : با توجه به اینکه می‌خواهد $u_۱$ را کاهش دهد (یا $u_۲$ را افزایش دهد)، باید y را برابر کوچک‌ترین مقدار ممکن، یعنی ۱ ، قرار دهد.

بنابراین، استراتژی بهینه برای بازیکن اول $x = ۴$ در صورتی که $\alpha = ۱$ و در غیر این صورت ۱ را بازی می‌کند، و برای بازیکن دوم $y = ۱$ است.

همچنین لازم به ذکر است که در این تحلیل فرض کردیم که بازیکنان بهینه عمل می‌کنند و از اطلاعات موجود بهترین استفاده را می‌برند. در واقعیت، بازیکنان ممکن است به دلایل مختلف از این استراتژی‌های بهینه منحرف شوند.

سوال ۵.

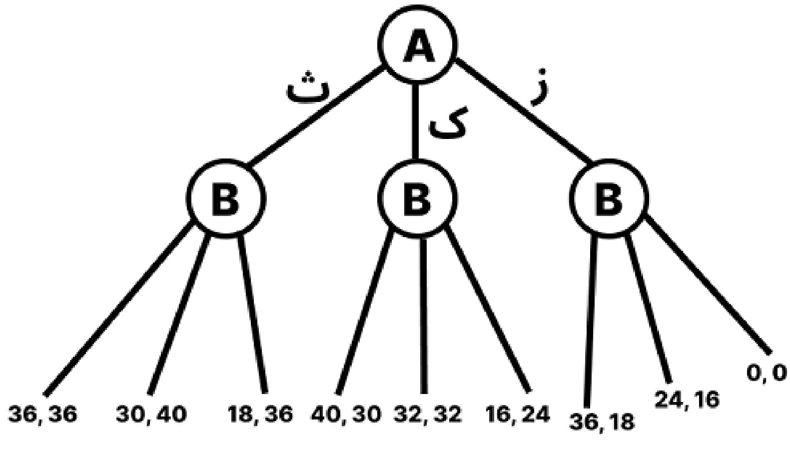
آ و پ

فرم درختی یک روش مدل‌سازی است که برای بازی‌های با توالی زمانی مشخص و تصمیم‌های چندگانه استفاده می‌شود. در این روش، بازی به صورت یک درخت تصمیم‌گیری مدل‌سازی می‌شود. هر گره درخت نماینده یک وضعیت خاص از بازی است و هر یال به یک تصمیم انجام شده و یا عملیاتی که اجرا می‌شود متصل می‌شود. درخت پیمایش می‌شود تا به وضعیت نهایی بازی برسد و نتایج و پاداش‌های متناسب با هر حالت و تصمیم درخت در نظر گرفته می‌شوند. فرم درختی به ما اجازه می‌دهد تا تصمیمات و تأثیرات آن‌ها را به صورت سلسله مراتبی مدل‌سازی کنیم.

از طرفی، فرم نرمال یک روش مدل‌سازی است که برای بازی‌های با توالی زمانی نامعلوم یا همزمان استفاده می‌شود. در این روش، بازی به صورت یک جدول ساده یا نمودار مدل‌سازی می‌شود. در هر سطر از جدول، تمام بازیکنان تصمیمات خود را به صورت همزمان اعمال می‌کنند. هر بازیکن در ستونی از جدول قرار می‌گیرد و نتیجه هر حالت به طور مجزا در نظر گرفته می‌شود. فرم نرمال به ما اجازه می‌دهد تا تعامل‌های همزمان و ناسازگار را در بازی مدل‌سازی کنیم.

ابتدا می‌دانیم که حالت‌های آ و پ یکسان هستند وقتی همزمان تصمیم می‌گیرند A و B ، عملا مانند زمانی‌ست که فرض می‌کنیم انتخاب‌های همدیگر را نمی‌دانند.

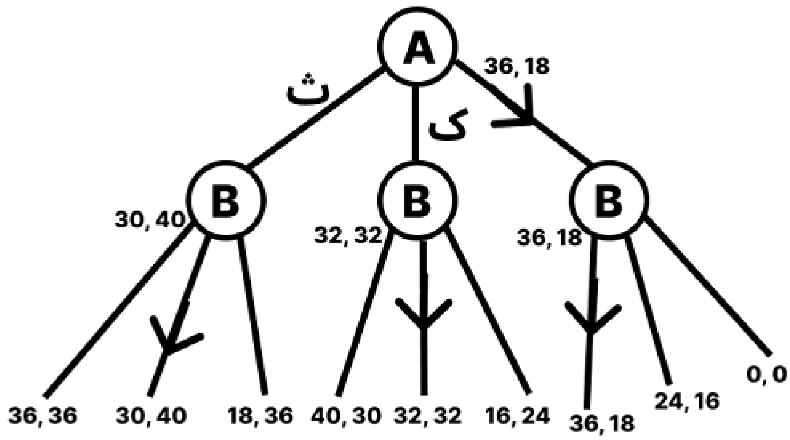
استراتژی ز اکیدا مغلوب است و با توجه به بهترین انتخاب‌ها می‌بینیم که سپس ک انتخاب می‌شود در هر دو سمت پس داریم که تعادل زیربازی کامل، (ک و ک) است.



	S	K	Z
S	۳۶, ۳۶	۳۰, ۴۰	۱۸, ۳۶
K	۴۰, ۳۰	۳۲, ۳۲	۱۶, ۲۴
Z	۳۶, ۱۸	۲۴, ۱۶	۰, ۰

ب

انتخاب‌های A و B مشخص شده است و تعادل زیربازی کامل، (ز و ث) است.



سوال ۶.

الف

X : ۴ رأی از گروه A

Y : ۲ رأی از گروه C

Z : ۳ رأی از گروه B

بنابراین در مرحله اول، گزینه Y با کمترین رأی (۲ رأی) حذف می‌شود.

حالا در مرحله دوم، فقط دو گزینه X و Z باقی مانده‌اند. باید دوباره تعداد رأی‌ها را بشماریم با توجه به اینکه گزینه Y حذف شده است.

گروه A هنوز X را به Z ترجیح می‌دهد و ۴ رأی به X می‌دهد.

گروه B هنوز Z را به X ترجیح می‌دهد و ۳ رأی به Z می‌دهد.

گروه C حالا بر اساس اولویت دوم، Z را به X ترجیح می‌دهد و ۲ رأی به Z می‌دهد.

با توجه به اینکه گروه A چهار نفره است و نمی‌تواند در مرحله اول رای گیری با اکثریت رای برنده شود، باید استراتژی خود را تغییر دهد تا در مرحله دوم انتخاب مورد نظر خود را کسب کند.

گروه A می‌داند که اگر در مرحله اول گزینه X را انتخاب کند، با توجه به اینکه گروه B و C با هم ۵ رای دارند و در مرحله دوم به گزینه Z رای می‌دهند، گزینه X حذف خواهد شد. پس گروه A برای جلوگیری از حذف گزینه X باید در مرحله اول به گزینه Y رای دهد تا گزینه Z حذف شود.

بنابراین، گروه A باید در مرحله اول به گزینه Y رای دهد. در این صورت، تعداد رای‌ها به شرح زیر خواهد بود:

X : ۰ رأی

Y : ۴ رأی از گروه A و ۲ رأی از گروه C. مجموعاً ۶ رأی

Z : ۳ رأی از گروه B

در نتیجه، گزینه X با کمترین رأی حذف می‌شود. در مرحله دوم، با حذف گزینه X، گروه A می‌تواند به گزینه مورد علاقه خود یعنی Y رای دهد و این باعث می‌شود گزینه Y با ۶ رأی برنده شود. پس گروه A برای اینکه گزینه مورد علاقه‌ی خود را در مرحله دوم انتخاب کند، باید در مرحله اول به گزینه Y رای دهد.

در نهایت، X چهار رأی و Z پنج رأی خواهد داشت. پس گزینه نهایی که انتخاب می‌شود، Z یعنی « عدم تغییر مدیرعامل و افزایش حقوق او » است.

سوال ۷.

الف

در این بازی دو بازیکن داریم و هر بازیکن دو انتخاب دارد، که به ترتیب با حروف C و D نشان داده شده‌اند. بازده‌های بازیکنان در هر وضعیت بازی، زوج اعدادی است که در خانه‌های جدول آمده‌اند.

تعادل نش یکی از مفاهیم مهم در نظریه بازی‌ها است و به موقعیتی اشاره می‌کند که هیچ یک از بازیکنان سودی در تغییر استراتژی خود ندارند، به شرطی که بازیکنان دیگر استراتژی خود را تغییر ندهند.

برای یافتن تعادل نش در این بازی، باید به ترتیب بهره‌وری هر استراتژی را برای هر بازیکن در نظر گرفت:

اگر بازیکن اول C را انتخاب کند، بازیکن دوم برای حداکثر سود، استراتژی D را انتخاب می‌کند (زیرا $۴ < ۶$).

اگر بازیکن اول D را انتخاب کند، بازیکن دوم دوباره برای حداکثر سود، استراتژی D را انتخاب می‌کند (زیرا $۰ < ۱$).

پس بازیکن دوم همیشه استراتژی D را انتخاب می‌کند.

حالا اگر بازیکن دوم D را انتخاب کند، بازیکن اول برای حداکثر سود، استراتژی D را انتخاب می‌کند (زیرا $۰ < ۶$).
پس تنها تعادل نش این بازی، وقتی هر دو بازیکن استراتژی D را انتخاب می‌کنند، رخ می‌دهد.

ب

استراتژی توضیح داده شده، یک نوع از استراتژی‌های متقابل تکرار (Tit-for-Tat) است و در بازی‌های تکرارشونده بسیار متداول است. در این استراتژی، هر دو بازیکن در ابتدا با هم همکاری می‌کنند و اگر یک بازیکن تخلف کند، بازیکن دیگر هم برای مدتی تعیین شده از همکاری منصرف می‌شود.

در اینجا، ما می‌خواهیم ببینیم چه مقدار n باعث می‌شود تا این استراتژی تعادل نش زیربازی کامل داشته باشد. برای اینکه این استراتژی تعادل باشد، بازیکنان نباید سودی در تخلف کردن از استراتژی داشته باشند.

اگر یک بازیکن در یک دور C را انتخاب کند، اما سپس تخلف کند و D را انتخاب کند، او در آن دور ۶ واحد بهره می‌برد در مقایسه با ۴ واحد که اگر C را انتخاب کرده بود می‌گرفت. اما سپس او برای n دور بعدی باید ۱ واحد بهره بگیرد به جای ۴ واحد که اگر همچنان در استراتژی مانده بود می‌گرفت.

به طور خلاصه، برای اینکه این استراتژی تعادل باشد، باید داشت:

$$-۲ + ۳\delta + ... + ۳\delta^n \geq ۰ \rightarrow n \geq ۲$$

موفق باشید.