پاییز ۱۴۰۲ **تمرین ۲**

ایمان محمدی (۹۹۱۰۲۲۰۷) **زمان آپلود: ۱۲ دی**

سوال ۱

برای هر کدام از موارد زیر، توزیع احتمالاتی مناسب آن را نامیده و علت انتخاب خود را شرح دهید.

الف) سرعت ماشین ها در اتوبان

ب) درآمد یک سوپرمارکت در یک ماه

ج) زمان طول کشیده برای نوشتن یک تمرین

د) نقطه برخورد در بازی دارت

جواب سوال ۱

الف) **سرعت ماشین‌ها در اتوبان:** توزیع نرمال (گاوسی) می‌تواند مناسب باشد. بسیاری از ماشین‌ها با سرعت‌هایی نزدیک به میانگین سرعت مجاز حرکت می‌کنند، با این حال، برخی از رانندگان ممکن است کمی سریع‌تر یا کمی آهسته‌تر حرکت کنند. توزیع نرمال به خوبی این واقعیت را که اکثر داده‌ها حول میانگین تجمع می‌یابند و داده‌های دور از میانگین نادر هستند، منعکس می‌کند.

ب) **درآمد یک سوپرمارکت در یک ماه:** درآمد یک سوپرمارکت در یک ماه: توزیع لگاریتمی نرمال ممکن است گزینه مناسبی باشد. درآمدها اغلب توزیعی نامتقارن دارند که در آن مقادیر بزرگ‌تر (درآمدهای بالاتر) کمتر اتفاق می‌افتند. توزیع لگاریتمی نرمال این ویژگی را نشان می‌دهد، جایی که داده‌ها پس از لگاریتم گرفتن، توزیع نرمال‌تری را نشان می‌دهند.

ج) **زمان طول کشیده برای نوشتن یک تمرین:** توزیع اگزپوننشیال می‌تواند مناسب باشد، زیرا این توزیع برای مدل‌سازی زمان انتظار یا زمان تا رخداد یک رویداد منفرد استفاده می‌شود. در این مورد، زمان لازم برای اتمام تمرین می‌تواند به عنوان یک ”زمان انتظار“ برای تکمیل کار در نظر گرفته شود.

د) **نقطه برخورد در بازی دارت:** توزیع دایره‌ای یا توزیع یکنواخت بر روی دایره می‌تواند مناسب باشد. اگر فرض کنیم که هدف‌گیری‌ها تصادفی و یکنواخت بر روی سطح هدف صورت می‌گیرد، پس توزیع یکنواخت یک گزینه مناسب است. این توزیع نشان می‌دهد که هر نقطه بر روی هدف به طور یکسان احتمال دارد.

سوال ۲

سوال: روشی را برای تولید واریته تصادفی برای متغیر X با تابع چگالی احتمال (pdf) زیر پیدا کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x^{a-۱} & \text{if} x \leq ۱ \\ \lambda^{-\lambda x} & \text{otherwise} \end{cases}$$

جواب سوال ۲

برای تولید یک متغیر تصادفی X بر اساس تابع چگالی احتمال داده شده، ابتدا تابع توزیع تجمعی (CDF) را برای هر بخش از $f(x)$ محاسبه می‌کنیم.

برای $x \leq ۱$:

$$f(x) = x^{a-۱}$$
$$F(x) = \int_{۰}^{x} t^{a-۱} dt = \frac{x^a}{a}$$

برای $x > ۱$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
$$F(x) = \frac{۱}{a} + \int_{۱}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{۱}{a} + (۱ - e^{-\lambda(x-۱)})$$

تولید متغیر تصادفی X:

برای تولید متغیر تصادفی X ، یک عدد تصادفی u را از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ تولید می‌کنیم. سپس بر اساس مقدار u ، از یکی از فرمول‌های تبدیل معکوس استفاده می‌کنیم:

الف) تولید یک عدد تصادفی u از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱.

ب) اگر $u \leq \frac{۱}{a}$:

$$x = (au)^{\frac{۱}{a}}$$

ج) در غیر این صورت:

$$x = ۱ - \frac{۱}{\lambda} \ln\left(۱ - (u - \frac{۱}{a})\right)$$

سوال ۳

جواب سوال ۳

سوال ۴

داده‌های جدول زیر، نمونه‌های جمع‌آوری شده از مدت زمان سرویس در یک سیستم صف هستند. با کمک این داده‌ها، یک جدول برای تولید زمان‌های سرویس دهی ایجاد کنید (مشابه اسلاید ۱۶ از فصل ۷) و برای ۵ عدد تصادفی R_i زمان سرویس متناظر را تعیین کنید. برای تولید R_i می‌توانید از روشی دلخواه استفاده کنید.

Frequency	(seconds) Interval
۱۰	۳۰-۱۵
۲۰	۴۵-۳۰
۲۵	۶۰-۴۵
۳۵	۹۰-۶۰
۳۰	۱۲۰-۹۰
۲۰	۱۸۰-۱۲۰
۱۰	۳۰۰-۱۸۰

جواب سوال ۴

جدول تولید زمان‌های سرویس دهی بر اساس داده‌های جدول موجود:

Distribution Cumulative	Frequency Relative	Frequency	(seconds) Interval
۰۶۷.۰	۰۶۷.۰	۱۰	۳۰-۱۵
۲۰۰.۰	۱۳۳.۰	۲۰	۴۵-۳۰
۳۶۷.۰	۱۶۷.۰	۲۵	۶۰-۴۵
۶۰۰.۰	۲۳۳.۰	۳۵	۹۰-۶۰
۸۰۰.۰	۲۰۰.۰	۳۰	۱۲۰-۹۰
۹۳۳.۰	۱۳۳.۰	۲۰	۱۸۰-۱۲۰
۰۰۰.۱	۰۶۷.۰	۱۰	۳۰۰-۱۸۰

برای پنج عدد تصادفی R_i تولید شده، بازه‌های زمانی متناظر به شرح زیر هستند:

- $R_۱ = ۰/۶۹۳$: بازه زمانی "۹۰-۱۲۰"
- $R_۲ = ۰/۳۷۶$: بازه زمانی "۶۰-۹۰"
- $R_۳ = ۰/۳۸۰$: بازه زمانی "۶۰-۹۰"
- $R_۴ = ۰/۷۰۶$: بازه زمانی "۹۰-۱۲۰"
- $R_۵ = ۰/۵۱۶$: بازه زمانی "۶۰-۹۰"

سوال ۵

جواب سوال ۵

سوال ۶

جواب سوال ۶