پاییز ۱۴۰۲ **تمرین ۲**

ایمان محمدی (۹۹۱۰۲۲۰۷) **زمان آپلود: ۱۹ آذر**

سوال ۱

جواب سوال ۱

برای حل این مسئله، ما با دو فرایند پواسون مواجه هستیم که به ترتیب با نرخ‌های λ_b و λ_s برای نان‌های بربری و سنگک مشخص می‌شوند. ما می‌خواهیم متوسط زمان $\mathbb{E}[T]$ برای تولید اولین نان در هر دو سناریو را محاسبه کنیم.

$T_۱$ (زمان تولید اولین نان): در این حالت، ما به دنبال زمان برای تولید اولین نان هستیم، فارغ از اینکه آن نان بربری است یا سنگک. این مسئله به محاسبه اولین وقوع در هر دو فرایند پواسون مربوط می‌شود.

$T_۲$ (زمان تولید حداقل یک نان بربری و یک نان سنگک): در این حالت، ما به دنبال زمانی هستیم که در آن حداقل یک نان از هر نوع تولید شده باشد.

برای محاسبه $\mathbb{E}[T_۱]$ و $\mathbb{E}[T_۲]$، ما از خواص فرایندهای پواسون استفاده خواهیم کرد. بیایید این محاسبات را انجام دهیم.

برای محاسبه متوسط زمان تولید اولین نان در هر دو سناریو:

$\mathbb{E}[T_۱]$ (زمان برای تولید اولین نان، بدون توجه به نوع آن): متوسط زمان تولید اولین نان، خواه بربری یا سنگک، برابر است با $\frac{۱}{\lambda_b+\lambda_s}$. این به دلیل آن است که میزان وقوع رویداد در هر دو فرایند پواسون را می‌توان به صورت ترکیبی در نظر گرفت.

$\mathbb{E}[T_۲]$ (زمان برای تولید حداقل یک نان بربری و یک نان سنگک): متوسط زمان لازم برای تولید حداقل یک نان از هر نوع برابر است با $\frac{\lambda_s}{\lambda_b(\lambda_b+\lambda_s)}$، به شرطی که نرخ‌های λ_b و λ_s مثبت و متمایز باشند. این فرمول بر اساس خصوصیات توزیع‌های نمایی مستقل که مربوط به زمان‌های انتظار برای هر فرایند پواسون هستند، به دست می‌آید.

با فرض اینکه نرخ‌های تولید نان بربری و سنگک به ترتیب $\lambda_b = ۲$ و $\lambda_s = ۳$ باشند، محاسبات به شرح زیر است:

۱. $\mathbb{E}[T_۱] = \frac{۱}{\lambda_b+\lambda_s} = \frac{۱}{۲+۳} = ۰/۲$ واحد زمانی.

۲. $\mathbb{E}[T_۲] = \frac{\lambda_s}{\lambda_b(\lambda_b+\lambda_s)} = \frac{۳}{۲\times(۲+۳)} = ۰/۳$ واحد زمانی.

سوال ۲

جواب سوال ۲

برای متغیر تصادفی X (تاس چهار وجهی):

- امید ریاضی X: $E[X] = \frac{۱+۲+۳+۴}{۴} = ۲/۵$

- واریانس X: $Var[X] = E[X^۲] - (E[X])^۲ = ۷/۵ - (۲/۵)^۲ = ۱/۲۵$

برای متغیر تصادفی Y (تاس شش وجهی):

- امید ریاضی Y: $E[Y] = \frac{۱+۲+۳+۴+۵+۶}{۶} = ۳/۵$
- واریانس Y: $Var[Y] = E[Y^۲] - (E[Y])^۲ = \frac{۹۱}{۶} - (۳/۵)^۲ = ۲/۹۱۶۷$

برای متغیر تصادفی Z (میانگین X و Y):

- امید ریاضی Z: $E[Z] = \frac{E[X]+E[Y]}{۲} = ۳$
- واریانس Z: $Var[Z] = \frac{Var[X]+Var[Y]}{۴} = ۱/۰۴۱۷$

ب) امید ریاضی سود شما پس از ۶۰ دست پرتاب دو تاس:

فرض کنید در هر پرتاب دو تاس، اگر عدد نمایش داده شده روی تاس چهار وجهی (X) بیشتر از عدد نمایش داده شده روی تاس شش وجهی (Y) باشد، شما $X \times ۲$ دلار برنده می‌شوید. در غیر این صورت، شما ۱ دلار می‌بازید. محاسبه امید ریاضی سود شما برای یک پرتاب و سپس برای ۶۰ پرتاب به شرح زیر است:

- محاسبه امید ریاضی سود برای $X > Y$:
  - احتمال $X > Y$ برابر است با تعداد حالاتی که X بزرگتر از Y است تقسیم بر تعداد کل حالات.
  - در هر حالت که $X > Y$، سود $X \times ۲$ دلار است.
- محاسبه امید ریاضی زیان برای $X \leq Y$:
  - احتمال $X \leq Y$ برابر است با تعداد حالاتی که X کمتر یا مساوی Y است تقسیم بر تعداد کل حالات.
  - در هر حالت که $X \leq Y$، زیان ۱ دلار است.
- امید ریاضی سود برای یک پرتاب دو تاس: تقریباً ۰/۹۱۷ دلار.
- امید ریاضی کلی سود برای ۶۰ پرتاب: تقریباً ۵۵ دلار.

سوال ۳

جواب سوال ۳

الف) نشان دهید:

$$\sum_{j=۱}^{\infty}(a_۱ + a_۲ + \ldots + a_j)P(N=j) = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i P(N \geq i)$$

برای این بخش، از خاصیت انتظار متغیر تصادفی گسسته استفاده می‌کنیم. مجموع داخل پرانتز را به صورت تجمعی نویسیم و با تغییر ترتیب جمع‌زنی، این را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$= \sum_{i=۱}^{\infty} a_i \sum_{j=i}^{\infty} P(N=j) = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i P(N \geq i)$$

ب) ثابت کنید:

$$E[N] = \sum_{j=1}^{\infty} P(N \geq j)$$

این یک نتیجه مستقیم از تعریف امید ریاضی است. امید ریاضی $E[N]$ برابر است با مجموع تمام احتمالات که در آن N بزرگتر یا مساوی هر عدد طبیعی j است.

ج) ثابت کنید:

$$E[N(N+1)] = 2\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(N \geq j)$$

برای این بخش، ما ابتدا $N(N+1)$ را به صورت $N^2 + N$ بیان می‌کنیم و سپس از خاصیت امید ریاضی استفاده می‌کنیم. امید ریاضی $E[N(N+1)]$ را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از احتمالات که در آن N بزرگتر یا مساوی هر عدد طبیعی j است، بیان کرد.

سوال ۴

جواب سوال ۴

سوال ۵

جواب سوال ۵

سوال ۶

سوال عملی تمرین ۲ ، کد شبیه‌سازی...

جواب سوال ۶