

سوال ۱

برای هر کدام از موارد زیر، توزیع احتمالاتی مناسب آن را نامیده و علت انتخاب خود را شرح دهید.

- الف) سرعت ماشین‌ها در اتوبان
- ب) درآمد یک سوپرمارکت در یک ماه
- ج) زمان طول کشیده برای نوشتن یک تمرین
- د) نقطه برخورد در بازی دарт

جواب سوال ۱

الف) **سرعت ماشین‌ها در اتوبان:** توزیع نرمال (گوسی) می‌تواند مناسب باشد. بسیاری از ماشین‌ها با سرعت‌هایی نزدیک به میانگین سرعت مجاز حرکت می‌کنند، با این حال، برخی از رانندگان ممکن است کمی سریع‌تر یا کمی آهسته‌تر حرکت کنند. توزیع نرمال به خوبی این واقعیت را که اکثر داده‌ها حول میانگین تجمع می‌یابند و داده‌های دور از میانگین نادر هستند، منعکس می‌کند.

ب) **درآمد یک سوپرمارکت در یک ماه:** درآمد یک سوپرمارکت در یک ماه: توزیع لگاریتمی نرمال ممکن است گزینه مناسبی باشد. درآمدها اغلب توزیعی نامتقارن دارند که در آن مقادیر بزرگ‌تر (درآمدهای بالاتر) کمتر اتفاق می‌افتند. توزیع لگاریتمی نرمال این ویژگی را نشان می‌دهد، جایی که داده‌ها پس از لگاریتم گرفتن، توزیع نرمال‌تری را نشان می‌دهند.

ج) **زمان طول کشیده برای نوشتن یک تمرین:** توزیع اگزیپوننشیل می‌تواند مناسب باشد، زیرا این توزیع برای مدل‌سازی زمان انتظار یا زمان تا رخداد یک رویداد منفرد استفاده می‌شود. در این مورد، زمان لازم برای اتمام تمرین می‌تواند به عنوان یک "زمان انتظار" برای تکمیل کار در نظر گرفته شود.

د) **نقطه برخورد در بازی دارت:** توزیع دایره‌ای یا توزیع یکنواخت بر روی دایره می‌تواند مناسب باشد. اگر فرض کنیم که هدف‌گیری‌ها تصادفی و یکنواخت بر روی سطح هدف صورت می‌گیرد، پس توزیع یکنواخت یک گزینه مناسب است. این توزیع نشان می‌دهد که هر نقطه بر روی هدف به طور یکسان احتمال دارد.

سوال ۲

سوال: روشی را برای تولید واریته تصادفی برای متغیر X با تابع چگالی احتمال (pdf) زیر پیدا کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x^{a-1} & \text{if } x \leq 1 \\ \lambda^{-\lambda x} & \text{otherwise} \end{cases}$$

جواب سوال ۲

برای تولید یک متغیر تصادفی X بر اساس تابع چگالی احتمال داده شده، ابتدا تابع توزیع تجمعی (CDF) را برای هر بخش از $f(x)$ محاسبه می‌کنیم.

برای $x \leq 1$:

$$f(x) = x^{a-1}$$
$$F(x) = \int_0^x t^{a-1} dt = \frac{x^a}{a}$$

برای $x > 1$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
$$F(x) = \frac{1}{a} + \int_1^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{a} + (1 - e^{-\lambda(x-1)})$$

تولید متغیر تصادفی X :

برای تولید متغیر تصادفی X ، یک عدد تصادفی u را از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ تولید می‌کنیم. سپس بر اساس مقدار u ، از یکی از فرمول‌های تبدیل معکوس استفاده می‌کنیم:

الف) تولید یک عدد تصادفی u از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱.

ب) اگر $u \leq \frac{1}{a}$:

$$x = (au)^{\frac{1}{a}}$$

ج) در غیر این صورت:

$$x = 1 - \frac{1}{\lambda} \ln\left(1 - \left(u - \frac{1}{a}\right)\right)$$

سوال ۳

جواب سوال ۳

سوال ۴

جواب سوال ۴

سوال ۵

پس از راه اندازی آزادراه تهران-شمال، وزارت راه و شهرسازی قصد دارد بین استفاده از باجه‌ی اتوماتیک و یا باجه‌ی سنتی برای دریافت عوارضی یکی را انتخاب کند. هزینه‌ی باجه‌ی اتوماتیک دو برابر باجه‌های سنتی است و بودجه این وزارتخانه برای این پروژه برابر هزینه‌ی یک باجه‌ی اتوماتیک است. بنابراین می‌تواند یا یک باجه‌ی اتوماتیک و یا دو باجه‌ی سنتی قرار دهد. همچنین فرض کنید خودروها را با یک فرآیند پواسون با نرخ ۱۰۰۰ نفر در ساعت مدل کنیم که به عوارضی یک شهر می‌رسند و در یک صف طولانی قرار می‌گیرند. با توجه به زمان انتظار مورد انتظار، کدام انتخاب برای وزارت راه و شهرسازی بهتر است؟

الف) این صف توسط یک باجه‌ی خودکار با نرخ ۱۲۰۰ نفر در ساعت خدمت رسانی می‌شود. همچنین فرض کنید که زمان‌های سرویس‌دهی از توزیع نمایی پیروی کنند و استراتژی سرویس‌دهی FIFO است. پیدا کنید زمان انتظار مورد انتظار در حالت پایدار (Steady-state expected waiting time).

ب) صف توسط دو باجه‌ی سنتی با نرخ سرویس دهی ۶۰۰ نفر در ساعت سرویس‌دهی شود. مشابه قسمت قبل فرض کنید که زمان‌های سرویس‌دهی از توزیع نمایی پیروی کنند و استراتژی سرویس‌دهی FIFO است و پیدا کنید زمان انتظار مورد انتظار در حالت پایدار (Steady-state expected waiting time).

جواب سوال ۵

برای محاسبه زمان انتظار مورد انتظار در هر دو سناریو، از فرمول‌های مربوط به سیستم‌های صف $M/M/1$ و $M/M/2$ استفاده می‌کنیم.

الف) برای یک باجه اتوماتیک با نرخ خدمت دهی ۱۲۰۰ نفر در ساعت، نرخ استفاده ρ برابر است با $\frac{1}{12}$. زمان انتظار مورد انتظار در حالت پایدار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1200 - 1000} = 0.005 \text{ ساعت (یا ۱۸ ثانیه)}$$

ب) برای دو باجه سنتی با نرخ خدمت دهی ۶۰۰ نفر در ساعت برای هر باجه، نرخ استفاده ρ برابر است با $\frac{1}{6}$. زمان انتظار مورد انتظار در حالت پایدار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W = \frac{1}{2 \times \mu - \lambda} = \frac{1}{2 \times 600 - 1000} = 0.005 \text{ ساعت (یا ۱۸ ثانیه)}$$

بنابراین، از نظر زمان انتظار، هیچ تفاوت قابل توجهی بین این دو گزینه وجود ندارد. انتخاب بین این دو گزینه باید بر اساس عوامل دیگری مانند هزینه، راحتی استفاده و غیره انجام شود.

سوال ۶

در این بخش قصد پیاده سازی الگوریتم های تولید اعداد شبه تصادفی و روش های تست آنها را داریم.

بخش اول: پیاده سازی الگوریتم های تولید اعداد شبه تصادفی:

- در ابتدا یک تابع تولید عدد با الگوریتم CLCG را پیاده کنید و بعد با استفاده از این تابع، الگوریتم LCM را به صورت یک تابع پیاده کنید. در انتخاب پارامتر های الگوریتم ها آزاد هستید.
- در آخر، به عنوان یک روش متفاوت دیگر تولید اعداد شبه تصادفی، الگوریتم xor-shift را مشابه بخش قبلی، پیاده کنید. (همچنین در مستند تمرین این بخش، توضیحی در مورد این الگوریتم ارائه دهید.)

بخش دوم: تولید اعداد

- به ازای هرکدام از روش های پیاده سازی شده در بخش قبل، ۱۰۰۰ عدد ایجاد کنید و نمودار هیستوگرام هرکدام از آنها را رسم کنید.

بخش سوم: تست اعداد

- در این بخش باید سه روش KS-test، chi-square test و auto-correlation test را پیاده کنید.
 - KS-test: این تست را به صورت یک تابع ایجاد کنید که با ورودی گرفتن اعداد تولید شده و مقدار level of significance نتیجه تست را چاپ کند.
 - Chi-square test: این تست نیز مشابه بخش قبل پیاده شود.
 - Auto-correlation test: این تست در قالب یک تابع ایجاد شود که با ورودی گرفتن اعداد تولید شده به همراه level of significance و اندیس اولین عدد در تست و مقدار lag، نتیجه تست را ایجاد کند.
- برای این بخش تمرین می توانید از یکی از زبان های برنامه نویسی پایتون، جاوا، سی یا سی پلاس پلاس استفاده کنید. برای ارسال پاسخ این بخش، به همراه کد پیاده سازی باید یک مستند حاوی توضیحات لازم برای بخش های مختلف کد را ارائه دهید.
- نکته: برای بدست آوردن مقادیر بحرانی یا p-value در تست های مختلف، میتوانید از کتابخانه های در دسترس در زبان برنامه نویسی مد نظر استفاده کنید و در پیاده سازی شما این مقادیر نباید hard code شوند.

جواب سوال ۶

توضیح الگوریتم xor-shift :

الگوریتم xor-shift یکی از روش های تولید کننده اعداد شبه تصادفی است که بر پایه عملیات های بیتی پایه ای نظیر XOR (تفاوت منطقی) و Shift (جابجایی بیتی) عمل می کند. این الگوریتم از یک عدد اولیه (seed) شروع کرده و با انجام یک سری عملیات های xor و shift بر روی این عدد، عدد جدیدی را تولید می کند.

فرایند کاری الگوریتم به این صورت است:

- ابتدا عدد اولیه (seed) با استفاده از عملیات shift به چپ و سپس عملیات xor با خودش ترکیب می شود.

- سپس عدد حاصل از مرحله قبلی با استفاده از عملیات shift به راست و دوباره عملیات xor با خودش ترکیب می‌شود.

- در آخر، عدد حاصل از مرحله دوم دوباره با استفاده از عملیات shift به چپ و عملیات xor با خودش ترکیب می‌شود تا عدد شبه تصادفی جدیدی به دست آید.

این الگوریتم به دلیل سادگی و کارایی بالا در تولید اعداد شبه تصادفی محبوب است و در بسیاری از کاربردها استفاده می‌شود.