به نام خدا

درس شبیه سازی کامپیوتری

دکتر صفایی

پاییز ۱۴۰۲

دانشکده مهندسی کامپیوتر

فصل سوم و چهارم	تمرین دوم	مهلت ارسال پاسخ: ۱۹ آذر ۱۴۰۲

لطفا موارد زیر را به دقت مطالعه کنید

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده در بخش مهلت ارسال است.
- برای تمرینات تاخیر مجاز/غیرمجازی در نظر گرفته نشده است. بنابراین، نهایتا تا مهلت تعیین شده امکان ارسال پاسخ‌های خودتان را دارید و هرگونه جواب ارسال‌شده پس از این زمان پذیرفته نخواهد شد.
- تاکید می‌شود پاسخ خود را حتما در سامانه‌ی CW آپلود کنید. ارسال در جاهای دیگر قابل قبول نیست و **در صورت آپلود نکردن در سامانه‌ی CW، نمره‌ی صفر برای تمرین مربوطه لحاظ می‌شود.**
- حتما نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را در پاسخ‌هایتان درج کنید.
- کل پاسخ‌های سوالات نظری را در قالب یک فایل pdf آماده کنید و به همراه پاسخ سوال عملی (کد، نتایج و توضیحات

ذکر شده در صورت سوال) در یک فایل zip قرار دهید و آن را با شماره دانشجویی‌تان، به **فرمت HW2-[STU_ID].zip** نامگذاری کرده و در سامانه‌ی CW بارگذاری کنید.

- لطفا **تصویری واضح** از پاسخ سوالات نظری تهیه کنید. درغیراین صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. **همه ی مراحل میانی را نیز بنویسید**. در غیر این صورت نمره‌ی سوال مربوطه را دریافت نخواهید کرد.
- در صورت مشاهده‌ی هرگونه شباهت نامتعارف میان پاسخ‌های دو (یا چند) نفر، همگی کل نمره‌ی این تمرین را از دست خواهند داد.
- حتما بر اساس موارد ذکرشده در صورت سوالات، آن‌ها را حل کنید. **در صورت داشتن ابهام، در تالار پرسش و پاسخ مربوط به همین تمرین، مطرح کنید** وبه پاسخ‌هایی که دستیار آموزشی مربوطه در تالار بیان می‌کند، توجه کنید.
- **آخرین مهلت طرح پرسش درباره‌ی صورت سوالات در تالار، تا ساعت ۲۱ روز ددلاین است**. دستیار آموزشی مربوطه وظیفه‌ای در قبال سوالاتی که پس از این زمان پرسیده شوند، ندارد و به آن‌ها پاسخی داده نخواهد شد.

۱- یک نانوایی دو نوع نان بربری و سنگک تولید می کند. این دو نان مستقل از هم و با توزیع پواسون به ترتیب با پارامترهای λ_s و λ_b تولید می‌شوند.
الف) فرض کنید T_1 زمان تولید اولین نان باشد. $E[T_1]$ را بدست آورید.
ب) فرض کنید T_2 اولین لحظه‌ای باشد که حداقل یک نان سنگک و یک نان بربری تولید شده باشد. $E[T_2]$ را بدست آورید.

پاسخ:
الف: تولید نان(از هر دو نوع) را می‌توان با یک فرآیند پواسون با پارامتر $\lambda_s + \lambda_b$ مدل کرد و به همین دلیل امید ریاضی آن برابر $\frac{1}{\lambda_b + \lambda_s}$ است.
ب:فرض کنید X_1 متغیر تصادفی زمان تولید اولین سنگک و X_2 متغیر تصادفی زمان تولید اولین بربری باشد. می‌دانیم

$$X_1 + X_2 = Max[X_1, X_2] + Min[X_1, X_2]$$

داریم:

$$E[T_2] = E[Max[X_1, X_2]] = E[X_1] + E[X_2] - E[Min[X_1, X_2]] = \frac{1}{\lambda_s} + \frac{1}{\lambda_b} - \frac{1}{\lambda_b + \lambda_s}$$

۲- فرض کنید متغیر تصادفی X حاصل انداختن یک تاس ۴ وجهی و متغیر تصادفی Y حاصل انداختن یک تاس ۶ وجهی و Z متغیر تصادفی میانگین این دو باشد (در وجه‌های تاس‌ها به ترتیب اعداد ۱ تا ۴ و ۱ تا ۶ نوشته شده است).
الف) واریانس متغیرهای X و Y وZ را به دست آورید.
ب) فرض کنید با انداختن دو تاس، عددهای X=x و Y=y ظاهر می‌شوند. حال، اگر x>y باشد، به اندازه 2x دلار پول می‌برید وگرنه ۱ دلار می‌بازید. امید ریاضی سود شما بعد از ۶۰ دست پرتاب دو تاس چقدر است؟

پاسخ:
الف)

$$E[X] = 2.5, E[X^2] = 7.5, E[Y] = 3.5, E[Y^2] = \frac{91}{6}, E[Z] = 3, E[Z^2] = E[\frac{1}{4}(X + Y)^2] =$$
$$\frac{1}{4}E[X^2 + Y^2 + 2XY] = \frac{1}{4}(E[X^2] + E[Y^2] + 2E[X]E[Y]) = \frac{1}{4}(7.5 + \frac{91}{6} + 2 * 2.5 * 3.5) = 10.04$$

حال داریم $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
پس:

$$Var(X) = 7.5 - 6.25 = 1.25, Var(Y) = \frac{91}{6} - 3.5 * 3.5 = 2.91, Var(Z) = 10.04 - 9 = 1.04$$

ب)

$$E[T] = 60(\sum_{x>y} p(X = x)P(Y = y)2x - \sum_{x>y} p(X = x)P(Y = y) \times 1) =$$
$$60(\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times 2j - \frac{5+4+3+2+1}{24}) = \frac{60}{12}(2 + 3 + 4 + 3 + 4 + 4) - \frac{90}{8} = 87.5$$

۳- الف) فرض کنید N یک متغیر تصادفی گسسته و طبیعی باشد. برای مقادیر دلخواه و نامنفی a_j به ازای $j = 1, 2, ...$ نشان دهید:

$$\sum_{j=1}^{\infty}(a_1 + a_2 + ... + a_j)P(N = j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(N \ge i)$$

ب) ثابت کنید $E[N] = \sum_{j=1}^{\infty} P(N \ge j)$

ج) ثابت کنید $E[N(N + 1)] = 2\sum_{j=1}^{\infty} j.P(N \ge j)$

پاسخ:

الف)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i P(N \ge i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i [\sum_{j=i}^{\infty} P(N = j)] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} [a_i P(N = j)] = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j} [a_i P(N = j)]$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} [(\sum_{i=1}^{j} a_i)P(N = j)] = \sum_{j=1}^{\infty} [(a_1 + a_2 + ... + a_j)P(N = j)]$$

ب)

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(N \ge j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty} P(N = j) = \sum_{j=1}^{\infty} n.P(N = n) = E[N]$$

در اصل در تساوی دوم به این توجه داریم که هر کدام از $P(N = n)$ها به ازای هر $n \ge j$ یک بار جمع زده می‌شوند. از طرفی مقدار اولیه $j = 1$ است، بنابرین هر $P(N = n)$ دقیقا n بار جمع زده می‌شود.

ج)

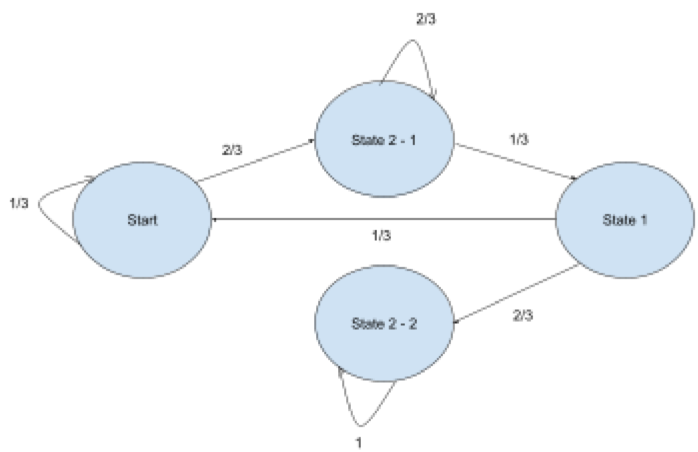
طبق الف داریم:

$$2\sum_{j=1}^{\infty} j.P(N \ge j) = 2\sum_{j=1}^{\infty}(1 + 2 + ... + j)P(N \ge j) = 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j(j+1)}{2}P(N = j) = E[N(N + 1)]$$

۴- تاسی را پشت سر هم پرتاب می‌کنیم. امید ریاضی تعداد دفعاتی که باید تاس انداخته‌شود تا توالی «عدد مضرب ۳ نباشد- عدد مضرب ۳ باشد - عدد مضرب ۳ نباشد» مشاهده شود را بدست آورید و زنجیره‌ی مارکوف مرتبط با این رویداد را نیز رسم کنید.

پاسخ)

زنجیره‌ی مارکوف مسئله به شکل زیر می‌باشد.



حال سه متغیر x و y و z را اینگونه تعریف می‌کنیم:
امید ریاضی تعداد پرتاب‌های لازم با حرکت از Start برای رسیدن به State 2-2 را x، امید ریاضی تعداد پرتاب‌های لازم با حرکت از State 2-1 برای رسیدن به State 2-2 را y و امید ریاضی تعداد پرتاب‌های لازم با حرکت از State 1 برای رسیدن به State 2-2 را z می‌نامیم، داریم:

$$x = (x + 1) * \frac{1}{3} + (y + 1) * \frac{2}{3}$$
$$y = (y + 1) * \frac{2}{3} + (z + 1) * \frac{1}{3}$$
$$z = (x + 1) * \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

با حل دستگاه سه معادله و سه مجهول بالا مقدار x عددی بین ۸ و ۹ بدست می‌آید و از آنجا که تعداد پرتاب‌ها عددی صحیح است، این تعداد برابر با ۹ می‌باشد.

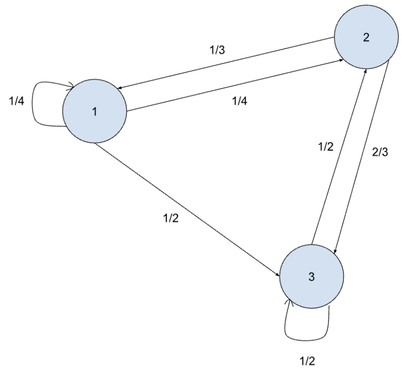
۵- زنجیره‌ی مارکوفی با استیت‌های S = {1, 2, 3} و ماتریس انتقال زیر را درنظر بگیرید. در این ماتریس درایه p_{ij} نشان‌دهنده‌ی احتمال جابه‌جایی از استیت i به j است.

P =

	1	2	3
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

الف) نمودار زنجیره‌ی مارکوف معادل با ماتریس انتقال بالا را رسم کنید.
ب) اگر بدانیم $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{4}$ است، مقدار $P(X_1 = 3,\ X_2 = 2,\ X_3 = 1)$ را بدست آورید.

پاسخ)
الف) نمودار مارکوف این ماتریس انتقال به شکل زیر است.



ب) به دلیل ناسازگار بودن رویدادهای $X_1 = 1$ و $X_1 = 2$ و $X_1 = 3$ داریم:

$$P(X_1 = 3) = 1 - P(X_1 = 1) - P(X_1 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow P(X_1 = 3,\ X_2 = 2,\ X_3 = 1) = P(X_1 = 3).\, p_{32}.\, p_{21} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

موفق باشید