



## درس شبیه سازی کامپیوتری

دکتر صفایی

پاییز ۱۴۰۲

فصل هفتم و هشتم

تمرین چهارم

مهلت ارسال پاسخ: ۲۹ دی ۱۴۰۲

### لطفا موارد زیر را به دقت مطالعه کنید

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده در بخش مهلت ارسال است.
- برای تمرینات تاخیر (چه مجاز، چه غیرمجاز) در نظر گرفته نشده است. بنابراین، نهایتا تا مهلت تعیین شده امکان ارسال پاسخ‌های خودتان را دارید و هرگونه جواب ارسال شده پس از این زمان، پذیرفته نخواهد شد.
- تاکید می‌شود پاسخ خود را حتما در سامانه‌ی CW آپلود کنید. ارسال در جاهای دیگر قابل قبول نیست و در صورت آپلود نکردن در سامانه‌ی CW، نمره‌ی صفر برای تمرین مربوطه لحاظ می‌شود.
- حتما نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را در پاسخ‌هایتان درج کنید.
- کل پاسخ‌های سوالات نظری را در قالب یک فایل pdf آماده کنید و به همراه پاسخ سوال عملی (کد، نتایج و توضیحات ذکر شده در صورت سوال) در یک فایل zip قرار دهید و آن را با شماره دانشجویی‌تان، به فرمت **HW4-[STU\_ID].zip** نام‌گذاری کرده و در سامانه‌ی CW بارگذاری کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری تهیه کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه‌ی مراحل میانی را نیز بنویسید. در غیر این صورت نمره‌ی سوال مربوطه را دریافت نخواهید کرد.
- در صورت مشاهده‌ی هرگونه شباهت نامتعارف میان پاسخ‌های دو (یا چند) نفر، همگی کل نمره‌ی این تمرین را از دست خواهند داد.
- حتما بر اساس موارد ذکر شده در صورت سوالات، آن‌ها را حل کنید. در صورت داشتن ابهام، در تالار پرسش و پاسخ مربوط به همین تمرین، مطرح کنید و به پاسخ‌هایی که دستیار آموزشی مربوطه در تالار بیان می‌کند، توجه کنید.
- آخرین مهلت طرح پرسش درباره‌ی صورت سوالات در تالار، تا ساعت ۲۱ روز ددلاین است. دستیار آموزشی مربوطه وظیفه‌ای در قبال سوالاتی که پس از این زمان پرسیده شوند، ندارد و به آن‌ها پاسخی داده نخواهد شد.

## سوالات نظری

۱. برای هر کدام از موارد زیر، توزیع احتمالاتی مناسب آن را نامیده و علت انتخاب خود را شرح دهید.

الف) سرعت ماشین ها در اتوبان

ب) درآمد یک سوپرمارکت در یک ماه

ج) زمان طول کشیده برای نوشتن یک تمرین

د) نقطه برخورد در بازی دarts

۲. روشی را برای تولید واریته تصادفی برای متغیر  $X$  با pdf زیر پیدا کنید :

$$\text{if } x \leq 1 : f(x) = x^{a-1}$$
$$\text{otherwise} : f(x) = \lambda^{-\lambda x}$$

۳. مجموعه اعداد زیر به ما داده شده است. می خواهیم بررسی کنیم که آیا این اعداد از توزیع نرمال پیروی می کنند یا خیر.

-0.62 0.08 -1.18 0.27 -0.48 -0.12 0.65 -0.15 0.11 -0.22 -0.01 0.87 0.38 0.22 -0.48

الف) با استفاده از روش تخمین پارامتر (صفحه ۲۳ اسلاید ۸)، تخمینی از میانگین و انحراف معیار توزیع احتمالی به دست آورید. (برای استفاده در بخش ب این دو عدد را تا یک رقم اعشار گرد کنید.)

ب) دو تست Kolmogorov - Smirnov و Chi-Square را روی اعداد اجرا کرده و فرض پیروی از توزیع نرمال با پارامترهای بخش الف را توسط هر تست بررسی کنید.

ج) در این سوال استفاده از کدام یک از دو تست ذکر شده بهتر و مفیدتر است؟ دلایل خود را ذکر کنید.

۴. داده های جدول زیر، نمونه های جمع آوری شده از مدت زمان سرویس در یک سیستم صف هستند. با کمک این داده ها، یک جدول برای تولید زمان های سرویس دهی ایجاد کنید (مشابه اسلاید 16 از فصل 7) و برای 5 عدد تصادفی  $R_i$ ، زمان سرویس متناظر را تعیین کنید. (برای تولید  $R_i$  ها می توانید از روشی دلخواه استفاده کنید.)

Interval (seconds)	Frequency
15-30	10
30-45	20
45-60	25

Interval (seconds) [Continue]	Frequency [Continue]
60-90	35
90-120	30
120-180	20
180-300	10

۵. در درس با روش **Acceptance-Rejection** برای تولید اعداد تصادفی از یک توزیع آشنا شدید. حال با روشی دیگر مشابه با آن در این سوال آشنا می شویم.

همانطور که می دانید نمی توان از روش های تدریس شده در درس برای تولید عدد تصادفی از هر توزیعی استفاده کرد. هدف ما این است که با استفاده از روش تولید اعداد تصادفی برای یک توزیع، اعداد تصادفی برای توزیع دیگری ایجاد کنیم.

فرض کنید می خواهیم اعداد تصادفی ای که از توزیع  $s$  (با CDF به نام  $S$ ) پیروی می کنند را تولید کنیم. برای این کار قصد داریم از توزیع دیگر  $r$  (با CDF به نام  $R$ ) که دو خاصیت زیر را دارد، استفاده کنیم:

(۱) روشی برای تولید اعداد تصادفی از توزیع  $r$  داشته باشیم (مانند **Inverse Transform** و سایر روش های ذکر شده در اسلاید).

(۲) توزیع  $r$  به توزیع  $s$  نزدیک باشد.

منظور از نزدیک بودن این است که عدد ثابت  $c$  (مثبت) وجود داشته باشد به صورتی که  $\sup_x \left\{ \frac{s(x)}{r(x)} \right\} \leq c$ . (توجه کنید توابع  $s(\cdot)$  و  $r(\cdot)$  همان pdf های توزیع های  $r$  و  $s$  اند).

همچنین علاقه مندیم که ثابت  $c$  به ۱ نزدیک باشد.

با داشتن فرض های بالا الگوریتم زیر به ما روشی برای تولید اعداد تصادفی از توزیع  $s$  می دهد.

گام ۱: از توزیع  $r$  عدد تصادفی  $Y$  را تولید می کنیم (طبق خاصیت ۱ این امر ممکن است).

گام ۲: عدد تصادفی  $U$  را از توزیع یونیفرم بین ۰ و ۱ نمونه گیری می کنیم. (روش های معمول این کار در اسلایدهای قبلی بررسی شدند)

گام ۳: اگر  $U \leq \frac{s(Y)}{cr(Y)}$  برقرار باشد، آنگاه  $Y$  را به عنوان متغیر تصادفی که از  $s$  پیروی کند، اکسپت می کنیم وگرنه آن را ریجکت کرده و به گام اول الگوریتم برمی گردیم.

(الف) می خواهیم اعداد تصادفی که از توزیع  $|Z|$  (قدر مطلق توزیع نرمال) به طوری که  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  پیروی می کنند، ایجاد کنیم.

مراحل الگوریتم بالا را تا ایجاد یک عدد تصادفی از توزیع اجرا کنید. برای تولید عدد تصادفی یونیفرم می توانید از هر روشی استفاده کنید و برای ایجاد

عدد تصادفی توزیع  $r$  روشی که استفاده می کنید (مثلا **Inverse Transform**) را شرح دهید. انتخاب  $r$  مناسب دست خودتان است اما صحت

پیروی از دو شرط ارائه شده باید بررسی شود.

(ب) به صورت تئوری اثبات کنید که الگوریتم ارائه شده به درستی کار می کند. بدین منظور باید نشان دهید که

$$P(U \leq \frac{s(Y)}{cr(Y)} \mid Y \leq y) = S(y)$$

۶. ۵۰ داده در فایل samples1 به شما داده شده است.

الف) با استفاده از روش ارائه شده در اسلاید ۸ نمودار Q-Q مربوط به مقادیر داده شده و توزیع Weibull با پارامترهای shape برابر ۲ و scale برابر ۱ را ترسیم کرده و سپس شرح دهید آیا دیتای داده شده ممکن است از این توزیع پیروی کند؟ (در این بخش مجاز به استفاده از توابع آماده ترسیم Q-Q Plot نیستید. اما می‌توانید برای معکوس CDF توزیع از توابع کتابخانه Scipy استفاده کنید.)

ب) مشابه الف) را برای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۲ انجام داده و شرح دهید.

ج) بررسی کنید آیا مجموعه دیتای فایل samples1 و فایل samples2 می‌توانند از یک توزیع مشترک بیایند؟ بدین منظور Q-Q Plot را ترسیم کرده و مطابق آن توضیح دهید. (در این بخش مجاز به استفاده از هر کتابخانه و تابعی هستید.)

توجه داشته باشید در پاسخ به این سوال می‌توانید از یکی از زبان‌های c/cpp، python، یا java استفاده کنید.