سوال ۱

۱. به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) مدل‌های صف با جمعیت نامحدود (infinite population) و جمعیت محدود (finite population) را توصیف کنید و تفاوت‌های آن‌ها را بیان نمایید.

ب) انواع نظم‌دهی در صف‌ها یا نظام صف‌بندی (Queue discipline) چیست؟ سه مورد از این انواع را نام برده و هر کدام را به طور خلاصه شرح دهید.

ج) جریان‌های شماره‌گذاری تصادفی (random-number streams) را توضیح دهید.

جواب سوال ۱

الف) **مدل‌های صف با جمعیت نامحدود و جمعیت محدود:** جمعیت نامحدود به معنای آن است که تعداد مشتریان بالقوه برای ورود به صف بی‌نهایت است، بدین معنی که همیشه مشتری جدیدی برای ورود به صف وجود دارد و محدودیتی برای تعداد کل مشتریان وجود ندارد. این مدل معمولاً در سیستم‌هایی با ترافیک بالا مانند وب‌سایت‌ها یا سیستم‌های تلفنی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مقابل، جمعیت محدود به وضعیتی اشاره دارد که تعداد مشتریانی که ممکن است وارد صف شوند محدود است. این مدل در موقعیت‌هایی که تعداد کاربران سیستم محدود است، مثلاً در یک کسب‌وکار کوچک یا سیستمی با تعداد محدود کاربر، کاربرد دارد.

ب) **انواع نظم دهی در صف‌ها:**

- *FIFO (First In, First Out)*: این رویه بر اساس ترتیب ورود مشتریان به صف عمل می‌کند. اولین مشتری که وارد صف می‌شود، اولین کسی است که خدمات دریافت می‌کند. این روش در اکثر موقعیت‌های رایج مانند صف‌های بانک یا فروشگاه‌ها به کار می‌رود.
- *LIFO (Last In, First Out)*: در این روش، آخرین مشتری که وارد صف می‌شود، اولین کسی است که خدمات دریافت می‌کند. این روش عمدتاً در موقعیت‌های خاص مانند برخی فرآیندهای صنعتی یا در مدیریت داده‌ها به کار می‌رود.
- *اولویت‌بندی*: در این روش، مشتریان بر اساس اولویت‌های مختلف خدمات دریافت می‌کنند. اولویت‌ها می‌توانند بر اساس فاکتورهای مختلفی مانند اورژانسی بودن، وضعیت ویژه یا اهمیت مشتری تعیین شوند. این روش در موقعیت‌هایی مانند بیمارستان‌ها یا مراکز خدماتی که نیاز به سرویس‌دهی فوری دارند، کاربرد دارد.

ج) **جریان‌های شماره‌گذاری تصادفی:** جریان‌های شماره‌گذاری تصادفی ابزارهایی هستند که برای تولید دنباله‌هایی از اعداد تصادفی در شبیه‌سازی‌ها استفاده می‌شوند. این اعداد به منظور مدل‌سازی رفتارهای تصادفی در سیستم‌های واقعی استفاده می‌شوند، مانند تعیین زمان‌های ورود تصادفی مشتریان به صف یا زمان‌های متفاوت سرویس‌دهی در یک مرکز خدماتی. استفاده از این جریان‌ها امکان پذیرش یک مدل شبیه‌سازی را که به‌خوبی پویایی‌های واقعی را بازتاب می‌دهد، فراهم می‌کند.

سوال ۲

سوال: اعداد تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

۰/۰۵, ۰/۰۸, ۰/۱۴, ۰/۲۴, ۰/۳۳, ۰/۳۳, ۰/۳۹,

۰/۴۱, ۰/۴۴, ۰/۵۳, ۰/۵۶, ۰/۵۸, ۰/۶۳, ۰/۷۳,

۰/۷۶, ۰/۸۳, ۰/۸۴, ۰/۸۸, ۰/۸۸, ۰/۹۳

فرض اینکه این اعداد توزیع یکنواخت داشته باشند را با اعمال تست **Kolmogorov-Smirnov** در بخش الف (با سطح معناداری ٪۵) بررسی کنید. و در نظر گرفتن ۱۰ بازه برای اعداد تصادفی تولید شده، تست بخش قبل را این بار با روش **Chi-Square** در بخش ب (با سطح معناداری ٪۵) بررسی کنید. در بخش ج، با توضیح دلیل تعیین کنید که از نتیجه کدام تست باید استفاده کرد.

جواب سوال ۲

الف) تست :Kolmogorov-Smirnov

آماره تست: ۰/۱۳

مقدار p: ۰/۸۴۶

با توجه به مقدار p بزرگتر از ۰/۰۵، فرض توزیع یکنواخت رد نمی‌شود.

ب) تست :Chi-Square

آماره تست: ۵/۰

مقدار p: ۰/۸۳۴

با توجه به مقدار p بزرگتر از ۰/۰۵، فرض توزیع یکنواخت رد نمی‌شود.

ج) انتخاب تست مناسب:

با توجه به نتایج مشابه در هر دو تست، هر دو تست نشان می‌دهند که فرض توزیع یکنواخت برای این داده‌ها قابل قبول است. با این حال، انتخاب تست مناسب بستگی به شرایط خاص مطالعه و نوع داده‌ها دارد. تست

Kolmogorov-Smirnov برای مجموعه داده‌های کوچکتر مناسب است، در حالی که تست Chi-Square برای مجموعه داده‌های بزرگتر با تقسیم‌بندی به بازه‌ها مفید است.

سوال ۳

در این سوال قصد بررسی مدل صف در یک مطب را داریم. فرض کنید که در یک مطب دو پزشک وجود دارند که هرکدام از آنها در ۱۵ دقیقه، یک بیمار را معاینه و درمان می‌کنند و در هر یک ساعت، یک بیمار به مطب وارد می‌شود. فرض کنید که میدانیم این مطب امروز تنها ۱۰ بیمار خواهد داشت.

الف) تعداد میانگین افرادی که در مطب حضور دارند را بدست آورید.

ب) هر بیمار به طور میانگین چند دقیقه را در صف می‌گذارند؟

ج) هر پزشک به طور میانگین در چه نسبتی از یک ساعت، هیچ بیماری را ویزیت نمی‌کند؟

جواب سوال ۳

میانگین تعداد افراد در مطب: از آنجایی که هر پزشک در هر ۱۵ دقیقه یک بیمار را معاینه می‌کند و هر ساعت یک بیمار وارد می‌شود، هر پزشک می‌تواند در هر ساعت ۴ بیمار را ویزیت کند. از آنجا که دو پزشک وجود دارد، آن‌ها می‌توانند در مجموع در هر ساعت ۸ بیمار را ویزیت کنند. اما تنها یک بیمار در هر ساعت وارد می‌شود. بنابراین، در هر ساعت به طور میانگین $\frac{۱}{۸}$ بیمار در مطب حضور خواهد داشت.

میانگین زمان انتظار هر بیمار در صف: از آنجا که پزشکان قادر به ویزیت ۸ بیمار در ساعت هستند و فقط یک بیمار در هر ساعت وارد می‌شود، بنابراین به ندرت صفی ایجاد می‌شود. در نتیجه، میانگین زمان انتظار در صف بسیار کم خواهد بود و می‌توان آن را صفر در نظر گرفت.

میانگین زمان بیکاری هر پزشک: از آنجا که هر پزشک می‌تواند ۴ بیمار را در یک ساعت ویزیت کند، اما تنها یک بیمار در هر ساعت وارد می‌شود، پزشکان بیشتر وقت خود را بدون ویزیت بیمار سپری می‌کنند. بنابراین، هر پزشک به طور میانگین $\frac{۳}{۴}$ یا ۷۵٪ از زمان یک ساعت بیکار خواهد بود.

سوال ۴

سوال:

فرض کنید یک سیستم صف $M/M/۱$ وجود دارد.

الف) اثبات کنید که احتمال وجود n مشتری در مغازه برابر است با:

$$P_n = (۱ - \rho)\rho^n$$

که در آن $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ نرخ استفاده (*utilization*) است.

ب) با استفاده از نتیجه بخش الف، اثبات کنید که تعداد مشتریان منتظر در صف به طور میانگین برابر است با:

$$L_q = \frac{\rho^۲}{۱ - \rho}$$

جواب سوال ۴

الف) برای یک سیستم صف $M/M/۱$ ، فرمول استاندارد برای محاسبه احتمال وجود n مشتری در سیستم (هم در صف و هم در خدمت) استفاده می‌شود. این فرمول بر اساس این واقعیت است که احتمال ورود مشتریان به سیستم به صورت هندسی توزیع شده است. فرض کنید $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ که λ نرخ ورود و μ نرخ خدمت است. فرض می‌کنیم که سیستم در حالت تعادل است. پس داریم:

$$P_n = (۱ - \rho)\rho^n$$

که در آن P_n احتمال وجود دقیقاً n مشتری در سیستم است. این فرمول از معادلات تعادل حالت پایا برای سیستم‌های صف $M/M/۱$ به دست می‌آید.

ب) برای محاسبه تعداد میانگین مشتریان منتظر در صف، از فرمول Little استفاده می‌کنیم. فرمول Little می‌گوید که $L = \lambda W$، که L تعداد میانگین مشتریان در سیستم و W میانگین زمان انتظار یک مشتری در سیستم است. برای یک سیستم $M/M/۱$ ، میانگین زمان انتظار در سیستم W برابر است با $\frac{۱}{\mu-\lambda}$. پس داریم:

$$L = \lambda \times \frac{۱}{\mu - \lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{۱ - \rho}$$

از آنجا که $L_q = L - \rho$ (که L_q تعداد میانگین مشتریان در صف است)، می‌توانیم بنویسیم:

$$L_q = \frac{\rho}{۱ - \rho} - \rho = \frac{\rho^۲}{۱ - \rho}$$

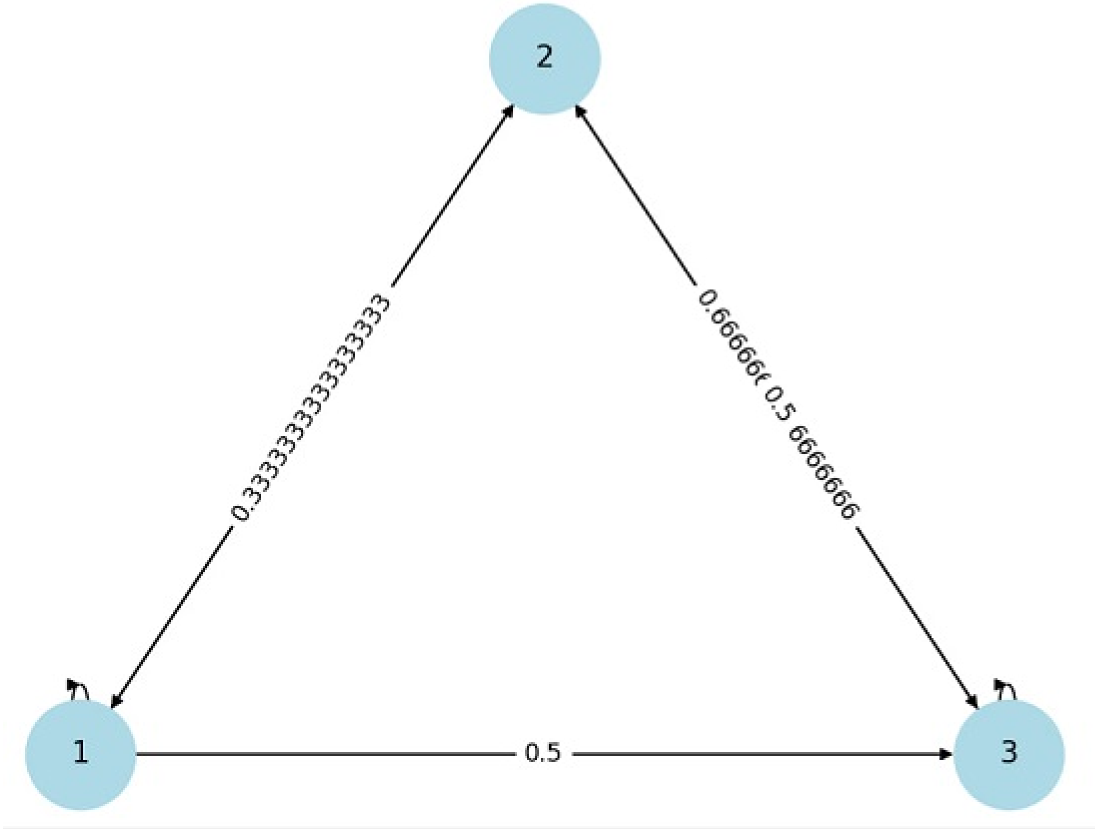
که این فرمول نشان دهنده تعداد میانگین مشتریان منتظر در صف در یک سیستم صف $M/M/۱$ است.

جواب سوال ۵

برای یک زنجیره مارکوف با استیت‌های $\{۱، ۲، ۳\}$ و ماتریس انتقال زیر:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$$

نمودار زنجیره مارکوف مربوط به این ماتریس به صورت زیر است:



محاسبه احتمال $P(X_۱ = ۳, X_۲ = ۲, X_۳ = ۱)$ بر اساس قانون زنجیره‌ای احتمال انجام می‌شود:

$$P(X_۱ = ۳, X_۲ = ۲, X_۳ = ۱) = P(X_۱ = ۳) \times P_{۳۲} \times P_{۲۱}$$

از آنجا که $P(X_۱ = ۱) = P(X_۱ = ۲) = \frac{۱}{۴}$ و $P(X_۱ = ۳) = \frac{۱}{۲}$، محاسبه صحیح به صورت زیر خواهد بود:

$$P(X_۱ = ۳, X_۲ = ۲, X_۳ = ۱) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$

جواب سوال ۶

توضیح کد پایتون برای زنجیره مارکوف

این کد پایتون برای مدل‌سازی و تحلیل یک زنجیره مارکوف گسسته استفاده می‌شود که در آن تعدادی حالت و احتمالات انتقال بین آنها وجود دارد.

تابع calculate_state_probability

این تابع برای محاسبه احتمال یک حالت خاص (s) در روز معین (N) در زنجیره مارکوف استفاده می‌شود. این تابع بردار احتمال اولیه ($p.$) و ماتریس انتقال را به عنوان ورودی می‌گیرد و با استفاده از حلقه‌ای برای ضرب ماتریس انتقال در بردار احتمال فعلی در هر مرحله، احتمال حالت s در روز N را محاسبه می‌کند.

تعریف بردار احتمال اولیه و ماتریس انتقال

این بخش از کد بردار احتمال اولیه و ماتریس انتقال را تعریف می‌کند که برای مدل‌سازی زنجیره مارکوف استفاده می‌شوند.

محاسبه احتمال انتخاب جوجه کباب در روز ۷۷۷ام

با استفاده از تابع calculate_state_probability ، احتمال انتخاب جوجه کباب در روز ۷۷۷ام محاسبه می‌شود.

محاسبه احتمالات انتخاب جوجه کباب در روزهای مختلف و نمایش نمودار

این بخش از کد احتمال انتخاب جوجه کباب در روزهای مختلف را محاسبه کرده و سپس این احتمالات را در یک نمودار نشان می‌دهد.

تابع simulate_markov_chain

این تابع برای شبیه‌سازی روند زنجیره مارکوف استفاده می‌شود. با تعداد دفعات مشخص شده، این تابع یک زنجیره مارکوف را شبیه‌سازی کرده و احتمالات حالت‌های مختلف در پایان دوره را محاسبه می‌کند.

مقایسه نتایج محاسباتی و شبیه‌سازی

در این بخش، نتایج به دست آمده از محاسبات تئوری و شبیه‌سازی مقایسه می‌شوند. این مقایسه شامل بررسی خطای بین نتایج تئوری و شبیه‌سازی است.