پاییز ۱۴۰۲ **تمرین ۲**

ایمان محمدی (۹۹۱۰۲۲۰۷) **زمان آپلود: ۱ دی**

سوال ۱

۱. به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) مدل‌های صف با جمعیت نامحدود (infinite population) و جمعیت محدود (finite population) را توصیف کنید و تفاوت‌های آن‌ها را بیان نمایید.

ب) انواع نظم‌دهی در صف‌ها یا نظام صف‌بندی (Queue discipline) چیست؟ سه مورد از این انواع را نام برده و هر کدام را به طور خلاصه شرح دهید.

ج) جریان‌های شماره‌گذاری تصادفی (random-number streams) را توضیح دهید.

جواب سوال ۱

جواب سوال ۲

برای متغیر تصادفی X (تاس چهار وجهی):

- امید ریاضی X: $E[X] = \frac{۱+۲+۳+۴}{۴} = ۲/۵$
- واریانس X: $Var[X] = E[X^۲] - (E[X])^۲ = ۷/۵ - (۲/۵)^۲ = ۱/۲۵$

برای متغیر تصادفی Y (تاس شش وجهی):

- امید ریاضی Y: $E[Y] = \frac{۱+۲+۳+۴+۵+۶}{۶} = ۳/۵$
- واریانس Y: $Var[Y] = E[Y^۲] - (E[Y])^۲ = \frac{۹۱}{۶} - (۳/۵)^۲ = ۲/۹۱۶۷$

برای متغیر تصادفی Z (میانگین X و Y):

- امید ریاضی Z: $E[Z] = \frac{E[X]+E[Y]}{۲} = ۳$
- واریانس Z: $Var[Z] = \frac{Var[X]+Var[Y]}{۴} = ۱/۰۴۱۷$

ب) امید ریاضی سود شما پس از ۶۰ دست پرتاب دو تاس:

فرض کنید در هر پرتاب دو تاس، اگر عدد نمایش داده شده روی تاس چهار وجهی (X) بیشتر از عدد نمایش داده شده روی تاس شش وجهی (Y) باشد، شما $X \times ۲$ دلار برنده می‌شوید. در غیر این صورت، شما ۱ دلار می‌بازید. محاسبه امید ریاضی سود شما برای یک پرتاب و سپس برای ۶۰ پرتاب به شرح زیر است:

- محاسبه امید ریاضی سود برای $X > Y$:
  - احتمال $X > Y$ برابر است با تعداد حالاتی که X بزرگتر از Y است تقسیم بر تعداد کل حالات.
  - در هر حالت که $X > Y$، سود $X \times ۲$ دلار است.
- محاسبه امید ریاضی زیان برای $X \leq Y$:
  - احتمال $X \leq Y$ برابر است با تعداد حالاتی که X کمتر یا مساوی Y است تقسیم بر تعداد کل حالات.
  - در هر حالت که $X \leq Y$، زیان ۱ دلار است.
- امید ریاضی سود برای یک پرتاب دو تاس: تقریباً ۰/۹۱۷ دلار.
- امید ریاضی کلی سود برای ۶۰ پرتاب: تقریباً ۵۵ دلار.

جواب سوال ۳

الف) نشان دهید:

$$\sum_{j=۱}^{\infty}(a_۱ + a_۲ + \ldots + a_j)P(N = j) = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i P(N \geq i)$$

برای این بخش، ابتدا مجموعه داخل پرانتز را به صورت تجمعی نویسیم و سپس با تغییر ترتیب جمع‌زنی، این را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$= \sum_{i=۱}^{\infty} a_i \sum_{j=i}^{\infty} P(N = j)$$

که در آن $\sum_{j=i}^{\infty} P(N = j)$ معادل احتمال این است که N حداقل برابر با i باشد. در نتیجه، به معادله نهایی می‌رسیم:

$$= \sum_{i=۱}^{\infty} a_i P(N \geq i)$$

ب) ثابت کنید:

$$E[N] = \sum_{j=۱}^{\infty} P(N \geq j)$$

برای این بخش، از تعریف امید ریاضی برای متغیر تصادفی گسسته استفاده می‌کنیم. امید ریاضی $E[N]$ برابر است با مجموع وزن‌دار تمام مقادیر ممکن N، که به صورت مجموعه احتمالات N بزرگتر یا مساوی با هر عدد طبیعی j است.

ج) ثابت کنید:

$$E[N(N + ۱)] = ۲ \sum_{j=۱}^{\infty} j \cdot P(N \geq j)$$

برای این بخش، ما توجه می‌کنیم که $N(N + ۱)$ می‌تواند به صورت $N^۲ + N$ بیان شود. این بیان به ما امکان می‌دهد تا امید ریاضی $E[N(N + ۱)]$ را به صورت مجموعه‌ای از احتمالات بیان کنیم که در آن N حداقل برابر با هر عدد طبیعی j است.

بنابراین، ما می‌توانیم امید ریاضی $E[N(N+۱)]$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$E[N(N+۱)] = E[N^۲] + E[N]$$

و از آنجا که $E[N^۲]$ را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از احتمالات که N حداقل برابر با هر عدد طبیعی j است بیان کرد، می‌توانیم آن را به صورت زیر بیان کنیم:

$$E[N^۲] = \sum_{j=۱}^{\infty} j^۲ \cdot P(N \geq j)$$

و از آنجا که $E[N]$ نیز به صورت مجموعه‌ای از احتمالات بیان می‌شود:

$$E[N] = \sum_{j=۱}^{\infty} j \cdot P(N \geq j)$$

بنابراین، امید ریاضی $E[N(N+۱)]$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$E[N(N+۱)] = \sum_{j=۱}^{\infty} j^۲ \cdot P(N \geq j) + \sum_{j=۱}^{\infty} j \cdot P(N \geq j)$$

که در نهایت به صورت $۲\sum_{j=۱}^{\infty} j \cdot P(N \geq j)$ بیان می‌شود.

جواب سوال ۴

محاسبه امید ریاضی تعداد دفعاتی که باید تاس انداخته شود تا توالی عدد مضرب ۳ نباشد - عدد مضرب ۳ باشد - عدد مضرب ۳ نباشد مشاهده شود:

برای حل این مسئله، ما از نظریه زنجیره‌های مارکوف استفاده می‌کنیم. سه حالت ممکن برای هر پرتاب تاس وجود دارد:

الف) حالت A: هیچ عددی تاکنون پرتاب نشده یا آخرین عدد پرتاب شده مضرب ۳ نبوده است.

ب) حالت B: آخرین عدد پرتاب شده مضرب ۳ بوده است.

ج) حالت C: توالی کامل شده است (یعنی عدد مضرب ۳ نباشد - عدد مضرب ۳ باشد - عدد مضرب ۳ نباشد).

ماتریس انتقال P به صورت زیر است:

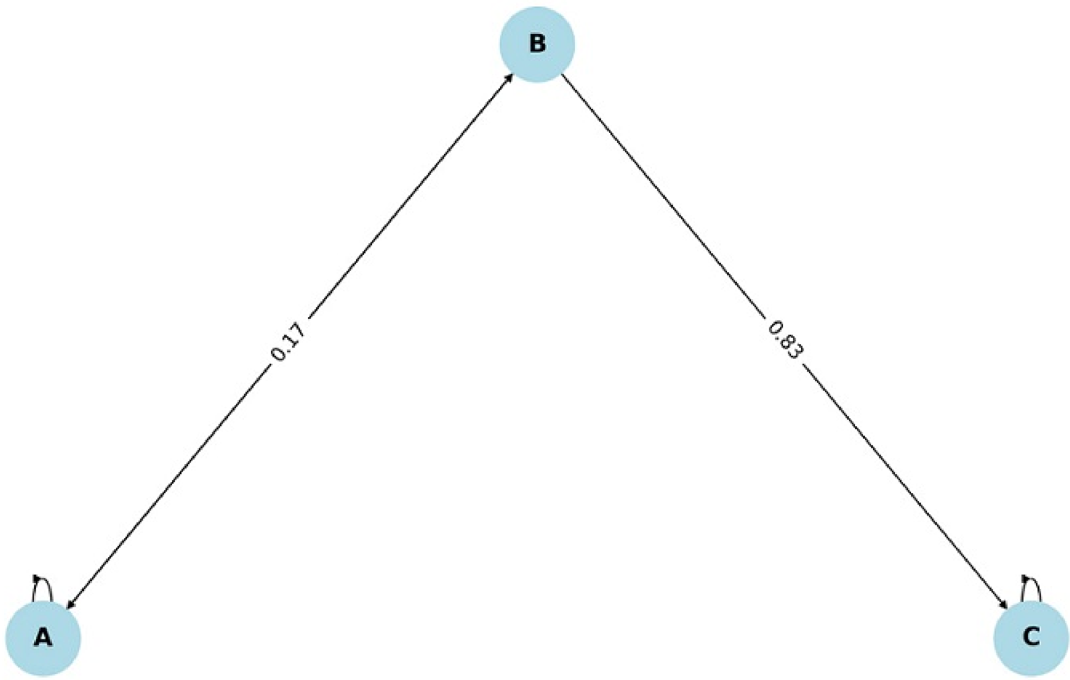
$$P = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۶} & \frac{۲}{۶} & ۰ \\ \frac{۱}{۶} & ۰ & \frac{۵}{۶} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

این ماتریس نشان‌دهنده احتمال جابه‌جایی بین حالت‌ها است.

برای محاسبه امید ریاضی تعداد دفعات پرتاب تاس تا رسیدن به حالت C بعد از حالت A، ما از خواص زنجیره‌های مارکوف استفاده می‌کنیم. این محاسبه شامل محاسبه زمان اولین ورود به حالت C از حالت A است.

در نمودار زنجیره مارکوف که برای مسئله داده شده رسم شده است، گره‌ها حالت‌های مختلف زنجیره را نشان می‌دهند و یال‌ها احتمال انتقال بین حالت‌ها را نمایش می‌دهند.

- حالت A: این حالت نشان‌دهنده شروع توالی یا پرتاب عددی غیر مضرب ۳ است.
- حالت B: این حالت نشان‌دهنده پرتاب عدد مضرب ۳ است.
- حالت C: این حالت نشان‌دهنده اتمام توالی مورد نظر ما (عدد مضرب ۳ نباشد - عدد مضرب ۳ باشد - عدد مضرب ۳ نباشد) است.

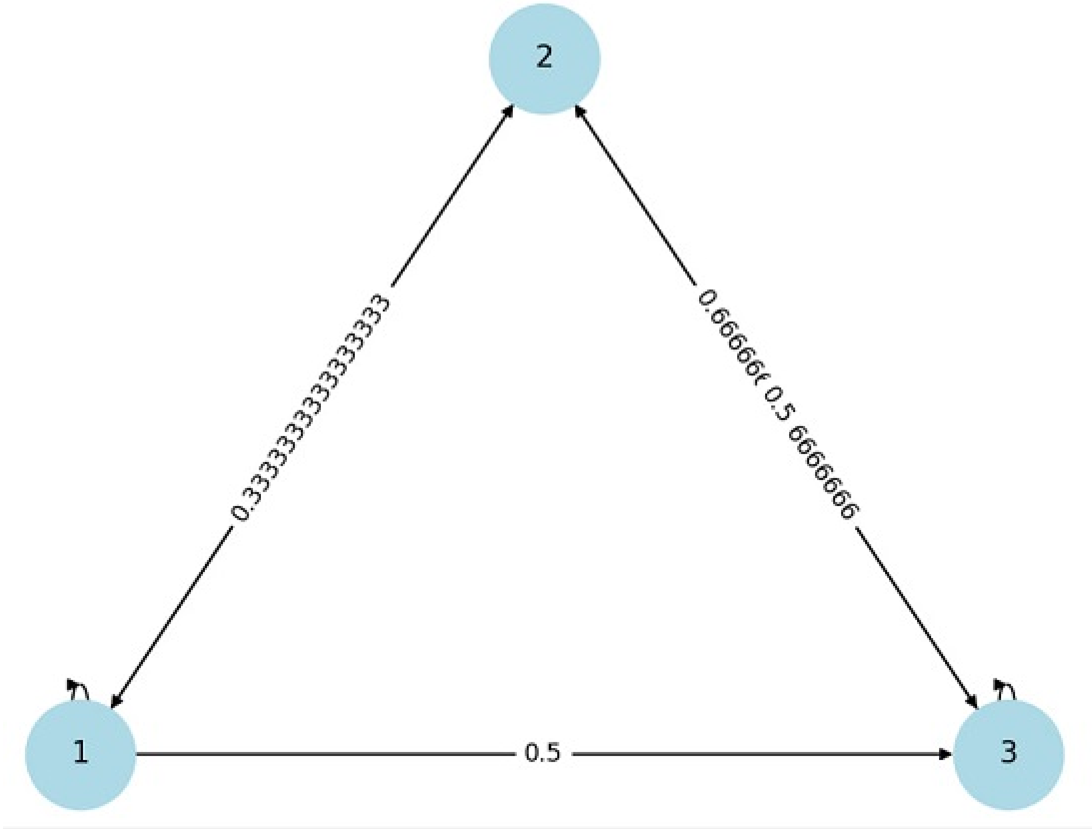


جواب سوال ۵

برای یک زنجیره مارکوف با استیت‌های $\{۱، ۲، ۳\}$ و ماتریس انتقال زیر:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$$

نمودار زنجیره مارکوف مربوط به این ماتریس به صورت زیر است:



محاسبه احتمال $P(X_۱ = ۳, X_۲ = ۲, X_۳ = ۱)$ بر اساس قانون زنجیره‌ای احتمال انجام می‌شود:

$$P(X_۱ = ۳, X_۲ = ۲, X_۳ = ۱) = P(X_۱ = ۳) \times P_{۳۲} \times P_{۲۱}$$

از آنجا که $P(X_۱ = ۱) = P(X_۱ = ۲) = \frac{۱}{۴}$ و $P(X_۱ = ۳) = \frac{۱}{۲}$، محاسبه صحیح به صورت زیر خواهد بود:

$$P(X_۱ = ۳, X_۲ = ۲, X_۳ = ۱) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$

جواب سوال ۶

توضیح کد پایتون برای زنجیره مارکوف

این کد پایتون برای مدل‌سازی و تحلیل یک زنجیره مارکوف گسسته استفاده می‌شود که در آن تعدادی حالت و احتمالات انتقال بین آنها وجود دارد.

تابع calculate_state_probability

این تابع برای محاسبه احتمال یک حالت خاص (s) در روز معین (N) در زنجیره مارکوف استفاده می‌شود. این تابع بردار احتمال اولیه ($p.$) و ماتریس انتقال را به عنوان ورودی می‌گیرد و با استفاده از حلقه‌ای برای ضرب ماتریس انتقال در بردار احتمال فعلی در هر مرحله، احتمال حالت s در روز N را محاسبه می‌کند.

تعریف بردار احتمال اولیه و ماتریس انتقال

این بخش از کد بردار احتمال اولیه و ماتریس انتقال را تعریف می‌کند که برای مدل‌سازی زنجیره مارکوف استفاده می‌شوند.

محاسبه احتمال انتخاب جوجه کباب در روز ۷۷۷ام

با استفاده از تابع calculate_state_probability ، احتمال انتخاب جوجه کباب در روز ۷۷۷ام محاسبه می‌شود.

محاسبه احتمالات انتخاب جوجه کباب در روزهای مختلف و نمایش نمودار

این بخش از کد احتمال انتخاب جوجه کباب در روزهای مختلف را محاسبه کرده و سپس این احتمالات را در یک نمودار نشان می‌دهد.

تابع simulate_markov_chain

این تابع برای شبیه‌سازی روند زنجیره مارکوف استفاده می‌شود. با تعداد دفعات مشخص شده، این تابع یک زنجیره مارکوف را شبیه‌سازی کرده و احتمالات حالت‌های مختلف در پایان دوره را محاسبه می‌کند.

مقایسه نتایج محاسباتی و شبیه‌سازی

در این بخش، نتایج به دست آمده از محاسبات تئوری و شبیه‌سازی مقایسه می‌شوند. این مقایسه شامل بررسی خطای بین نتایج تئوری و شبیه‌سازی است.