



درس شبیه سازی کامپیوتری

دکتر صفایی
پاییز ۱۴۰۲

لطفا موارد زیر را به دقت مطالعه کنید

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده در بخش مهلت ارسال است.
- برای تمرینات تاخیر مجاز/غیرمجازی در نظر گرفته نشده است. بنابراین، نهایتا تا مهلت تعیین شده امکان ارسال پاسخ های خودتان را دارید و هرگونه جواب ارسال شده پس از این زمان، پذیرفته نخواهد شد.
- تاکید می شود پاسخ خود را حتما در سامانه ی CW آپلود کنید. ارسال در جاهای دیگر قابل قبول نیست و در صورت آپلود نکردن در سامانه ی CW، نمره ی صفر برای تمرین مربوطه لحاظ می شود.
- حتما نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را در پاسخ هایتان درج کنید.
- کل پاسخ های سوالات نظری را در قالب یک فایل pdf آماده کنید و به همراه پاسخ سوال عملی (کد، نتایج و توضیحات ذکر شده در صورت سوال) در یک فایل zip قرار دهید و آن را با شماره دانشجویی تان، به فرمت **HW3-[STU_ID].zip** نام گذاری کرده و در سامانه ی CW بارگذاری کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری تهیه کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه ی مراحل میانی را نیز بنویسید. در غیر این صورت نمره ی سوال مربوطه را دریافت نخواهید کرد.
- در صورت مشاهده ی هرگونه شباهت نامتعارف میان پاسخ های دو (یا چند) نفر، همگی کل نمره ی این تمرین را از دست خواهند داد.
- حتما بر اساس موارد ذکر شده در صورت سوالات، آن ها را حل کنید. در صورت داشتن ابهام، در تالار پرسش و پاسخ مربوط به همین تمرین، مطرح کنید و به پاسخ هایی که دستیار آموزشی مربوطه در تالار بیان می کند، توجه کنید.
- آخرین مهلت طرح پرسش درباره ی صورت سوالات در تالار، تا ساعت ۲۱ روز ددلاین است. دستیار آموزشی مربوطه وظیفه ای در قبال سوالاتی که پس از این زمان پرسیده شوند، ندارد و به آن ها پاسخی داده نخواهد شد.

سوالات نظری

۱. به سوالات زیر پاسخ دهید.

- (الف) مدل های صف finite population و infinite population را توصیف و تفاوت های آنها را بیان کنید.
- (ب) Queue discipline یا همان نظام صف بندی چیست؟ سه مورد از آنها را نام برده و هرکدام را به طور خلاصه شرح دهید.
- (ج) مفهوم random-number streams را توضیح دهید.

۲. اعداد تصادفی زیر را در نظر بگیرید.

0.05-0.08 -0.14-

0.24-0.33-0.33-0.39-0.41-0.44-0.53-0.56-0.58-0.63-0.73-0.76-0.83-0.84-0.88-0.88-0.93

- (بخش الف) با اعمال تست kolmogorov-smirnov فرض اینکه این اعداد توزیع یکنواخت داشته باشند را بررسی کنید. (level of significance = 5%)
- (بخش ب) تست بخش قبل را این بار با روش chi-square و در نظر گرفتن ۱۰ بازه برای اعداد تصادفی تولید شده بررسی کنید. (level of significance = 5%)
- (بخش ج) در اینجا با توضیح دلیل تعیین کنید که از نتیجه کدام تست باید استفاده کرد؟

۳. در این سوال قصد بررسی مدل صف در یک مطب را داریم. فرض کنید که در یک مطب دو پزشک وجود دارند که هرکدام از آنها در ۱۵ دقیقه، یک بیمار را معاینه و درمان می کنند و در هر یک ساعت، یک بیمار به مطب وارد می شود. فرض کنید که میدانیم این مطب امروز تنها ۱۰ بیمار خواهد داشت.
- (الف) تعداد میانگین افرادی که در مطب حضور دارند را بدست آورید.
- (ب) هر بیمار به طور میانگین چند دقیقه را در صف می گذارند؟
- (ج) هر پزشک به طور میانگین در چه نسبتی از یک ساعت، هیچ بیماری را ویزیت نمی کند؟

۴. یک سیستم صف M/M/1 برای یک مغازه را در نظر بگیرید:
- (الف) اثبات کنید احتمال اینکه n مشتری در مغازه حضور داشته باشند برابر است با:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n$$

که $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ برابر utilization است.

- (بخش ب) با استفاده از نتیجه بخش قبل، اثبات کنید که تعداد مشتری های منتظر در صف به طور میانگین برابر است با:

$$L_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

۵. پس از راه اندازی آزادراه تهران-شمال، وزارت راه و شهرسازی قصد دارد بین استفاده از باجه ای اتوماتیک و یا باجه ای سنتی برای دریافت عوارضی یکی را انتخاب کند. هزینه ای باجه ای اتوماتیک دو برابر باجه ای سنتی است و بودجه این وزارتخانه برای این پروژه برابر هزینه ای یک باجه ای اتوماتیک است. بنابراین می تواند یا یک باجه ای اتوماتیک و یا دو باجه ای سنتی قرار دهد. همچنین فرض کنید خودروها را با یک فرایند پواسون با نرخ 1000 نفر در ساعت مدل کنیم که به عوارضی یک شهر می رسند و در یک صف طولانی قرار می گیرند. با توجه به زمان انتظار مورد انتظار، کدام انتخاب برای وزارت راه و شهرسازی بهتر است؟

الف) این صف توسط یک باجه‌ی خودکار با نرخ 1200 نفر در ساعت خدمت رسانی می‌شود. همچنین فرض کنید که زمان‌های سرویس‌دهی از توزیع نمایی پیروی کنند و استراتژی سرویس‌دهی FIFO است. زمان انتظار مورد انتظار (expected waiting time) در حالت پایدار (Steady-state) را پیدا کنید.

ب) صف توسط دو باجه‌ی سنتی با نرخ سرویس‌دهی 600 نفر در ساعت سرویس‌دهی شود. مشابه قسمت قبل فرض کنید که زمان‌های سرویس‌دهی از توزیع نمایی پیروی کنند و استراتژی سرویس‌دهی FIFO است و در این حالت زمان انتظار مورد انتظار (expected waiting time) در حالت پایدار (Steady-state) را پیدا کنید.

پاسخ‌ها

پاسخ سوال اول:

الف) اسلاید ۵ - صفحه ۵

ب) اسلاید ۵ - صفحه ۱۰

ج) اسلاید ۶ - صفحه ۱۵

پاسخ سوال دوم:

الف)

R(i)	0.05	0.08	0.14	0.24	0.33	0.33	0.39	0.41	0.44	0.53	0.56	0.58	0.63	0.73	0.76	0.83	0.84	0.88	0.88	0.93
i/N	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
i/N - R(i)	0	0.02	0.01	-	-	-	-	-	0.01	-	-	0.02	0.02	-	-	-	0.01	0.02	0.07	0.07
R(i) - (i-1)/N	0.05	0.03	0.04	0.09	0.12	0.08	0.09	0.06	0.04	0.08	0.06	0.03	0.03	0.08	0.06	0.08	0.04	0.03	-	-

$$D^+ = 0.07 \text{ \& } D^- = 0.12 \rightarrow D = \max(D^+, D^-) = 0.12$$

$$N = 20 \rightarrow D_{0.05} = 0.294 \rightarrow D \leq D_{0.05}$$

فرض یکنواخت بودن توزیع اعداد را نمیتوان رد کرد.

ب)

interval	O_i	E_i	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	2	2	0	0	0
2	2	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1
4	2	3	-1	1	0.33
5	2	2	0	0	0
6	2	3	-1	1	0.33

7	2	1	1	1	1
8	2	2	0	0	0
9	2	4	-2	4	1
10	2	1	1	1	1

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 4.66$$

$$\alpha = 0.05 \rightarrow \chi^2_{0.05} = 31.4 \rightarrow \chi^2 \leq \chi^2_{0.05}$$

در نتیجه با این تست هم نمیتوان فرض H0 را رد کرد.

پاسخ سوال سوم:

بخش الف)

مدل صف: M/M/2/10/10

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \binom{K}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^K \frac{K!}{(K-n)! \times c! \times c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right\}^{-1} = 0.064$$

$$P_n = \binom{K}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 : n \in \{0, 1, 2, \dots, c-1\}$$

$$P_n = \frac{K!}{(K-n)! \times c! \times c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times P_0 : n \in \{c, \dots, k\}$$

$$L = \sum_{n=0}^K n P_n = 3.17$$

بخش ب)

$$L_Q = \sum_{n=c+1}^k (n-c) P_n = 1.46$$

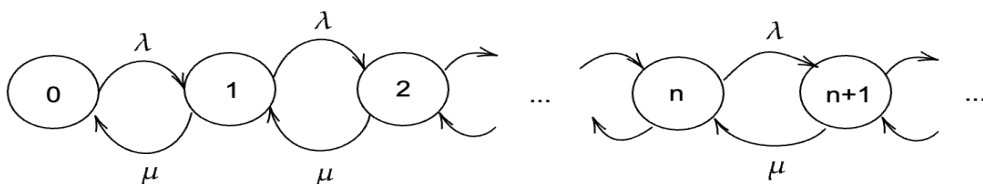
$$\lambda_e = \sum_{n=0}^K (K-n) \lambda P_n = 0.114 \rightarrow w_Q = \frac{L_Q}{\lambda_e} = 12.8 \text{ minutes}$$

بخش ج)

$$\rho = \frac{\lambda_e}{c\mu} = 0.85$$

پاسخ سوال چهارم:

بخش الف)



در هر استتیت این زنجیره تعداد اعضای که در آن قرار گرفته‌اند مشخص است و با هر بار ورود مشتری با نرخ λ به سیستم و یا سرویس گرفتن هر مشتری با نرخ μ ، این زنجیره تغییر حالت می‌دهد. برای حل این زنجیره، با استفاده از معادله **local-balance** در حالت **steady-state** داریم:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$\lambda P_0 + \mu P_2 = \lambda P_1 + \mu P_1 \rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1$$

$$\lambda P_1 + \mu P_3 = \lambda P_2 + \mu P_2 \rightarrow P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2$$

در نتیجه به صورت کلی داریم:

$$P_n = \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} \rightarrow P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

حال با توجه به اینکه جمع احتمال حضور در همه استتیت‌ها برابر یک است:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{P_0}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{P_0}{1 - \rho} = 1 \rightarrow P_0 = 1 - \rho$$

در آخر داریم:

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n$$

بخش ب)

با توجه به نتیجه بخش قبل در ابتدا می‌توانیم L را بدست آوریم:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho) \rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

با توجه به اینکه سیستم تک سرور است، در نهایت:

$$L_Q = L - \rho = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

پاسخ سوال پنج

الف)

$$M/M/1 \text{ queue, } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow L_Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = 4.167 \Rightarrow \omega_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = 0.004167 \text{ hrs} \approx 15.00 \text{ sec}$$

ب)

این بار داریم:

$$M/M/2 \text{ queue, } \rho = \lambda / (2\mu) = 5/6$$

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right] + \left[\frac{(c\rho)^c}{(c!)(1-\rho)} \right] \right\}^{-1} = 0.0909$$

$$\Rightarrow L_Q = \frac{(c\rho)^{c+1} P_0}{c(c!)(1-\rho)^2} = 3.788$$

$$\Rightarrow \omega_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = 0.003788 \text{ hrs} \approx 13.64 \text{ sec}$$

بنابراین گزینه‌ی دوم بهتر است و زمان انتظار در حالت پایدار برای آن کوچکتر است، از طرفی با توجه به اینکه هزینه‌ی این دو گزینه با هم برابر است، شهرداری بهتر است از دو باجه‌ی سنتی استفاده کند.