سوال 1) اگر z یک متغییر تصادفی باشد و معادله زیر را داشته باشیم.

$$x^2 - (z+2)x + 3z - 2.75 = 0$$

با چه احتمالی ریشه های این معادله لزوما حقیقی خواهد بود اگرz از توزیع مثلثاتی با پارامتر های [1,4,6] تبعیت کند.

پاسخ:

برای اینکه ریشه های این معادله حقیقی باشد باید مقدار دلتا بزرگتر مساوی صفر باشد پس به عبارتی داریم:

$$b^2 - 4ac = (z+2)^2 - 4(3z-2.75) = z^2 - 8z + 15 = (z-3)(z-5) \geq 0$$

پس به عبارتی داریم که باید z بزرگتر مساوی 5 و یا کوچکتر مساوی 3 باشد.

پس به عبارتی میتوان فهمید ما باید $p(z \leq 3) + p(z \geq 5)$ را در تابع توزیع مثلثاتی خود بدست بیاوریم که با توجه به این مورد محاسبات زیر به ما این موضوع را نشان میدهد.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{3\times 5}, & \text{if } 1 \leq z \leq 4 \\ \frac{2(6-x)}{2\times 5}, & \text{if } 4 < z \leq 6 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \implies f(z) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{15}, & \text{if } 1 \leq z \leq 4 \\ \frac{2(6-x)}{10}, & \text{if } 4 < z \leq 6 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

حال با استفاده از این *pdf* ها ما مقدار احتمال مورد نظرمان را حساب میکنیم:

$$p(z \leq 3) = p(1 \leq z \leq 3) = \int_1^3 \frac{2(x-1)}{15}\,dx = \frac{2}{15}\int_1^3 (x-1)\,dx = \frac{2}{15}[\frac{1}{2}x^2 - x]\Big|_1^3 = \frac{4}{15}$$

$$p(5 \leq z) = p(5 \leq z \leq 6) = \int_5^6 \frac{2(6-x)}{10}\,dx = \frac{2}{10}\int_5^6 (6-x)\,dx = \frac{1}{5}[\frac{-1}{2}x^2 + 6x]\Big|_5^6 = \frac{1}{10}$$

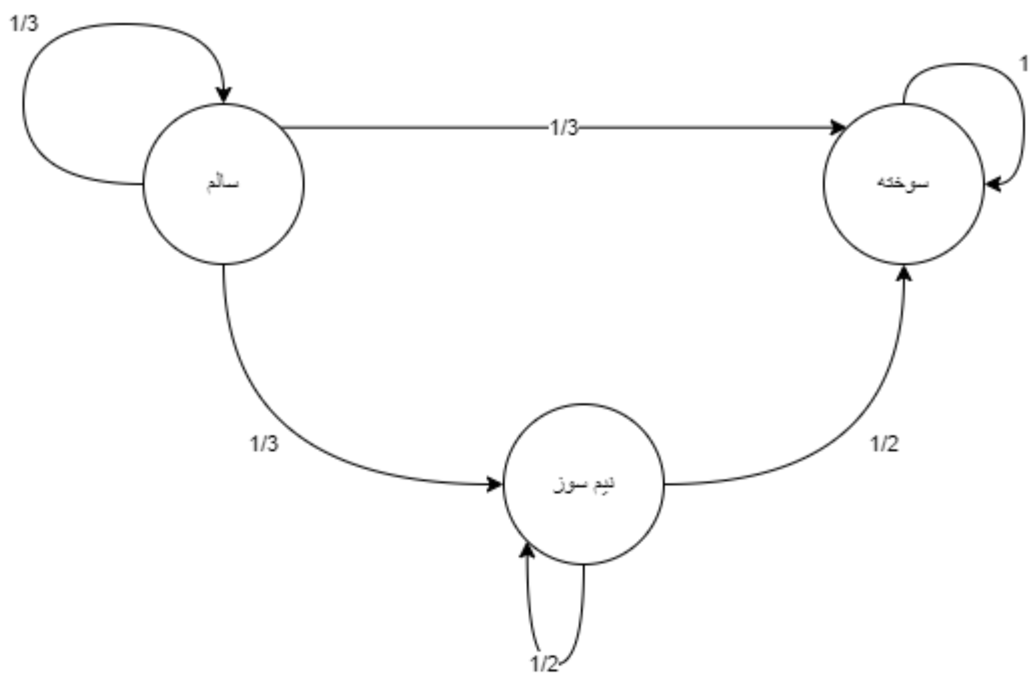
$$\implies p(z \leq 3) + p(5 \leq z) = \frac{4}{15} + \frac{1}{10} = \frac{11}{30}$$

سوال 2) ما یک فیوز داریم که سه حالت سالم و نیم سوز و سوخته دارد. این فیوز از حالت سالم با احتمالات یونیفرم میتواند به هر کدام از حالت ها برود و ولی از حالت نیم سوز با احتمال یونیفرم به حالات نیم سوز و سوخته میتوان رفت و در نهایت اگر فیوز اما بسوزد دیگر کاری نمیتوان کرد.

ابتدا زنجیره مارکوف آن را رسم کنید و در ادامه دو مورد را نشان دهید. اول این مورد که حالت سوخته جاذب است و دوم امید ریاضی زمانی که طول میکشد یک فیوز سالم بسوزد.

پاسخ:

ابتدا شکل زنجیره مارکوف آن را رسم میکنیم:



حال ماتریس ترنزیشن را برای شکل بالا مینویسیم:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال طبق این ماتریس میتوان فهمید که چون در حالت سوخته تنها با احتمال یک به خودش میرود($P_{33} = 1$) پس میتوان گفت این حالت جاذب است.

برای محاسبه امید ریاضی زمانی که طول میکشد تا فیوز بسوزد ابتدا امید ریاضی شروع اینکه اگر از هر استیت شروع کنیم چقدر طول میکشد تا بسوزد را مینویسیم:

$$E[\text{سالم}] = 1 + \frac{1}{3}E[\text{سالم}] + \frac{1}{3}E[\text{نیمسوز}] + \frac{1}{3}E[\text{سوخته}]$$

$$E[\text{نیمسوز}] = 1 + \frac{1}{2}E[\text{نیمسوز}] + \frac{1}{2}E[\text{سوخته}]$$

$$E[\text{سوخته}] = 0$$

پس با حل این سه معادله و سه مجهول داریم:

$$E[\text{سوخته}] = 0\,, E[\text{نیمسوز}] = 2\,, E[\text{سالم}] = 2.5$$

پس میتوان گفت امید ریاضی مدت زمانی که طول میکشد تا یک فیوز سالم بسوزد برابر است با 2.5.

سوال 3) در این سوال ما در جدول زیر زمان ورود و زمان سرویس برای یک سیستم که از صف با الگوریتم FIFO استفاده میکند داده شده است. با توجه بع این جدول سوالات زیر را تکمیل کنید:

شماره مشتری	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
زمان بین ورود	۱	۱	۲	۳	۲	۴	۱	۲	۱	۴
مدت زمان سرویس	۴	۷	۵	۴	۷	۸	۶	۴	۵	۹

الف) زمان شروع و پایان کار افراد را در حالتی که یک پردازنده و درحالتی که دو پردازنده داریم محاسبه کنید.

ب) نمودار تعداد افراد حاضر در سیستم را برای حالت تک پردازه قسمت قبل رسم کنید

ج) ایده شما برای کاهش طول صف در این سیستم چیست؟

پاسخ:

الف) با استفاده از جدول های زیر زمان شروع و پایان را در هر دو حالت نشان داده ایم:

حالت تک پردازنده					
شماره مشتری	زمان بین ورود	مدت زمان سرویس	زمان ورود	زمان شروع کار	زمان پایان کار
1	1	4	1	1	5
2	1	7	2	5	12
3	2	5	4	12	17
4	3	4	7	17	21
5	2	7	9	21	28
6	4	8	13	28	36
7	1	6	14	36	42
8	2	4	16	42	46
9	1	5	17	46	51
10	4	9	21	51	60

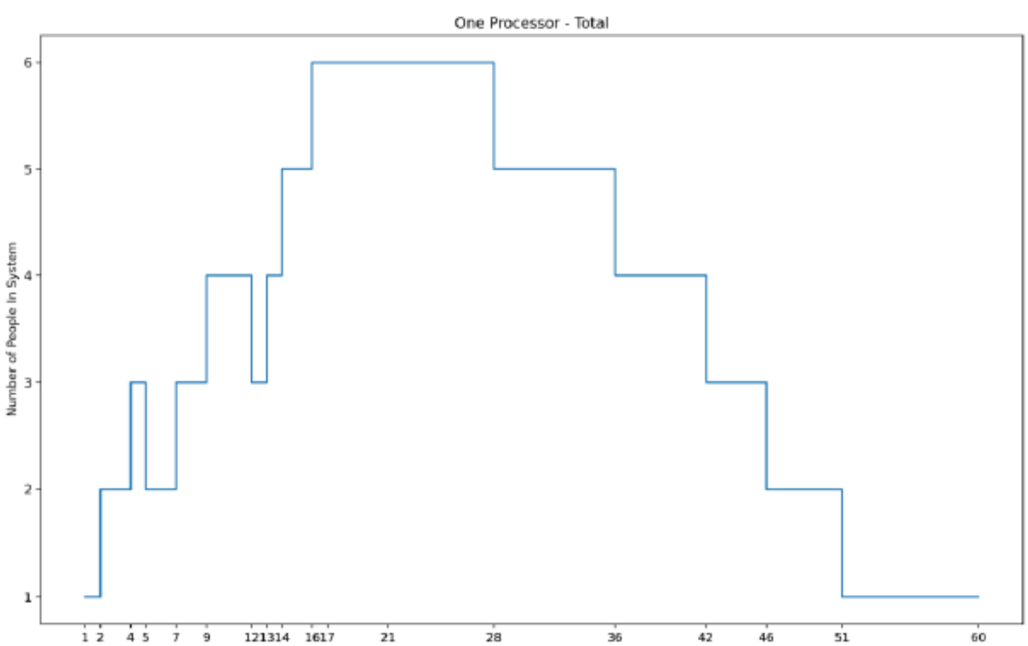
حالت دو پردازنده								
شماره مشتری	زمان بین ورود	مدت زمان سرویس	زمان ورود	زمان شروع کار 1	زمان پایان کار 1	زمان شروع کار 2	زمان پایان کار2	شماره سرور
1	1	4	1	1	5			1
2	1	7	2			2	9	2
3	2	5	4	5	10			1
4	3	4	7			9	13	2
5	2	7	9	10	17			1
6	4	8	13			13	21	2
7	1	6	14	17	23			1
8	2	4	16			21	25	2
9	1	5	17	23	28			1
10	4	9	21			25	34	2

ب) ابتدا در جدول زیر در هر تایم تعداد افرادی که در سیستم حاضرند را بدست میآوریم(از قسمت قبل استفاده میکنیم)

Number of customers in the system.

Time	System population
1	1
2	2
4	3
5	2
7	3
9	4
12	3
13	4
14	5
16	6
17	6
21	6
28	5
36	4
42	3
46	2
51	1
60	0

حال با استفاده از جدول بالا نمودار زیر را رسم میکنیم:



ج) با توجه به اینکه نرخ ورود مشتری به سیستم ما از سرویس دهی بیشتر است پس طول صف بزرگ و بزرگتر خواهد شد. از این رو میتوان با افزودن چند پردازنده و یا افزایش سرعت سرویس دهی از افزایش طول صف جلوگیری کنیم.

سوال 4)

الف) تفاوت verification و validation را در شبیه سازی ذکر کنید.

ب) یک مثال بزنید که شبیه سازی راهکار درستی برای آن نیست و بهتر است از روش دیگری برای آن استفاده کرد. راه دیگر را نیز برای آن پیشنهاد دهید.

پاسخ:

الف) در اصل validation فرایندی برای چک کردن این است که آیا مشخصات شبیه سازی ما با نیازمندی های مشتری یکسان است یا خیر ولی در verification فرایند ما هدفش چک کردن این است که ایا نرم افزار پیاده سازی شده با مشخصات مذکور تطابق دارد یا خیر.

ب) در بعضی مواقع به علت پیچیدگی بالا نمیتوان از شبیه سازی استفاده کرد. مانند تاثیر دارو روی بدن اسنان که بهتر است جای شبیه سازی از ازمایش واقعی روی نمونه های واقعی بهره برد.

سوال 5)

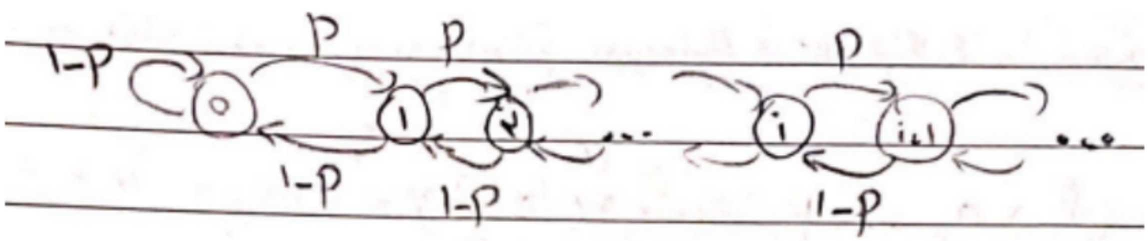
یک زنجیره مارکوف را در نظر بگیرید که دارای تعداد نامتناهی حالت از صفر تا بی‌نهایت است. حالت شروع، استیت صفر است. احتمال خروج از حالت صفر برابر p، عددی بین ۰ و ۱ است. همچنین به احتمال 1-p در استیت صفر باقی می‌ماند. در استیت‌های i>0 تابع ترنزیشن به این صورت تعریف می‌شود که به احتمال p به استیت i+1 و به احتمال 1-p به استیت i-1 می‌رود.

الف) زنجیره‌ی مارکوف مربوط به این فرایند را رسم کنید.

ب) برای p<0.5، احتمال وقوع هر حالت را در بی‌نهایت (steady state) بر حسب p محاسبه کنید.

ج) نشان دهید برای p>0.5، احتمال وقوع حالت‌ها در بی‌نهایت (steady state) تعریف نمی‌شود.

پاسخ 5-الف)



پاسخ 5-ب) احتمال π_i را برابر احتمال حضور در استیت iام در حالت steady در نظر می‌گیریم. به کمک استقرا آن را حساب می‌کنیم.

برای حالت پایه توجه داریم که:

$$\pi_0 = (1-p)\pi_0 + (1-p)\pi_1 \Longrightarrow \ \pi_1 = \frac{p}{1-p}\pi_0$$

فرض استقرا: فرض می کنیم که به ازای i>0

$$\pi_i = \frac{p}{1-p}\pi_{i-1} \qquad (i)$$

گام استقرا: داریم

$$\pi_i = (1-p)\pi_{i+1} + p\pi_{i-1} \overset{(i)}{\Rightarrow} \pi_i = (1-p)\pi_{i+1} + p\left(\frac{1-p}{p}\pi_i\right) = (1-p)\pi_{i+1} + (1-p)\pi_i$$

$$(1-p)\pi_{i+1} = p\pi_i \ \Longrightarrow \pi_{i+1} = \frac{p}{1-p}\pi_i$$

بنابرین، طبق استقرا رابطه کلی π_iها را محاسبه کردیم.

حال به صورت بازگشتی این عبارت را باز می‌کنیم:

$$\pi_i = \frac{p}{1-p}\pi_{i-1} = \frac{p}{1-p}\left(\frac{p}{1-p}\pi_{i-2}\right) = \cdots = \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \pi_0 \quad (ii)$$

از طرفی می‌دانیم دامنه‌ی استیت‌های ممکن برای این فرایند استیت‌های صفر تا بینهایت است و از طرفی جمع احتمال حضور در این استیت‌ها باید برابر یک باشد:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \implies \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \pi_0 = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \xRightarrow{\text{جمع دنباله هندسی}} \pi_0 \left(\frac{1}{1-\frac{p}{1-p}}\right) = 1$$

لازم به ذکر است که نتیجه‌گیری آخر با توجه به p<0.5 درست خواهد بود چرا که ضریب دنباله‌ی هندسی عددی بین صفر و یک خواهد شد و در این صورت جمع اعضای نامتناهی آن همگرا خواهد شد.

$$\pi_0 = \frac{1-2p}{1-p} \quad (iii)$$

بنابرین با جایگذاری (iii) در (ii) داریم:

$$\pi_i = \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \left(\frac{1-2p}{1-p}\right)$$

بنابرین خواسته سوال برآورده شد و احتمال حضور در هر استیت دلخواه در حالت steady را محاسبه کردیم.

پاسخ 5-ج) در گام‌های آخر بخش ب اشاره کردیم که اگر p<0.5 برقرار نباشد، جمع دنباله‌ی هندسی گفته شده در حالت نامتناهی واگرا شده و تعریف نخواهد شد، بنابرین نمی‌توان π_0 را تعریف کرد.

سوال 6 بخش اول) ثابت کنید برای متغیر تصادفی X که متغیری گسسته وعضو اعداد حسابی است.

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty}\big(1 - P(X \le x)\big)$$

پاسخ سوال 6 بخش اول)

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X > x) = P(X > 0) + P(X > 1) + P(X > 2) + \cdots = (P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots) + (P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots) + \cdots = (P(X = 1) \times 1) + (P(X = 2) \times 2) + (P(X = 3) \times 3) + \cdots = \sum_{x=0}^{\infty} (P(X = x) \times x) = E[X]$$

سوال 6 بخش دوم) دو متغیر تصادفی مستقل X و Y را در نظر بگیرید که از توزیع پواسون با پارامترهای $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ پیروی می‌کنند. برای متغیر تصادفی Z = X +Y پارامتر λ را محاسبه کنید.

پاسخ سوال ۶ بخش دوم) راه بدیهی:

$$E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \lambda_۱ + \lambda_۲$$

راه با ایده‌ی استفاده از PMF توزیع پواسون:

$$\begin{aligned} P\{Z = n\} &= P\{X + Y = n\} \\ &= \sum_{k=۰}^{n} P\{X = k, Y = n - k\} \\ &= \sum_{k=۰}^{n} P\{X = k\}P\{Y = n - k\} \\ &= \sum_{k=۰}^{n} e^{-\lambda_۱}\frac{\lambda_۱^k}{k!}\, e^{-\lambda_۲}\frac{\lambda_۲^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_۱+\lambda_۲)}}{n!}\sum_{k=۰}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_۱^k\lambda_۲^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda_۱+\lambda_۲)}\frac{(\lambda_۱+\lambda_۲)^n}{n!}, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \cdots, \infty \end{aligned}$$

سوال 7) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) سه مورد از معایب شبیه‌سازی را نام ببرید و برای هر یک راهکاری پیشنهاد دهید.

ب) سه مورد از تفاوت‌های روش تحلیل و عددی را نام ببرید.

پ) دو سناریو را تشریح کنید که امکان تست در محیط واقعی را نداشته باشند و حتما باید برای آن‌ها شبیه‌سازی صورت گیرد (راهنمایی: مثلا سناریوهایی که با جان انسان سروکار دارند)

پاسخ سوال 7)

الف)

- تفسیر نتایج شبیه‌سازی ممکن است بسیار سخت و پیچیده باشد. در این حالت مثلا می‌توان از نظر افراد خبره استفاده کرد، اگر کنجکاو هستید می‌توانید این لینک را مطالعه بفرمایید.
- ساخت مدل شبیه‌سازی و آنالیز آن هزینه‌بر و زمان‌بر است. برای حل این چالش مثلا می‌توان از **best practice** ها کمک گرفت.
- ساخت یک مدل دقیق به دانش ویژه‌ای نیاز دارد. این عیب با گذر زمان و کسب تجربه حل می‌شود، گرچه مانند عیب اول برگرفتن از نظر افراد خبره می‌تواند کمک‌کننده باشد.

ب)

- در شبیه‌سازی متغیرها باید از پیش تعیین شده باشند، اما در روش تحلیلی مسائل را پارامتریک حل می‌کنیم.
- نتیجه شبیه‌سازی به علت حضور متغیرهای تصادفی ممکن است با واقعیت تفاوت‌هایی داشته باشد اما روش تحلیلی پاسخ‌های قاطعی به ما می‌دهد.
- شبیه‌سازی عموما با ابزارهای کامپیوتری و نرم‌افزاری یا سخت‌افزاری انجام می‌شود در حالی که روش تحلیلی با استفاده از قلم و کاغذ یا راه‌های مشابه انجام می‌پذیرد.

پ)

- یک سناریو می‌تواند در مورد دستورالعمل روش بازگشتن به زمین برای فضانوردان باشد، در این سناریو حتما باید شبیه‌سازی بارها و بارها تکرار شود و تمامی حالات مختلف نیز باید بررسی شوند، اگر به یک نمونه واقعی همچین اتفاقی علاقه دارید، می‌توانید در مورد عملیات نجات آپولو ۱۳ مطالعه کنید، در این عملیات چندین فاجعه رخ داد و زمان برگشت به علت کمبود انرژی موجود در باطری‌ها، کارشناسان دنبال راهی بودند که عملیات ورود فضانوردان به زمین موفقیت آمیز به اتمام برسد ولی منابع در دسترس فضانوردان محدود بود و برای تهیه دستورالعمل بازگشت به زمین، کارشناسان ناسا این وضعیت را شبانه‌روز شبیه‌سازی می‌کردند و به دنبال راه حل می‌گشتند.
- یک سناریوی دیگر می‌تواند تحقیق برای روش‌های جدید برای جراحی باشد، برای سناریو جراحان باید با استفاده از شبیه‌سازها روش‌های جدید را بارها و بارها آزمایش کنند و سناریوهای مختلف را تجربه کنند و پس از آن بصورت تست این اعمال را روی انسان‌های واقعی آزمایش کنند.