



درس شبیه سازی کامپیوتری

دکتر صفایی

پاییز ۱۴۰۲

دانشکده مهندسی کامپیوتر

مهلت ارسال پاسخ: ۱۰ آذر ۱۴۰۲

تمرین دوم

فصل سوم و چهارم

لطفا موارد زیر را به دقت مطالعه کنید

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده در بخش مهلت ارسال است.
- برای تمرینات تاخیر مجاز/غیرمجازی در نظر گرفته نشده است. بنابراین، نهایتا تا مهلت تعیین شده امکان ارسال پاسخ های خودتان را دارید و هرگونه جواب ارسال شده پس از این زمان پذیرفته نخواهد شد.
- تاکید می شود پاسخ خود را حتما در سامانه ی CW آپلود کنید. ارسال در جاهای دیگر قابل قبول نیست و در صورت آپلود نکردن در سامانه ی CW، نمره ی صفر برای تمرین مربوطه لحاظ می شود.
- حتما نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را در پاسخ هایتان درج کنید.
- کل پاسخ های سوالات نظری را در قالب یک فایل pdf آماده کنید و به همراه پاسخ سوال عملی (کد، نتایج و توضیحات ذکر شده در صورت سوال) در یک فایل zip قرار دهید و آن را با شماره دانشجویی تان، به فرمت **HW2-[STU_ID].zip** نام گذاری کرده و در سامانه ی CW بارگذاری کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری تهیه کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه ی مراحل میانی را نیز بنویسید. در غیر این صورت نمره ی سوال مربوطه را دریافت نخواهید کرد.
- در صورت مشاهده ی هرگونه شباهت نامتعارف میان پاسخ های دو (یا چند) نفر، همگی کل نمره ی این تمرین را از دست خواهند داد.
- حتما بر اساس موارد ذکر شده در صورت سوالات، آن ها را حل کنید. در صورت داشتن ابهام، در تالار پرسش و پاسخ مربوط به همین تمرین، مطرح کنید و به پاسخ هایی که دستیار آموزشی مربوطه در تالار بیان می کند، توجه کنید.
- آخرین مهلت طرح پرسش درباره ی صورت سوالات در تالار، تا ساعت ۲۱ روز ددلاین است. دستیار آموزشی مربوطه وظیفه ای در قبال سوالاتی که پس از این زمان پرسیده شوند، ندارد و به آن ها پاسخی داده نخواهد شد.

سوالات نظری

۱- یک نانوایی دو نوع نان بربری و سنگک تولید می کند. این دو نان مستقل از هم و با توزیع پواسون به ترتیب با پارامترهای λ_b و λ_s تولید می شوند.

(الف) فرض کنید T_1 زمان تولید اولین نان باشد. $E[T_1]$ را به دست آورید.

(ب) فرض کنید T_1 اولین لحظه ای باشد که حداقل یک نان سنگک و یک نان بربری تولید شده باشد. $E[T_1]$ را به دست آورید.

۲- فرض کنید متغیر تصادفی X حاصل انداختن یک تاس ۴ وجهی و متغیر تصادفی Y حاصل انداختن یک تاس ۶ وجهی و Z متغیر تصادفی میانگین این دو باشد (در وجه های تاس ها به ترتیب اعداد ۱ تا ۴ و ۱ تا ۶ نوشته شده است). (الف) واریانس متغیرهای X و Y و Z را به دست آورید.

(ب) فرض کنید با انداختن دو تاس، عددهای $X=x$ و $Y=y$ ظاهر می شوند. حال، اگر $x > y$ باشد، به اندازه $2x$ دلار پول می برید وگرنه ۱ دلار می یازید. امید ریاضی سود شما بعد از ۶۰ دست پرتاب دو تاس چقدر است؟

۳- فرض کنید N یک متغیر تصادفی گسسته و طبیعی باشد.

(الف) برای مقادیر دلخواه و نامنفی a_j به ازای $j = 1, 2, \dots$ نشان دهید:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_j) P(N = j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(N \geq i).$$

(ب) ثابت کنید $E[N] = \sum_{j=1}^{\infty} P(N \geq j)$.

(ج) ثابت کنید $E[N(N+1)] = 2 \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(N \geq j)$.

۴- تاسی را پشت سر هم پرتاب می کنیم. امید ریاضی تعداد دفعاتی که باید تاس انداخته شود تا توالی «عدد مضرب ۳ نباشد- عدد مضرب ۳ باشد - عدد مضرب ۳ نباشد» مشاهده شود را بدست آورید و زنجیره مارکوف مرتبط با این رویداد را نیز رسم کنید.

۵- زنجیره مارکوفی با استیت های $S = \{1, 2, 3\}$ و ماتریس انتقال زیر را در نظر بگیرید. در این ماتریس درایه p_{ij} نشان دهنده احتمال جابه جایی از استیت i به j است.

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline 2 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline 3 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

الف) نمودار زنجیره‌ی مارکوف معادل با ماتریس انتقال بالا را رسم کنید.

ب) اگر بدانیم $\frac{1}{4} = P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2)$ است، مقدار $P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1)$ را بدست آورید.

سوال عملی

برای بخش عملی لازم است که در کنار کدی که برای سوال نوشته شده، مستندی نیز تهیه شود و راحل و کد نوشته شده و نیز نتیجه توضیح داده شوند، آپلود کردن خالی برنامه نمره‌ای به همراه نخواهد داشت.

در این بخش قصد داریم یک زنجیره مارکوف گسسته را پیاده‌سازی کنیم.

سلف دانشگاه ۴ نوع غذا دارد: کباب کوبیده، جوجه، فیله سوخاری و قرمه سبزی. هر دانشجو می‌تواند در هر روز یکی از این غذاها را به دلخواه انتخاب کند. در ابتدا احتمال خریدن هر کدام از این غذاها به ترتیب، $0/4$ و $0/3$ و $0/2$ و $0/1$ است. ماتریس transition به شکل زیر است.

	کباب کوبیده	جوجه کباب	فیله	قرمه‌سبزی
کباب کوبیده	0/3	0/5	0/1	0/1
جوجه کباب	0/5	0/3	0/1	0/1
فیله	0/2	0/2	0/2	0/4
قرمه‌سبزی	0/4	0/4	0/2	0

بخش الف) یک تابع پیاده‌سازی کنید که با دریافت p_0 ، بردار احتمال اولیه، و ماتریس transition و نیز عدد N و یکی

از غذاها مثل s ، احتمال اینکه در مرحله‌ی N ام زنجیره مارکوف توصیف شده با این ورودی‌ها، استتیت برابر s باشد

(غذای انتخاب شده در روز N -ام s باشد) را حساب کند. دقت کنید این تابع باید برای هر p_0 و ماتریس transition

دلخواه و معتبر باید بتواند جواب را حساب کند.

بخش ب) با استفاده از تابع فوق احتمال اینکه کامیار در روز ۷۷۷ام جوجه کباب انتخاب کند را حساب کنید.

بخش ج) مقادیر مختلفی از N را از ۱۰ تا ۱۰۰۰۰ امتحان کنید (حداقل ۱۰ مقدار) و احتمال انتخاب جوجه کباب در روز N ام را حساب کنید. سپس این مقادیر را روی نمودار نشان دهید. آیا این مقادیر به عدد خاصی همگرا می‌شود؟

بخش د) روند زنجیره مارکوف را برای $N=777$ به اندازه ۱۰۰۰ بار شبیه‌سازی کنید (با استفاده از sampling). با استفاده از عددهای به دست آمده یک مقدار تقریبی برای احتمال خواسته شده در قسمت ب پیدا کنید. حال این دو مقدار را با هم مقایسه کنید. حال به جای ۱۰۰۰ مرتبه ۱۰۰۰۰ بار روند را شبیه‌سازی کنید. با مقایسه خطای دو شبیه‌سازی نتیجه‌گیری کنید.

موفق باشید