طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۱

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین نظری سوم — برنامه‌ریزی خطی / پیچیدگی / تقریبی — مبحث آزمون ۳

برنامه‌ریزی خطی

۱. در یک شرکت، یک خط تولید بدون سود متوقف شده و در نتیجه یک مقدار ظرفیت تولید این شرکت خالی مانده است. مدیران این شرکت تصمیم دارند تا از این ظرفیت برای تولید یک یا چند محصول A و B و C استفاده کنند. این محصولات در طی سه مرحله و توسط سه ماشین مختلف تولید می‌شوند. جدول زیر اطلاعات ظرفیت هر ماشین و زمان مورد نیاز برای کار این ماشین‌ها نوشته شده است:

نوع ماشین	ظرفیت تولید (ساعت در هفته)	محصول A	محصول B	محصول C
ماشین یک	۵۰۰	۹	۳	۵
ماشین دو	۳۵۰	۵	۴	۰
ماشین سه	۱۵۰	۳	۰	۲

طبق اطلاعات آماری، انتظار می‌رود که تمامی محصولات تولید شده از نوع A و B فروخته شوند اما محصول C تنها ۲۰ واحد در هفته به فروش می‌رسد. میزان سود ناشی از فروش هر واحد محصولات به ترتیب ۵۰، ۲۰ و ۲۵ تومان است. برای اینکه میزان سود این شرکت به حداکثر برسد، این مسئله را با برنامه‌ریزی خطی مدل کنید و توضیح دهید که چه متغیرها و چه محدودیت‌هایی دارید.

۲. نشان دهید برنامه‌ریزی خطی زیر

$$\begin{aligned}
\text{minimze} \quad & \sum_{j=0}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{\substack{j=0 \\ x_j \geqslant 0}}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \\
& i = 1, \dots, m \\
& j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

و حالت گسترش یافته‌ی آن به شکل زیر

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ x_j \geqslant 0}}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \\
& i = 1, \dots, m \\
& j = 1, \dots, n+m
\end{aligned}$$

معادل هستند. بدین معنی که به ازای هر پاسخ برای برنامه‌ریزی خطی اول، یک پاسخ برای برنامه‌ریزی خطی دوم با همان مقدار هدف وجود دارد.

۳. فرض کنید Z یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۰، ۱، ۲، ...، k را با احتمالات $p_۰$، $p_۱$، ...، p_k اخذ می‌کند. گشتاور مرتبه iام این متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E[Z^i] = \sum_{j=۰}^{k} k^i p_j$$

فرض کنید مقادیر گشتاور اول و دوم این متغیر تصادفی به ما داده شده است. در این مسئله می‌خواهیم یک محدوده برای مقدار گشتاور مرتبه چهارم بدست آوریم. نشان دهید این مسئله با برنامه‌ریزی خطی قابل حل است و متغیرهای آن‌را توضیح دهید.

۴. مجموعه‌ی P زیر که با استفاده از دسته‌ای از نامعادلات تعریف می‌شود را در نظر بگیرید:

$$P = \{x \in R^n \mid a_i x \leqslant b_i,\ i = ۱, \ldots, n\}$$

یک توپ با مرکز y و شعاع r را مجموعه‌ی تمام نقاطی تعریف می‌کنیم که در فاصله‌ی حداکثر r از نقطه‌ی y قرار دارند. در این مسئله شعاع بزرگ‌ترین توپی را می‌خواهیم که تماما در مجموعه‌ی P قرار گیرد. برای این مسئله یک راه‌حل برنامه‌ریزی خطی ارائه کنید.

۵. مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را با تعریف متغیرهای slack به نحوی بازنویسی کنید که علامت‌های $\leqslant$ به صورت تساوی نوشته شوند.

$$\begin{array}{ll}
\text{maximize} & ۵x_۱ + ۴x_۲ + ۳x_۳ \\
\text{s.t.} & ۲x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ \leqslant ۵ \\
 & ۴x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ \leqslant ۱۱ \\
 & ۳x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ \leqslant ۸ \\
 & x_۱, x_۲, x_۳ \geqslant ۰
\end{array}$$

۶. یک مغازه‌ی فست‌فود دو نوع پیتزا تولید می‌کند: پیتزا ایتالیایی و پیتزا آمریکایی. در پیتزای ایتالیایی ۳ عدد سوسیس، ۲ عدد قارچ و یک برش از فلفل دلمه استفاده می‌شود. در پیتزای آمریکایی، یک بسته پنیر پیتزا، ۳ عدد قارچ و یک سوسیس استفاده می‌شود. در این رستوران، ۵۰ عدد سوسیس، ۴۰ عدد قارچ و ۱۰ بسته پنیر پیتزا و ۱۵ برش فلفل دلمه وجود دارد. اگر x تعداد پیتزاهای ایتالیایی و y تعداد پیتزاهای آمریکایی باشد که این رستوران تولید می‌کند، محدودیت‌های روی x و y را به صورت نامعادلات نمایش دهید.

۷. فرض کنید n کیلوگرم علوفه در m انبار برای ارسال به k دامداری نگهداری شده است. دامداری iام به d_i کیلوگرم علوفه نیاز دارد و در انبار i ام مقدار s_i کیلوگرم علوفه موجود است. هزینه ارسال یک کیلوگرم علوفه از انبار iام به دامداری jام برابر c_{ij} است. همچنین می‌دانیم مجموعه علوفه مورد نیاز دامداری‌ها نیز برابر n کیلوگرم است. یک برنامه خطی ارائه دهید که با کمک آن بتوانیم با کمترین هزینه همه‌ی علوفه‌ها را ارسال کنیم.

۸. مجموعه‌ای شامل n نیم‌صفحه‌ی $a_i x + b_{iy} \leqslant c_i$ به ازای $۱ \leqslant i \leqslant n$ در صفحه داده شده است. فرض کنید P ناحیه حاصل از اشتراک این نیم‌صفحه‌ها باشد. می‌خواهیم مستطیلی با کمترین مساحت و اضلاع موازی محورهای مختصات پیدا کنیم طوری که تمام ناحیه‌ی P را در بر بگیرد. برای این مسئله یک الگوریتم چندجمله‌ای ارائه دهید.

۹. در مسئله‌ی قبل فرض کنید هدف یافتن دو مستطیل با بیشترین مجموع محیط و اضلاع موازی محورهای مختصات است، طوری‌که هر دو مستطیل کاملا درون P قرار گرفته باشند و با همدیگر هیچ اشتراکی نداشته باشند (اشتراک در اضلاع مجاز است). برای این مسئله یک الگوریتم چندجمله‌ای ارائه دهید.

۱۰. مسئله‌ی غیر خطی زیر را به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \max\{2/3x_1 + x_2, 4/3x_1 - 0/5x_2, 2/5x_1 + 3/5x_2\} \\ \text{s.t.} & \dfrac{x_1}{x_1+x_2} \leqslant 0/5 \\ & 10x_1 + 28x_2 = 3/4 \\ & x_1 + x_2 \geqslant 0 \end{array}$$

۱۱. مسئله غیرخطی زیر را به مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & |0/8x_1 + 0/9x_2| \\ \text{s.t.} & |0/9x_1 + 1/2x_2| \leqslant 10 \\ & x_1 \geqslant 0 \end{array}$$

۱۲. مقدار ماکسیمم عبارت $z = 4x + 2y$ را با شروط زیر پیدا کنید:

$$\begin{array}{l} x, y \geqslant 0 \\ x + 2y \geqslant 4 \\ 3x + y \geqslant 7 \\ -x + y \leqslant 7 \end{array}$$

پیچیدگی محاسباتی

۱۳. فرض کنید Π_1 و Π_2 دو مسئله‌ی تصمیم‌اند و یک کاهش چندجمله‌ای از مسئله‌ی Π_1 به مسئله‌ی Π_2 وجود دارد. به عبارت دیگر می‌دانیم $\Pi_1 \leqslant_P \Pi_2$ است. به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

الف) آیا می‌توان نتیجه گرفت Π_2 ان‌پی‌ـ کامل است؟

ب) اگر یک کاهش چندجمله‌ای از Π_2 به Π_1 وجود داشته باشد، آیا Π_1 و Π_2 ان‌پی‌ـ کامل هستند؟

ج) اگر Π_1 و Π_2 ان‌پی‌ـ کامل باشند، آیا یک کاهش چندجمله‌ای از Π_2 به Π_1 وجود دارد؟

د) آیا اگر $\Pi_1 \notin \mathrm{NP}$ باشد می‌توان نتیجه گرفت $\Pi_2 \notin \mathrm{NP}$ است؟

ه) آیا اگر Π_2 ان‌پی‌ـ کامل باشد می‌توان نتیجه گرفت Π_1 ان‌پی است؟

و) آیا اگر Π_1 ان‌پی‌ـ کامل باشد می‌توان نتیجه گرفت Π_2 ان‌پی است؟

ز) اگر Π_1 ان‌پی‌کامل باشد و $\Pi_2 \in P$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۱۴. در گراف $G = (V, E)$ یک زیرمجموعه‌ی $U \subseteq V$ را احاطه‌گر می‌گوییم اگر هر رأس از گراف درون U باشد یا همسایه‌ای در آن داشته باشد. نشان دهید مسئله‌ی وجود یک زیرمجموعه‌ی احاطه‌گر حداکثر k عضوی در گراف ان‌پی‌ـ کامل است.

۱۵. در یک گراف جهت‌دار $G=(V,E)$، یک پوشش رأسی دوری عبارت است از زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها که هر دور ساده در G از حداقل یکی از آن‌ها بگذرد. نشان دهید مسئله‌ی یافتن پوشش رأسی دوری با اندازه‌ی حداکثر k در گراف ان‌پی است. (نیازی به اثبات ان‌پی ــ کامل بودن نیست.)

۱۶. ثابت کنید دو مسئله‌ی زیر ان‌پی ــ کامل‌اند.

الف) مسئله‌ی خوشه: گراف G و عدد k داده شده است. آیا خوشه‌ای با حداقل k رأس در G وجود دارد؟

ب) مسئله‌ی نیم‌خوشه: گراف G با تعداد زوجی رأس داده شده است. آیا خوشه‌ای که شامل دقیقا نیمی از راس‌های G باشد، در این گراف وجود دارد؟

۱۷. مسئله‌ی تصمیم‌گیری برنامه‌ریزی خطی دودویی به شرح زیر است:

ماتریس $m\times n$ بعدی A از اعداد صحیح و بردار m بعدی b از اعداد صحیح داده شده. مطلوب است دانستن اینکه آیا بردار n بعدی x از مقادیر صفر و یک وجود دارد چنان‌که نامعادله‌ی $Ax\leqslant b$ برقرار باشد؟ نشان دهید این مسئله ان‌پی ــ کامل است.

۱۸. در مسئله‌ی کوله‌پشتی n شیء با ارزش‌های $v_۱,\dots,v_n$ و وزن‌های $w_۱,\dots,w_n$ داده شده است. می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توان تعدادی از این اشیاء را انتخاب کرد که جمع وزن‌های آن‌ها حداکثر W و جمع ارزش‌هایشان حداقل V باشد؟ نشان دهید این مسئله ان‌پی ــ کامل است.

۱۹. یک شرکت پستی باید n مرسوله با وزن‌های $a_۱,\dots,a_n$ کیلوگرم را بین دو شهر جابجا کند و برای این کار ماشین‌هایی با ظرفیت B کیلوگرم بار در اختیار دارد. نشان دهید مسئله‌ی پیدا کردن کمترین تعداد ماشین‌های لازم برای این کار، ان‌پی ــ سخت است.

۲۰. ثابت کنید دو مسئله‌ی زیر ان‌پی ــ کامل‌اند.

الف) گراف G و عدد k به عنوان ورودی داده شده‌اند. آیا درخت پوشایی برای G وجود دارد که شامل حداکثر k برگ باشد؟

ب) گراف G و عدد d به عنوان ورودی داده شده‌اند. آیا G درخت پوشایی دارد که درجه‌ی هیچ رأسی از آن از d بزرگ‌تر نباشد؟

۲۱. گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ با وزن‌های w_e برای یال‌های $e\in E$ داده شده است. وزن‌ها می‌توانند مثبت، صفر یا منفی باشند. می‌خواهیم بدانیم آیا دوری ساده در گراف G یافت می‌شود که جمع وزن‌های یال‌های آن صفر باشد؟ نشان دهید این مسئله ان‌پی ــ کامل است.

۲۲. دو گراف ساده‌ی $G_۱$ و $G_۲$ و عدد طبیعی k داده شده‌اند. می‌خواهیم بدانیم آیا $G_۱$ یک زیرگراف القایی با حداقل k رأس دارد که با زیرگرافی القایی از $G_۲$ یک‌ریخت باشد؟ نشان دهید این مسئله ان‌پی ــ کامل است.

۲۳. الف) در حالت تعمیم‌یافته‌ی مسئله‌ی 3-SAT هر عبارت از فرم CNF می‌تواند شامل تعداد دلخواهی متغیر یا نقیض آن باشد، نه دقیقاً سه متغیر. این حالت تعمیم‌یافته را به مسئله‌ی 3-SAT کاهش دهید.

ب) فرض کنید الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای برای مسئله‌ی تصمیم 3-SAT داده شده است. به کمک آن، یک الگوریتم با زمان اجرای چندجمله‌ای برای مسئله‌ی جستجوی 3-SAT ارائه دهید.

۲۴. یک مکعب‌مستطیل در فضای R^d جعبه نامیده می‌شود اگر یال‌هایش موازی محورهای مختصات باشند. به بیان دقیق‌تر، یک جعبه در فضای d بعدی حاصل‌ضرب دکارتی d بازه به شکل $[r_i,l_i)$ از اعداد حقیقی است. مجموعه‌ای از n جعبه در فضای R^d داده شده و مسئله یافتن نقطه‌ای با حداکثر عمق است. عمق یک نقطه برابر با تعداد جعبه‌هایی است که آن را احاطه کرده‌اند. نشان دهید این مسئله ان‌پی ــ سخت است.

الگوریتم‌های تقریبی

۲۵. الگوریتم زیر را برای مسئله‌ی پوشش راسی در نظر بگیرید. به ازای گراف ورودی G، یک درخت DFS در گراف پیدا کنید و مجموعه‌ی رئوس غیربرگ درخت را به عنوان یک پوشش رأسی برگردانید. نشان دهید این یک الگوریتم ۲ـ تقریب برای مسئله است.

۲۶. گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ داده شده است. می‌خواهیم بزرگ‌ترین زیرمجموعه از یال‌های G را انتخاب کنیم طوری که زیرگراف به‌دست آمده بدون دور باشد. الگوریتمی چندجمله‌ای با ضریب تقریب $\frac{۱}{۲}$ برای این مسئله ارائه دهید.

۲۷. n نقطه روی صفحه داده شده است. می‌خواهیم به ازای k داده شده، k دایره با شعاع مساوی روی صفحه پیدا کنیم که تمام این n نقطه را شامل شود و شعاع دایره‌ها کمینه باشد. الگوریتمی چندجمله‌ای با ضریب تقریب ۲ برای این مسئله ارائه دهید.

۲۸. مسئله‌ی پوشش مجموعه‌ای به این صورت است که مجموعه‌ای به نام U و خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های U به نام F داریم. هدف انتخاب کم‌ترین تعداد از اعضای F است طوری که تمام اعضای U پوشش داده شوند (یعنی هر عضو از U در حداقل یکی از اعضای انتخابی F باشد). اگر f تعداد تکرار عضوی از U باشد که در بیش‌ترین تعداد اعضای F ظاهر شده است، نشان دهید با فرض $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ نمی‌توان الگوریتمی چندجمله‌ای با ضریب تقریب $f - ۱$ برای این مسئله ارائه داد.

۲۹. با استفاده از ایده‌ی گردکردن برنامه‌ریزی خطی، یک الگوریتم با ضریب تقریب f برای مسئله‌ی پوشش مجموعه‌ای ارائه دهید.

۳۰. برای مسئله پیدا کردن کوچک‌ترین تطابق ماکزیمال در یک گراف یک الگوریتم چندجمله‌ای ۲ـ تقریب ارائه دهید.

۳۱. گراف ساده G داده شده است. در بین تمامی درخت‌های پوشای کمینه G دنبال درخت پوشای کمینه‌ای هستیم که حداکثر درجه رئوس آن کمینه باشد. نشان دهید با فرض $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ الگوریتمی چندجمله‌ای با ضریب تقریب کم‌تر از $\frac{۳}{۲}$ برای این مسئله وجود ندارد.

۳۲. فرض کنید n توپ با اندازه‌های مختلف داریم و s_i اندازه‌ی توپ iام است و داریم $۰ < s_i < ۱$. باید این توپ‌ها را در سبدهایی با اندازه‌ی ۱ قرار دهیم و می‌خواهیم تعداد این سبدها را کمینه کنیم. یعنی در هر سبد می‌توان تعدادی از توپ‌ها را قرار داد به این شرط که مجموع اندازه‌ی آن‌ها از یک بیش‌تر نشود.

الف) ثابت کنید که پیدا کردن کم‌ترین تعداد سبد ان‌پی‌ـ سخت است. (راهنمایی: از مسئله partition استفاده کنید.)

ب) الگوریتمی با ضریب تقریب ۲ برای مسئله ارائه دهید.

۳۳. گراف بدون‌جهت و کامل G را در نظر بگیرید، به طوری که وزن تمام یال‌ها ۱ یا ۲ است.(در این صورت مشخص است که G نامساوی مثلثی را ارضا می‌کند.) می‌خواهیم مسئله‌ی TSP را در این گراف خاص حل کنیم. الگوریتمی چندجمله‌ای با ضریب تقریب $\frac{۴}{۳}$ برای آن ارائه دهید. (راهنمایی: ۲ـ تطابق کمینه‌ی گراف را پیدا کنید. یک ۲ـ تطابق زیرمجموعه‌ای از یال‌ها است که هر راس دارای دقیقا ۲ یال مجاور در تطابق باشند.)

۳۴. فرض کنید مجموعه‌ی $L = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ از n عدد طبیعی، و عدد طبیعی C داده شده است. می‌خواهیم زیرمجموعه‌ی $S \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$ را پیدا کنیم طوری که

$$T(S) = \sum_{i \in S} a_i \leqslant C$$

و مقدار $T(S)$ بیشینه باشد.

الف) ثابت کنید الگوریتم حریصانه‌ی زیر به ازای هر $\alpha > ۱$ یک الگوریتم αـ تقریب نیست.

```
Set S ← {} and T ← 0
for i = 1, 2, ..., n do
    if T + a_i ⩽ C then
        S ← S + {i}
        T = T + a_i
return S
```

ب) الگوریتمی با ضریب تقریب $\frac{۱}{۲}$ برای این مسئله ارائه دهید.

۳۵. گراف بدون جهت $G = (V, E)$ داده شده است که یال‌هایش وزن‌های نامنفی دارند. می‌خواهیم به ازای یک عدد k داده‌شده، زیرمجموعه‌های $V_۱, V_۲, \ldots, V_k$ از رئوس را پیدا کنیم طوری که مجموع وزن یال‌هایی که دو سر آن‌ها در مجموعه‌های مختلف قرار می‌گیرند (یال‌های برش) بیشینه شود. الگوریتمی حریصانه و چندجمله‌ای با ضریب تقریب $۱ - \frac{۱}{k}$ برای مسئله ارائه دهید.