



الگوریتم‌های گراف

در سوالات زیر فرض بر این است که در گراف داده‌شده، تعداد رأس‌ها n و تعداد یال‌ها m است.

۱. در یک گراف همبند، بدون جهت و وزن‌دار «درخت پوشای بیشینه» زیردرخت فراگیری است که بیشترین مجموع وزن یال‌ها را دارد. حال اگر الگوریتم کروسکال را تنها با این تفاوت اجرا کنیم که در هر مرحله به‌جای سبک‌ترین یال سنگین‌ترین یال انتخاب شود و باقی ملاحظات الگوریتم ثابت بماند، آیا به ازای هر گراف ورودی «درخت پوشای بیشینه» آن حاصل می‌شود؟ (ادعای خود را اثبات یا با مثالی نقض کنید).

۲. گرافی بدون جهت داریم و قصد داریم یال‌های آن را به مسیرهای یال-مجزا به طول ۲ افزایش دهیم طوری که هر یال دقیقاً در یک مسیر ظاهر شود. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n + m)$ این مسئله را حل کند و یا در صورت نبود جواب این موضوع را گزارش کند.

۳. یک گراف همبند، بدون جهت و وزن‌دار داریم که T یکی از درخت‌های پوشای کمینه‌ی آن است. وزن یکی از یال‌های این گراف به نام e را تغییر می‌دهیم.

(الف) در چه صورت تغییر وزن e باعث می‌شود T دیگر درخت پوشای کمینه نباشد؟ توجه کنید که e می‌تواند عضو T نباشد.

(ب) الگوریتم کارایی ارائه دهید که برای گراف تغییریافته، درخت پوشای کمینه را از روی T به دست آورد.

۴. گراف وزن‌دار G داده شده که در آن وزن هر یال ۱ یا ۲ است. الگوریتمی با زمان اجرای $O(n + m)$ ارائه دهید که کوتاه‌ترین مسیر بین راس دلخواه s و همه‌ی راس‌های دیگر را به دست آورد.

۵. در یک گراف جهت‌دار به یک راس «مرکز» می‌گوییم اگر از آن مسیری به تمام راس‌های دیگر گراف وجود داشته باشد. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(m + n)$ تعیین کند آیا گراف راس مرکز دارد یا خیر.

۶. گراف بدون جهت و وزن‌دار G و دو رأس s و t از گراف داده شده است. می‌خواهیم مسیری از s به t پیدا کنیم که کمینه وزن یال‌های آن در بین تمام مسیرهای ممکن بین s و t بیشینه باشد. الگوریتمی با زمان اجرای $O((n + m) \log n)$ برای این مسئله ارائه دهید.

۷. می‌خواهیم یک کتاب را از زبان فارسی به n زبان دیگر ترجمه کنیم. هزینه‌ی ترجمه بین هر دو زبان ثابت است و جهت ترجمه اهمیتی ندارد. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n^2 \log n)$ کمینه هزینه‌ی لازم برای ترجمه‌ی کتاب از زبان فارسی به تمام زبان‌های دیگر را حساب کند.

۸. در گراف بدون جهت و وزن‌دار G وزن هر یال حداکثر w است. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n + m)$ برای هر یال بررسی کند آیا درون حداقل یک درخت پوشای کمینه است یا خیر.

۹. گراف جهت‌دار و وزن‌دار G را در نظر بگیرید که در آن دور منفی وجود ندارد. شعاع یک راس $u \in V$ را بیشینه‌ی فاصله‌ی آن راس از رئوس دیگر فرض می‌کنیم. یعنی اگر $\delta(u, v)$ بیان‌گر کوتاه‌ترین مسیر از u به

v باشد و $r(u)$ بیانگر شعاع رأس u باشد، آنگاه $r(u) = \max_{v \in V} \delta(u, v)$. الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی $O(n^3)$ ارائه دهید که به ازای تمامی رؤس گراف، شعاع آن‌ها را محاسبه نماید.

۱۰. گراف همبند، بی‌جهت و وزن‌دار G را در نظر بگیرید. عدد گلوگاهی این گراف را w می‌نامیم اگر بین هر دو رأس مسیری باشد که وزن همه‌ی یال‌های آن حداقل به اندازه w باشد. الگوریتمی با زمان اجرای $O((n+m) \log m)$ برای پیدا کردن عدد گلوگاهی ارائه دهید.

۱۱. گراف جهت‌دار و وزن‌دار G با وزن یال‌های مثبت، دو رأس s و t از گراف و عدد صحیح $k \leq n$ داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(kn \log n + km)$ کوتاه‌ترین مسیر بین s و t را پیدا کند که از حداقل k یال بگذرد.

۱۲. در گراف جهت‌دار و وزن‌دار G که دور منفی ندارد، «مسیر کمینه» به ازای یک رأس مانند u برابر با کوتاه‌ترین مسیر منتهی به u با شروع از یک رأس دلخواه و کمترین مجموع وزن یال‌ها است. الگوریتمی ارائه دهید که به ازای تمام رئس‌های گراف مسیر کمینه‌ی آن‌ها را در $O(nm)$ پیدا کند.

شبکه‌های شار

۱۳. پس از انتظار فراوان، فرایند تولید کارت‌های ملی به اتمام رسیده و این کارت‌ها آماده‌ی توزیع میان مردم (n نفر) شده است. دولت m مرکز برای ثبت‌نام و ارائه‌ی نشانی منزل برای تحویل کارت‌های ملی در نظر گرفته است. هر کس تنها لازم است به مراکزی که در شهر خود است رجوع کند و در صورت مراجعه به مراکز موجود در شهرهای دیگر، درخواست وی ثبت نخواهد شد. به دلیل جلوگیری از ازدحام جمعیت و خطر شیوع کروناویروس، ایده‌آل دولت آن است که هر مرکز، حداکثر به درخواست «نزدیک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از $\frac{n}{m}$ نفر» رسیدگی کند. الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای بیان کنید که در خروجی مشخص کند که آیا امکان تخصیص با این شرایط و تحقق هدف ایده‌آل دولت وجود دارد؟

۱۴. در گرافی جهت‌دار با ظرفیت مثبت یال‌ها، یک مبدا و یک مقصد، شار بیشینه داده شده است. در این گراف، هیچ دوری وجود ندارد که تمام یال‌های آن شار مثبت باشند. شار مقداری صحیح دارد. نشان دهید در صورتی که ظرفیت یک یال مشخص را یک واحد افزایش دهیم، شار بیشینه در گراف حاصل در زمان $O(n+m)$ به دست می‌آید که در آن n تعداد رئس‌های گراف و m تعداد یال‌های آن است.

۱۵. اگر گرافی مشابه گراف سوال قبل داشته باشیم، نشان دهید در صورتی که ظرفیت یک یال مشخص را یک واحد کاهش دهیم نیز شار بیشینه در گراف حاصل در زمان $O(n+m)$ به دست می‌آید که در آن n تعداد رئس‌های گراف و m تعداد یال‌های آن است.

۱۶. درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را با روش مناسب (اثبات یا مثال نقض) مشخص کنید:
یک شبکه‌ی شار تنها یک مبدا و یک مقصد دارد و ظرفیت هر یال e آن عدد مثبت c_e است. اگر f یک شار بیشینه از مبدا به مقصد باشد، به ازای هر یال مانند e که از مبدا خارج می‌شود، داریم $f(e) = c_e$.

۱۷. گرافی داریم که ظرفیت تمام یال‌های آن ۱ است. الگوریتمی ارائه دهید که به گونه‌ای k یال از این گراف را حذف کند که پس از حذف آن‌ها، کم‌ترین مقدار ممکن برای شار بیشینه‌ی گراف حاصل به دست آید.

۱۸. درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را با روش مناسب (اثبات یا مثال نقض) مشخص کنید:
یک گراف شار تنها یک مبدا و یک مقصد دارد و ظرفیت هر یال e آن عدد مثبت c_e است. اگر به ظرفیت تمام یال‌های آن یکی اضافه شود، برشی که قبلاً برش کمینه بوده، همچنان برش کمینه خواهد ماند. ث

۱۹. شما مسئول یک آزمایشگاه تحقیقاتی در دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر دانشگاه صنعتی شریف هستید. در آزمایشگاه شما، n محقق مشغول به انجام پژوهش هستند. در هر روز i مجموعه‌ی R_i از پژوهشگران به شکل حضوری به آزمایشگاه می‌آیند. در آزمایشگاه، هر روز، جلسات گزارش کار با حضور شما برگزار می‌شود و یکی از پژوهشگران موظف است داوطلب شده و مدیریت اجرایی جلسه را برعهده بگیرد. هر پژوهشگر مشخص کرده که طی k روز آینده حاضر است حداکثر k_i روز مدیر اجرایی جلسه باشد. الگوریتمی مبنی بر شبکه‌های شار ارائه کنید تا مدیر جلسه را در هر روز از k روز پیش‌رو مشخص نماید.

۲۰. روی کف یک اتاق، n مورچه قرار دارند. علی m عدد خرده‌شیرینی روی کف اتاق قرار می‌دهد (از اندازه‌ی خود خرده‌شیرینی‌ها صرف نظر کنید). مورچه‌ها گرسنه هستند و حداکثر می‌توانند x میلی‌متر (عددی صحیح) بپیمایند تا به شیرینی مدنظر خود برسند؛ اگر یک خرده‌شیرینی بیش از x میلی‌متر با مورچه‌ای فاصله داشته باشد، توسط آن مورچه قابل استفاده نخواهد بود. از طرفی، به دلیل ریز بودن خرده‌شیرینی‌ها، تنها y مورچه می‌توانند از یک خرده‌شیرینی تغذیه کنند. هر مورچه‌ای که به شیرینی نرسد، می‌میرد. الگوریتمی چندجمله‌ای بیان کنید که در زمان چندجمله‌ای امکان زنده ماندن تمام مورچه‌ها را تشخیص دهد.

۲۱. می‌دانیم انسان‌های با گروه خونی O تنها امکان دریافت گروه O را داشته، انسان‌های با گروه خونی A تنها امکان دریافت گروه‌های A و O را داشته، انسان‌های با گروه خونی B تنها امکان دریافت گروه‌های B و O را داشته و انسان‌های با گروه خونی AB امکان دریافت تمام گروه‌های خونی ۴ گانه را دارند. در بیمارستانی، موجودی هر یک از ۴ نوع خون و نیز تعداد افرادی که در هفته‌ی پیش رو به هر یک از این ۴ گروه (به تفکیک) نیاز دارند، جمع‌آوری شده است. الگوریتمی ارائه دهید که کافی بودن میزان خون موجود برای بیماران در هفته‌ی پیش رو را مشخص کند.

۲۲. در یک گراف داده شده، حداکثر تعداد مسیرهای بین دو راس مشخص در گراف که هیچ یال مشترکی با یک‌دیگر ندارند را در زمان $O(nm)$ بیابید، که در آن m تعداد یال‌ها و n تعداد راس‌های گراف است.

۲۳. در دانشگاهی n کلاس داریم که هر یک می‌خواهند پایان‌ترم خود را در یکی از r سالن امتحانی و در یکی از t زمان ممکن برگزار کنند. فرض کنید در یک زمان و یک سالن، تنها امتحان یک درس برگزار می‌شود و امکان برگزاری امتحان یک کلاس در چند زمان یا در چند سالن وجود ندارد. هر آزمون یک مراقب دارد و تعداد کل مراقب‌های دانشگاه p نفر است. هر مراقب، در هر زمان، حداکثر می‌تواند مراقب یک آزمون باشد. ضمناً، هر مراقب فقط برای زمان‌های مشخصی در دسترس است و حداکثر می‌تواند از ۵ آزمون مراقبت کند. تعداد دانش‌جویان هر کلاس، تعداد صندلی‌های هر سالن و نیز امکان این که هر مراقب در زمان مدنظر حضور پیدا کند، به ازای تمام مراقب‌ها و تمام زمان‌ها، در دسترس آموزش دانشگاه است. به کمک شبکه‌های شار، الگوریتمی ارائه دهید که برنامه‌ریزی امتحانات را به شکل کامل بر اساس پارامترهای بیان شده انجام دهد و یا عدم امکان‌پذیری آن را گزارش نماید.

۲۴. گرافی با دو راس s و t مشخص شده در آن در اختیار داریم. الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای بیان کنید که مشخص کند آیا این گراف دارای برش $s - t$ کمینه‌ی یکتا است یا خیر، و سپس درستی الگوریتم خود را نشان دهید.

تطابق رشته‌ها

۲۵. ماشین حالت متناهی تطابق رشته را برای الگوی $P = abaa$ ساخته و سپس مراحل تطابق را روی رشته‌ی $T = bbaabaabbabaabaaab$ شرح دهید.

۲۶. تابع پیشوندی π را برای الگوی $abcdabdcdadcd$ با فرض $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ محاسبه کنید.

۲۷. آرایه‌های P به طول m و T به طول n را در نظر بگیرید ($m < n$). می‌خواهیم تمام مکان‌های i را پیدا کنیم که در آن به ازای هر $1 \leq j \leq m$ داشته باشیم $T[i + j - 1] = c_i \cdot P[j]$ ، که در آن c_i یک عدد

ثابت دلخواه است. در واقع دنبال زیرآرایه‌هایی در T می‌گردیم که عناصر آن مضربی از P باشند. برای این کار الگوریتمی خطی ارائه دهید. به طور مثال در دنباله‌های زیر:

$$P = 1, 2$$

$$T = 1, 3, 6, 1$$

از آن جایی که در خانه‌های دوم و سوم T مقادیر سه برابر P هستند، یک تطابق در مکان $i = 2$ داریم.

۲۸. متن T و الگوی P را به عنوان ورودی داریم. الفبا شامل اعداد طبیعی ۱ تا k است. دنبال خانه‌هایی هستیم که با شروع از آن m بلاک مختلف از T متناظر با $P[1..m]$ باشند. هر بلاک متناظر با یک عدد است هرگاه مجموع اعداد آن بلاک برابر با آن عدد باشد. به عنوان مثال برای $T = [1, 2, 3, 5, 1, 2, 3, 2, 3]$ و $P = [6, 5]$ در خانه‌ی ۱ و ۵ مطابقت داریم. در خانه‌ی ۱ به این دلیل که ۱ و ۲ و ۳ با عدد ۶ متناظر می‌شوند و عدد ۵ با ۵ متناظر می‌شود. در خانه‌ی ۵ نیز به این دلیل که ۱ و ۲ و ۳ با خانه‌ی ۶ متناظر می‌شوند و اعداد ۲ و ۳ با خانه‌ی ۵ متناظر می‌شوند.

۲۹. متن T و الگوی P را در نظر بگیرید. پیشوندی از الگوی P وجود ندارد که پسوند آن نیز باشد (ابتدای آن با هیچ طولی بر روی آخرش منطبق نمی‌شود). خروجی‌های ممکن تابع انتقال در ماشین حالت متناهی برای حالت‌ها و کاراکترهای متفاوت، چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟ جواب خود را اثبات کنید.

۳۰. الگوریتمی با زمان اجرای خطی ارائه بدهید که تشخیص دهد آیا رشته‌ی A یک دوران از رشته‌ی B است. به عنوان مثال رشته‌های $alavi$ و $viala$ دورانی از هم هستند.

۳۱. فرض کنید الگوی P بتواند شامل کاراکتر ویژه‌ی $*$ باشد که نشان‌دهنده‌ی یک رشته‌ی دلخواه به طول صفر یا بیش‌تر است. به طور مثال رشته‌ی $ab * ba * bc$ درون رشته‌ی $aabccbabcab$ به شکل زیر ظاهر شده است:

$$a \underbrace{ab}_{ab} \underbrace{cc}_{*} \underbrace{ba}_{ba} \underbrace{cba}_{*} \underbrace{bc}_{bc} ab$$

(الف) با استفاده از الگوریتم بدوی تطابق رشته، الگوریتمی با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای ارائه دهید که تشخیص دهد آیا الگوی P در رشته‌ی T یافت می‌شود یا خیر.

(ب) ماشین حالت متناهی‌ای برای این مسئله طراحی کنید که بتواند رخداد الگوی P را در متن T در زمان $O(n)$ بررسی کند ($n = |T|$).

۳۲. رشته‌ی s متشکل از کاراکترهای انگلیسی را در نظر بگیرید. فرض کنید به شما گفته می‌شود که با اضافه کردن تعدادی کاراکتر به ابتدای این رشته یک رشته‌ی آینه‌ای بسازید. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان خطی کوتاه‌ترین رشته‌ی آینه‌ای قابل ساخت را خروجی دهد.

۳۳. رشته‌ی s را کاراکتر به کاراکتر می‌سازیم. در هر مرحله یک کاراکتر جدید به ابتدای رشته‌ی ساخته شده اضافه می‌کنیم. در هر مرحله به اندازه بزرگترین پیشوند (Prefix) مشترک بین s و رشته‌ی در حال ساخت امتیاز می‌گیریم. الگوریتمی ارائه دهید که امتیاز نهایی را به ما بدهد.

۳۴. دو رشته‌ی s و sub و یک نگاشت (Mapping) از کاراکترها را داریم. می‌خواهیم ببینیم رشته‌ی sub در رشته‌ی s وجود دارد یا نه با این تفاوت که می‌توانیم کاراکترهای sub را در صورت نیاز تعویض کنیم. الگوریتمی ارائه دهید که بررسی کند آیا چنین کاری امکان‌پذیر است یا خیر. الگوریتم شما باید از اردر $O(n + m)$ باشد که n طول s و m طول sub است. همچنین هر کاراکتر فقط یکبار می‌تواند جایگزین شود. ولی از یک mapping می‌توان چندین بار استفاده کرد.

۳۵. متن T به طول n و الگوی P به طول m روی الفبای انگلیسی داده شده است. می‌خواهیم مکان تمام خانه‌هایی را در متن پیدا کنیم که با شروع از آن خانه، m کاراکتر بعدی، یک جایگشت از P باشند. الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی $O(n + m)$ برای حل این مسئله ارائه دهید.

۳۶. متن T به طول n و الگوی P به طول m را در نظر بگیرید. فرض کنید کاراکترهای این دو رشته به صورت تصادفی از یک الفبای d عضوی (حداقل دو عضوی) انتخاب شده‌اند. نشان دهید امید ریاضی تعداد مقایسه‌های انجام شده توسط الگوریتم ابتدایی تطابق رشته به صورت زیر است:

$$(n - m + 1) \frac{1 - d^{-m}}{1 - d^{-1}} \leq 2(n - m + 1)$$

فرض بر این است که الگوریتم ابتدایی تطابق رشته، در صورت برخورد با mismatch دیگر حلقه‌ی درونی را ادامه نمی‌دهد و به مرحله‌ی بعدی می‌رود.