



تقسیم و حل

۱. یک دریاچه از آرایه‌ی دوبعدی را «قله» می‌نامیم اگر از هیچ یک از دریاچه‌های مجاور خود کوچک‌تر نباشد. یک الگوریتم از مرتبه‌ی زمانی $O(n)$ ارائه دهید که قله‌ی یک آرایه‌ی دوبعدی $n \times n$ عضوی را بیابد.
۲. در یک آرایه، زوج i, j را نابه‌جایی می‌نامیم اگر $i < j$ و $A[i] > A[j]$ باشد. یک الگوریتم از مرتبه‌ی زمانی $O(n \log n)$ بیابید که تعداد تمام نابه‌جایی‌های یک آرایه را پیدا کند.
۳. در شرکتی، لیستی از مشتریان وجود دارد. به دلیل وجود اشکالی در سامانه‌ی مدیریت مشتریان شرکت، به ازای برخی یا تمام مشتریان، ممکن است چندین پرونده تشکیل شده باشد. شرکت تمایل به حذف پرونده‌های تکراری دارد. تنها عمل مجاز بر روی پرونده‌ها، مقایسه‌ی دو پرونده با یکدیگر است. الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n \log n)$ بیابید که این کار را انجام دهد.
۴. در یک سیستم بانکی، حسابی را فاسد می‌نامیم که تعداد تراکنش‌های بانک به مقصد آن حساب بیش‌تر از نیمی از کل تراکنش‌های بانک باشد. یک الگوریتم با استفاده از تقسیم و حل بیابید که مشخص کند چه حسابی در بانک، فاسد است.
۵. n پیچ بر روی دیوار قرار دارند. از شما خواسته شده است که یک قاب را طوری طراحی کنید که پیچ‌ها را بپوشاند. از طرفی محیط قاب باید کمترین میزان خود را داشته باشد. حال شما باید ابعاد و قاب را بیابید. (راهنمایی: فرض کنید یک کش دور پیچ‌ها انداخته‌ایم و آنرا تا می‌توانیم سفت می‌کنیم. شکل کش همان قاب است.)
۶. شما به عنوان مسئول خرید و فروش سهام یک سازمان تعیین شده‌اید. یک لیست از پیش‌بینی تغییرات قیمت سهام در روزهای آینده که توسط کارشناسان پیش‌بینی بازار در شرکت تهیه شده، در اختیار شما قرار گرفته است. الگوریتمی ارائه دهید که تعیین کند که سهام چه زمانی خریداری و چه زمانی به فروش رود تا بیش‌ترین سود حاصل شود.
۷. در یک آرایه، عملیات «شیفت دایره‌ای» به مقدار k را چنین تعریف می‌کنیم که k عضو از انتهای آرایه، یکی یکی به ترتیب به ابتدای آرایه افزوده شوند. یک لیست که حاصل «شیفت دایره‌ای» یک آرایه‌ی صعودی بوده است، به شما داده شده است. مقدار شیفت (k) را به کمک یک الگوریتم از مرتبه‌ی زمانی $O(\log n)$ بیابید.
۸. تعداد n توزیع احتمال بر روی بازه‌ی صفر تا یک تعریف شده‌اند. بازه‌ی صفر تا یک را به گونه‌ای بین این توزیع‌ها تقسیم کنید (بدون اشتراک) که احتمال رخداد هر بازه در توزیع متناسب شده، حداقل $\frac{1}{n}$ باشد. فرض کنید که عملگرهای زیر در زمان ثابت قابل اجرا هستند:

$$F(a, b, i) = F_i(b) - F_i(a) \quad \text{الف}$$

$$P(b, v, i) := \text{a point } b \text{ such that } F(a, b, i) = v \quad \text{ب}$$

توجه کنید که $F_i(x)$ تابع توزیع احتمال تجمعی است.

۹. دو آرایه‌ی مجزا از اعداد داریم که طول هر یک n است. تنها سوالی که مجاز به پرسیدن آن هستیم، چیستی k امین عدد کوچک هر آرایه است. ثابت کنید که با $\log n$ سوال می‌توان میانه‌ی این دو آرایه (n امین کوچک‌ترین عدد) را یافت.

۱۰. آرایه‌ی مرتبی به طول n داریم. الگوریتمی بیابید که اندیسی مانند i را در آرایه پیدا کند که $A[i] = i$ باشد. (فرض کنید اعضای آرایه متمایز و مثبت هستند.)

۱۱. الف) یک درخت دودویی کامل را در نظر بگیرید. نقطه‌ی کمینه‌ی محلی، نقطه‌ای است که مقدار روی آن، از هر راس که با یک یال به آن متصل است، کم‌تر باشد. در زمان $O(\log n)$ کمینه‌ی محلی در یک درخت را بیابید.

ب) در یک صفحه‌ی دو بعدی، یک گراف وجود دارد که هر راس آن یک نقطه با مختصات صحیح در صفحه است. این گراف دارای N^2 راس است و هر راس مانند (x_i, y_i) به راس دیگری مانند (x_j, y_j) متصل است، اگر $|x_i - x_j| + |y_i - y_j| = 1$. الگوریتمی بیابید که در زمان $O(n)$ نقطه‌ی کمینه‌ی محلی را بیابد.

۱۲. n دونه هر یک در یک موقعیت مشخص و با سرعت ثابت شروع به دویدن می‌کنند. مشخص کنید کدام یک از این دونده‌ها، حداقل یک بار در طی مسابقه از بقیه جلوتر خواهد بود.

الگوریتم‌های حریصانه

۱۳. یک گراف را «خوب» می‌نامیم، اگر تعداد یال‌های آن حداکثر ۸ تا بیش‌تر از تعداد راس‌های آن باشد. فرض کنید یک گراف «خوب» وزن‌دار با وزن‌های متمایز روی یال‌هایش به شما داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n)$ درخت پوشای کمینه‌ی این گراف را پیدا کند.

۱۴. الگوریتمی پیدا کنید که هر عدد کسری بین صفر و یک را بتواند به شکل $\sum_i \frac{1}{k_i}$ نمایش دهد که در آن هر k_i یک عدد صحیح است. (هدف یافتن k_i ‌ها است.)

۱۵. یک شرکت مخابراتی می‌خواهد به خانه‌هایی که در طول یک مسیر و به موازات آن قرار دارند، خدمات ارتباطی ارائه کند. برای این منظور، شرکت از دکل‌هایی با طول برد ۸ کیلومتر استفاده می‌کند. الگوریتمی بیابید که این شرکت به کمک آن بتواند با کم‌ترین تعداد دکل، به تمام خانه‌های این مسیر خدمات ارائه دهد.

۱۶. یک شرکت پست می‌خواهد بسته‌های خود را توسط پیک به مناطق مختلف ارسال کند. هر پیک می‌تواند دو بسته را حمل کند، به شرط آن که مجموع وزن آن‌ها از عدد w بیشتر نشود. الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که بتوان به کمک آن، بیش‌ترین تعداد بسته‌ها را به طور موازی ارسال نمود.

۱۷. یک رستوران n مشتری دارد و m آشپز به آن‌ها خدمات می‌دهند. تهیه‌ی هر غذای p_i ، مدت t_i زمان می‌برد. الگوریتمی ارائه دهید که زمان منتظر ماندن مشتریان کمینه شود. (فرض کنید همه‌ی مشتریان با هم وارد رستوران شده‌اند. هم‌چنین، مقصود از زمان انتظار، زمان ورود مشتری تا زمان گرفتن غذا توسط وی است.)

۱۸. ماتریسی $n \times n$ را در نظر بگیرید که درایه‌های آن، صفر یا یک هستند. به ازای هر سطر و هر ستون، تعداد یک‌های موجود در آن سطر یا ستون داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که ماتریس اصلی را مطابق تعداد یک‌های داده شده بسازد.

۱۹. فرض کنید در گراف G با n رأس، هیچ راسی دارای درجه‌ای بیش‌تر از d نیست. نشان دهید می‌توان رأس‌های گراف را با حداکثر $d+1$ رنگ متفاوت رنگ‌آمیزی کرد طوری که دو رأس مجاور دارای رنگ یکسان نباشند.

۲۰. تعدادی دایره با شعاع‌های نه لزوماً یکسان روی صفحه قرار گرفته‌اند، به گونه‌ای که تمامی آن‌ها بالای محور x بوده و هیچ دو دایره‌ای مساحت مشترک ندارند. شما روی مبدا مختصات ایستاده‌اید و در هر مرحله می‌توانید یک تیر پرتاب کنید. تیر روی یک خط راست حرکت می‌کند و به هر دایره‌ای برخورد کند، آن را می‌ترکاند. به بیان دیگر، مسیر حرکت تیر، یک نیم‌خط با شروع از مبدا مختصات است که هر دایره‌ای با این نیم‌خط برخورد داشته باشد یا مماس شود، می‌ترکد. الگوریتمی کارا ارائه دهید که با کمترین تعداد تیر ممکن، همه‌ی دایره‌ها را بترکاند.

۲۱. در مسئله‌ی خرد کردن پول (خرد کردن مقدار مشخصی پول با انواعی از سکه‌ها، به طوری که کمترین تعداد سکه ممکن استفاده شود) ثابت کنید اگر سکه‌های ما به فرم c^0, c^1, \dots, c^k باشند به طوری که $c > 1$ و $k \geq 1$ ، الگوریتم حریصانه همواره پاسخ بهینه را به دست می‌آورد.

۲۲. آرایه‌ی A که دارای n عدد صحیح نامنفی است را در نظر بگیرید. به آرایه‌ی «زیبا» می‌گوییم که در آن زوجیت عناصر آرایه با زوجیت اندیششان یکسان باشد. به بیان دیگر، به ازای هر i به عنوان اندیس آرایه، داشته باشیم:

$$i \bmod 2 = A_i \bmod 2$$

اگر در هر مرحله تنها بتوانیم دو عنصر آرایه را با یکدیگر جابه‌جا کنیم، الگوریتمی ارائه دهید که کمترین تعداد مرحله برای تبدیل آرایه‌ی داده‌شده به یک آرایه‌ی زیبا را به دست آورد.

۲۳. شما قصد دارید در نوروز سال ۱۴۰۲ به n نفر از دوستانتان هدیه بدهید. در حال حاضر، هر هدیه شامل تعدادی سیب و تعدادی موز است. به طور دقیق‌تر، هدیه‌ی i شامل a_i سیب و b_i موز است. از آن جایی که می‌خواهید عدالت بین دوستانتان رعایت شود، نیاز است که همه‌ی هدایا مانند هم شوند. شما در هر گام می‌توانید یا یک سیب از یکی از هدایا بخورید، یا یک موز از یکی از هدایا بخورید و یا یک سیب و یک موز از یکی از هدایا بخورید. الگوریتمی ارائه دهید که حداقل تعداد مراحل مورد نیاز برای یکسان‌سازی هدایا را به دست آورد.

۲۴. پارسا برای سفر به خارج از کشور، باید مقدار n یورو عوارض خروج از کشور بپردازد. او تنها سکه‌های یک و دو یورویی همراه خود دارد و هر دو نوع سکه را نیز به یک اندازه دوست دارد، بنابراین تمایل دارد که تعداد سکه‌های پرداختی از هر نوع، تا حد امکان برابر باشد. الگوریتمی برای کمک به وی طراحی کنید. به عبارت دیگر، الگوریتمی طراحی کنید که c_1 و c_2 را به گونه‌ای بیابد که $c_1 + 2c_2 = n$ شود و $|c_1 - c_2|$ کمینه مقدار ممکن باشد.

برنامه‌ریزی پویا

۲۵. ساختاری مثلثی شکل از اعداد (مانند شکل زیر) را در نظر بگیرید. اگر فردی بخواهد از بالای این مثلث به پایین آن حرکت کند و در هر مرحله فقط بتواند به یک خانه‌ی مجاور پایینی برود، الگوریتمی ارائه دهید که طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن (از نظر مجموع اعداد) را خروجی دهد.

		۲		
	۳		۱۰	
	۸	۵	۶	
۶	۱	۹	۳	

به عنوان مثال در شکل بالا طول کوتاه‌ترین مسیر، $11 = 1 + 5 + 3 + 2$ است.

۲۶. یک ماتریس از اعداد صحیح مانند $A_{n \times m}$ را در نظر بگیرید. تابع $sum(i, j, k, l)$ یک زیر مستطیل از این ماتریس را دریافت می‌کند و مجموع اعداد این زیرمستطیل را خروجی می‌دهد. به عبارت دقیق‌تر:

$$sum(i, j, k, l) = \sum_{u=i}^j \sum_{v=k}^l A_{u,v}, \text{ } 0 \leq i \leq j \leq n, 0 \leq k \leq l \leq m,$$

الگوریتمی ارائه دهید که مقادیر i, j, k, l را به گونه‌ای بیابد که $sum(i, j, k, l)$ بیشینه باشد.

۲۷. به عدد n یک عدد قوی می‌گوییم، اگر اختلاف هر دو رقم مجاور در آن حداقل ۲ باشد. مثلاً ۲۵۲۷ عددی قوی است اما ۲۱۲۲ قوی نیست. الگوریتمی ارائه دهید که با دریافت دو عدد l و r تعداد اعداد قوی در بازه $[l, r]$ را در زمان $O(|r|)$ بیابد که $|r|$ طول عدد r است.

۲۸. درخت ریشه‌دار T به ما داده شده است که هر راس v آن ارزش w_v دارد. زیرمجموعه‌ی مستقل به زیرمجموعه‌ای از رئوس گفته می‌شود که در آن هیچ دو راسی وجود نداشته باشند که یکی از آن‌ها پدر دیگری باشد. الگوریتمی ارائه دهید که زیرمجموعه‌ی مستقل با بیش‌ترین مجموع ارزش رئوس را بیابد.

۲۹. آرایه A به طول n را در نظر بگیرید. ابتدا اندیسی دلخواه مانند i را انتخاب می‌کنیم. سپس تا زمانی که $i \leq n$ است، در هرگام به اندازه A_i امتیاز کسب می‌کنیم و i را به همین اندازه افزایش می‌دهیم. هرگاه $i > n$ شود، متوقف می‌شویم. الگوریتمی ارائه دهید که با دریافت آرایه، اندیسی که در آن امکان کسب بیشترین امتیاز وجود دارد را بازگرداند.

۳۰. امیر n روز از شرکت مرخصی گرفته است و می‌خواهد که برای روزهای مرخصی‌اش برنامه‌ریزی کرده و در این ایام، مهارت برنامه‌نویسی و ورزشی‌اش را تقویت کند. امیر می‌داند که در هرکدام از روزهای مرخصی‌اش آیا باشگاه ورزشی باز خواهد بود یا خیر و این که آیا مسابقه‌ی برنامه‌نویسی برگزار خواهد شد یا خیر (در مجموع یک روز چهار حالت مختلف دارد). امیر تمایلی ندارد که در دو روز متوالی، فعالیت یکسان انجام دهد و همچنین او می‌تواند در یک روز هیچ فعالیتی انجام ندهد و استراحت کند. الگوریتمی ارائه دهید که با دریافت تعداد روزهای مرخصی و وضعیت باز یا بسته بودن باشگاه ورزشی و برگزاری مسابقه برنامه‌نویسی، حداقل تعداد روزهایی که امیر استراحت خواهد کرد را بیابد.

۳۱. ماشینی داریم که اگر هر حرف انگلیسی را جلوی دوربین روی آن قرار دهیم، آن حرف را بر روی کاغذ چاپ می‌کند. متأسفانه متوجه شده‌ایم که این دستگاه با مشکلی مواجه شده و با قرار دادن حرف w و m به ترتیب بر روی کاغذ vv و nn را چاپ می‌کند. الگوریتمی ارائه دهید که با دریافت رشته‌ی چاپ شده توسط این ماشین، تعداد رشته‌های ورودی ممکن قرار گرفته شده جلوی دوربین که منجر به چاپ این رشته شده‌اند را محاسبه کند.

۳۲. n رشته در اختیار داریم که می‌خواهیم آن‌ها را به ترتیب الفبایی یا همان lexicographical مرتب کنیم. برای مرتب‌سازی رشته‌ها، اجازه جابه‌جا کردن رشته‌ها را نداریم و تنها در صورت نیاز اجازه داریم که یک رشته را معکوس کنیم؛ معکوس کردن هر رشته نیز هزینه‌ی مخصوص به خود را دارد. الگوریتمی ارائه دهید که با دریافت رشته‌ها و هزینه‌ی معکوس کردن آن‌ها، با کمترین هزینه ممکن، رشته‌ها را به شکل الفبایی مرتب کند.

۳۳. آرایه‌ای از اعداد صحیح به طول n داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که بزرگترین زیردنباله پی‌درپی در این آرایه را بیابد. منظور از زیردنباله‌ی پی‌درپی، زیردنباله‌ای به شکل $[x, x+1, \dots, x+k-1]$ است که طول آن k بوده و در آن x عددی صحیح است.

۳۴. در یک خیابان به طول بی‌نهایت، n درخت کاشته شده است که از m گونه‌ی مختلف هستند. شهرداری متوجه شده است که مواد معدنی مورد نیاز درختان با یک‌دیگر متفاوت است و به همین دلیل تصمیم گرفته است با کشیدن $1 - m$ حصار بین درختان، m بخش ایجاد کند که بتواند بهتر از درختان نگهداری کند.

هر بخش، مختص به یک گونه است. از آن جایی که در حال حاضر این کار میسر نیست، نیاز است که تعدادی از درختان جابه‌جا شوند. به دلیل هزینه‌ی سنگین این جابه‌جایی و آسیب‌های احتمالی ناشی از آن، شهرداری مایل است که با حداقل تعداد جابه‌جایی درختان، به هدف خود برسد. الگوریتمی ارائه دهید که با دریافت تعداد درختان، تعداد گونه‌ها و همچنین مختصات حقیقی درخت‌ها با نوع هریک از آن‌ها، حداقل تعداد جابه‌جایی ممکن برای انجام این کار را بیابد. (نمی‌توان در یک نقطه، بیش از یک درخت داشت).

۳۵. آرایه‌ی A را در نظر بگیرید که n عنصر دارد. در هر مرحله ما می‌توانیم یک عنصر را انتخاب کنیم (مثلاً A_k) و تمامی عناصر با مقادیر $A_k + 1$ و $A_k - 1$ را از آرایه حذف کرده و به اندازه A_k امتیاز دریافت کنیم. الگوریتمی طراحی کنید که بیشینه‌ی مقدار امتیاز قابل دریافت را محاسبه کند.

۳۶. خیابان ولیعصر n درخت دارد که برخی از آن‌ها رنگ‌آمیزی شده‌اند، اما برخی دیگر بدون رنگ‌اند. درختان رنگی با m رنگ مختلف رنگ‌آمیزی شده‌اند. همچنین، هزینه‌ی رنگ هر درخت با هر رنگ، مقداری مشخص است. به عنوان مثال، هزینه رنگ کردن درخت i با رنگ j برابر p_{ij} است. شهردار تصمیم گرفته است که درختان رنگ نشده‌ی خیابان را نیز رنگ‌آمیزی کند. از نظر شهردار، زیبایی یک رنگ‌آمیزی برابر حداقل تعداد گروه‌های یک‌رنگ متوالی است، به گونه‌ای که هر گروه شامل تعدادی درخت کنار هم و هم‌رنگ باشد؛ به عنوان مثال، اگر رنگ درختان به شکل: $۱, ۳, ۲, ۲, ۳, ۱, ۳, ۲, ۱, ۱, ۱, ۲$ باشد، زیبایی رنگ‌آمیزی برابر ۷ است که در آن گروه‌ها به شکل: $[۳], [۱], [۳], [۲, ۲], [۳], [۱, ۱, ۱], [۲]$ هستند. شهردار می‌خواهد با صرف حداقل هزینه‌ی ممکن، درختان رنگ نشده را به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کند که زیبایی رنگ‌آمیزی دقیقاً برابر k شود. الگوریتمی برای این کار ارائه دهید. دقت کنید که امکان رنگ‌آمیزی درختان رنگ‌شده وجود ندارد.