Capitulo 2 Fundamentos Matemáticos

Garnelo Perez Imanol

29 de Enero de 2025

Teoría de Grafos

Introducción

La teoría de grafos es una disciplina matemática cuyo desarrollo ha estado motivado por sus diversas aplicaciones en ciencia, ingeniería y otros campos.

Orígenes

El primer artículo sobre teoría de grafos fue escrito por Euler en 1736 para resolver el problema de los puentes de Königsberg. Desde entonces, matemáticos como Euler, Vandermonde, Cauchy, Cayley, entre otros, han contribuido a su desarrollo.

Definición

Geométricamente, un grafo es un conjunto de puntos en el espacio conectados por líneas. Algebraicamente, un grafo se define como un par ordenado (V, E), donde V es el conjunto de vértices y E el conjunto de lados.

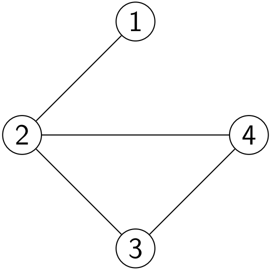
Planteamiento de la red

Así, algebraicamente, un grafo G se define como un par ordenado $G = (V, E)$, donde V hace alusión al conjunto de vértices y E al conjunto de lados. En esta investigación usaremos la notación explícita o la notación simplificada según sea necesario. Por ejemplo:

$$G = (V, E) = \{(V(G), E(G))\},$$

$$V = V(G) = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$E = E(G) = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}.$$



¿Qué es un Grafo y una Red?

Grafo: Un grafo es una estructura matemática compuesta por un conjunto de **vértices** (o nodos) y un conjunto de **aristas** (o enlaces) que conectan pares de vértices.

Red: Una red es un grafo en el que los nodos y las conexiones representan entidades y relaciones en un contexto específico, como redes sociales, eléctricas o de transporte.

Ejemplo:

- En una red social, los nodos representan personas y las aristas, sus relaciones (amistad, seguimiento, etc.).
- En una red de transporte, los nodos son ciudades y las aristas, carreteras o rutas.

Cuando dos vértices son adyacentes

Definición de adyacencia

Dos vértices en un grafo son adyacentes si están conectados directamente por una arista. Es decir, si existe una arista $(u, v) \in E$, entonces los vértices u y v son adyacentes.

Ejemplo

En el grafo mostrado anteriormente:

- Los vértices 1 y 2 son adyacentes porque están conectados por la arista $(1, 2)$.
- Los vértices 1 y 3 no son adyacentes porque no existe una arista directa entre ellos.

Relación de incidencia

Definición de incidencia

En un grafo, se dice que una arista es incidente a un vértice si ese vértice es uno de los extremos de la arista. Formalmente, si $e = (u, v) \in E$, entonces e es incidente a los vértices u y v.

Ejemplo

En el grafo mostrado anteriormente:

- La arista $(1, 2)$ es incidente a los vértices 1 y 2.
- La arista $(2, 4)$ es incidente a los vértices 2 y 4.
- Ninguna arista es incidente entre los vértices 1 y 4, ni entre 2 y 3, ni entre 3 y 4.

Ejemplo

En el grafo mostrado anteriormente:

- La arista $(1, 2)$ es incidente a los vértices 1 y 2.
- La arista $(2, 4)$ es incidente a los vértices 2 y 4.
- Ninguna arista es incidente entre los vértices 1 y 4, ni entre 2 y 3, ni entre 3 y 4.

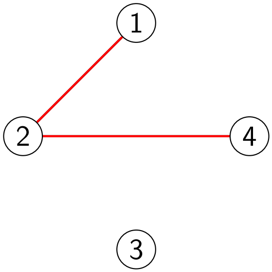


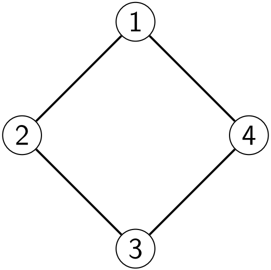
Figura: Grafo con incidencias resaltadas (en rojo).

Grafo No Dirigido

Definición

Un grafo no dirigido es un grafo en el que las aristas no tienen una dirección. Es decir, si existe una arista entre dos vértices u y v, se puede recorrer en ambos sentidos, de u a v o de v a u.

- Las aristas en un grafo no dirigido son simplemente pares de vértices, (u, v).
- Un ejemplo típico de un grafo no dirigido es una red social, donde las conexiones entre personas no tienen un sentido específico.



Grafo Dirigido

Definición

Un grafo dirigido (o digrafo) es un grafo en el que las aristas tienen una dirección. Cada arista está representada por un par ordenado de vértices (u, v), lo que significa que solo se puede recorrer de u a v, pero no en sentido contrario.

- Las aristas en un grafo dirigido tienen una dirección específica, indicadas mediante una flecha.
- Un ejemplo típico de un grafo dirigido es el tráfico en una ciudad, donde las calles tienen una dirección específica (de un punto a otro).

Ejemplo de Grafo Dirigido

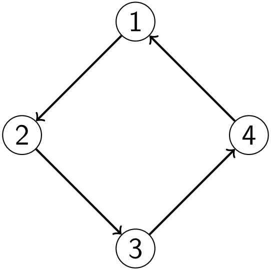


Figura: Ejemplo de un grafo dirigido con flechas.

Flechas en Grafos Dirigidos

Uso de Flechas

Las flechas en un grafo dirigido se utilizan para representar la dirección de las aristas. La flecha indica el sentido en el que se puede recorrer la arista entre dos vértices.

- En un grafo dirigido, las flechas representan unidireccionalidad en el recorrido de las aristas.
- Las flechas ayudan a modelar relaciones asimétricas, como el tráfico en una ciudad, donde una calle puede permitir el paso en una dirección pero no en la contraria.

Games Network

Definición

Un **Games Network** (Red de Juegos) es un tipo de grafo en el que los vértices representan a los jugadores de un juego, y las aristas representan la interacción o relación entre ellos durante el transcurso del juego.

- En este tipo de red, las aristas pueden representar la cooperación o competencia entre los jugadores, dependiendo de las reglas del juego.
- En una red de juegos competitivos, las aristas pueden indicar los enfrentamientos entre jugadores.
- En una red cooperativa, las aristas pueden representar la colaboración entre jugadores para alcanzar un objetivo común.

Ejemplo

En un juego de equipo, cada jugador está conectado con los miembros de su equipo. En un juego competitivo, los jugadores están conectados por los enfrentamientos que tienen entre ellos.

Ejemplo de Games Network

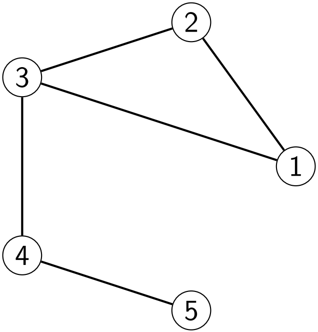


Figura: Ejemplo de una red de juegos, donde los vértices son jugadores y las aristas representan enfrentamientos o interacciones.

Friendship Network

Definición

Una **Friendship Network** (Red de Amistades) es un tipo de grafo en el que los vértices representan personas y las aristas representan relaciones de amistad entre ellas.

- En este caso, los vértices son individuos y las aristas indican que dos personas son amigas.
- Este tipo de red es no dirigida, ya que la amistad es una relación bidireccional: si A es amigo de B, entonces B es amigo de A.
- Las redes de amistad pueden ser útiles para modelar interacciones sociales, encontrar grupos de amigos o analizar la propagación de información o comportamientos.

Ejemplo

Si tenemos un grupo de personas, las aristas conectan a las que son amigas. Si A es amiga de B, se conecta una arista entre ambos.

Ejemplo de Friendship Network

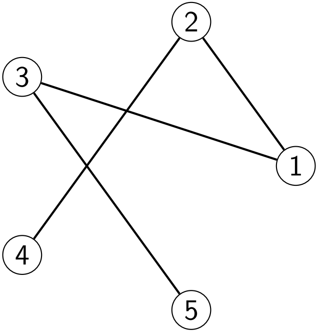


Figura: Ejemplo de una red de amistades, donde los vértices son personas y las aristas son relaciones de amistad.

Isolates en un Grafo

Definición de Isolate

Un **isolate** (aislado) en un grafo es un vértice que no tiene ninguna arista incidente. Es decir, no está conectado a ningún otro vértice del grafo.

- Los vértices aislados no participan en la estructura de conexiones del grafo.
- Pueden representar, por ejemplo, a una persona en una red social que no tiene amigos, o a un jugador en un juego que no interactúa con otros.

Ejemplo

En el siguiente grafo, el vértice 5 está aislado, ya que no tiene conexiones con ningún otro vértice.

Ejemplo de Isolates

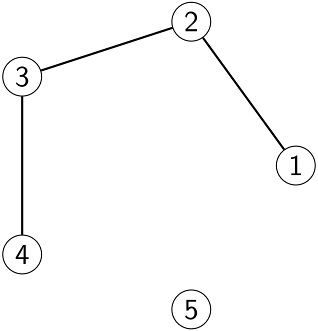


Figura: Ejemplo de un grafo con un vértice aislado (vértice 5).

Grado de un Vértice

Definición de Grado

El **grado** de un vértice en un grafo es el número de aristas incidentes a ese vértice. En otras palabras, el grado de un vértice es la cantidad de conexiones o relaciones que tiene con otros vértices.

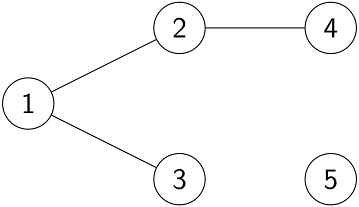
- Si el grafo es no dirigido, el grado es simplemente el número de aristas conectadas al vértice.
- Si el grafo es dirigido, existen dos tipos de grados: el **grado de entrada** (número de aristas que llegan al vértice) y el **grado de salida** (número de aristas que salen del vértice).

Ejemplo

En el siguiente grafo:

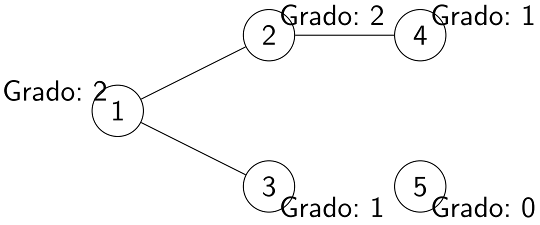
- El vértice 1 tiene grado 2, ya que tiene 2 aristas incidentes.
- El vértice 4 tiene grado 1, ya que tiene 1 arista incidente.
- El vértice 5 tiene grado 0, ya que está aislado.

Grafo con los Vértices y Tabla de Grados



Vértice	Grado
1	2
2	2
3	1
4	1
5	0

Grafo con los Vértices y Tabla de Grados



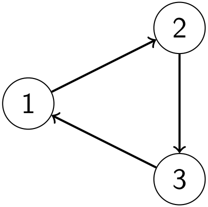
Vértice	Grado
1	2
2	2
3	1
4	1
5	0

Definiciones: Camino, Trail y Walk

- **Camino (Path)**: Es una secuencia de vértices en un grafo tal que cada par de vértices consecutivos están conectados por una arista y no se repiten vértices. Es decir, los vértices no se repiten.
- **Trail**: Es una secuencia de vértices y aristas en un grafo tal que no se repiten aristas, pero los vértices pueden repetirse.
- **Walk**: Es una secuencia de vértices y aristas en un grafo, donde tanto los vértices como las aristas pueden repetirse.

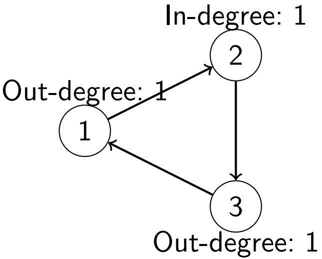
Incidencia:

- La incidencia es la conexión o relación entre dos vértices a través de una arista.
- Es decir, una arista incide en dos vértices, conectándolos entre sí.



Grado:

- El grado de un vértice es el número de aristas incidentes en ese vértice.
- En otras palabras, el grado cuenta cuántas conexiones tiene un vértice con otros vértices del grafo.



Grado de Entrada y Salida en Grafos Dirigidos

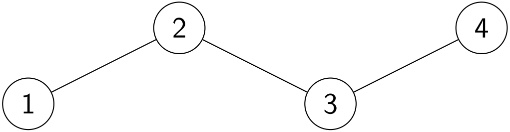
Grado de Entrada (In-degree):

- Es el número de aristas que **entran** en un vértice.

Grado de Salida (Out-degree):

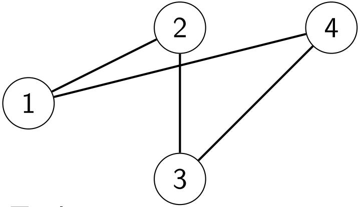
- Es el número de aristas que **salen** de un vértice.

Ejemplo de Camino (Path)



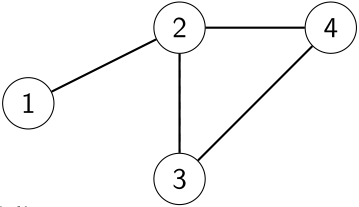
Camino: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

Ejemplo de Trail



Trail: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

Ejemplo de Walk



Walk: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2 \to 3$

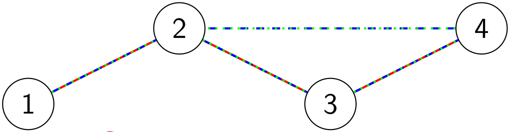
Relación entre Camino, Trail y Walk

1. Todo camino es un trail: Un camino no repite ni vértices ni aristas, por lo que cumple con las condiciones de un trail.
2. Todo trail es un walk: Un trail no repite aristas, pero sí puede repetir vértices, lo que cumple con las condiciones de un walk.

Tabla Comparativa (Para el grafo de la diapositiva 26):

	Repite Vértices	Repite Aristas	Ejemplo Gráfico
Camino	No	No	$1 \to 2 \to 3 \to 4$
Trail	Sí	No	$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2$
Walk	Sí	Sí	$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2 \to 3$

Relación entre Camino, Trail y Walk



Camino: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

Trail: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

Walk: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

Relaciones:

- Todo Camino es un Trail.
- Todo Trail es un Walk.

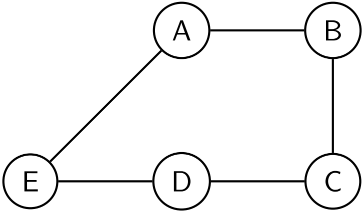
Geodesic

Un **geodesic** en un grafo es el **camino más corto** entre dos vértices, en términos del número de aristas. Es decir, es el camino que conecta los dos vértices con la menor cantidad de aristas posibles.
En un grafo no ponderado, el geodesic se define por la **mínima cantidad de aristas** entre dos vértices. Si las aristas tienen pesos, el geodesic es el camino que tiene la menor **suma de pesos**.

Propiedades:

- Puede haber más de un geodesic entre dos vértices si existen caminos con la misma longitud.
- Es importante en el estudio de la distancia en grafos.

Caminos más cortos desde A hacia D

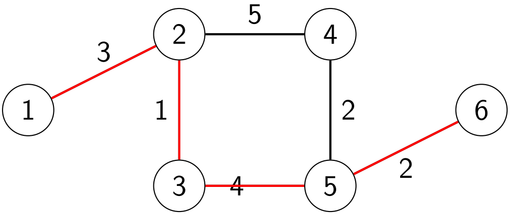


Caminos posibles desde A hacia D:

- $A \rightarrow E \rightarrow D$: 2 aristas.
- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$: 3 aristas.

Camino más corto: $A \rightarrow E \rightarrow D$ (2 aristas).

Ejemplo de Geodesic con Pesos



Geodesic: $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6$

Camino	Suma de Pesos	Geodesic
$1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6$	$3 + 1 + 4 + 2 = 10$	Geodesic
$1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6$	$3 + 5 + 2 + 2 = 12$	
$1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6$	$3 + 5 + 5 + 1 + 4 + 2 = 20$	

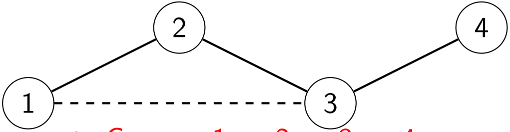
Componente Conexo en Grafos

Componente Conexo: Un componente conexo es un subgrafo máximo en el cual existe un camino entre cualquier par de vértices del subgrafo.

Si se puede agregar un vértice al subgrafo sin perder la propiedad de conexidad, el subgrafo no es maximal.

Ejemplo de Componente Conexo

Ejemplo 1:

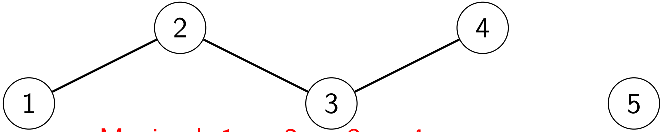


Componente Conexo: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

El subgrafo formado por los vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ es un componente conexo, ya que existe un camino entre cada par de vértices dentro de él.

Ejemplo de Componente Maximal

Ejemplo 1:



Componente Maximal: $1 \to 2 \to 3 \to 4$

El subgrafo formado por los vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ es maximal, ya que agregar el vértice 5 desconectado hace que el subgrafo pierda la conexidad.

Agregar un Vértice Desconectado

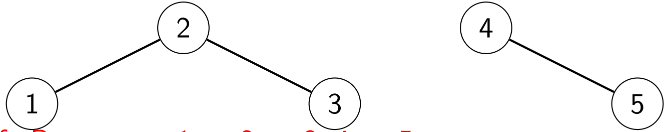
Si agregamos el vértice 5 (que no está conectado al resto), el subgrafo se separa en dos componentes desconexos:

- Componente Conexo: $\{1, 2, 3, 4\}$
- Componente Desconexo: $\{5\}$

El subgrafo dejado por $\{1, 2, 3, 4\}$ sigue siendo conexo, pero si agregamos el vértice 5, ya no podemos seguir conectando todos los vértices entre sí.

Ejemplo de Grafo Desconexo

Ejemplo 3: Grafo Desconexo



Grafo Desconexo: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 5$

Este grafo es desconexo porque los vértices $\{1, 2, 3\}$ y $\{4, 5\}$ no están conectados entre sí.

Resumen sobre Conexidad

Componente Conexo: Un subgrafo en el que todos los vértices están conectados por caminos.
Componente Maximal: Un componente conexo que no puede ser ampliado sin perder la propiedad de conexidad.

Si agregamos un vértice desconectado a un componente conexo, el grafo se divide en dos componentes, uno conexo y otro desconectado.

Condición para el Producto de Matrices

El producto $A \cdot B$ **no se puede realizar** si el número de columnas de A no coincide con el número de filas de B.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Aquí, el número de columnas de A (3) **no** coincide con el número de filas de B (2), por lo que **no se puede** realizar el producto.

Matrices en Matemáticas

Definición de Matriz:
Una **matriz** es una disposición rectangular de números, símbolos o expresiones, dispuestos en filas y columnas. Las matrices se utilizan para representar sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales, y en diversas áreas de la matemática y la ingeniería.

Una matriz de orden $m \times n$ tiene m filas y n columnas. Se denota generalmente como $A = [a_{ij}]$, donde a_{ij} es el elemento que se encuentra en la fila i y columna j.
Ejemplo de una matriz de orden 3×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Aquí, $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 4$, $a_{31} = 5$, y $a_{32} = 6$. La secuencia de a_{ij} en orden sería:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$$

Matriz de Adyacencia

Definición de Matriz de Adyacencia:
La **matriz de adyacencia** de un grafo es una representación matricial que describe las conexiones entre los vértices de un grafo. Esta matriz es útil para representar grafos de manera eficiente, especialmente en el campo de la computación.

Sea $G = (V, E)$ un grafo con $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ como el conjunto de vértices. La matriz de adyacencia A es una matriz $n \times n$ donde cada elemento a_{ij} indica si existe una arista entre los vértices v_i y v_j:

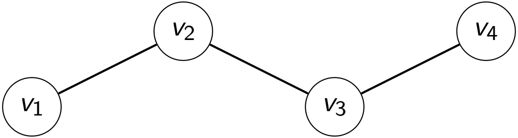
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay una arista entre } v_i \text{ y } v_j, \\ 0 & \text{si no hay una arista entre } v_i \text{ y } v_j. \end{cases}$$

En un grafo **no dirigido**, la matriz de adyacencia es simétrica, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$. En un grafo **dirigido**, la matriz no es necesariamente simétrica.

Ejemplo de Matriz de Adyacencia (Grafo No Dirigido)

Consideremos el siguiente grafo no dirigido:

$$G = (V, E), \quad V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$



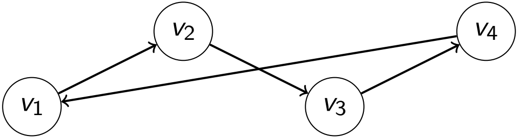
La matriz de adyacencia correspondiente es:

$$A = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de Matriz de Adyacencia (Grafo Dirigido)

Consideremos ahora un grafo dirigido:

$$G = (V, E), \quad V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$



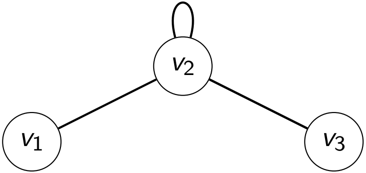
La matriz de adyacencia correspondiente es:

$$A = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de Grafo con Lazo

Consideremos el siguiente grafo con un lazo en v_2:

$$G = (V, E), \quad V = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2)\}$$



La matriz de adyacencia correspondiente es:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Explicación de la Matriz de Adyacencia

Aquí, $a_{12} = 1$ porque hay una arista de v_1 a v_2, $a_{22} = 1$ porque hay un lazo en v_2, $a_{23} = 1$ porque hay una arista de v_2 a v_3, y $a_{32} = 1$ porque hay una arista de v_3 a v_2.

Producto de Matrices

El **producto de matrices** es una operación matemática que se realiza entre dos matrices A y B. Para que el producto esté definido, el número de columnas de la matriz A debe ser igual al número de filas de la matriz B. Si A es una matriz de tamaño $m \times n$ y B es una matriz de tamaño $n \times p$, el producto $C = AB$ será una matriz de tamaño $m \times p$.

Condición para el Producto de Matrices

El producto $A \cdot B$ **no se puede realizar** si el número de columnas de A no coincide con el número de filas de B.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Aquí, el número de columnas de A (3) coincide con el número de filas de B (3), por lo que el producto **sí** se puede hacer.

Fórmula del Producto de Matrices

El elemento c_{ij} de la matriz resultante C se obtiene de la siguiente forma:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Esto significa que el elemento c_{ij} se calcula tomando el producto de los elementos correspondientes de la fila i de la matriz A y la columna j de la matriz B, y luego sumando esos productos.

Ejemplo de Producto de Matrices

Sea el siguiente ejemplo de matrices A y B de tamaño 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

El producto $C = AB$ es:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Consideramos una matriz de adyacencia A que describe las relaciones de amistad y enemistad entre personas. La matriz tiene los siguientes elementos:
- f para representar a una persona amiga. - e para representar a una persona enemiga.
Las relaciones que exploraremos serán modeladas mediante productos de matrices.

Matriz de Relaciones

Supongamos que tenemos una matriz de relaciones R donde:

$$R = \begin{pmatrix} f & e \\ e & f \end{pmatrix}$$

Esta matriz representa las relaciones entre personas en términos de amistad f y enemistad e.

Desarrollo del Producto de Matrices

Sea la matriz de relaciones R:

$$R = \begin{pmatrix} f & e \\ e & f \end{pmatrix}$$

Al calcular $R \cdot R$:

$$R \cdot R = \begin{pmatrix} f & e \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f & e \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot f + e \cdot e & f \cdot e + e \cdot f \\ e \cdot f + f \cdot e & e \cdot e + f \cdot f \end{pmatrix}$$

Esto genera las ecuaciones:

$$f = f \cdot f, \quad e = f \cdot e, \quad e = e \cdot f, \quad f = e \cdot e$$

Las ecuaciones describen cómo las relaciones sociales (amistad y enemistad) se transforman mediante la composición.

Ecuación 1: Amigo de mi amigo es mi amigo

El elemento R_{11} en el producto de matrices es:

$$R_{11} = f \cdot f + e \cdot e$$

Asumiendo que $e \cdot e = 0$, queda:

$$f = f \cdot f$$

Esto significa que si una persona es amiga de un amigo, entonces sigue siendo una relación de amistad.

Ecuación 2: Amigo de mi enemigo es mi enemigo

El elemento R_{12} en el producto de matrices es:

$$R_{12} = f \cdot e + e \cdot f$$

Asumiendo que $e \cdot f = 0$, queda:

$$e = f \cdot e$$

Esto indica que si una persona es amiga de una persona enemiga, el resultado es una relación de enemistad.

Ecuación 3: Enemigo de mi amigo es mi enemigo

El elemento R_{21} en el producto de matrices es:

$$R_{21} = e \cdot f + f \cdot e$$

Asumiendo que $f \cdot e = 0$, queda:

$$e = e \cdot f$$

Esto describe que si una persona enemiga tiene un amigo, el resultado sigue siendo una enemistad.

Ecuación 4: Enemigo de mi enemigo es mi amigo

El elemento R_{22} en el producto de matrices es:

$$R_{22} = e \cdot e + f \cdot f$$

Asumiendo que $f \cdot f = 0$, queda:

$$f = e \cdot e$$

Esto significa que si una persona es enemiga de otra enemiga, el resultado es una relación de amistad.