

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана  
Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра математичного моделювання  
соціально-економічних процесів

## Дипломна Робота

**Онлайн графічний рушій з фізично обґрунтованим  
моделюванням освітлення**

Студент групи ПМА-42:  
**Коломієць Даніїл Васильович**,  
спеціальність 124-системний аналіз

Науковий керівник:  
кандидат фізико-математичних наук,  
доцент  
**Лисецька Олександра Юріївна**

Львів–2024

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>1 Моделювання фізично правильної взаємодії світла</b>	<b>4</b>
1.1. Людське сприйняття зображень . . . . .	4
1.2. Визначення рівняння Рендерингу . . . . .	8
1.2.1. Радіометричні величини . . . . .	8
1.2.2. Рівняння рендерингу . . . . .	12
<b>2 Теоретичне рішення проблеми</b>	<b>14</b>
2.1. Рендеринг геометрії . . . . .	14
2.2. BRDF моделі . . . . .	14
2.3. Оптимізації . . . . .	14
<b>3 Чисельні експерименти</b>	<b>15</b>
3.1. Середовище розробки та обладнання . . . . .	15
3.1.1. Середовище розробки . . . . .	15
3.1.2. Використані бібліотеки . . . . .	16
3.2. Результат чисельних експериментів . . . . .	16
<b>Висновки</b>	<b>17</b>
<b>Список використаних джерел</b>	<b>18</b>

# Вступ

У сучасному світі комп'ютерна графіка відіграє надзвичайно важливу роль. Вона присутня практично в кожному аспекті нашого цифрового життя: від інтерфейсів користувача на мобільних пристроях і комп'ютерах — до високобюджетного кінематографа та відеоігор. У багатьох випадках графіка використовується для візуалізації інформації або об'єктів без потреби в достовірному фізичному відтворенні взаємодії світла з матеріалами, як-от у веб-додатках чи користувацьких інтерфейсах. Проте у сферах, де реалізм є ключовим — таких як віртуальна реальність, ігри чи CGI у фільмах — фізично коректне моделювання освітлення стає необхідністю. Саме від нього залежить глибина занурення глядача у віртуальний світ.

Реалістичне зображення не може бути досягнуте без розуміння та імітації фізичних процесів взаємодії світла з поверхнями. Однак комп'ютерна графіка стикається з низкою фундаментальних труднощів: фізичні явища є неперервними за своєю природою, а комп'ютери оперують дискретними структурами даних. Наприклад, постають питання, як описати складну геометрію тіла людини, як ефективно її візуалізувати, або як забезпечити правдоподібний рух цих об'єктів у просторі.

У цій науковій роботі увага буде зосереджена на одному з найважливіших аспектів — моделюванні фізично обґрунтованого освітлення. Інші компоненти графічного рушія, такі як геометричне моделювання чи анімація, будуть розглядатися лише побіжно або ігноруватимуться, оскільки метою роботи є реалізація та дослідження саме цього напрямку.

## Розділ 1

# Моделювання фізично правильної взаємодії світла

У цьому розділі приведено визначення основних термінів та визначення основних проблем, пов'язаних з моделюванням фізично правильної взаємодії світла з об'єктами в комп'ютерній графіці.

### 1.1. Людське сприйняття зображень

Перед тим як вдаватись до деталей моделювання фізично правильної взаємодії світла з об'єктами, важливо розглянути, яким чином людське око сприймає світло та як мозок формує зображення.

Світло - це квантова електромагнітна хвиля, швидкість якої рівна  $299\,792\,458\text{ m/s}$ . Видимий спектр світла знаходиться між 380 та 780 нанометрами рис. 1.2. Видимо світло яке є монохромним відповідає деякому кольору спектру. Зазвичай джерела світла випромінюють світло в широкому діапазоні довжин хвиль. Наприклад денне світло є суперпозицією деякого діапазону хвиль рис. 1.1. Спостерігати ми це можемо під час веселки, коли світло проходить через краплі води, розкладаючись на спектр кольорів.

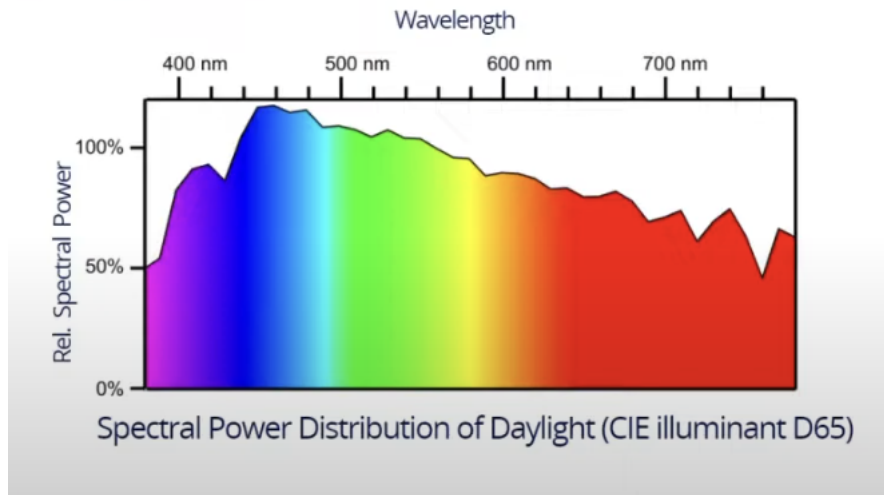


Рис. 1.1: Спектральний розподіл енергії денного світла

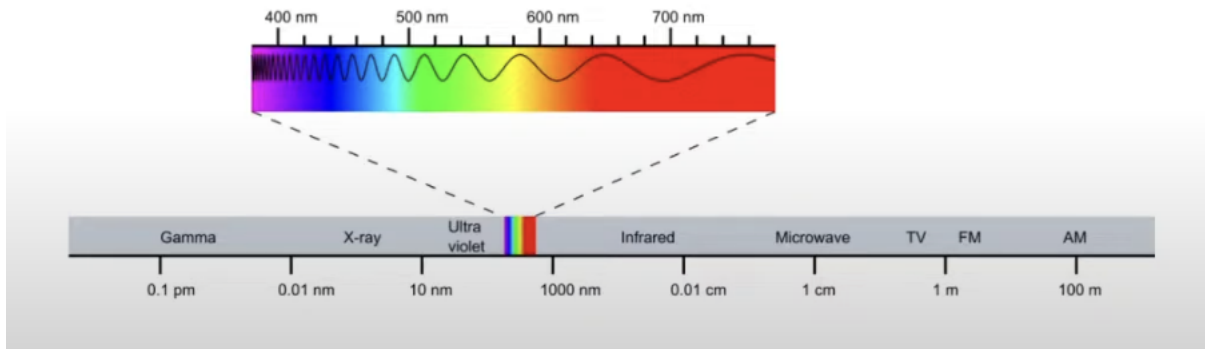


Рис. 1.2: Видимий спектр світла

Світло також взаємодіє з навколишніми об'єктами. Припустимо, що світло випромінюється деяким джерелом в однорідних речовинах, наприклад повітрі світло рухається по прямій, деякі промені світла можуть потрапити одразу в людське око, інші ж потрапляють на деякі об'єкти, які в свою чергу поглинають, відбивають або пропускають фотони світла. Відповідно до цього, ми можемо спостерігати різні кольори об'єктів, які залежать від того, які довжини хвиль світла вони відбивають. Те світло яке потрапляє в око людини, проходить через рогівку, кришталик та склоподібне тіло, де воно фокусується на сітківці ока. Сітківка містить фоторецептори, які реагують

на світло і перетворюють його в електричні сигнали, що надсилаються до мозку. Мозок обробляє ці сигнали і формує зображення, яке ми сприймаємо.

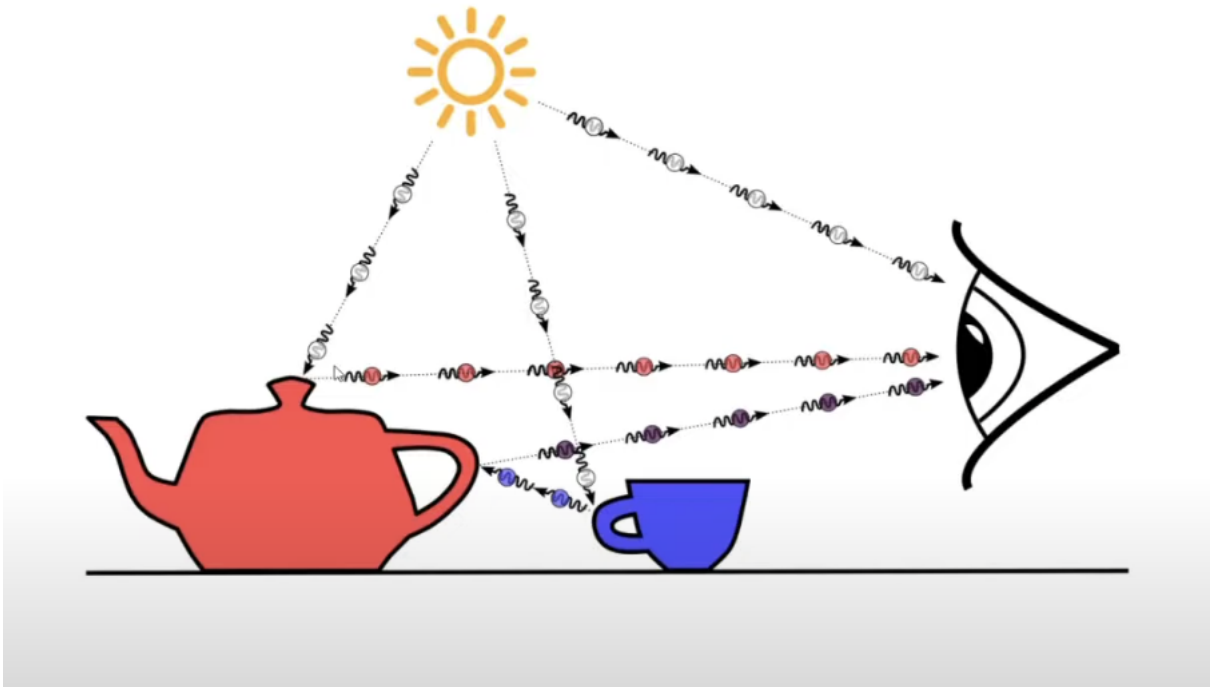


Рис. 1.3: Шлях світла від джерела до ока людини

Загалом у людини існують дві основні системи фоточутливих рецепторів, що забезпечують зорове сприйняття:

1. **Палички** — фоторецептори, які мають високу чутливість до інтенсивності світла та забезпечують зір при слабкому освітленні (скотопічний зір). Вони не розрізняють кольори.
2. **Колбочки** — рецептори, відповідальні за кольоровий (фотопічний) зір. Вони чутливі до різних діапазонів довжин хвиль електромагнітного випромінювання. Існує три типи колбочок рис. 1.4:

(а) **L-колбочки** (Long) — реагують на довгі довжини хвиль (приблизно 560–580 нм), що відповідає червоному діапазону спектра.

- (б) **М-колбочки** (Medium) — сприймають середні довжини хвиль (приблизно 530 нм), асоційовані із зеленим кольором.
- (в) **С-колбочки** (Short) — чутливі до коротких довжин хвиль (приблизно 420–440 нм), які відповідають синьому кольору.

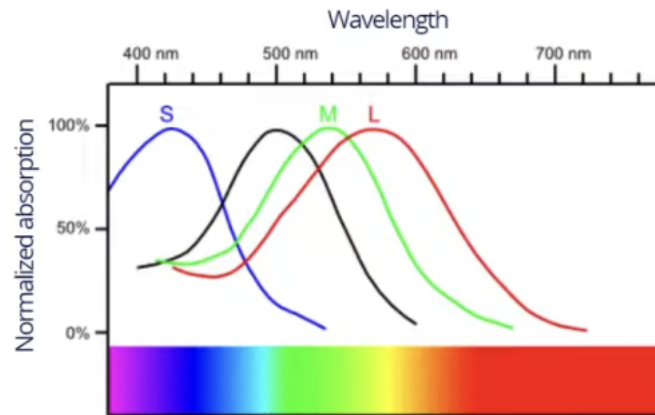


Рис. 1.4: Людські колбочки та діапазон їх чутливості

Через те, що людське око має лише три типи колбочок, людське око не може сприймати реальний спектральний розподіл енергії світла, завдяки цьому око можна обманювати, і різні спектральні розподіли енергії світла можуть сприйматись як однакові кольори. Саме через це, в комп'ютерній графіці застосовується RGB кольорова модель, де R-red(червоний) G-green(зелений) B-blue(синій). Змішуючи ці три кольори в різних пропорціях, можна отримати більшість кольорів, які сприймаються людським оком рис 1.5. Прямий фізичний зв'язок між спектральним розподілом енергії світла та RGB описано в [1] та [2]. Більшість сучасних моніторів та екранів використовують sRGB кольорову модель для відображення зображень, але для фізично правильного рендерингу треба працювати в лінійному спектрі, для цього застосовується так звана *гама корекція*, яка дозволяє перетворити кольори з sRGB в лінійний спектр [3]. Основна ідея, яку слід засвоїти, полягає в тому, що немає потреби симулювати транспортування світла для кожної довжи-

ни хвилі окремо. Для більшості практичних застосувань достатньо розраховувати перентранспортуваннясення світла для трьох основних кольорів. Це значно спрощує обчислення та робить задачі рендерингу обчислювально ефективнішими.

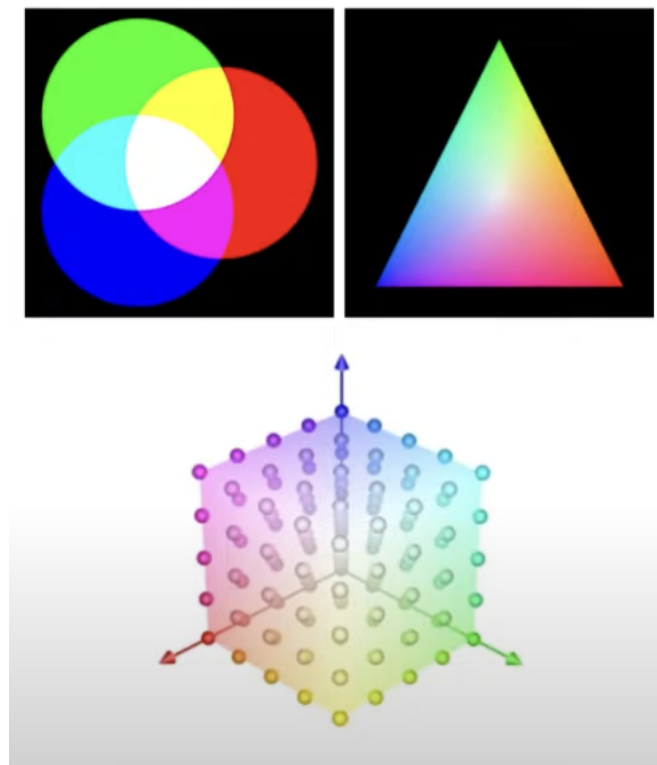


Рис. 1.5: RGB кольорова модель

## 1.2. Визначення рівняння Рендерингу

### 1.2.1. Радіометричні величини

Перш ніж дати визначення рівнянню рендерингу, варто розглянути деякі основні фізичні величини, які в ньому зустрічаються. Одним із базових понять є *тілесний кут*.

У школі ми вивчали поняття кута у двовимірному просторі. Щоб визна-



чити, який кут охоплює об'єкт з певної точки спостереження, уявімо коло з центром у цій точці та проектуємо об'єкт на коло. Кут визначається як відношення довжини дуги  $s$  до радіуса  $r$ :

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Оскільки кут є безрозмірною величиною, його вимірюють у радіанах.

У тривимірному просторі аналогом звичайного кута є *тілесний кут* (англ. *solid angle*). Щоб визначити тілесний кут, який охоплює об'єкт з певної точки, розмістимо у цій точці центр уявної сфери та проектуємо об'єкт на її поверхню. Тілесний кут визначається як відношення площі проєкції  $s$  до квадрата радіуса сфери:

$$\omega = \frac{s}{r^2}$$

Це також безрозмірна величина, яку вимірюють у *стеррадіанах* ( $sr$ ). Повна сфера має тілесний кут  $4\pi$  стеррадіан.

Для обчислення тілесного кута, що покриває певну область, його розбивають на нескінченно малі елементи  $d\omega$  і інтегрують по всій області:

$$\omega = \int d\omega$$

Зручним способом параметризації є сферичні координати, які задаються двома кутами: полярним кутом  $\theta$  (від 0 до  $\pi$ ) та азимутальним кутом  $\phi$  (від 0 до  $2\pi$ ). Нескінченно мала ділянка тілесного кута виражається через поверхневий елемент  $ds$ :

$$d\omega = \frac{ds}{r^2}$$

Припускаючи, що радіус  $r = 1$ , обчислимо  $ds$  як площу елемента поверхні сфери:

$$ds = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

Таким чином, фінальна формула для нескінченно малої ділянки тілесного кута набуває вигляду:

$$d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

А загальна формула для тілесного кута, що охоплює певну область на сфері, виглядає так:

$$\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (1.1)$$

**Потік випромінювання (Radiant Flux).** Потік випромінювання, або *radiant flux*  $\Phi$ , — це енергія електромагнітного випромінювання, що передається в одиницю часу:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}$$

де  $Q$  — енергія,  $t$  — час. Одиниця вимірювання — ват (Вт), тобто джоуль на секунду (Дж/с).

Кожен фотон несе енергію

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

де  $h$  — стала Планка,  $c$  — швидкість світла,  $\lambda$  — довжина хвилі.

Таким чином, потік випромінювання можна інтерпретувати як сумарну енергію фотонів, що випромінюються джерелом світла за одиницю часу. У графіці  $\Phi$  використовується для опису загального випромінювання точкового джерела.

**Інтенсивність випромінювання (Radiant Intensity).** Інтенсивність випромінювання  $I$  — це потік випромінювання на одиницю тілесного кута:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

Одиниця вимірювання — Вт/ср (ват на стеррадіан). Ця величина використовується, коли джерело випромінює нерівномірно в різних напрямках, як, наприклад, у випадку прожектора. Для точкового джерела, що випромінює рівномірно у всіх напрямках:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}$$

**Опроміненість (Irradiance).** Опроміненість  $E$  — це потік випромінювання, що потрапляє на одиницю площі поверхні:

$$E = \frac{d\Phi}{dA}$$

Одиниця — Вт/м<sup>2</sup>. Потік може надходити з усіх напрямків півсфери над поверхнею. Для нескінченно малої ділянки  $dA$ , яку освітлює точкове джерело, враховується тілесний кут  $d\omega$ , під яким джерело бачиться з цієї ділянки. Якщо  $\theta$  — кут між нормаллю до поверхні та напрямком на джерело, то проєкція враховується через множник  $\cos \theta$ :

$$E = \frac{I \cdot \cos \theta}{r^2}$$

де  $r$  — відстань до джерела.

Оскільки  $I = \frac{\Phi}{4\pi}$ , то для точкового джерела маємо:

$$E = \frac{\Phi \cdot \cos \theta}{4\pi r^2}$$

Це показує, що опроміненість спадає з квадратом відстані та залежить від кута падіння світла.

**Енергетична яскравість (Radiance).** Енергетична яскравість  $L$  визначається як потік випромінювання, що проходить через одиницю площі в певному напрямку, на одиницю тілесного кута:

$$L = \frac{d^2\Phi}{dA_{\perp} d\omega}$$

де  $dA_{\perp} = \cos \theta dA$  — проєкція площі в напрямку потоку. Одиниця — Вт/(м<sup>2</sup>·ср).

Ця величина не залежить від відстані до джерела, адже при зменшенні відстані тілесний кут збільшується, але площа яка спостерігається - зменшується. Спостерігти це явище ми можемо на прикладі стіни, змінюючи відстань до неї, ми можемо спостерігати що яскравість стіни не змінюється.

**Зв'язок між опроміненістю та енергетичною яскравістю.** Опроміненість можна визначити через інтегрування енергетичної яскравості по всій півсфері  $\Omega_h$  напрямків над поверхнею:

$$E = \int_{\Omega_h} L(\omega) \cos \theta d\omega \quad (1.2)$$

### 1.2.2. Рівняння рендерингу

Рівняння рендерингу описує, як світло взаємодіє з поверхнями об'єктів і як це впливає на зображення, яке ми бачимо. Воно базується на фізичних принципах передачі світла та його взаємодії з матеріалами.

$$L_o(\mathbf{v}) = L_e(\mathbf{v}) + \int_{\Omega_h} f_r(\mathbf{v}, \mathbf{l}) L_i(\mathbf{l}) \cos \theta d\omega \quad (1.3)$$

де:  $L_o(\mathbf{v})$  — вихідна енергетична яскравість у напрямку  $\mathbf{v}$ ,  $L_e(\mathbf{v})$  — енергетична яскравість, що випромінюється поверхнею в напрямку  $\mathbf{v}$ ,  $f_r(\mathbf{v}, \mathbf{l})$  — *Двопроменева функція розподілу відбивної здатності* (BRDF), що описує, як світло знапрямком  $\mathbf{l}$  відбивається від поверхні в напрямку  $\mathbf{v}$ ,  $L_i(\mathbf{l})$  — вхідна енергетична яскравість у напрямку  $\mathbf{l}$ ,  $\theta$  — кут між нормаллю до поверхні та напрямком на джерело світла,  $d\omega$  — тілесний кут.

Якщо придивитися уважно, то можна побачити, що рівняння рендерингу містить в собі рівняння для опроміненості (1.2).

**Складність обчислення рівняння освітлення.** Інтегрування по всій півсфері напрямків  $\Omega_h$  означає врахування всіх можливих напрямків поширення світла, яке може впливати на задану точку поверхні. Це робить рівняння освітлення обчислювально складним, адже для кожної точки сцени потрібно проінтегрувати внесок світла з усіх напрямків півсфери, орієнтованої відносно нормалі до поверхні.

Кожен об'єкт у сцені сам по собі є джерелом випромінювання, тобто володіє певною вихідною енергетичною яскравістю в довільному напрямку  $\mathbf{v}$ .

Взаємне освітлення між об'єктами створює глобальну взаємозалежність, де світло, відбите від однієї поверхні, може впливати на інші поверхні, і так далі — потенційно нескінченну кількість разів.

Складність посилюється тим, що будь-яка поверхня є неперервною<sup>1</sup> множиною точок, а з кожної точки в нескінченну кількість напрямків можуть надходити фотони. На мікроскопічному рівні поверхні не ідеально гладкі: вони можуть мати шорсткості, мікрогеометрію, відмінні оптичні властивості (наприклад, металічність, діелектричність, шорсткість тощо), що впливають на спосіб взаємодії зі світлом.

Оскільки світло може багаторазово відбиватися між поверхнями перед тим, як потрапити в камеру або око спостерігача, точне симулювання всіх траєкторій кожного фотона є обчислювально недосяжним<sup>2</sup> завданням для сучасних комп'ютерів.

У зв'язку з цим, замість точного моделювання всіх траєкторій, у комп'ютерній графіці застосовуються стохастичні методи, які описують розповсюдження світла у вигляді ймовірнісного процесу. Зокрема, розглядається ймовірність того, що промінь світла з певного напрямку  $\mathbf{I}$ , взаємодіючи з поверхнею з відомими матеріальними властивостями, буде відбитий в інший напрямок або поглинутий. Саме BRDF функція дозволяє моделювати цю ймовірність, і давати загальне уявлення про те, як світло взаємодіє з поверхнею.

Варто зауважити, що такий підхід не дає точного рішення рівняння рендерингу, але дозволяє отримати достатньо реалістичні результати за розумний час. У комбінації з іншими методами, такими як трасування променів, глобальне освітлення та інші, можна досягти високої якості зображень, які виглядають фізично коректно, хоча і не є абсолютно точними.

---

<sup>1</sup>Поверхня та кількість світлових променів у сцені є скінченними, проте їхня кількість настільки велика, що варто вважати їх нескінченними та неперервними

<sup>2</sup>Існують методи, такі як Ray Tracing та Path Tracing, які симулюють поведінку світла, але лише для скінченної кількості променів, та малої кількості відбиттів світла від поверхонь

## Розділ 2

# Теоретичне рішення проблеми

У цьому розділі буде описано шось

2.1. Рендеринг геометрії

2.2. BRDF моделі

2.3. Оптимізації

## Розділ 3

# Чисельні експерименти

У цьому розділі приведено чисельні експерименти

### 3.1. Середовище розробки та обладнання

Усі числові експерименти були виконані на ноутбучі Asus ROG Strix G15. Характеристики цього пристрою наведені нижче:

- *GPU*: LAPTOP NVIDIA RTX 3060 з 6GB відеопам'яті
- *CPU*: AMD Ryzen 7 6800H, 8 ядер, 16 потоків, з тактовою частотою до 4.7GHz
- *Оперативна пам'ять*: 16GB DDR5
- *SSD*: Kingston KC3000 з швидкістю читання/запису до 7GB/сек

#### 3.1.1. Середовище розробки

Для розробки та проведення числових експериментів використовувалися наступні середовища та інструменти:

- *Visual Studio Code*

Visual Studio Code (VS Code) — це потужний редактор коду, який підтримує безліч мов програмування і має великий набір плагінів для розширення функціональності. Він був використаний для написання та налагодження коду.

- *Ще щось*

### **3.1.2. Використані бібліотеки**

Для реалізації та тестування були використані наступні бібліотеки:

- *Круті бібліотеки*

## **3.2. Результат чисельних експериментів**



# Висновки

Дуже крутий висновок

# Список використаних джерел

- [1] Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика / П. С. Сеньо - Київ : Знання, 2007. - 556 с.
- [2] The Colorimetric Properties of the Spectrum. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, Vol. 230 (1932), pp. 149-187 (39 pages)
- [3] CIE 1931 color space [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://en.wikipedia.org/wiki/CIE\\_1931\\_color\\_space](https://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space).
- [4] Iosifidis A. Deep Learning for Robot Perception / A. Iosifidis, A. Tefas - U.S: Academic Press, 2022. - 634 с.
- [5] UNDERSTANDING GAMMA CORRECTION [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.cambridgeincolour.com/tutorials/gamma-correction.htm>.
- [6] UNDERSTANDING GAMMA CORRECTION [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.cambridgeincolour.com/tutorials/gamma-correction.htm>.
- [7] Wikipedia. Partially Observable Markov Decision Process [Електронний

- ресурс]. – Режим доступу: [https://en.wikipedia.org/wiki/Partially\\_observable\\_Markov\\_decision\\_process](https://en.wikipedia.org/wiki/Partially_observable_Markov_decision_process).
- [8] Tutorialspoint. Python Deep Learning - Deep Neural Networks [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://www.tutorialspoint.com/python\\_deep\\_learning/python\\_deep\\_learning\\_deep\\_neural\\_networks.htm](https://www.tutorialspoint.com/python_deep_learning/python_deep_learning_deep_neural_networks.htm).
- [9] Deepchecks. Reinforcement Learning Applications: From Gaming to Real World [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://deepchecks.com/reinforcement-learning-applications-from-gaming-to-real-world/>.
- [10] Pacific Northwest National Laboratory (PNNL). Explainer: Deep Reinforcement Learning [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.pnnl.gov/explainer-articles/deep-reinforcement-learning>.
- [11] Pathmind. Deep Reinforcement Learning [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://wiki.pathmind.com/deep-reinforcement-learning>.
- [12] Neptune AI. Markov Decision Process in Reinforcement Learning [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://neptune.ai/blog/markov-decision-process-in-reinforcement-learning>.
- [13] Built In. Markov Decision Process [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://builtin.com/machine-learning/markov-decision-process>.
- [14] Towards Data Science. Understanding Actor-Critic Methods [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://towardsdatascience.com/understanding-actor-critic-methods-931b97b6df3f>.

- [15] Scholarpedia. Policy Gradient Methods [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://www.scholarpedia.org/article/Policy\\_gradient\\_methods#:~:text=Policy%20gradient%20methods%20are%20a,cumulative%20reward\)%20by%20gradient%20descent.](http://www.scholarpedia.org/article/Policy_gradient_methods#:~:text=Policy%20gradient%20methods%20are%20a,cumulative%20reward)%20by%20gradient%20descent.)
- [16] LessWrong. Deep Q-Networks Explained [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://www.lesswrong.com/posts/kyvCNgx9oAwJCuevo/deep-q-networks-explained.](https://www.lesswrong.com/posts/kyvCNgx9oAwJCuevo/deep-q-networks-explained)