Makassar, 16 November 2020

Nama: Imanuel AS

NIM: 1811141008

Analisis Real II

Section 5.4 — Uniform Continuity

(2.) Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ kontinu seragam pada $A = [1, \infty)$, tetapi tidak kontinu seragam pada $B = (0, \infty)$

Penyelesaian:

→ Ambil $x, y \in A$ sebarang

Akan ditunjukkan: $|f(x) - f(y)| \leq K |(x-y)|$ (Fungsi Lipschitz)

Note that

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right|$$

$$= \left| \frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2} \right|$$

$$= \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 . y^2} \right| \quad [\,|-a| = |a| = a \quad \forall a \in \mathbb{R}\,]$$

$$= \left| \frac{(x+y)(x-y)}{x^2 . y^2} \right|$$

$$= \frac{|(x+y)| \cdot |(x-y)|}{x^2 . y^2}$$

$$= |(x-y)| \cdot \frac{|x+y|}{x^2 . y^2}$$

$$\leq |(x-y)| \cdot \left(\frac{|x|}{x^2 y^2} + \frac{|y|}{x^2 y^2} \right) \quad \left[\begin{array}{c} |x+y| \leq |x| + |y| \\ \text{ketaksamaan } \Delta \end{array} \right]$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa ini berlaku

$$\frac{|x|}{x^2} \leq 1 \text{ dan } \frac{|a|}{a^2} \leq 1 \qquad \forall a \in A$$

Dengan menjumlahkan kedua pertidaksamaan, diperoleh

$$\frac{|x|}{x^2} + \frac{|a|}{a^2} \leq 1 + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Dan juga,

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} \leq 1 + 1 \quad \forall a \in A \quad \ldots\ldots (**)$$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 16 Desember 202

Selanjutnya, diperoleh

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq |(x-y)| \cdot \left(\frac{|x|}{x^2 y^2} + \frac{|y|}{x^2 y^2} \right) \\
&\leq |(x-y)| \cdot \left(\left(\frac{|x|}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2} \right) + \left(\frac{|y|}{y^2} \cdot \frac{1}{x^2} \right) \right) \\
&\leq |(x-y)| \cdot \left(\left(1 \cdot \frac{1}{y^2} \right) + \left(1 \cdot \frac{1}{x^2} \right) \right) && [(*)] \\
&\leq |(x-y)| \cdot \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \right) \\
&\leq |(x-y)| \cdot (1 + 1) && [(**) \text{ dan } y \in A] \\
&\leq 2 \cdot |(x-y)|
\end{aligned}
$$

∴ Karena $|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot |(x-y)| \; \forall x, y \in A$.

Maka f memenuhi Fungsi Lipschitz pada A.

Sehingga menurut Teorema 5.4.5 disimpulkan bahwa

f kontinu seragam pada A.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 16 November 2020

$\cdot)$ Pilih dua barisan yakni:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ dalam } B.$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ dalam } B.$$

Akan ditunjukkan : $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \ni |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ dan $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$.

Note that,

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &= \left| \frac{1}{(x_n)^2} - \frac{1}{(y_n)^2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2} \right| \\ &= \left| (\sqrt{n})^2 - (\sqrt{n+1})^2 \right| \\ &= | n - (n+1) | \\ &= |-1| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 0$$

$\therefore$ Karena $\exists\, \varepsilon_0 = 1 > 0 \ni |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ dan $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Maka menurut Teorema 5.4.2 (i) dan (iii) Kriteria kekontinuan tidak seragam disimpulkan bahwa

f tidak kontinu pada B. //

Imanuel AS / 1811141008 ~~AT~~ Ampance

Makassar, 16 Nov 2020

(4.) Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ utuk $x \in \mathbb{R}$

kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$

Akan ditunjukkan: $|f(x) - f(y)| \leq |(x-y)|$ (Fungsi Lipschitz)

Note that,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right|$$

$$= \left| \frac{(1+y^2) - (1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right|$$

$$= \left| \frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right|$$

$$= \frac{|(x-y)(x+y)|}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$= |(x-y)| \cdot \frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\leq |(x-y)| \cdot \left(\frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \right) \quad \begin{bmatrix} |x+y| \leq |x| + |y| \\ \text{Ketaksamaan } \Delta \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa ini berlaku

$$\frac{|x|}{1+x^2} < 1 \text{ and } \frac{|a|}{1+a^2} < 1 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \dots (*)$$

Dengan menjumlahkan kedua pertidaksamaan, diperoleh

$$\frac{|x|}{1+x^2} + \frac{|a|}{1+a^2} < 1 + 1 \Rightarrow \frac{|x|}{2(1+x^2)} + \frac{|a|}{2(1+a^2)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$< 1 \quad \dots (**)$$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 16 Nov 2020

Selanjutnya, diperoleh

$$|f(x) - f(y)| \leq |(x-y)| \cdot \left(\frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \right)$$

$$\leq |(x-y)| \cdot \left(\frac{|x|}{(1+x^2)} \cdot \frac{1}{(1+y^2)} + \frac{|y|}{(1+y^2)} \cdot \frac{1}{(1+x^2)} \right)$$

$$\leq |(x-y)| \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{(1+y^2)} + 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)} \right) \quad [(*) \text{ dan } y \in \mathbb{R}]$$

$$\leq |(x-y)| \cdot \left(\frac{1}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2(1+x^2)} \right)$$

$$\leq |(x-y)| \cdot 1 \quad [(**) \text{ dan } y \in \mathbb{R}]$$

$$\leq |(x-y)|$$

$\therefore$ $|f(x) - f(y)| \leq |(x-y)|$ atau dengan kata lain f memenuhi syarat Lipschitz pada $\mathbb{R}$. Sehingga menurut Teorema 5.4.5 disimpulkan bahwa f kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

Imanuel AS / 181114008

(6.) Tunjukkan bahwa jika f dan g kontinu seragam pada $A \subseteq \mathbb{R}$ dan jika kedua - duanya terbatas pada A, maka hasil kali fg juga fungsi kontinu seragam.

Penyelesaian:

Diketahui: f dan g kedua-duanya terbatas pada $A \subseteq \mathbb{R}$.

Misalkan M nilai maximum dari $|f|$ atau $|g|$

- Kasus I : u/ $M = 0$

Contohnya seperti fungsi konstant $c(x) = 0 \quad \forall x$ dibatasi hanya pada 0.
Jika $M = 0$ maka $f = g = 0$
Dan $f(x) \cdot g(x) = 0$ ini jelas adalah fungsi kontinu seragam.

- Kasus II : u/ $M > 0$

Maka $\exists M > 0 \ni |f(x)| < M$ dan $|g(x)| < M \quad \forall x \in A$.

Karena $M > 0$ maka sekarang kita bisa membagi dengan M.

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$
Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(x) + f(y) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \\
&\leq |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \\
&\leq M\,|f(x) - f(y)| + M\,|g(x) - g(y)| \quad \ldots (*)
\end{aligned}
$$

Jadi diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{untuk suatu } |x-y| < \delta_1$$
$$|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{untuk suatu } |x-y| < \delta_2$$

Maka persamaan $(*)$ menjadi

$$|f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

$\therefore$ Karena untuk setiap $|x-y| < \delta \Rightarrow |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| < \varepsilon$
Maka menurut Definisi 5.4.1 Fungsi Kontinu Seragam disimpulkan bahwa $f \cdot g$ fungsi kontinu seragam.

Imanuel AS / 181114008 ~~Manuel~~ Manuel

Makassar, 18 Novemb 2020

(8.) Buktikan bahwa jika f dan g masing-masing kontinu seragam pada $\mathbb{R}$ maka fungsi komposisinya $f \circ g$ juga kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Diketahui: f dan g masing-masing kontinu seragam pada $\mathbb{R}$

Akan ditunjukkan: $|g(x) - g(y)| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(y))| < \varepsilon$

Ambil $x, y \in \mathbb{R}$ sebarang

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $\exists\, \delta > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{untuk suatu } |x-y| < \delta \quad \ldots\ldots (1)$$

Dari $\delta > 0$ diatas, kita peroleh $\delta' > 0$ sedemikian sehingga

$$|g(x) - g(y)| < \delta \quad \text{untuk suatu } |x-y| < \delta' \quad \ldots\ldots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$|g(x) - g(y)| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(y))| < \varepsilon \quad \text{untuk suatu } |x-y| < \delta'.$$

Jadi,

$$|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(y)| < \varepsilon \quad \text{untuk suatu } |x-y| < \delta'$$

$\therefore$ Menurut Definisi 5.4.1 Fungsi kontinu seragam, disimpulkan bahwa

$f \circ g$ fungsi kontinu seragam.

Imanuel AS / 1811141008 Matematika

Makassar, 18 Nov 2020

(10) Buktikan bahwa jika f kontinu seragam pada suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ yang terbatas, maka f terbatas pada A.

Penyelesaian:

Diketahui: $A \subseteq \mathbb{R}$ terbatas, f kontinu seragam pada A.

Maka berdasarkan Defenisi Kontinu Seragam

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni \forall x, y \in A, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Selanjutnya, untuk $\varepsilon > 0$ akan dicari hubungannya dengan $\delta > 0$.

Karena A terbatas maka ia dibatasi oleh interval-interval di sekitaran δ;

$$\exists n \in \mathbb{N} \ni A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \delta), \; x_i \in A$$

Misalkan

$$m = \min_{1 \le i < n} f(x_i) \quad , \quad M = \max_{i \le i < n} f(x_i)$$

Ambil $x \in A$ sebarang, karena A dibatasi oleh $B(x_i, \delta)$

Maka dapat diperoleh $x_j \in A$ sedemikian sehingga $x \in B(x_j, \delta)$

$$x \in B(x_j, \delta) \Rightarrow |x - x_j| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_j)| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - f(x_j) < \varepsilon$$

Perhatikan bahwa

> Karena $f(x_j) \le M$, diperoleh:

$$f(x) - f(x_j) < \varepsilon$$

$$f(x) < f(x_j) + \varepsilon \quad \text{[Kedua ruas ditambah } f(x_j)\text{]}$$

$$f(x) \le M + \varepsilon$$

> Karena $f(x_j) \ge m$, diperoleh:

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_j)$$

$$f(x_j) - \varepsilon < f(x) \quad \text{[Kedua ruas ditambah } f(x_j)\text{]}$$

$$f(x) > f(x_j) - \varepsilon \quad \text{[Jelas]}$$

$$f(x) \ge m - \varepsilon$$

Jadi, untuk setiap $x \in A$ diperoleh $f(x) \in [m - \varepsilon, M + \varepsilon]$

Maka f terbatas pada A.

Imanuel AS / 181114008 Imanuel

Makassar, 18 Maret 2020

(12.) Tunjukkan bahwa jika f kontinu pada $[0,\infty)$ dan kontinu seragam pada $[a,\infty)$ untuk suatu konstanta positif a, maka f kontinus seragam pada $[0,\infty)$.

Penyelesaian:

- Akan ditunjukkan: f kontinu seragam pada $[0,a]$.

  Perhatikan interval $[0,a]$.

  Karena f kontinu pada $[0,\infty)$ maka jelas f kontinu pada $[0,a]$ untuk suatu konstanta positif a.

  Selanjutnya, perhatikan bahwa interval $[0,a]$ adalah suatu interval tertutup dan terbatas, maka menurut Teorema Kekontinuan Seragam disimpulkan bahwa f kontinu seragam pada $[0,a]$. ....(1)

- Akan ditunjukkan: f kontinu seragam pada $[a,\infty)$

  Diketahui di soal bahwa f kontinu seragam pada $[a,\infty)$ ....(2)

$\therefore$ Dari (1) dan (2) diperoleh f kontinu seragam pada $[0,a]$ dan juga pada $[a,\infty)$ sehingga disimpulkan bahwa

f kontinu seragam pada $[0,\infty)$.

Imanuel AS / 1811141008 4 MA4

Makassar, 18 Nov 20..

(14.) Suatu fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan fungsi periodik pada A jika terdapat suatu bilangan $p > 0$ sedemikian sehingga $f(x+p) = f(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa suatu fungsi periodik kontinu pada $\mathbb{R}$ adalah terbatas dan kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 12 Maret 2020

(16) Sebuah fungsi dikatakan kontinu mutlak pada interval I jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat sebuah $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap pasangan subinterval yang diuraikan oleh $[x_k, y_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, dari I sedemikian sehingga $\sum [x_k - y_k] < \delta$ kita memiliki $\sum |f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon$.
Tunjukkan bahwa jika f memenuhi kondisi Lipschitz pada I, maka f adalah kontinu mutlak pada I.

Penyelesaian :

Diketahui: f memenuhi kondisi Lipschitz pada I

Karena f adalah fungsi Lipschitz pada I
Maka $\forall x, y \in I$, $\exists M > 0 \ni |f(x) - f(y)| < M|x-y|$

Akan ditunjukkan: f kontinu mutlak pada I berdasarkan pasangan subinterval yang diuraikan oleh $[x_k, y_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ dari I.

Perhatikan bahwa,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(y_k)| \leq M . \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang, maka

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon \quad \text{ketika} \quad \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, maka $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap pasangan subinterval yang diuraikan oleh $[x_k, y_k]$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ pada I maka berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon \quad \text{ketika} \quad \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| < \delta$$

dengan demikian, telah ditunjukkan bahwa

f adalah kontinu mutlak pada I.