Makassar, 29 September 2020

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke-1 / Catatan

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan Pertemuan ke-1

Operasi

Operasi $*$ pada himpunan $A \neq \phi$ adalah fungsi:

$$* : A \times A \longrightarrow A$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha * \beta$$

Contoh

(1) $+$ operasi pada $\mathbb{Z}$

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \mapsto a+b$$

(2) $\times$ operasi pada $\mathbb{Z}$

$$\times : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \mapsto a \times b$$

(3) Penjumlahan, perkalian adalah operasi pada $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

(4) Pengurangan operasi pada $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ dan pada $\mathbb{R}$, Tetapi bukan operasi pada $\mathbb{N}$.

(5) Pembagian operasi pada $\{-1, 1\}$

(6) Pemangkatan adalah operasi pada $\mathbb{N}$

(7) Pembagian adalah operasi pada $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ dan pada $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(8) Penjumlahan dan perkalian modulo n adalah operasi pada $\mathbb{Z}_n$

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar 29 September 2020

Latihan Cari contoh operasi pada himpunan selain yang disebutkan tadi (5 contoh)

(1) • Operasi pada $\mathbb{R}^3$

$$+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right] \longmapsto \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$$

(2) + operasi pada $\mathbb{R}^2$

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

(3) • Operasi pada $M_2(\mathbb{R})$

$$\bullet : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] \longmapsto \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

(4) + Operasi pada $M_3(\mathbb{R})$

$$+ : M_3(\mathbb{R}) \times M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix} \right] \longmapsto \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix}$$

(5) Perkalian adalah operasi pada $\{-1, 0, 1\}$

Makassar, 29 September 2020

Imanuel AJ / 1811141008

Grup

Notasi

- $\boxed{D}$: Defenisi
- $\boxed{T}$: Teorema
- $\boxed{E}$: Contoh
- $\boxed{L}$: Lemma
- $\boxed{N}$: Catatan

$(G, *)$ grup ; $G \neq \emptyset$

(i) $\forall a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$ (Tutup)

(ii) $\forall a, b, c \in G \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$ (Assosiatif)

(iii) $\exists e \in G$, $\ni a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$ (Identitas)

(iv) $\forall a \in G$, $\exists a^{-1} \in G \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (Invers)

$\boxed{N}$

(1) $(G, *) \longleftarrow$ Tertutup $\longrightarrow$ Grupoid

(2) $(G, *)$ Grupoid + Assosiatif

↳ Semigrup

(3) $(G, *)$ Semigrup + punya identitas

↳ Monoid

(4) $(G, *)$ Monoid + setiap unsurnya punya invers

↳ Grup

Grup → Monoid yang setiap unsurnya punya invers.

ImanueL AS / 1811141008

$(G, *)$

↳ G dengan operasi $*$

Latihan

(1) Himpunan yang bersifat tertutup
$(\forall a,b \in G \Rightarrow a*b \in G)$ tetapi tidak memenuhi sifat assosiatif

Jawab:

•) $(\mathbb{Z}, -)$. . .

- Tutup, karena $\forall a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a-b) \in \mathbb{Z}$
- Tidak Assosiatif, karena terdapat $2, 1, 3 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $2-(1-3) \neq (2-1)-3$

•) $(\mathbb{R}, -)$

- Tutup, karena $\forall a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a-b) \in \mathbb{R}$
- Tidak Assosiatif, karena terdapat $1, 2, 3 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $2-(1-3) \neq (2-1)-3$

•) $(\mathbb{Q}, -)$

- Tutup, karena $\forall a,b \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a-b) \in \mathbb{Q}$
- Tidak Assosiatif, karena terdapat $1, 2, 3 \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $2-(1-3) \neq (2-1)-3$

(2) Himpunan yang bersifat tertutup dan assosiatif tetapi tidak memiliki unsur identity

Jawab:

•) $(\mathbb{N}, +)$

- Tutup, karena $\forall a,b \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{N}$
- Assosiatif, $\forall a,b,c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$
- $\nexists x \in \mathbb{N} \ni x+a = a+x = a, \ \forall a \in \mathbb{N}$

•) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$

- Tutup, karena $\forall a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Assosiatif, $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow a+(b+c) = (a+b)+c$
- $\nexists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x+a = a+x = a, \ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

•) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$

- Tutup, karena $\forall a,b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- Assosiatif, $\forall a,b,c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$
- $\nexists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ni x+a = a+x = a, \ \forall a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Imanuel AS / 181141008 Makassar, 29 September 20..

(3) Himpunan yang memenuhi sifat tertutup, assosiatif, punya unsur identitas tetap tidak semua unsurnya punya invers

Jawab:

•) $(\mathbb{N}, \times)$

- Tutup, karena $\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow (a \times b) \in \mathbb{N}$
- Assosiatif, karena $\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- $\exists$ identitas, yaitu $1 \in \mathbb{N}$
  $\ni 1 \times a = a \times 1 = a \;; \forall a \in \mathbb{N}$
- Tidak memiliki invers, karena $\exists\, 2 \in \mathbb{N}, \nexists\, y \in \mathbb{N}$
  $\ni 2 \times y = y \times 2 = 1$

•) $(\mathbb{Z}, \times)$

- tutup, karena $\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a \times b) \in \mathbb{Z}$
- Assosiatif, karena $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- $\exists$ identitas, yaitu $1 \in \mathbb{Z}$
  $\ni 1 \times a = a \times 1 = a \;; \forall a \in \mathbb{Z}$
- Tidak memiliki invers karena $\exists\, 2 \in \mathbb{Z}, \exists\, y \in \mathbb{Z}$
  $\ni 2 \times y = y \times 2 = 1$

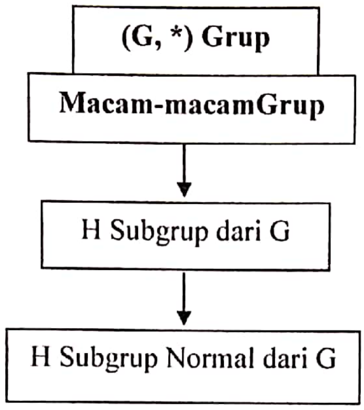
•) $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

- Tutup, karena $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow (A \times B) \in M_2(\mathbb{R})$
- Assosiatif, karena $\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $\exists$ identitas yaitu $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  $\ni I \times A = A \times I = A \;; \forall A \in M_2(\mathbb{R})$
- Tidak memiliki invers,
  karena $\exists\, A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$
  dengan $\det(A) = (5 \cdot 2) - (2 \cdot 5) = 10 - 10 = 0$
  dimana Matriks dengan determinan $= 0$ adalah tidak memiliki invers [Teorema 2.3.6 Anton Rorres]

Imarvel AS / 181114008

Pertemuan 1: Sepintas Teori Grup

Peta Konsep Grup



Peta Konsep Morpisma Grup