Makassar, 17 Oktober 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 181114100

MK : Analisis Real II

Section 5.2

1. Tentukan semua titik - titik dimana fungsi berikut kontinu.

(a). $f(x) := \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$, $(x \in \mathbb{R})$

Penyelesaian :

Misalkan $f_1(x) = x^2+2x+1$ dan $f_2(x) = x^2+1$.

Sehingga $f(x)$ dapat dituliskan sebagai :

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Perhatikan Teorema 5.2.2 (b) :

"Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, diberikan fungsi f kontinu di A.
Jika $h : A \to \mathbb{R}$ juga kontinu di A dan $h \neq 0$
Maka f/h kontinu di A."

Adit : Jika $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$ dan $f_2(x) \neq 0$ maka $f(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$

5.2.3 :

"Untuk sebarang P polinomial, tulis $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$
untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka $P(c) = \lim_{x \to c} P$, $\forall c \in \mathbb{R}$,
Maka P polinomial kontinu di $\mathbb{R}$."

Jelas bahwa $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ adalah fungsi polinomial, akibatnya

$f_1(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$ .... (i)

$f_2(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$ .... (ii)

Kemudian untuk semua $x \in \mathbb{R}$, jelas $f_2(x) > 0$, sehingga dapat dituliskan $f_2(x) \neq 0$ ..... (iii)

$\therefore$ Diperoleh (i), (ii), (iii). Berdasarkan Teorema 5.2.2 (b) disimpulkan $f(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$.

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 17 Oktober 2020

(b). $g(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}}$. $(x \geq 0)$

Penyelesaian :

Misalkan $g_1(x) = \sqrt{x}$ dan $g_2(x) = x + \sqrt{x}$, sehingga $g(x)$ dapat dituliskan sebagai $g(x) = g \circ g_2(x)$.

Perhatikan bahwa,

$f(x) = x$ kontinu di $\mathbb{R}$ karena $f(x)$ polinomial.

Akibatnya

$g_1(x) = \sqrt{x}$ kontinu di $x \geq 0$ (Teorema 5.2.5)

$g_2(x) = x + \sqrt{x}$ kontinu di $x \geq 0$ (teorema 5.2.2)

5.2.5 :
$f(x)$ kontinu di A
$\Rightarrow g(x) = \sqrt{f(x)}$ kontinu di A.

5.2.2 :
Penjumlahan 2 fungsi kontinu, menghasilkan fungsi kontinu.

Berdasarkan Teorema 5.2.7

Diberikan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di A dan $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di B.

Jika $f(A) \subseteq B$ maka $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di A

$\therefore g(x) = g_1 \circ g_2 (x)$ kontinu di $x \geq 0$.

Imanuel AS / 181114008 [signature] Malassar, 17 Oktober 2020

(c). $h(x) := \sqrt{1+|\sin x|}$, $x \neq 0$

Penyelesaian :

Untuk $x \neq 0$

Misalkan, $h_1(x) = \sqrt{x}$

$h_2(x) = 1+|x|$

$h_3(x) = \sin x$

$h_4(x) = x$

Perhatikan bahwa,

h(x) dapat kita tuliskan sebagai:

$$h(x) = \frac{h_1 o h_2 o h_3 \ (x)}{h_4 \ (x)}$$

h_4 kontinu di $\mathbb{R}$ (Teorema 5.2.3 (a))

h_3 kontinu di $\mathbb{R}$ (Teorema 5.2.3 (c))

h_2 kontinu di $\mathbb{R}$ (Teorema 5.2.8 (a) dan Teorema 5.2.2)

h_1 kontinu di $\mathbb{R}$ (Teorema 5.2.5)

Jadi, dapat disimpulkan $h_1 o h_2 o h_3 \ (x)$ kontinu di $\mathbb{R}$.

Akibatnya, $h(x)$ kontinu di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Imanuel AS / 181114100 8

Makassar, 17 Oktober 2020

(d). $k(x) := \cos\sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Penyelesaian :

Misalkan $\left.\begin{aligned} k_1(x) &= \cos x \\ k_2(x) &= \sqrt{x} \\ k_3(x) &= 1+x^2 \end{aligned}\right\} \forall x \in \mathbb{R}$

Fungsi $k(x)$ dapat kita tuliskan sebagai :

$$k(x) = k_1 \circ k_2 \circ k_3 \ (x)$$

$k(x)$ terdefinisi, jelas, karena $k_3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Selanjutnya,

$k_3(x)$ adalah fungsi polinomial sehingga jelas $k_3(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$.
(Teorema 5.2.5 (a))

$k_2(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$, karena $k_3(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$. (Teorema 5.2.4)

$k_1(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$, karena $k_2(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$. (Teorema 5.2.3(d))

Jadi, dapat disimpulkan $k(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$. (Teorema 5.2.7)

Imanuel AS / 1811141008 ~~Matt~~ Mabk

Makassar, 17 Oktober 2020

(2.) Buktikan jika $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinu di $A \subseteq \mathbb{R}$, maka fungsi f^n didefinisikan $f^n(x) = (f(x))^n$, $\forall x \in A$ kontinu di A.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan metode induksi

Perhatikan untuk $n = 1$

f kontinu di A

Misalkan f^n kontinu di A, maka akan ditunjukka juga bahwa f^{n+1} kontinu di A.

Perhatikan,

$$f^{n+1} = f^n . f^1$$

Karena f dan f^n kontinu di A, berdasarkan Teorma 5.2.2 (a), perkalian dua fungsi kontinu pasti kontinu,

sehingga jelas f^{n+1} kontinu di A.

Kemudian secara induksi terbukti

$\therefore f^n$ kontinu di A.

Cara lain dengan memperhatikan definisi f^n

$$f^n(x) = (f(x))^n, \forall x \in A.$$

Karena $f(x)$ sendiri kontinu di A. Maka perkalian fungsi-fungsi kontinu tetap menghasilkan fungsi kontinu, (Teorma 5.2.2 (a))

sehingga jelas :

$\therefore f^n(x)$ kontinu di A.

Imanuel AS / 181114100 8 Imanuel   Makassar, 17 Oktober 20

(3.) Berikan contoh dari fungsi f dan g yang tidak kontinu di $c \in \mathbb{R}$, tetapi memenuhi:

(a). $f+g$ kontinu di $c \in \mathbb{R}$

(b). $f \cdot g$ kontinu di $c \in \mathbb{R}$

Penyelesaian:

Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Karena domain f dan g adalah $\mathbb{R}$ maka jelas f dan g tidak kontinu di $x = 0 = c$

Perhatikan,

(a) $$(f+g)(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Jelas bahwa $(f+g)(x) = 1$, fungsi konstan sehingga dapat dikatakan kontinu di $\mathbb{R}$.

(b) $$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Jelas bahwa $(f \cdot g)(x) = 0$, fungsi konstan, dan kontinu di $\mathbb{R}$.

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 17 Oktober 2020

4) Misalkan $f : x \longrightarrow [\![x]\!]$ menyatakan fungsi bilangan bulat terbesar (lihat halaman 5.1.4). Tentukan titik-titik ketontinuan dari fungsi $f(x) = x - [\![x]\!], x \in \mathbb{R}$.

<u>Penyelesaian</u> :

Definisi norm $[\![x]\!]$

Jika $x \in \mathbb{R}$ didefinisikan $[\![x]\!]$ adalah bilangan bulat terbesar $n \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $n \leq x$. Misal $x = k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^-} (x - [\![x]\!])$$

$$= k - (k-1) \qquad \left[\begin{array}{l} \text{u/ } x \text{ cukup dekat, } k-1 < x \leq k \\ \Rightarrow [\![x]\!] = k-1 \end{array}\right]$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = \lim_{x \to k^+} (x - [\![x]\!])$$

$$= k - k \qquad \left[\begin{array}{l} \text{u/ } x \text{ cukup dekat, } k \leq x < k+1 \\ \Rightarrow [\![x]\!] = k \end{array}\right]$$

$$= 0$$

$\therefore$ f tidak kontinu di k.

u/ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sehingga $m < r < m+1$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = \lim_{x \to r^-} (x - [\![x]\!])$$

$$= r - m \qquad [m < r < m+1 \Rightarrow [\![x]\!] = m]$$

$$\lim_{x \to r^+} f(x) = \lim_{x \to r^+} (x - [\![x]\!])$$

$$= r - m \qquad [m < r < m+1 \Rightarrow [\![x]\!] = m]$$

$\therefore$ f kontinu di $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Imanuel AS / 1811141008 Fisika ICP

Makassar, 17 Oktober 2020

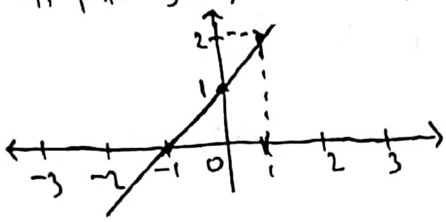
(5.) Misalkan g didefinisikan pada $\mathbb{R}$ oleh $g(1) = 0$ dan $g(x) = 2$, Jika $x \neq 1$ dan misalkan $f(x) = x + 1$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0} g \circ f \neq g \circ f(0)$.

Mengapa ini tidak kontradiksi dengan Teorema 5.2.7 ?

Penyelesaian :

Grafik $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

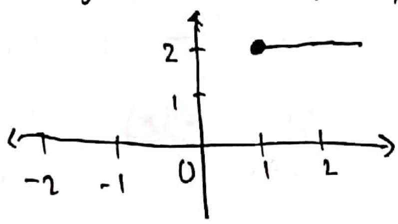


$\lim_{x \to 0} (g \circ f(x)) = \lim_{x \to 0} g(f(x)) = 2$

$g(f(x)) = g(x+1)$ dengan syarat $x + 1 \neq 0$

maka $x \neq 0$

Grafik $g(x) = 2$, $g(1) = 0$, $x \in \mathbb{R}$



Disisi lain

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$$

$\therefore \lim_{x \to 0} g \circ f \neq (g \circ f)(0)$

Karena $x \neq 0$ dan $f(x) = x + 1$, maka $f(x) \neq 1$

Perhatikan bahwa, berdasarkan yang diketahui

$g(x) = 2$ jika $x \neq 1$

Hal ini berakibat

$g(f(x)) = 2$ karena $f(x) \neq 1$

Teorema 5.2.6

"Diberikan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dan misal $f : A \to \mathbb{R}$ dan $g : B \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(A) \subseteq B$

Jika f kontinu di $c \in A$ dan

g kontinu di $b = f(c) \in B$ maka

komposisi $g \circ f$, $A \to \mathbb{R}$ kontinu di c."

Imanuel AS / 1811141008 ~~Aktk~~ Mattis   Makassar, 17 Oktober 2020

Teorema 5.2.6 setara dengan pernyataan berikut yang merupakan kontraposisi dari teorema tersebut.

Kontraposisi Teorema 5.2.6

"Diberikan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dan misal $f : A \to \mathbb{R}$ dan $g : B \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(A) \subseteq B$

Jika komposisi $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ tidak kontinu di c, maka,

f tidak kontinu di $c \in A$ atau

g tidak kontinu di $b = f(c) \in B$."

Mengapa tidak kontradiksi dengan Teorema 5.2.6?

Terlihat bahwa,

$g \circ f$ tidak kontinu di 0 atau

g tidak kontinu di $1 = f(0)$.

Kita lihat apa pernyataan ini salah satunya benar atau dua-duanya benar (??). Ternyata f kontinu di 0, jadi pernyataan pertama tidak terjadi.

Kita lihat pernyataan kedua, ternyata g tidak kontinu di $1 = f(0)$. Maka pernyataan kedua terjadi.

Jadi soalnya memenuhi Teorema 5.2.6 dan tidak terjadi kontradiksi.

Imanuel L AS / 1811141008 Imanuel   Makassar 17 Oktober 2020

(6.) Misal f, g didefinisikan pada $\mathbb{R}$ dan $c \in \mathbb{R}$.
Misalkan juga $\lim_{x \to c} f = b$ dan g kontinu pada b.
Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} g \circ f = g(b)$.

(Bandingkan hasil ini dengan Teorema 5.2.7 dan latihan sebelumnya).

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa

Dik : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, didefinisikan $\lim_{x \to c} f = b$, $c \in \mathbb{R}$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu di b

Akan ditunjukkan : $\lim_{x \to c} g \circ f = g(b)$

Misalkan (x_n) suatu barisan yang konvergen ke c.
$\because \lim_{x \to c} f = b$, berdasarkan Teorema 4.1.8 (Kriteria Barisan)
menunjukkan $f(x_n)$ konvergen ke b,
dan karena fungsi g kontinu di b,
Berdasarkan Definisi 5.1.3
$g(x_n)$ konvergen ke $g(b)$, sehingga

$$\lim_{n \to a} g(f(x_n)) = g(b)$$

$$\lim_{n \to a} g \circ f(x_n) = g(b)$$

dengan demikian $\lim_{x \to c} g \circ f = g(b)$.

ImanueL AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 17 Oktober 2020

(7.) Berikan contoh dari fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ yang diskontinu di $[0,1]$ tetapi $|f|$ kontinu di $[0,1]$.

Penyelesaian :

Misalkan,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \text{Rational} \\ -1 & , x \in \text{Irrational} \end{cases}$$

Berdasarkan materi kerapatan bilangan real, maka

$$\mathbb{R} = \{ \dots, \text{rational}, \text{irrational}, \text{rational}, \dots \}$$

Sehingga $f(x)$ diskontinu di $\mathbb{R}$, $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$,

kemudian perhatikan

$$|f(x)| = 1 \quad , x \in \mathbb{R}$$

Jelas $|f(x)|$ kontinu karena fungsi konstan.

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 17 Oktober 2020

(8.) Misalkan f, g fungsi - fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, dan misalkan pula $f(r) = g(r)$ untuk semua bilangan rasional r. Apakah benar bahwa $f(x) = g(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$?

Penyelesaian :

f, g kontinu di $\mathbb{R}$

Misal,

$$f(r) = g(r) \quad , \forall r \in \mathbb{Q}$$

Akan ditunjukkan : $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$

Dari teorema 2.4.8,

$x, y \in \mathbb{R}$, satu bilangan rasional $r \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $x < r < y$.

Berdasarkan Teorema 5.1.3

diperoleh barisan $(r_n) \subseteq \mathbb{Q}$ konvergen ke x

Maka $f(r_n)$ konvergen ke $f(x)$ berarti

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) \qquad [\text{karena } f \text{ kontinu}]$$

$$= \lim_{n \to \infty} g(r_n) \qquad \left[\begin{array}{l} r_n \in \mathbb{Q} \text{ dan berdasarkan diketahui} \\ f(r) = g(r) \quad \forall r \in \mathbb{Q} \end{array}\right]$$

$$= g(x)$$

$\therefore f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Makassar, 16 Oktober 2020

Analisis Real II

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

(9) Misalkan $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu pada $\mathbb{R}$ memenuhi $h(m/2^n) = 0$ untuk semua $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Tunjukkan bahwa $h(x) = 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian

- Akan ditunjukkan himpunan $\left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ adalah anggota $\mathbb{R}$.

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$.

Menurut sifat Archimedean, ada $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku

$$0 < \frac{1}{n} < b-a$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < b-a \qquad [n < 2^n, \forall n \in \mathbb{N}]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < b-a$$

$$\Rightarrow 1 < 2^n \cdot (b-a) \qquad [\text{Kedua ruas dikalikan } 2^n]$$

$$\Rightarrow 1 < 2^n \cdot (b-a) = b2^n - a2^n$$

Perhatikan bahwa, $b.2^n - a.2^n > 1$

Maka, terdapat $m \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$a.2^n < m < b.2^n$$

$$a < \frac{m}{2^n} < b \qquad [\text{Setiap ruas dibagi oleh } 2^n]$$

$$\therefore \frac{m}{2^n} \in \mathbb{R} \;; \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad \ldots\ldots (*)$$

Imanuel AS / 1811141008 ~~Kamis~~ Makassar, 16 Oktober 2018

- Selanjutnya,

Ambil $x \in \mathbb{R}$ sebarang

Berdasarkan (*) diperoleh barisan $(x_n) = \frac{m}{2^n}$

Misalkan $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

Perhatikan bahwa,

$$x_n \to x \Rightarrow h(x) = \lim_{n \to \infty} h(x_n) \qquad [h \text{ kontinu}]$$

$$h(x) = \lim_{n \to \infty} h\left(\frac{m}{2^n}\right)$$

$$h(x) = \lim_{n \to \infty} 0 \qquad \left[h\left(\frac{m}{2^n}\right) = 0 \ ; \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right]$$

$$h(x) = 0$$

$\therefore h(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Inamuel AS / 1811141008

Makassar, 17 Oktober 2020

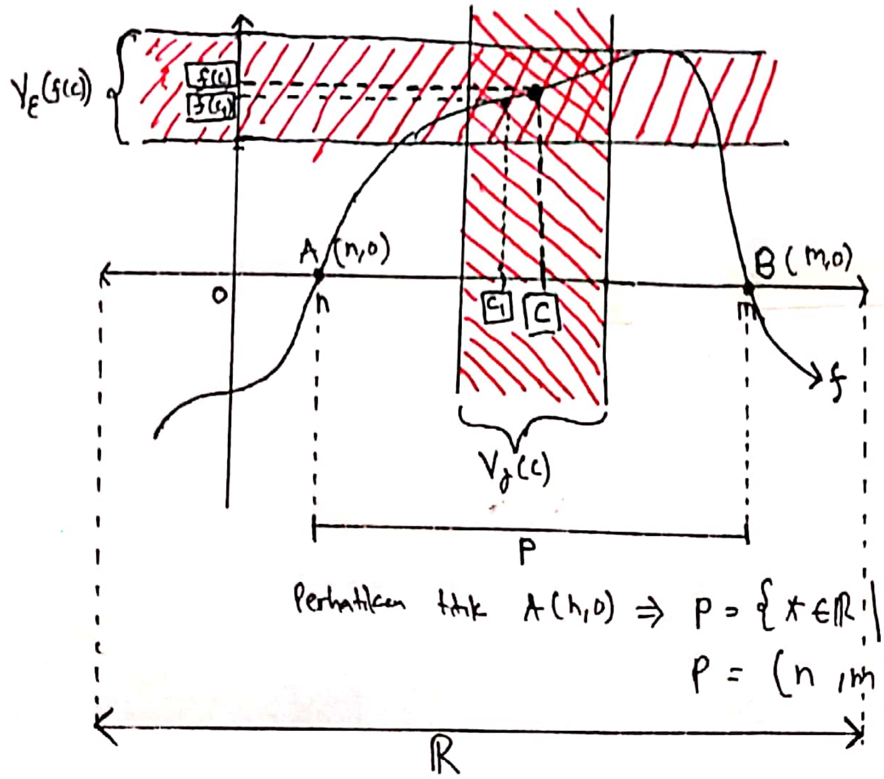
(10). Misalkan $f : \mathbb{R} : \mathbb{R}$ kontinu pada $\mathbb{R}$ dan misalkan pula $P = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$
Jika $c \in P$, Tunjukkan bahwa terdapat suatu lingkungan $V_\delta(c) \subseteq P$.

Penyelesaian :

Untuk menunjukkan $V_\delta(c) \subseteq P$.
Cukup ditunjukkan untuk setiap $c_1 \in V_\delta(c) \Rightarrow f(c_1) > 0$.
Perhatikan bahwa, karena $c \in P \Rightarrow f(c) > 0$
Diketahui bahwa f adalah kontinu pada $\mathbb{R}$, dan $c \in \mathbb{R}$.
Maka menurut Definisi 5.1.1 berlaku:

"Jika diberikan lingkungan $V_\varepsilon(f(c))$ dari $f(c)$,
terdapat suatu lingkungan $V_\delta(c)$ dari c
sedemikian sehingga jika c_1 sebarang titik pada $V_\delta(c) \cap P$,
maka $f(c_1)$ termuat dalam $V_\varepsilon(f(c))$."

Lihat gambar berikut:



Perhatikan titik $A(n,0) \Rightarrow P = \{x \in \mathbb{R} \mid x > n \ni f(x) > 0\}$
$P = (n, m)$ → (interval buka)

∴ Karena $c_1 \in V_\delta(c) \cap P \Rightarrow c_1 \in V_\delta(c)$ dan $c_1 \in P$.
Karena $c_1 \in P \Rightarrow f(c_1) > 0$. [Definisi anggota himpunan P]
Karena $c_1 \in V_\delta(c)$ dipilih sebarang dan c_1 memenuhi $f(c_1) > 0$
Maka adanya suatu lingkungan $V_\delta(c) \subseteq P$ Terbukti. ∎

Imanuel AS / 1811141008 ~~Matt~~ Mauls

Makassar, 16 Oktober 2020

(11). Jika f dan g kontinu pada $\mathbb{R}$, misalkan pula

$S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x)\}$.

Jika $(s_n) \subseteq S$ dan $\lim (s_n) = s$,

Tunjukkan bahwa $s \in S$.

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa,

Untuk menunjukkan $s \in S$, cukup ditunjukkan $f(s) \geq g(s)$.

Karena $(s_n) \subseteq S$, diperoleh :

$$f(s_n) \geq g(s_n) \qquad [\forall n \in \mathbb{N}]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(s_n) \geq \lim_{n \to \infty} g(s_n) \qquad [\text{Sifat Limit}]$$

$$\Rightarrow f(s) \geq g(s) \qquad [f \text{ dan } g \text{ adalah kontinu}]$$

$\therefore$ Karena $f(s) \geq g(s)$ maka memenuhi sifat keanggotaan himpunan S, untuk $s \in \mathbb{R}$.

Maka disimpulkan bahwa $s \in S$. ∎

Imanuel AS / 1811141008 Imanu

Makassar, 18 Oktober 2020

(12.) Suatu fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan aditif jika $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa jika f kontinu pada suatu titik x_0, maka fungsi itu kontinu pada setiap titik dalam $\mathbb{R}$. (Lihat Latihan 4.2.12)

Penyelesaian :

Menurut Latihan (4.2.12)

Misal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Asumsikan $\lim_{x \to 0} f = L$ Ada.

Misal $L = 0$, dan f mempunyai limit pada setiap titik $c \in \mathbb{R}$.

Perhatikan bahwa,

$$f(x) = f(x-c) + f(c) \quad ; \forall x, c \in \mathbb{R}$$

Misal (x_n) sebarang barisan yang konvergen ke x,

Maka ditulis,

$$\lim_{n \to \infty} (x_n) = x$$

Imanuel AS / 1811141008 [signature] Makassar, 18 Oktober 22

Perhatikan bahwa,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = x$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n) = \lim_{n\to\infty} x$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n) - \lim_{n\to\infty} x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - x + x_0) = x_0 \quad [\text{Kedua ruas ditambah } x_0]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [f(x_n - x + x_0)] = f(x_0) \quad [f \text{ kontinu } x_0]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [f(x_n - x) + f(x_0) = f(x_0) \quad [f \text{ aditif}]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [f(x_n - x)] + \lim_{n\to\infty} f(x_0) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [f(x_n - x)] + \cancel{f(x_0)} = \cancel{f(x_0)} \quad [\text{Kedua ruas dikurang } f(x_0)]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [f(x_n - x)] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [f(x_n - x)] + f(x) = f(x) \quad [\text{kedua ruas ditambah } f(x)]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [f(x_n - x)] + \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [f(x_n - x + x)] = f(x) \quad [f \text{ aditif}]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

$\therefore$ f kontinu pada $\mathbb{R}$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 18 Oktober 2020

(13) Misalkan f fungsi aditif kontinu pada $\mathbb{R}$. Jika $c = f(1)$, tunjukkan bahwa kita mempunyai $f(x) = cx$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

[Petunjuk : Pertama-tama, tunjukkan bahwa jika r suatu bilangan rasional, maka $f(r) = cr$.]

Penyelesaian :

➤ Adb. Jika r bilangan rasional, maka $f(r) = cr$

Ambil $r \in$ bil rasional

$r = \frac{a}{b}$, untuk suatu $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\Big(\underbrace{\tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{b} + \dots + \tfrac{1}{b}}_{\text{sebanyak a kali}}\Big)$$

$$= \underbrace{f\left(\tfrac{1}{b}\right) + f\left(\tfrac{1}{b}\right) + \dots + f\left(\tfrac{1}{b}\right)}_{\text{sebanyak a kali}}$$ [karena f fungsi aditif]

$$= a \cdot f\left(\tfrac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{a}{b} \cdot b \cdot f\left(\tfrac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{a}{b}\Big[\underbrace{f\left(\tfrac{1}{b}\right) + \dots + f\left(\tfrac{1}{b}\right)}_{\text{sebanyak b kali}}\Big]$$

$$= \frac{a}{b} \cdot f\Big(\underbrace{\tfrac{1}{b} + \dots + \tfrac{1}{b}}_{\text{sebanyak b kali}}\Big)$$ [karena f fungsi aditif]

$$= \frac{a}{b} \cdot f\left(\frac{b}{b}\right)$$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 18 Oktober 2020

$$= \frac{a}{b} \cdot f\left(\frac{b}{b}\right)$$

$$= \frac{a}{b} \cdot f(1)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} \cdot c \qquad [\text{Karena } f(1) = c]$$

$$f(r) = r \cdot c$$

$$f(r) = c \cdot r$$

Perhatikan pula,

$$c = f(1)$$

$$c = f(1+0)$$

$$c = f(1) + f(0) \qquad [\text{Karena } f \text{ fungsi aditif}]$$

$$c = c + f(0) \qquad [\text{karena } f(1) = c]$$

$$\boxed{f(0) = 0}$$

$$f(0) = f(r + (-r))$$

$$0 = f(r) + f(-r)$$

$$-f(r) = f(-r) \qquad \forall r \in \mathbb{Q}, r > 0$$

$$\therefore f(r) = c \cdot r \qquad \forall r \in \mathbb{Q}$$

Imanuel AS / 1811141008 Manu

Makassar, 18 Oktober 2020

∘) Adb $f(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ambil $x \in \mathbb{R}$ sebarang.

Karena $\mathbb{Q}$ dense di $\mathbb{R}$ (sesuai Teorema pada Analisis Real 1)

maka diperoleh barisan bilangan real (x_n)

yang konvergen ke x, atau $(x_n) \to x$

$(x_n) \to x$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

Perhatikan :

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \quad \left[x = \lim_{n\to\infty} x_n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

[Karena f kontinu maka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n)) = f(c)$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \Rightarrow f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n))$

sehingga diperoleh $f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.]

$$= \lim_{n\to\infty} c \cdot x_n \quad \left[x_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) = c \cdot x_n\right]$$

$$= c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n \quad [\text{Sifat limit}]$$

$$= c \cdot x \quad \left[\lim_{n\to\infty} x_n = x\right]$$

Karena x diambil sebarang, maka

$f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Imanuel AS / 181114008 — Makassar, 17 Oktober 2020

(14) Misalkan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi hubungan $g(x+y) = g(x)\, g(y)$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa jika g kontinu pada $x = 0$, maka g kontinu pada setiap titik dalam $\mathbb{R}$. Juga jika kita mempunyai $g(a) = 0$ untuk suatu $a \in \mathbb{R}$, maka $g(x) = 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian :

Adb : (i) Jika $g(a) = 0$, $\forall$ suatu $a \in \mathbb{R}$, maka $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) Jika g kontinu di $x = 0$, maka g kontinu di $\mathbb{R}$.

Bukti.

(i) Misal $g(a) = 0$, $\forall$ suatu $a \in \mathbb{R}$

Ambil $x \in \mathbb{R}$ sebarang,

Tulis,
$$\begin{aligned} g(x) &= g((x-a)+a) \\ &= g(x-a) \cdot g(a) \\ &= g(x-a) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena diambil x sebarang, maka

$$\therefore g(x) = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 18 Oktober 2020

(ii) Perhatikan bahwa

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= g(0+0) \\ &= g(0)\cdot g(0) \\ &= (g(0))^2 \end{aligned}\right\}$$ Karena $0=0^2$ dan $1=1^2$ maka diperoleh $g(0)=0$ atau $g(0)=1$

Misal g kontinu di $x=0$, maka pasti ada $\varepsilon>0$ dan $\delta>0$ yang memenuhi

$$|x-0|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(0)|<\frac{\varepsilon}{|g(c)|}$$

Ambil $g(0)=1$, akibatnya

$$|x|<\delta \Rightarrow |g(x)-1|<\frac{\varepsilon}{|g(c)|}$$

Karena diambil $g(0)=1$, maka $g(c)\neq 0$, $\forall c\in\mathbb{R}$

Ambil $c\in\mathbb{R}$ sebarang, yang memenuhi $|x-c|<\delta$ maka

$$\begin{aligned} |g(x)-g(x)| &= |g((x-c)+c)-g(c)| \\ &= |g(x-c)-g(c)-g(c)| \\ &= |g(c)(g(x-c)-1)| \\ &= |g(c)(g(x-c)-1)| \end{aligned}$$

Misal $h=x-c$, maka $|h|=|x-c|$ akibatnya

$$\begin{aligned} |g(x)-g(c)| &= |g(c)(g(h)-1)| \\ &< |g(c)|\cdot\frac{\varepsilon}{|g(c)|} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Maka g kontinu di c, karena c sebarang $\in\mathbb{R}$ maka g kontinu di $\mathbb{R}$.

Imanuel AS / 181114l008 Makassar, 18 Agustus 2020

(15) Misalkan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu pada suatu titik c, &
dan $h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$ untuk $x \in \mathbb{R}$.
Tunjukkan bahwa $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$
untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Gunakan hasil ini untuk menunjukkan
bahwa h kontinu pada c.

<u>Penyelesaian</u> :

Misal untuk kasus $h(x) = f(x)$,

maka berlaku $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$

karena $f(x) - g(x) \geq 0$, maka $|f(x) - g(x)| = (f(x) - g(x))$

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x) - g(x)| = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}(f(x)-g(x))$$
$$= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}g(x)$$
$$= f(x)$$
$$= h(x)$$

Untuk kasus $h(x) = g(x)$

maka berlaku $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0$

akibatnya $|f(x) - g(x)| = -(f(x) - g(x))$

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x)-g(x)| = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) - \frac{1}{2}(f(x)-g(x))$$
$$= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(x)$$
$$= g(x)$$
$$= h(x)$$

$$\therefore h(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|.$$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 17 oktober 2020

Dik. f kontinu di titik c

g kontinu di titik c

Sehingga f + g , f - g juga kontinu di titik c . [Teorema 5. 2.2]

kemudian komposisi fungsi nilai mutlak dengan suatu fungsi kontinu, menghasilkan fungsi kontinu,

maka |f - g| kontinu di c [teorema 5.2.8]

Jadi, jelas h(x) kontinu di c [Teorema 5. 2.2]

∴ h(x) kontinu di c .