Makassar, 30 November 2020

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan IX —

(catatan)

Imanuel AS

1811141008

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke-9 / Catatan

Makassar, 14 oktober 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan Pertemuan ke-9

Ring Kuosien / Ring Faktor

Misal R ring, I ideal R, $a \in R$

$I + a = \{x + a \mid x \in I\}$ ⇝ Koset kanan

$a + I = \{a + x \mid x \in I\}$ ⇝ Koset kiri

$\boxed{E}$

$\mathbb{Z}$ ring, $2\mathbb{Z}$ Ideal dari $\mathbb{Z}$, misal $a \in \mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z} + a = \{x + a \mid x \in 2\mathbb{Z}\}$

$a + 2\mathbb{Z} = \{a + x \mid x \in 2\mathbb{Z}\}$

$\mathcal{P}_r = \{2\mathbb{Z} + a \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

$a = 1 \Rightarrow 2\mathbb{Z} + 1 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

$a = 2 \Rightarrow 2\mathbb{Z} + 2 = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\} = 2\mathbb{Z}$

$\mathcal{P}_r = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1\}$.

Serupa dengan hal diatas, juga dapat diperiksa untuk koset-koset kirinya juga hanya dipenuhi oleh :

$\mathcal{P}_l = \{2\mathbb{Z} + 1 + 2\mathbb{Z}\}$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 Oktober 2020

+	$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}+1$
$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}+1$
$2\mathbb{Z}+1$	$2\mathbb{Z}+1$	$2\mathbb{Z}$

$\to (\mathcal{P}_r, +)$ Grup Abelian

x	$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}+1$
$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$
$2\mathbb{Z}+1$	$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}+1$

$\to (\mathcal{P}_r, \times)$ Semigrup

- $(\mathcal{P}_r, +, \times)$ Distributif

$\therefore (\mathcal{P}_r, +, \times)$ Ring

Imanuel AS / 1811141008 Manuel

Makassar, 14 oktober 2020

Definisi Ring Kuosien

Misalkan R ring, I ideal dari R

$$R/I = \{\bar{x} = a + I \mid a \in R\}$$

dengan definisi pengaitan penjumlahan :

$$+ : R/I \times R/I \to R/I$$
$$(a+I, b+I) \mapsto (a+b) + I$$

dan perkalian :

$$\times : R/I \times R/I \longrightarrow R/I$$
$$(a+I, b+I) \longmapsto (ab) + I$$

Adb. Pengaitan ini well defined.

Misal $\bar{x}_1 = a_1 + I$ $\quad \bar{y}_1 = b_1 + I$, $\bar{x}_2 = a_2 + I$ $\quad \bar{y}_2 = b_2 + I$ dengan

(1) $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \Rightarrow a_1 + I = a_2 + I$

(2) $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 \Rightarrow b_1 + I = b_2 + I$

Akan ditunjukkan bahwa

(1) $(a_1 + b_1) + I = (a_2 + b_2) + I$

(2) $(a_1 b_1) + I = (a_2 b_2) + I$

Imanuel AS / 1811141008 Imanu   Makassar, 14 Oktober 20..

$\boxed{N}$ Jika I ideal dari ring R maka
$$a + I = b + I \Leftrightarrow a - b \in I$$

(1) Adb. $(a_1+b_1)+I = (a_2+b_2)+I$

Perhatikan bahwa

$a_1+I = a_2+I \Leftrightarrow a_1-a_2 \in I$ .....(*)

$b_1+I = b_2+I \Leftrightarrow b_1-b_2 \in I$ .... (**)

diperoleh :

$(a_1+b_1)-(a_2+b_2) = (a_1-a_2)+(b_1-b_2) \in I$

[Dari (*) dan (**) berlaku operasi tutup pada penjumlahan I]

yang berakibat

$$(a_1+b_1)+I = (a_2+b_2)+I$$

∴ Berdasarkan operasi penjumlahannya, dia well defined.

(2) Adb. $(a_1b_1)+I = (a_2b_2)+I$ $\boxed{D_1}$

Perhatikan bahwa

$a_1+I = a_2+I \Leftrightarrow (a_1-a_2) \in I$

$b_1+I = b_2+I \Leftrightarrow (b_1-b_2) \in I$

Jadi, $a_2 \in a_1+I$ dan $b_2 \in b_1+I$
Oleh karena itu, ada $\alpha, \beta \in I$
sedemikian rupa sehingga
$a_2 = a_1+\alpha$ dan $b_2 = b_1+\beta$

Perhatikan bahwa,

$$a_2b_2 = (a_1+\alpha)(b_1+\beta)$$
$$a_2b_2 = a_1b_1 + a_1\beta + \alpha b_1 + \alpha\beta$$
$$a_2b_2 - a_1b_1 = a_1\beta + \alpha b_1 + \alpha\beta \in I$$

yang berakibat

$$(a_1b_1)+I = (a_2b_2)+I$$

∴ Berdasarkan operasi perkaliannya, dia well defined.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 Oktober 20

Fakta $\boxed{D_2}$

$R/I = \{ \bar{x} = a + I \mid a \in R \}$

$(R/I, +, \times)$ merupakan ring

.) Identitas $(+) \Rightarrow 0_R + I = I$

.) Invers $(+)$ dari $\bar{x}$ $a + I$ adalah $-\bar{x} = -a + I$

Bukti :

Pertama harus ditunjukkan, bahwa operasi tersebut terdefinisi dengan baik. [DONE]

Selanjutnya, akan diselediki sifat-sifat dari operasi di R/I, yaitu:

(i) Assosiatif dalam penjumlahan

Jika $(a+I)$, $(b+I)$, dan $(c+I)$ anggota sebarang di R/I maka berlaku :

$$\begin{aligned}\{(a+I)+(b+I)\}+(c+I) &= \{(a+b)+I\} + (c+I) \\ &= \{(a+b)+c\} + I \\ &= \{a+(b+c)\} + I \\ &= (a+I) + \{(b+c)+I\} \\ &= (a+I) + \{(b+I)+(c+I)\}\end{aligned}$$

(ii) Ada unsur identitas terhadap penjumlahan, yaitu $(0+I) \in R/I$, karena untuk sebarang $(a+I)$ di R/I memenuhi :

$(a+I)+(0+I) = (a+0)+I = a+I$ dan

$(0+I)+(a+I) = (0+a)+I = a+I$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 oktober 2020

(iii) Tiap-tiap anggota di R/I mempunyai invers terhadap penjumlahan di R/I.

Misalkan $(a+I) \in R/I$ sebarang,

maka $((-a)+I) \in R/I$ dan memenuhi :

$(a+I)+((-a)+I) = (a+(-a))+I = 0+I$ dan

$((-a)+I)+(a+I) = ((-a)+a)+I = 0+I$

oleh karena itu, untuk setiap $(a+I) \in R/I$ mempunyai invers di R/I, yaitu $((-a)+I)$.

(iv) Komutatif terhadap operasi penjumlahan

$$\begin{aligned}(a+I)+(b+I) &= (a+b)+I \\ &= (b+a)+I \\ &= (b+I)+(a+I)\end{aligned}$$

Dari keempat sifat tersebut diatas, yang dipenuhi oleh penjumlahan koset, menunjukkan R/I merupakan grup komutatif terhadap penjumlahan koset.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 oktober 2020

(V) Assosiatif terhadap perkalian di R/I

jika $(a+I)$, $(b+I)$, dan $(c+I)$ di R/I,

$$\{(a+I)(b+I)\}(c+I) = \{(ab)+I\}(c+I)$$
$$= \{(ab)c\}+I$$
$$= \{a(bc)\}+I$$
$$= (a+I)\{(bc)+I\}$$
$$= (a+I)\{(b+I)(c+I)\}$$

(Vi) Distributif perkalian terhadap penjumlahan di R/I,

jika $(a+I)$, $(b+I)$ dan $(c+I)$ di R/I, maka

$$(a+I)\{(b+I)+(c+I)\} = (a+I)\{(b+c)+I\}$$
$$= a(b+c)+I$$
$$= (ab+ac)+I$$
$$= ((ab)+I+(ac)+I)$$
$$= ((a+I)(b+I))+((a+I)(c+I))$$

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan:

$$\{(a+I)+(b+I)\}(c+I) = ((a+I)(c+I))+((b+I)(c+I))$$

dari semua sifat di atas (i) s/d (Vi), disimpulkan R/I merupakan ring, dan disebut ring kelas residu.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 Oktober 2020

$\boxed{E}$ $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \rightarrow$ Ring

$I = \{\bar{0}, \bar{2}\} \rightarrow$ Ideal dari $\mathbb{Z}_4$

$\bar{0} + I = \{\bar{0}, \bar{2}\} = I$

$\bar{1} + I = \{\bar{1}, \bar{3}\}$

$\bar{2} + I = \{\bar{2}, \bar{0}\} = I$

$\bar{3} + I = \{\bar{3}, \bar{1}\}$

$\mathbb{Z}_4 / I = \{I, \bar{1} + I\}$

$\rightarrow$ Ring

+	I	$\bar{1}+I$
I	I	$\bar{1}+I$
$1+I$	$1+I$	I

$\times$	I	$1+I$
I	I	I
$1+I$	I	$1+I$

$\boxed{D_3}$ (1) Misalkan $\mathbb{Z}$ ring dengan $4\mathbb{Z}$ ideal dari $\mathbb{Z}$.
Tentukan $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(2) Misalkan $2\mathbb{Z}$ ring dengan $6\mathbb{Z}$ ideal dari $2\mathbb{Z}$.
Tentukan $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Imanuel AS / 181114008 Makassar, 24 Oktober 20

Jawab:

(1) $\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$ ⇝ Ring

$4\mathbb{Z} = \{ \ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots \}$ ⇝ Ideal dari $\mathbb{Z}$

Note that

$\vdots$

$3 + 4\mathbb{Z} = \{ \ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots \}$

$2 + 4\mathbb{Z} = \{ \ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots \}$

$1 + 4\mathbb{Z} = \{ \ldots, -7, -5, 1, 5, 9, \ldots \}$

$0 + 4\mathbb{Z} = \{ \ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots \}$

$-1 + 4\mathbb{Z} = \{ \ldots, -9, -5, -1, 3, 7, \ldots \}$

$-2 + 4\mathbb{Z} = \{ \ldots, -10, -6, -2, 2, 6, \ldots \}$

$-3 + 4\mathbb{Z} = \{ \ldots, -11, -7, -3, 1, 5, \ldots \}$

$\vdots$

$\therefore \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{ \overline{x} = a + 4\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z} \}$ //

(2) $2\mathbb{Z} = \{ \ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots \}$ ⇝ Ring

$6\mathbb{Z} = \{ \ldots, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \ldots \}$ ⇝ Ideal dari $2\mathbb{Z}$

Note that

$\vdots$

$-4 + 6\mathbb{Z} = \{ \ldots, -16, -10, -4, 2, 8, \ldots \}$

$-2 + 6\mathbb{Z} = \{ \ldots, -14, -8, -2, 4, 10, \ldots \}$

$0 + 6\mathbb{Z} = \{ \ldots, -12, -6, 0, 6, 12, \ldots \} \rightarrow = 6\mathbb{Z}$

$2 + 6\mathbb{Z} = \{ \ldots, -10, -4, 2, 8, 14, \ldots \}$

$4 + 6\mathbb{Z} = \{ \ldots, -8, -2, 4, 10, 16, \ldots \}$

$\vdots$

$\therefore 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{ \overline{x} = a + 6\mathbb{Z} \mid a = \ldots, -6, -4, -2, 0 \in 2\mathbb{Z} \}$ //

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 14 Oktober 2020

$\boxed{T}$ Jika I ideal dan ring R maka

(1) Jika R komutatif maka R/I komutatif

(2) Jika R memiliki unsur kesatuan maka R/I memiliki unsur kesatuan $\boxed{D_4}$

$(1_R \in R)$ $(T = 1_R + I)$

Bukti

(1) Misal I ideal dari Ring komutatif R.

Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in R/I$ sebarang.

Tulis, $\left.\begin{array}{l}\bar{x} = a + I \\ \bar{y} = b + I\end{array}\right\}$ untuk suatu $a, b \in R$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\bar{x}\cdot\bar{y} = (a+I)(b+I) &= (ab)+I \\ &= (ba)+I \\ &= (b+I)(a+I) \\ &= \bar{y}\cdot\bar{x}\end{aligned}$$

(2) Misal I ideal dari ring komutatif R.

Dik $\exists\, 1_R \in R$, Ambil sebarang $\bar{x} = a+I \in R/I$ untuk suatu $a \in R$

Pilih $T = (1_R + I) \in R/I$ sedemikian sehingga

berlaku,

$$\begin{aligned}\bar{x}\cdot T &= (a+I)\cdot(1_R+I) \\ &= (a\cdot 1_R)+I \\ &= (1_R\cdot a)+I \\ &= (1_R+I)\cdot(a+I) \\ &= T\cdot\bar{x}\end{aligned}$$

Imanuel AS/1811141008

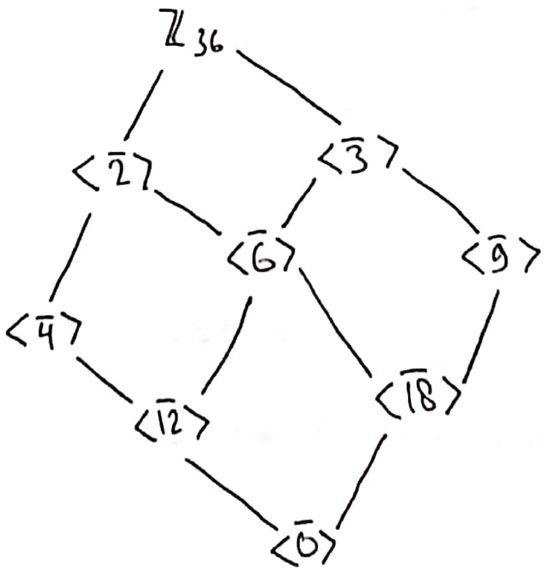
Makassar, 14 Oktober 2020

Ideal Maksimal

$M \neq R$

Proper ideal M dari ring R disebut ideal maksimal, jika untuk setiap I ideal dari R dengan $M \subseteq I \subseteq R$ Berakibat $M = I$ atau $I = R$

$\boxed{E}$ (1) $\mathbb{Z}_{36}$ merupakan ring, diperoleh



$\langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{3} \rangle$ merupakan ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{36}$

$\boxed{N}$ R ring, $a \in R$, $\langle a \rangle = \{ar \mid r \in R\}$

Imanuel AS / 1811141008 ~~Matt~~ Maulana   Makassar, 14 Oktober 2020

(2) Cari semua ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_4$

<u>Solusi</u>

$\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \rightarrow |\mathbb{Z}_4| = 4$

Ingat! Teorema Langrange: "Kalau kita punya grup yang ordernya adalah 4 maka subgrupnya itu haruslah merupakan faktor-faktor dari 4 yaitu 1, 2, 4".

$1|4 \rightarrow \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$2|4 \rightarrow \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}\}$

$4|4 \rightarrow \langle \bar{0} \rangle$

Perhatikan bahwa

$\langle \bar{0} \rangle \subsetneq \langle \bar{2} \rangle \subsetneq \langle \bar{1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_4$

Jadi $\langle \bar{2} \rangle$ ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_4$

$\boxed{D_5}$

① Cari semua ideal maksimal dari

(a) $\mathbb{Z}_8$

(b) $\mathbb{Z}_{10}$

(c) $\mathbb{Z}_{12}$

② Buktikan ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{36}$ adalah $\langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{3} \rangle$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 Oktober 2020

D5 1) Cari semua ideal maksimal dari

(a) $\mathbb{Z}_8$

Penyelesaian

$\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\} \rightarrow |\mathbb{Z}_8| = 8$

Sesuai Teorema Langrange : "Grup yang ordernya adalah 8 maka subgrupnya itu haruslah merupakan faktor-faktor dari 8 yakni 1, 2, 4, 8".

$1|8 \rightarrow \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$2|8 \rightarrow \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$

$4|8 \rightarrow \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}\}$

$8|8 \rightarrow \langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

Perhatikan bahwa

$$\langle \bar{0} \rangle \subsetneq \langle \bar{4} \rangle \subsetneq \langle \bar{2} \rangle \subsetneq \langle \bar{1} \rangle \; \mathbb{Z}_8$$

Jadi, $\langle \bar{2} \rangle$ ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_8$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 14 Oktober 2020

(b) $\mathbb{Z}_{10}$

Penyelesaian:

$\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\} \rightarrow |\mathbb{Z}_{10}| = 10$

Sesuai Teorema Langrange : "Grup yang ordernya adalah 10 maka subgrupnya itu adalah merupakan faktor-faktor dari 10 yakni 1, 2, 5, 10".

$1 | 10 \rightarrow \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$

$2 | 10 \rightarrow \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$

$5 | 10 \rightarrow \langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

$10 | 10 \rightarrow \langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

Perhatikan bahwa

$$\langle \bar{0} \rangle \subsetneq \langle \bar{5} \rangle \subsetneq \langle \bar{2} \rangle \subsetneq \langle \bar{1} \rangle^{\to \mathbb{Z}_{10}}$$

Jadi, $\langle \bar{2} \rangle$ Ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{10}$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 14 Oktober 2020

(c) $\mathbb{Z}_{12}$

<u>Penyelesaian</u>:

$\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\} \rightarrow |\mathbb{Z}_{12}| = 12$

Sesuai Teorema Langrange : "Grup yang ordernya adalah 12 Maka subgrupnya itu adalah merupakan faktor-faktor dari 12 yakni 1, 2, 4, 6, 12."

$1|12 \rightarrow \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$

$2|12 \rightarrow \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$

$4|12 \rightarrow \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$

$6|12 \rightarrow \langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}\}$

$12|12 \rightarrow \langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

Perhatikan bahwa

$$\langle \bar{0} \rangle \subsetneq \langle \bar{6} \rangle \subsetneq \langle \bar{4} \rangle \subsetneq \langle \bar{2} \rangle \subsetneq \langle \bar{1} \rangle \nearrow \mathbb{Z}_{12}$$

Jadi, $\langle \bar{2} \rangle$ Ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Imanuel AS/ 1811141008

Makassar, 14 oktober 2020

② Buktikan Ideal Maksimal dari $\mathbb{Z}_{36}$ adalah $\langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{3} \rangle$

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{36} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$

Imanuel AS / 181114008 Imanuel

Makassar, 14 Oktober 2020

$\boxed{T}$ $\boxed{D_6}$

Jika R ring komutatif ~~dan I ideal R~~ dengan unsur kesatuan dan I ideal proper dari R maka I ideal maksimal jika dan hanya jika R/I Lapangan".

Bukti

⇒ Dik : I Ideal maksimal
Adb : R/I Lapangan

⇐ Dik : R/I Lapangan
Adb : I Ideal maksimal

Karena R ring komutatif dengan unsur kesatuan, maka R/I juga merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan. Unsur I + 0 dan I + 1 berturut - turut sebagai unsur nol dan unsur kesatuan di R/I, dimana 0 dan 1 adalah unsur nol dan kesatuan di ring R.

⟶ Lanjut

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 Okt 2020

Bukti dari kiri ke kanan

$\Rightarrow$ Misalkan ideal I maksimal di R.

Akan ditunjukkan R/I adalah field (Lapangan).
Untuk itu, cukup diperlihatkan bahwa setiap anggota taknol di R/I mempunyai invers di R/I.

Ambil $I+a$ sebarang, anggota taknol di R/I, sehingga $I+a \neq I+0$ oleh karena itu $a \notin I$ (ingat $I+a = I+0 \Leftrightarrow a \in I$).

Misalkan T ideal utama di R yang dibentuk oleh a.
Jadi $T = \{\alpha a \mid \alpha \in R\}$

Karena jumlah dua ideal di R juga merupakan ideal di R, maka $I+T$ merupakan ideal di R

Telah diketahui, $a \notin I$ dan $a = 0 + 1a \in M+T$.
Jadi ideal I termuat di dalam $I+T$.

Tetapi I ideal maksimal, maka haruslah $I+T = R$.
Selanjutnya, diketahui $1 \in R$, maka dapat ditulis:
$1 = b + \alpha a$ untuk suatu $b \in I$ dan αR (ingat $R = I+T$).
$1 - \alpha a = b \in I$.
Akibatnya, $I+1 = I + (\alpha a)$ atau
$I+1 = (I+\alpha)(I+a)$ dimana $\alpha \in R$
Dengan cara yang sama, diperoleh
$I+1 = (I+a)(I+\alpha)$.
Oleh karena itu, $(I+a)^{-1} = (I+\alpha) \in R/I$
Hal ini menunjukkan, bahwa setiap anggota taknol dari R/I mempunyai invers di R/I terhadap perkalian koset.

- Jadi R/I merupakan koset.

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 14 Oktober, 2020

Bukti dari kanan ke kiri

$\Leftarrow$ Misalkan I ideal di R, sedemikian sehingga R/I field (lapangan)
Akan ditunjukkan I ideal maksimal.
Untuk itu harus diperlihatkan bahwa suatu ideal di R yang memuat I, maka ideal tersebut tidak lain adalah R sendiri.
Misalkan N sebarang ideal di R yang memuat I, dan $N \neq I$.
Jelas bahwa $\forall x \in I$ maka $x \in N$, untuk itu perlu ditunjukkan bahwa setiap anggota R yang bukan anggota I, juga merupakan anggota N.
Ambil sebarang $a \in R$, $a \notin I$
$a \notin I$ maka $I+a \neq I+0$, ini berarti
$(I+a)$ bukan anggota nol di R/I.
Karena $I \subset N$, $I \neq N$, maka ada $b \in N$ dan $b \notin I$
Diketahui, R/I field.
$(I+a) \in R/I$, $(I+b) \in R/I$
$\Rightarrow (I+a)(I+b)^{-1} \in R/I$
$\Rightarrow (I+a)(I+b^{-1}) \in R/I$ $\quad [(I+b)^{-1} = (I+b^{-1})]$
$\Rightarrow I+(ab^{-1}) \in R/I$
$\Rightarrow ab^{-1} \in R$
Karena N ideal di R,
$ab^{-1} \in R$, $b \in N$ maka $(ab^{-1})b \in N \Rightarrow a \in N$
Jadi setiap anggota di R yang bukan anggota I,
juga merupakan anggota I.
Untuk itu, tidak ada ideal sejati dari R yang memuat I.
Jadi I merupakan ideal Maksimal.

$\blacksquare$