Makassar, 28 September 2020.

Teori Modul / Pertemuan ke-5 / Catatan

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Teori Modul : Catatan Pertemua ke-5

Kombinasi Linear dan Himpunan Pembangun

$\boxed{D}$

Misalkan V ruang vektor atas lapangan F
$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq V$, $a \in V$ disebut
kombinasi linear dari x jika terdapat
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ sehingga

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n$$

$\boxed{E}$ Misal

(1) Misal $\mathbb{R}$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$
$x = \{3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$, $2020 \in \mathbb{R}$
kombinasi linear dari x karena
terdapat $\alpha_1 = 0 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = 404 \in \mathbb{R}$
sehingga

$$2020 = \alpha_1(3) + \alpha_2(4)$$

(2) $M_2(\mathbb{R})$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$

$$x = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$A = \underset{\alpha_1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underset{\alpha_2}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underset{\alpha_3}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underset{\alpha_4}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A kombinasi linear dari $M_2(\mathbb{R})$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 28 September 2020

Himpunan Pembangun

D

Misal V ruang vektor atas F

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$ disebut

membangun V jika $\forall a \in V$

terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$

sehingga $a = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

E

$M_2(\mathbb{R})$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

membangun $M_2(\mathbb{R})$

Bukti

Ambil $A \in M_2(\mathbb{R})$ sebarang, tulis

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ untuk suatu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Note that,

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A membangun $M_2(\mathbb{R})$

Makassar, 28 Sept. 2020

Imanuel AS / 1811141008

$\boxed{D_1.}$ Misal $F^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in F \right\}$, F lapangan

F^3 ruang vektor atas F, dan

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; Buktikan bahwa

X membangun F^3.

<u>Penyelesaian:</u>

F^3 ruang vektor atas F

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq F^3$

Ambil sebarang, $p \in F^3$,

Tulis $p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, b_1, c_1 \in F$

Note that,

$$p = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 0 + 0 \\ 0 + \alpha_2 + 0 \\ 0 + 0 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ Karena terdapat $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = b_1$, $\alpha_3 = c_1$ sedemikian rupa sehingga berlaku $p = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka X disebut membangun F^3.

$\blacksquare$ (Terbukti)

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 20 September 2020

N

V ruang vektor atas lapangan F

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Himpunan semua kombinasi linear dari X ditulis

$$\text{Span}(X) = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \mid x_i \in X, \alpha_i \in F\}$$

Himpunan Bebas Linear

D

Misal V ruang vektor atas F

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$.

Himpunan X disebut bebas linear jika kombinasi linear

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

hanya dipenuhi oleh

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Jika tidak, maka X disebut bergantung linear / tidak bebas linear.

E

(1) $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ bebas linear, karena kombinasi linear

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0$$

(2) $\mathbb{R}$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$

$X = \{2, 3\} \subseteq \mathbb{R}$ bergantung linear karena

$$\alpha_1(2) + \alpha_2(3) = 0 \quad \begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

tidak hanya dipenuhi oleh $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 28 September 2020

Basis

Misal V ruang vektor atas F. Himpunan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$ disebut basis jika

(1) X membangun V

(2) X bebas linear

$\boxed{E}$ Misal $\mathbb{R}^2$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$

$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

X basis $\mathbb{R}^2$

Bukti

(1) Adb. X membangun $\mathbb{R}^2$

Ambil $a \in \mathbb{R}^2$ sebarang.

Tulis $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Note that,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ X membangun V

(2) Adb. X bebas linear

~~Pandang~~ kombinasi Linear

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Kombinasi linear ini hanya dipenuhi oleh

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$\therefore$ X bebas linear

$\therefore$ X basis $\mathbb{R}^2$

Makassar, 29 September 2020

Teori Modul / Pertemuan ke-5 / Topik Diskusi

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Topik Diskusi

(1.) Periksa mana dari himpunan berikut yang merupakan basis dari ruang vektor $\mathbb{R}^2$ atas $\mathbb{R}$

(a). $P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Penyelesaian : $P_1 \in \mathbb{R}^2$

Akan dibuktikan : P_1 adalah basis untuk $\mathbb{R}^2$

Akan ditunjukkan : P_1 memenuhi :

(*) P_1 bebas linear

(*) P_1 membangun $\mathbb{R}^2$

Note that,

(*) Adb. P_1 bebas linear

Note that,

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh,
$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 0 \\ 2(0) + 3\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Karena $\alpha_1 = 0$ dan $\alpha_2 = 0$ adalah satu-satunya solusi, maka P_1 disebut sebagai himpunan bebas linear (linearly independent).

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 21 September 2021

(*) Adb. P_1 membangun $\mathbb{R}^2$

Ambil sebarang $a \in \mathbb{R}^2$

Tulis $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Note that,

$$a = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \alpha_1 + 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Maka,

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = a_1$$
$$\alpha_1 = a_2$$

Matriks koefisiennya adalah

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = (2\cdot 0) - (3\cdot 1) = 0 - 3 = -3 \neq 0$$

Karena $\det(A) \neq 0$ maka sistem ini konsisten untuk semua nilai a_1, a_2, [Teorema 4.3.4 (e) dan (g) Anton Rorres] sedemikian sehingga terdapat α_1 dan $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ sehingga $a = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Karena P_1 memenuhi definisi himpunan pembangun pada ruang vektor $\mathbb{R}^2$ maka P_1 disebut membangun $\mathbb{R}^2$.

$\therefore$ Karena P_1 suatu himpunan dari $\mathbb{R}^2$ dan bebas linear dan P_1 membangun $\mathbb{R}^2$ maka P_1 adalah basis untuk $\mathbb{R}^2$.

$\blacksquare$

Imanuel AS / 181114008 Makassar, 21 September 2020

(b). $P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$

<u>Penyelesaian :</u> $P_2 \in \mathbb{R}^2$

Akan dibuktikan : P_2 adalah basis untuk $\mathbb{R}^2$

Akan ditunjukkan : P_2 memenuhi :

(*) P_2 bebas linear

(*) P_2 membangun $\mathbb{R}^2$

Note that,

(*) Adb. P_2 bebas linear

Note that,

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7\alpha_2 \\ -8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_1 + (-7\alpha_2) \\ \alpha_1 + (-8\alpha_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_1 - 7\alpha_2 \\ \alpha_1 - 8\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 4\alpha_1 - 7\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = (4 \cdot -8) - (-7 \cdot 1) = -32 + 7 = -25 \neq 0$$

Karena $\det(A) \neq 0$ maka SPL memiliki solusi trivial saja, yaitu $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ adalah satu-satunya solusi.

Maka P_2 disebut bebas linear.

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 21 Septab 2020

(*) Adb. P_2 membangun $\mathbb{R}^2$

Ambil sebarang $a \in \mathbb{R}^2$

Tulis $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$; untuk suatu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Note that,

$$a = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7\alpha_2 \\ -8\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_1 + (-7\alpha_2) \\ \alpha_1 + (-8\alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_1 - 7\alpha_2 \\ \alpha_1 - 8\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Maka,

$$4\alpha_1 - 7\alpha_2 = a_1$$
$$\alpha_1 - 8\alpha_2 = a_2$$

Matriks koefisiennya adalah

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = (4 \cdot -8) - (-7 \cdot 1) = (-32) + (7) = -25 \neq 0$$

Karena $\det(A) \neq 0$ maka sistem ini konsisten untuk semua nilai a_1, a_2. [Teorema 4.3.4 (e) dan (g) Anton Rorres]

Sedemikian sehingga terdapat α_1 dan $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ sehingga

$$a = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Karena P_2 memenuhi definisi himpunan pembangun pada ruang vektor $\mathbb{R}^2$ maka P_2 disebut membangun $\mathbb{R}^2$.

$\therefore$ Karena P_2 suatu himpunan pada $\mathbb{R}^2$ dan bebas linear dan P_2 membangun $\mathbb{R}^2$ maka P_2 adalah basis untuk $\mathbb{R}^2$.

$\blacksquare$

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 21 September 2020

(c). $P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Penyelesaian : $P_3 \in \mathbb{R}^2$

Akan ditunjukkan : P_3 adalah bukan basis untuk $\mathbb{R}^2$.

Akan ditunjukkan : P_3 tidak memenuhi syarat bebas linear.

Note that,

(*) Adb. P_3 tidak bebas linear

Note that,

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 3\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & + \alpha_2 \\ 0 & + 3\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 3\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 0$$
$$3\alpha_2 = 0$$

Karena nilai $\alpha_2 = 0$ sedangkan α_1 dapat diisi oleh sebarang nilai dari elemen $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ adalah bukan satu-satunya solusi untuk SPL diatas.
Maka P_3 tidak bebas linear.

∴ Karena P_3 tidak bebas linear maka P_3 tidak memenuhi syarat pertama untuk definisi basis, sedemikian sehingga P_3 bukan basis untuk $\mathbb{R}^2$.

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 21 September 2020

(d) $P_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} \right\}$

Penyelesaian : $P_4 \in \mathbb{R}^2$

Akan dibuktikan : P_4 adalah Bukan basis untuk $\mathbb{R}^2$

Akan ditunjukkan : P_4 tidak memenuhi

(*) P_4 bebas linear

Note that,

(*) Adb. P_4 bebas linear

Note that,

$$\alpha_1 . \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \alpha_2 . \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha_1 \\ 9\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\alpha_2 \\ -12\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha_1 + (-4\alpha_2) \\ 9\alpha_1 + (-12\alpha_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ 9\alpha_1 - 12\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $3\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0$

$9\alpha_1 - 12\alpha_2 = 0$

$\Rightarrow$ Matriks koefisien :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 9 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = (3.-12) - (-4.9) = (-36) + (36) = 0$$

Karena $\det(A) = 0$ maka SPL memiliki solusi trivial saja, yakni $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bukan satu-satunya solusi.

Maka P_4 disebut tidak bebas linear.

$\therefore$ Karena P_4 suatu himpunan pada $\mathbb{R}^2$ dan tidak bebas linear maka P_4 tidak memenuhi syarat pertama untuk definisi Basis sedemikian sehingga P_4 bukan basis untuk $\mathbb{R}^2$

Imanuel AS / 181114008 Makassar, 28 Septembe 2020

(2) Buktikan bahwa himpunan

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

merupakan basis $M_2(\mathbb{R})$

Penyelesaian: $P \in M_2(\mathbb{R})$

Akan dibuktikan : P adalah basis untuk $M_2(\mathbb{R})$

Akan ditunjukkan : P memenuhi :

(*) P bebas linear

(*) P membangun $M_2(\mathbb{R})$

Note that,

(*) Adb. P bebas linear

Note that

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha_1 & 6\alpha_1 \\ 3\alpha_1 & -6\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8\alpha_3 \\ -12\alpha_3 & -4\alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_4 & 0 \\ -\alpha_4 & 2\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha_1 + 0 + 0 + \alpha_4 & 6\alpha_1 + (-\alpha_2) + (-8\alpha_3) + 0 \\ 3\alpha_1 + (-\alpha_2) + (-12\alpha_3) + (-\alpha_4) & -6\alpha_1 + 0 + (-4\alpha_3) + 2\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha_1 + \alpha_4 & 6\alpha_1 - \alpha_2 - 8\alpha_3 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - 12\alpha_3 - \alpha_4 & -6\alpha_1 - 4\alpha_3 + 2\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 3\alpha_1 + \alpha_4 &= 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - 12\alpha_3 - \alpha_4 &= 0 \\ 6\alpha_1 - \alpha_2 - 8\alpha_3 &= 0 \\ -6\alpha_1 - 4\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (3 \cdot -1 \cdot -8 \cdot 2) - (0 \cdot -12 \cdot 0 \cdot -6) + (0 \cdot -1 \cdot 6 \cdot 0) - (1 \cdot 3 \cdot -1 \cdot -4) \\ &\quad - (3 \cdot -1 \cdot -8 \cdot 0) + (0 \cdot 3 \cdot 0 \cdot -4) - (0 \cdot -1 \cdot 6 \cdot 2) + (1 \cdot -12 \cdot -1 \cdot -6) \\ &= (48) - (0) + (0) - (12) - (0) + (0) - (0) + (-72) \\ &= -36 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 22 Septeb 2020

Karena matriks koefisien dari SPL-nya memiliki determinan $\neq 0$, maka SPL memiliki solusi trivial saja, yakni $k_1 = k_2 = 0$.
Karena $k_1 = k_2 = 0$ adalah satu-satunya solusi, maka P disebut bebas linear.

(*) Adb. P membangun $M_2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Ambil sebarang $A \in M_2(\mathbb{R})$

Tulis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, untuk suatu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Note that,

$$A = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha_1 & 6\alpha_1 \\ 3\alpha_1 & -6\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -8\alpha_3 \\ -12\alpha_3 & -4\alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_4 & 0 \\ -\alpha_4 & 2\alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha_1 + \alpha_4 & 6\alpha_1 - \alpha_2 - 8\alpha_3 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - 12\alpha_3 - \alpha_4 & -6\alpha_1 - 4\alpha_3 + 2\alpha_4 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + \alpha_4 &= a \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - 12\alpha_3 - \alpha_4 &= c \\ 6\alpha_1 - \alpha_2 - 8\alpha_3 &= b \\ -6\alpha_1 - 4\alpha_3 + 2\alpha_4 &= d \end{aligned}$$

Matriks koefisiennya adalah

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -36 \neq 0$$

Karena $\det(A) \neq 0$ maka SPL konsisten untuk semua nilai $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.
[Teorema 4.3.4 (e) dan (g) Anton Rorres].
Sedemikian sehingga terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ sehingga

$$A = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena P memenuhi definisi himpunan pembangun pada ruang vektor $M_2(\mathbb{R})$ maka P disebut merentang $M_2(\mathbb{R})$.

$\therefore$ Karena P suatu himpunan dari $M_2(\mathbb{R})$ dan bebas linear dan P membangun $M_2(\mathbb{R})$, maka P adalah basis untuk $M_2(\mathbb{R})$. ■