Masalah Syarat Batas / Pertemuan ke-9 / Tugas   Imanuel AS / 1811141008   Makassar, 14 April 2021

(1.) $\int_0^1 (-\log x)^{n-1}\, dx = \int_0^\infty x^{n-1} . e^{-x}\, dx$

Buktikan !.

Penyelesaian :

$$\int_0^1 (-\log x)^{n-1}\, dx = \int_0^1 (\log x^{-1})^{n-1}\, dx$$
$$= \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx$$

Misal $u = \log \frac{1}{x}$ untuk $x = 0$ maka $u = \infty$

$e^u = \frac{1}{x}$ untuk $x = 1$ maka $u = 0$

$x = \frac{1}{e^u}$

$dx = -e^{-u}\, du$

$$\int_0^1 (-\log x)^{n-1}\, dx = \int_0^\infty u^{n-1} (-e^{-u})\, du$$
$$= -\int_\infty^0 u^{n-1} . e^{-u}\, du$$
$$= \int_0^\infty u^{n-1} . e^{-u}\, du$$
$$= \Gamma(n)$$
$$= \int_0^\infty x^{n-1} . e^{-x}\, dx$$

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 14 April 2021

(2) Tunjukkan bahwa $-\lim\limits_{z\to\infty}\left[\frac{x^n}{e^x}\Big|_0^z\right]=0$

Penyelesaian:

$$-\lim_{z\to\infty}\left[\frac{x^n}{e^x}\Big|_0^z\right]=\left(-\lim_{z\to\infty}\frac{z^n}{e^z}\right)-\left(-\lim_{z\to\infty}\frac{0^n}{e^0}\right)$$

$$=\left(-\lim_{z\to\infty}\frac{z^n}{e^z}\right)-(0)$$

$$=-\lim_{z\to\infty}\frac{z^n}{e^z} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\text{ bentuk tak tentu}\right]$$

Dengan L' Hopital, diperoleh

$$=-\lim_{z\to\infty}\frac{n\,z^{n-1}}{e^z} \qquad \left[\text{masih } \frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$=-\lim_{z\to\infty}\frac{(n-1)(n)\,z^{n-2}}{e^z} \qquad \left[\text{masih } \frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$=-\lim_{z\to\infty}\frac{(n-2)(n-1)(n)\,z^{n-3}}{e^z} \qquad \left[\text{masih } \frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\vdots$$

$$=-\lim_{z\to\infty}\frac{(2)(3)\cdots(n-2)(n-1)(n)\,z}{e^z} \qquad \left[\text{masih } \frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$=-\lim_{z\to\infty}\frac{(1)(2)(3)\cdots(n-2)(n-1)(n)}{e^z}$$

$$=\frac{(1)(2)(3)\cdots(n-2)(n-1)(n)}{\infty}$$

$$=0$$