Makassar, 18 November 2020

Nama: Imanuel AS

NIM : 1811141008

Analisis Real II

Section 5.6 — Monotone and Inverse Functions.

(2.) Jika f dan g fungsi-fungsi naik pada suatu interval $I \subseteq \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $f+g$ juga suatu fungsi naik pada I.
Jika f fungsi naik murni pada I, maka $f+g$ fungsi naik murni pada I.

Penyelesaian:

Diketahui: $f, g : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi naik.

Akan ditunjukkan: $f+g$ juga adalah fungsi naik.

Misalkan diambil $x, y \in I$ sebarang, dengan $x \leq y$.
Karena itu kita mempunyai $f(x) \leq f(y)$ dan $g(x) \leq g(y)$.
Maka jelas bahwa $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$.
Atau dengan kata lain $(f+g)(x) \leq (f+g)(y)$.
Ini menunjukkan bahwa $f+g$ adalah naik.

Selanjutnya,
Akan ditunjukkan: $f+g$ adalah naik murni.
Dari notasi sebelumnya diatas,
perhatikan bahwa,
diambil $x, y \in I$ sebarang, dengan $x < y$.
Karena itu kita mempunyai $f(x) < f(y)$ dan $g(x) < g(y)$
Maka jelas bahwa $f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$.
Atau dengan kata lain $(f+g)(x) < (f+g)(y)$.
Ini menunjukkan bahwa $f+g$ adalah fungsi naik murni pada I.

Makassar, 16 November 2020

Nama: Imanuel AS

NIM: 1811141008

Analisis Real II

Section 5.6 — Monotone and Inverse Functions

(4.) Tunjukkan bahwa jika f dan g fungsi-fungsi positif naik pada suatu interval I, maka fungsi hasil kalinya fg merupakan fungsi naik pada I.

Penyelesaian :

Karena f adalah fungsi positif naik pada I,
Maka berlaku bahwa untuk $x, y \in I$ dimana $x \leq y$ maka $f(x) \leq f(y)$.

Juga, bahwa karena g adalah fungsi positif naik pada I,
Maka berlaku bahwa untuk $x, y \in I$ dimana $x \leq y$ maka $g(x) \leq g(y)$.

$\left.\begin{array}{l}\text{Ambil } a, b \in f \text{ sebarang pada interval } I \text{, dgn } a \leq b \\ \text{Ambil } c, d \in g \text{ sebarang pada interval } I \text{, dgn } c \leq d\end{array}\right\}$ a,b,c,d bil. positif

Adb : fg fungsi naik pada I

Adit : $ac \leq bd$

Perhatikan bahwa,

$$a \leq b$$
$$ac \leq bc \qquad [c > 0]$$

Selanjutnya, karena $(d-c) \leq 0$, $b \geq 0$, $\Rightarrow b(d-c) \geq 0$
Jadi, diperoleh

$$ac \leq bc + b(d-c)$$
$$ac \leq bc + bd - bc$$
$$ac \leq bd$$

Sehingga disimpulkan bahwa untuk

$$0 < f(x) \leq f(y) \text{ dan } 0 < g(x) \leq g(y)$$

Maka

$$f(x) \cdot g(x) \leq f(y) \cdot g(y).$$

Imanuel AS / 1811141008 [illegible]

Makassar, 16 November 2021

(6.) Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ suatu interval dan $f: I \to \mathbb{R}$ fungsi naik pada I.

Misalkan juga $c \in I$ bukan titik ujung dari I.

Tunjukkan bahwa f kontinu pada c jika dan hanya jika terdapat suatu barisan (x_n) dalam I sedemikian sehingga $x_n < c$ untuk $n = 1, 3, 5, \ldots$; $x_n > c$ untuk $n = 2, 4, 6, \ldots$; dan sedemikian sehingga $c = \lim(x_n)$ dan $f(c) = \lim(f(x_n))$.

Penyelesaian:

$\Rightarrow$ (Bukti dari kiri ke kanan)

Dik: f kontinu di c

dan $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ dan $c \in I$

Menurut Teorema 5.1.3 Sequential Criterion for Continuity maka terdapat barisan (x_n) pada I yang konvergen ke c atau dapat ditulis $\lim(x_n) = c$ dan barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$, atau dapat ditulis $\lim(f(x_n)) = f(c)$.

$\Leftarrow$ (Bukti dari kanan ke kiri)

Dik: $\exists (x_n) \in I \ni x_n < c \ \forall n = 1, 3, 5, \ldots$ dan $x_n > c \ \forall n = 2, 4, 6, \ldots$

dan $c = \lim(x_n)$ dan $f(c) = \lim(f(x_n))$.

Perhatikan bahwa

$$f(x) \leq f(c) \ \forall x \in I \text{ dimana } x < c$$

Maka $f(c) \geq \sup\{f(x) \mid x \in I, x < c\}$

Selanjutnya, untuk $x_n < c \ \forall n = 1, 3, 5, \ldots$ dan $f(c) = \lim(f(x_n))$ yang berarti bahwa

$$f(c) = \sup\{f(x) \mid x \in I, x < c\} \quad \ldots\ldots (*)$$

Juga, untuk $x_n > c \ \forall n = 2, 4, 6, \ldots$ dan $f(c) = \lim(f(x_n))$ yang berarti bahwa

$$f(c) = \inf\{f(x) \mid x \in I, x > c\} \quad \ldots\ldots (**)$$

Dari $(*)$ dan $(**)$ disimpulkan bahwa

f kontinu di c.

$\blacksquare$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 18 November 2020

(8) Misalkan f, g fungsi-fungsi naik pada suatu interval $I \subseteq \mathbb{R}$ dan $f(x) > g(x)$ untuk semua $x \in I$. Jika $y \in f(I) \cap g(I)$, Tunjukkan bahwa $f^{-1}(y) < g^{-1}(y)$.

[Petunjuk: Pertama-tama interpretasikan pertanyaan ini secara geometri].

Penyelesaian:

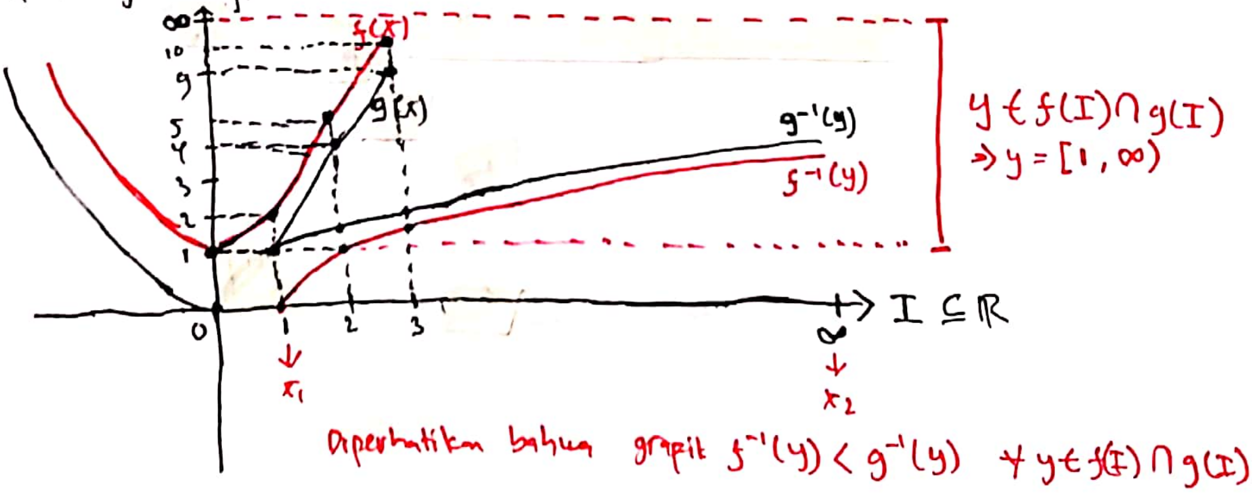
Diperhatikan contoh grafiknya berikut.

Misalkan $f(x) = x^2+1$ dan $g(x) = x^2$ [Jelas $f(x) > g(x)$]

Perhatikan bahwa $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ dan $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ [Akan ditunjukkan $f^{-1}(y) < g^{-1}(y)$]

Sebelumnya, diketahui bahwa $y \in f(I) \cap g(I)$

Perhatikan gambarnya



Diperhatikan bahwa grafik $f^{-1}(y) < g^{-1}(y)$ $\forall y \in f(I) \cap g(I)$

Baik... Diatas cuman contoh gaes... sekarang saatnya membuktikan alias jawab soal ini :v

Diketahui $y \in f(I) \cap g(I)$. Ini berarti bahwa ada beberapa $x_1, x_2 \in I$ sedemikian sehingga $y = f(x_1) = g(x_2)$.

Pandang $x_1 = f^{-1}(y)$ dan $x_2 = g^{-1}(y)$.

Dengan menggunakan kontradiksi, perhatikan bahwa

Jika $f^{-1}(y) \geq g^{-1}(y)$ maka $x_1 \geq x_2$

Ini berarti bahwa

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Maka,
$$f(x_1) = g(x_2) \geq f(x_2)$$

Maka,
$$f(x_2) \leq g(x_2)$$ [Kontradiksi, sesuai dik dari soal]

$\therefore$ Karena kontradiksi, maka pengandaian salah. Maka haruslah demikian

Terdapat $x_1 < x_2$ sedemikian sehingga $f^{-1}(y) < g^{-1}(y)$. //

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 18 November 2020

(10.) Misalkan $I = [a,b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I.
Jika f mempunyai suatu maksimum mutlak [atau, minimum mutlak] pada suatu titik interior c dari I, tunjukkan bahwa f bukan injektif pada I.

Penyelesaian :

Diketahui : c titik interior dari $I = [a,b]$, c sebagai maximum mutlak dari f.
Maka, berdasarkan Definisi 5.3.3 :

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in I$$

Misalkan $a < c < b$ pada I

- Untuk $f(a) = f(c)$ atau $f(b) = f(c)$, jelas ini berarti f tidak injektif.
- Untuk $f(a) \neq f(c)$ dan $f(b) \neq f(c)$.

Misalkan,
$$f(a) < f(c) \text{ dan } f(b) < f(c)$$

Maka,
$$f(c) > \max\{f(a), f(b)\}$$

Selanjutnya, untuk k sedemikian sehingga $f(c) > k > \max\{f(a), f(b)\}$
Kita peroleh,
$$f(a) < k < f(c) \text{ dan } f(b) < k < f(c)$$

Diperhatikan bahwa f kontinu pada I, maka ia kontinu pada interval $[a,c]$ dan $[c,b]$.

Dengan menggunakan Teorema Nilai Antara Bolzano, kita peroleh bahwa terdapat $x_1 \in (a,c)$ dan $x_2 \in (c,b)$ sedemikian sehingga $k = f(x_1) = f(x_2)$.

Tetapi $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Jadi, diperoleh f tidak injektif.

$\therefore$ f tidak injektif pada I.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 18 Nove. 2019

(12) Misalkan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ suatu fungsi kontinu yang tidak memuat sebarang dari nilai-nilainya dua kali dan dengan $f(0) < f(1)$.

Tunjukkan bahwa f fungsi naik murni pada $[0,1]$.

Penyelesaian : Note: f fungsi kontinu yang tidak memuat sebarang dari nilai-nilainya dua kali, dengan kata lain adalah f injektif.

Pertama-tama, akan ditunjukkan : $\forall x \in [0,1] \Rightarrow f(0) < f(x) < f(1)$.

Dengan menggunakan kontradiksi, perhatikan bahwa

Jika $f(0) > f(x)$ maka $f(x) < f(0) < f(1)$.

Menurut Teorema 5.3.7 Bolzano's Intermediate Value theorem, diperoleh bahwa terdapat $x' \in [x,1]$ sedemikian sehingga $f(x') = f(0)$, ini kontradiksi karena f adalah injektif.

Maka pengandaian salah, haruslah $f(0) < f(x)$

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan pula bahwa $f(x) < f(1)$.

Jadi, $\forall x \in [0,1]$ berlaku $f(0) < f(x) < f(1)$.

Adb : f naik murni pada $[0,1]$

Akan ditunjukkan: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Selanjutnya, dari soal diketahui bahwa f adalah injektif, berarti bahwa jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in [0,1]$ dengan $x_1 < x_2$

Dengan menggunakan kontradiksi, perhatikan bahwa

Jika $f(x_1) > f(x_2)$ maka $f(0) < f(x_2) < f(x_1)$

Menurut Teorema 5.3.7 Bolzano Intermediate Value theorem, diperoleh bahwa terdapat $x_3 \in [0, x_1]$ sedemikian sehingga $f(x_3) = f(x_2)$, ini kontradiksi karena f adalah injektif.

Maka pengandaian salah, haruslah :

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ ketika } x_1 < x_2 \quad , x_1, x_2 \in [0,1]$$

$\therefore f$ fungsi naik murni pada $[0,1]$.

Imanuel AS / 1811141008 [signature] Makassar, 19 November 2020

(14.) Misalkan $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Tunjukkan bahwa jika $m, p \in \mathbb{Z}$, $n, q \in \mathbb{N}$, dan $mq = np$, maka $(x^{1/n})^m = (x^{1/q})^p$.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan Definisi 5.6.6, diperoleh :

$$(x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{m}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Karena $mq = np$, maka dapat ditulis:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dari (1), perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (x^{\frac{1}{n}})^m &= x^{\frac{m}{n}} \\ &= x^{\frac{p}{q}} && (2) \\ &= (x^{\frac{1}{q}})^p && [\text{Definisi } 5.6.6] \end{aligned}$$

$\therefore (x^{\frac{1}{n}})^m = (x^{\frac{1}{q}})^p$ $[\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, m, p \in \mathbb{Z}, n, q \in \mathbb{N}, mq = np]$