Makassar, 28 Septeb 202

Teori Modul / Pertemuan ke-6 / Catatan

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Teori Modul : Catatan Pertemuan ke-6

Modul Kiri Atas Ring

$\boxed{D}$ Misalkan M himpunan tak kosong dan R ring dan diberikan operasi penggandaan skalar :

$$* : R \times M \longrightarrow M$$
$$(\alpha, a) \longmapsto \alpha a$$

Himpunan M disebut modul kiri atas R

(1) $(M, +)$ Grup Abelian

(a) $\forall a, b \in M \Rightarrow a + b \in M$

(b) $\forall a, b, c \in M \Rightarrow a + (b+c) = (a+b)+c$

(c) $\exists 0_M \in M, \forall a \in M \ni 0_M + a = a + 0_M = a$

(d) $\forall a \in M, \exists -a \in M \ni a + (-a) = (-a) + a = 0_M$

(e) $\forall a, b \in M \Rightarrow a + b = b + a$

(2) Terhadap operasi penggandaan skalar $*$ memenuhi :

(a) $\alpha * a \in M \quad \forall a \in M, \alpha \in R$

(b) $\alpha * (a+b) = (\alpha * a) + (\alpha * b) \quad \forall a, b \in M, \alpha \in R$

(c) $(\alpha + \beta) * a = (\alpha * a) + (\beta * a) \quad \forall a \in M, \alpha, \beta \in R$

(d) $(\alpha\beta) * a = \alpha * (\beta * a) \quad \forall a \in M, \alpha, \beta \in R$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 20 September 2021

$\boxed{E}$ (1) $M_2(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in F \right\}$ ← Ring (R)

$$F^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x,y \in F \right\} \leftarrow M$$

di defenisikan

$$\cdot : M_2(F) \times F^2 \longrightarrow F^2$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Buktikan F^2 modul kiri atas $M_2(F)$

Bukti :

Ambil $A, B, C \in F^2$, $\alpha, \beta \in M_2(R)$ sebarang

Tulis

$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ u/ suatu $x_1, y_1 \in F$

$B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ u/ suatu $x_2, y_2 \in F$

$C = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ u/ suatu $x_3, y_3 \in F$

$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ u/ suatu $a, b, c, d \in F$

$\beta = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ u/ suatu $e, f, g, h \in F$

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 28 September 2020

(1) Adb. $(F^2, +)$ Abelian

(a) Adb $A+B \in F^2$

$$A+B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in F^2$$

(b) Adb $(A+B)+C = A+(B+C)$

Perhatikan bahwa

$$(A+B)+C = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) \\ y_1 + (y_2 + y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= A + (B+C)$$

Imanuel AS/1811141008

Makassar, 29 September

(c) Terdapat $O = \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \end{pmatrix} \in F^2$ sehingga untuk setiap $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in F$ Berlaku

$$O + A = \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0_F + x_1 \\ 0_F + y_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$= A \text{ .... } (*)$$

$$A + O = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 + 0_F \\ y_1 + 0_F \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$= A \text{ .... } (**)$$

Jadi dari $(*)$ dan $(**)$ diperoleh $O + A = A + O = A$

(d) Untuk setiap $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in F^2$,

Pilih $-A = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \in F^2$, sehingga

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ y_1 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \end{pmatrix} = O$$

$$-A + A = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ -y_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \end{pmatrix} = O$$

Jadi $-A + A = A + (-A) = O$

Imanuel AS / 181141008 Makassar, 29 September 20..

(e) Adb. $A+B = B+A$

$$A+B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = B+A$$

(2) (a) Adb. $\alpha A \in F^2$

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix} \in F^2$$

(b) Adb. $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

$$\alpha \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 \\ cx_1 + cx_2 + dy_1 + dy_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

(c) Adb. $(\alpha+\beta)A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

Perhatikan bahwa

$$(\alpha+\beta)\cdot A = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} (a+e)x_1 + (b+f)y_1 \\ (c+g)x_1 + (d+h)y_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + ex_1 + fy_1 \\ cx_1 + gx_1 + dy_1 + hy_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + hy_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ex_1 + fy_1 \\ dy_1 + hy_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

(d) Adb. $(\alpha\cdot\beta)\cdot A = \alpha\cdot(\beta\cdot A)$

Perhatikan bahwa

$$(\alpha\beta)\cdot A = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ae+bg)x_1 + (af+bh)y_1 \\ (ce+dg)x_1 + (cf+dh)y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} ex_1 + fy_1 \\ gx_1 + hy_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \alpha\cdot(\beta\cdot A)$$

$\therefore$ Jadi, F^2 modul kiri atas $M_2(F)$ ∎

Makassar, 28 September

Teori Modul / Pertemuan ke-6 / Tugas

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

$\mathbb{M}_3(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d,e,f,g,h,i \in F \right\} \leftarrow$ Ring

$F^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x,y,z \in F \right\} \leftarrow M$

didefinisikan

$\cdot : \mathbb{M}_2(F) \times F^2 \to F^3$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right] \longmapsto \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + cz_1 \\ dx_1 + ey_1 + fz_1 \\ gx_1 + hy_1 + iz_1 \end{pmatrix}$$

Buktikan F^3 modul kiri atas $\mathbb{M}_3(F)$

Penyelesaian :

Ambil $A, B, C \in F^3$, $\alpha, \beta \in M_3(F)$ sebarang

Tulis,

$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $x_1, y_1, z_1 \in F$

$B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $x_2, y_2, z_2 \in F$

$C = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ untuk suatu $x_3, y_3, z_3 \in F$

$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1, i_1 \in F$

$\beta = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2, h_2, i_2 \in F$

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 20 septe

(1) Adb. $(F^3, +)$ Grup Abelian

(a) Adb. $\forall A, B \in F^3 \Rightarrow A+B \in F^3$

Note that,

$$A+B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \in F^3$$

(b) Adb. $(A+B)+C = A+(B+C)$

Note that,

$$(A+B)+C = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) \\ y_1 + (y_2 + y_3) \\ z_1 + (z_2 + z_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \\ z_2 + z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= A + (B+C)$$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 28 September 2020

(c) Adb. $\exists\ 0_{F^3} \in F^3$, $\forall A \in F^3 \ni 0_{F^3} + A = A + 0_{F^3} = A$

Terdapat $0_{F^3} = \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \\ 0_F \end{pmatrix} \in F^3$ sehingga untuk setiap

$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in F^3$ Berlaku

$$\begin{aligned} 0_{F^3} + A &= \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \\ 0_F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_F + x_1 \\ 0_F + y_1 \\ 0_F + z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= A \quad \dots\dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} A + 0_{F^3} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \\ 0_F \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + 0_F \\ y_1 + 0_F \\ z_1 + 0_F \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= A \quad \dots\dots\dots\dots (**) \end{aligned}$$

Jadi, dari (*) dan (**) diperoleh

$$0_{F^3} + A = A + 0_{F^3} = A$$

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 28 Septemb 2020

(d) Adb. $\forall A \in F^3, \exists -A \in F^3 \ni A+(-A) = (-A)+A = 0_{F^3}$

Untuk setiap, $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in F^3$,

Pilih $-A = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix} \in F^3$

Sehingga

$$A+(-A) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ y_1 - y_1 \\ z_1 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \\ 0_F \end{pmatrix}$$

$$= 0_{F^3} \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

dan

$$(-A)+A = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ -y_1 + y_1 \\ -z_1 + z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \\ 0_F \end{pmatrix}$$

$$= 0_{F^3} \quad \ldots\ldots\ldots (**)$$

Jadi, dari $(*)$ dan $(**)$ diperoleh

$$A+(-A) = (-A)+A = 0_{F^3}$$

Imanuel AS / 181141008 Malangjen, 28 September 20

- (e) Adb. $\forall A, B \in F^3 \Rightarrow A+B = B+A$

Note that,

$$A+B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \\ z_2 + z_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$
$$= B + A$$

(2) Terhadap operasi penggandaan skalar $\cdot$ memenuhi keempat aksioma, yaitu:

(a) Adb. $\alpha \cdot A \in F^3 \quad ; \forall A \in F^3, \alpha \in M_3(F)$

Note that,

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot y_1 + c_1 \cdot z_1 \\ d_1 \cdot x_1 + e_1 \cdot y_1 + f_1 \cdot z_1 \\ g_1 \cdot x_1 + h_1 \cdot y_1 + i_1 \cdot z_1 \end{pmatrix} \in F^3$$

(b) Adb. $\alpha \cdot (A+B) = (\alpha \cdot A) + (\alpha \cdot B) \quad ; \forall A, B \in F^3, \alpha \in M_3(F)$

Note that

$$\alpha \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) \\ (y_1 + y_2) \\ (z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot (x_1 + x_2) + b_1 \cdot (y_1 + y_2) + c_1 (z_1 + z_2) \\ d_1 \cdot (x_1 + x_2) + e_1 \cdot (y_1 + y_2) + f_1 (z_1 + z_2) \\ g_1 \cdot (x_1 + x_2) + h_1 \cdot (y_1 + y_2) + i_1 (z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a_1 \cdot x_1 + a_1 \cdot x_2) + (b_1 \cdot y_1 + b_1 \cdot y_2) + (c_1 \cdot z_1 + c_1 \cdot z_2) \\ (d_1 \cdot x_1 + d_1 \cdot x_2) + (e_1 \cdot y_1 + e_1 \cdot y_2) + (f_1 \cdot z_1 + f_1 \cdot z_2) \\ (g_1 x_1 + g_1 \cdot x_2) + (h_1 y_1 + h_1 \cdot y_2) + (i_1 \cdot z_1 + i_1 \cdot z_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot y_1 + c_1 \cdot z_1 \\ d_1 \cdot x_1 + e_1 \cdot y_1 + f_1 \cdot z_1 \\ g_1 \cdot x_1 + h_1 \cdot y_1 + i_1 \cdot z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \cdot x_2 + b_1 \cdot y_2 + c_1 \cdot z_2 \\ d_1 \cdot x_2 + e_1 \cdot y_2 + f_1 \cdot z_2 \\ g_1 \cdot x_2 + h_1 \cdot y_2 + i_1 \cdot z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 28 September 2020

(c). $(\alpha+\beta)\cdot A = (\alpha\cdot A)+(\beta\cdot A)$; $\forall A \in F^3, \alpha,\beta \in M_3(F)$

Note that,

$$(\alpha+\beta)\cdot A = \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ d_1+d_2 & e_1+e_2 & f_1+f_2 \\ g_1+g_2 & h_1+h_2 & i_1+i_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)\cdot x_1 + (b_1+b_2)\cdot y_1 + (c_1+c_2)\cdot z_1 \\ (d_1+d_2)\cdot x_1 + (e_1+e_2)\cdot y_1 + (f_1+f_2)\cdot z_1 \\ (g_1+g_2)\cdot x_1 + (h_1+h_2)\cdot y_1 + (i_1+i_2)\cdot z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1\cdot x_1 + a_2\cdot x_1) + (b_1\cdot y_1 + b_2\cdot y_1) + (c_1\cdot z_1 + c_2\cdot z_1) \\ (d_1\cdot x_1 + d_2\cdot x_1) + (e_1\cdot y_1 + e_2\cdot y_1) + (f_1\cdot z_1 + f_2\cdot z_1) \\ (g_1\cdot x_1 + g_2\cdot x_1) + (h_1\cdot y_1 + h_2\cdot y_1) + (i_1\cdot z_1 + i_2\cdot z_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1\cdot x_1 + b_1\cdot y_1 + c_1\cdot z_1 \\ d_1\cdot x_1 + e_1\cdot y_1 + f_1\cdot z_1 \\ g_1\cdot x_1 + h_1\cdot y_1 + i_1\cdot z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2\cdot x_1 + b_2\cdot y_1 + c_2\cdot z_1 \\ d_2\cdot x_1 + e_2\cdot y_1 + f_2\cdot z_2 \\ g_2\cdot x_1 + h_2\cdot y_1 + i_2\cdot z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\cdot A + \beta\cdot A$$

Imanuel AS / 181114008 Makassar, 28 Sept 2k

(d) Adb. $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$; $\forall A \in F^3$, $\alpha, \beta \in M_3(F)$

Note that,

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot d_2 + c_1 \cdot g_2) & (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot e_2 + c_1 \cdot h_2) & (a_1 \cdot c_2 + b_1 \cdot f_2 + c_1 \cdot i_2) \\ (d_1 \cdot a_2 + e_1 \cdot d_2 + f_1 \cdot g_2) & (d_1 \cdot b_2 + e_1 \cdot e_2 + f_1 \cdot h_2) & (d_1 \cdot c_2 + e_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot i_2) \\ (g_1 \cdot a_2 + h_1 \cdot d_2 + i_1 \cdot g_2) & (g_1 \cdot b_2 + h_1 \cdot e_2 + i_1 \cdot h_2) & (g_1 \cdot c_2 + h_1 \cdot f_2 + i_1 \cdot i_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot d_2 + c_1 \cdot g_2) \cdot x_1 + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot e_2 + c_1 \cdot h_2) \cdot y_1 + (a_1 \cdot c_2 + b_1 \cdot f_2 + c_1 \cdot i_2) z_1 \\ (d_1 \cdot a_2 + e_1 \cdot d_2 + f_1 \cdot g_2) \cdot x_1 + (d_1 \cdot b_2 + e_1 \cdot e_2 + f_1 \cdot h_2) \cdot y_1 + (d_1 \cdot c_2 + e_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot i_2) \cdot z_1 \\ (g_1 \cdot a_2 + h_1 \cdot d_2 + i_1 \cdot g_2) \cdot x_1 + (g_1 \cdot b_2 + h_1 \cdot e_2 + i_1 \cdot h_2) \cdot y_1 + (g_1 \cdot c_2 + h_1 \cdot f_2 + i_1 \cdot i_2) z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ((a_1 \cdot a_2) \cdot x_1 + (a_1 \cdot b_2) y_1 + (a_1 \cdot c_2) \cdot z_1) + ((b_1 \cdot d_2) \cdot x_1 + (b_1 \cdot e_2) \cdot y_1 + (b_1 \cdot f_2) \cdot z_1) + ((c_1 \cdot g_2) \cdot x_1 + (c_1 \cdot h_2) \cdot y_1 + (c_2 \cdot i_2) z_1) \\ ((d_1 \cdot a_2) \cdot x_1 + (d_1 \cdot b_2) \cdot y_1 + (d_1 \cdot c_2) \cdot z_1) + ((e_1 \cdot d_2) \cdot x_1 + (e_1 \cdot e_2) \cdot y_1 + (e_1 \cdot f_2) \cdot z_1) + ((f_1 \cdot g_2) \cdot x_1 + (f_1 \cdot h_2) \cdot y_1 + (f_1 \cdot i_2) \cdot z_1) \\ ((g_1 \cdot a_2) \cdot x_1 + (g_1 \cdot b_2) \cdot y_1 + (g_1 \cdot c_2) \cdot z_1) + ((h_1 \cdot d_2) \cdot x_1 + (h_1 \cdot e_2) \cdot y_1 + (h_1 \cdot f_2) \cdot z_1) + ((i_1 \cdot g_2) \cdot x_1 + (i_1 \cdot h_2) \cdot y_1 + (i_1 \cdot i_2) \cdot z_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot y_1 + c_2 \cdot z_1 \\ d_2 \cdot x_1 + e_2 \cdot y_1 + f_2 z_1 \\ g_2 \cdot x_1 + h_2 \cdot y_1 + i_2 \cdot z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \alpha \cdot (\beta \cdot A)$$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 28 Septemb...

Kelompokan :

Adb. $F^3 \neq \phi$

Misal $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $x_1, y_1, z_1 \in F$

Jelas bahwa $A \in F^3$ Tidak kosong, karena terdapat $x_1, y_1, z_1 \in F$ anggota A.

$\therefore$ Karena $F^3 \neq \phi$, dan $M_3(F)$ Ring dengan operasi penggandaan skalar $\cdot$ didefinisikan memenuhi :

(1) $(F^3, +)$ Grup Abelian.

(2) Terhadap operasi penggandaan skalar $\cdot$ memenuhi keempat aksioma.

Maka $F^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x, y, z \in F \right.$ disebut modul kiri atas $M_3(F)$.

$\blacksquare$ (terbukti)