Makassar, 2 Juni 2024

Analisis Kompleks

Pertemuan ke - 9

Nama : Imanuel Agung Sembe

NIM : 181114100 8

Analisis Kompleks / Pertemuan ke - 9 / Catatan Makassar, 18 Mei 2021

Imanuel Agung Sembe

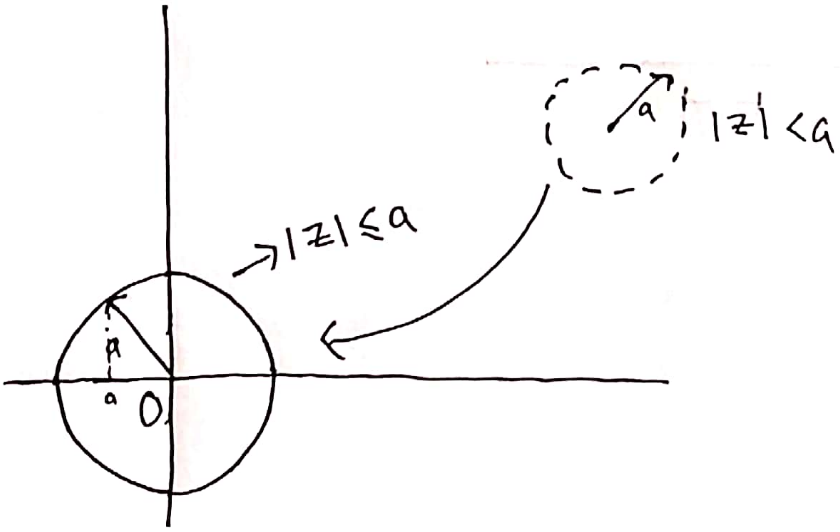
1811141008

Imanuel

Region di Bilangan Kompleks

1. Lingkaran dan cakram di bidang kompleks

- Persamaan lingkaran pusat O dengan jari-jari $a > 0$ ditulis $|z| = a$
- Cakram buka adalah $|z| < a$
- Cakram tutup adalah $|z| \leq a$



$|z| = a$

lingkaran pusat O (0,0)
Jari-jari $a > 0$

$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

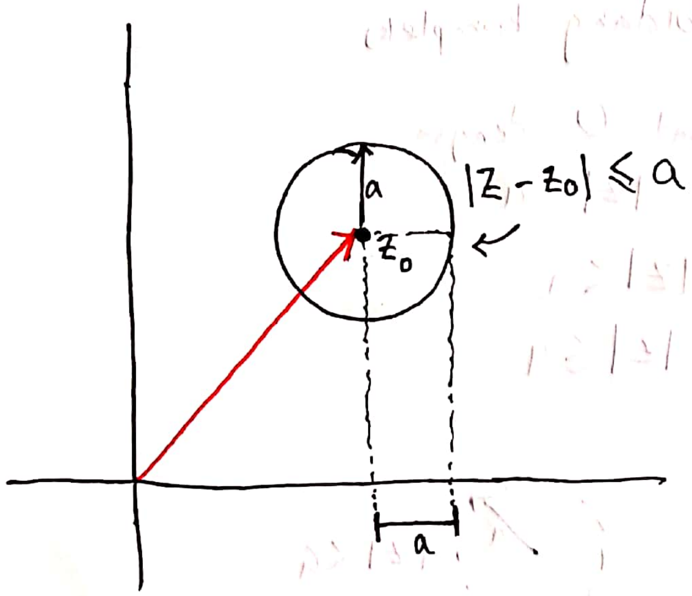
$|z| = a \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = a$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$

Persamaan lingkaran pusat O (0,0) dengan jari-jari a.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel Makassar, 18 Mei 2021

- Persamaan kompleks untuk lingkaran pusat z_0 dan jari-jari $a > 0$ adalah $|z - z_0| = a$
- Cakram buka $\Rightarrow |z - z_0| < a$
- Cakram tutup $\Rightarrow |z - z_0| \leq a$



Imanuel AS/1811141008 Makassar, 18 Mei 2020

2. Persekitaran / Lingkungan

- Persekitaran $-\varepsilon$ dari $z_0 \in \mathbb{C}$ ditulis sebagai

$$V_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$$

$|z - z_0| < \varepsilon$

$\boxed{E}$

Misal $z_0 = 1 + 2i$, $\varepsilon = 2$, $V_\varepsilon(z_0) = \dots ?$

Jawab: $V_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$

$V_\varepsilon(1+2i) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - (1+2i)| < 2 \}$

Misal $z = a + bi = (a, b)$

Real, Im

$$|z - (1+2i)| < 2$$

$$\Rightarrow |(a+bi) - (1+2i)| < 2$$

$$\Rightarrow |(a-1) + (b-2)i| < 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} < 2$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 < 4 \quad \dots\dots\dots (*)$$

Pers. lingkaran di bidang kompleks, $r = 2$, pusat $(1,2)$ dan merupakan cakram buka.

Misal pilih nilai $a = 1$ dan $b = 1$, maka $z = a + bi = 1 + i$

Perhatikan bahwa $z = 1 + i \in V_2(1 + 2i)$ karena memenuhi $(a-1)^2 + (b-2)^2 < 4$ dimana $a = 1$ dan $b = 1$, yakni

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 < 4$$
$$(1-1)^2 + (1-2)^2 < 4$$
$$0^2 + 1^2 < 4$$
$$1 < 4 \text{ (Memenuhi)}$$

Apakah ada nilai z yang lain? Tentu ada. Silahkan pilih nilai a dan b yg memenuhi persamaan (*)

Imanuel AS / 1811141008 [signature] Makassar, 18 Mei 2021

$\boxed{5}$

(1.) Misalkan $\varepsilon = 2$, $z_0 = 2+2i$, $V_\varepsilon(z_0) = \ldots$?

Jawab: $V_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$

$$V_2(2+2i) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-(2+2i)| < 2 \}$$

Misal $z = a+bi = (a,b)$

Note that,

$$|z-(2+2i)| < 2$$

$$\Rightarrow |(a+bi)-(2+2i)| < 2$$

$$\Rightarrow |(a-2)+(b-2)i| < 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-2)^2+(b-2)^2} < 2$$

$$\Rightarrow (a-2)^2+(b-2)^2 < 4 \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

Misal pilih nilai $a = 1$ dan $b = 2$, Maka $z = a+bi = 1+2i$

Perhatikan bahwa, $z = 1+2i \in V_2(2+2i)$ karena memenuhi $(a-2)^2+(b-2)^2 < 4$ dimana $a=1$ dan $b=2$, yakni

$$(a-2)^2+(b-2)^2 < 4$$

$$(1-2)^2+(2-2)^2 < 4$$

$$1^2 + 0^2 < 4$$

$$1 < 4 \quad \text{(Memenuhi)}$$

Apakah ada nilai z yang lain? Tentu ada. Silahkan cari nilai a dan b yang lain sedemikian sehingga memenuhi pers. (*)

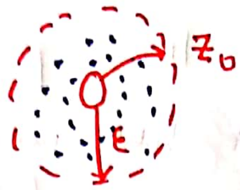
BTW, Pers. (*) merupakan pers. lingkaran ~~dalam~~ di bidang kompleks dengan jari-jari 2, dan merupakan cakram bulat.

pusat (2,2)

Imanuel AS / 181114008 Imanuel Makassar, 18 Mei 2021

- Lingkaran tanpa pusat

$V_\varepsilon^*(z_0) = V_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$



3.) Titik Dalam (Interior Point)

Titik $z_0 \in \mathbb{C}$ adalah titik dalam dari himpunan $S \subseteq \mathbb{C}$,
Jika terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon(z_0) \subseteq S$,
Himpunan semua titik dalam disebut Int(S).

4.) Titik Luar (Exterior Point)

Titik $z_0 \in \mathbb{C}$ adalah titik luar dari himpunan $S \subseteq \mathbb{C}$,
Jika terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon(z_0) \subseteq S^c$, $S^c = \mathbb{C} - S$.
Himpunan semua titik luar S ditulis Eks(S).

5.) Titik Batas

Titik $z_0 \in \mathbb{C}$ disebut titik batas dari himpunan $S \subseteq \mathbb{C}$,
Jika z_0 bukan titik dalam dan bukan titik luar.

$\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \; V_\varepsilon(z_0) \cap S \neq \phi \text{ dan}$$
$$V_\varepsilon^*(z_0) \cap S^c \neq \phi$$

Himpunan semua titik batas S ditulis sebagai ∂S (baca: do s)

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel Makassar, 18 Mei 2021

⑥ Titik Limit

Titik $z_0 \in \mathbb{C}$ disebut titik limit dari $S \subseteq \mathbb{C}$,

Jika $\forall \varepsilon > 0$, $V_\varepsilon^*(z_0) \cap S \neq \phi$

Himpunan semua titik limit S ditulis S'.

⑦ Titik Pencil

Titik $z_0 \in \mathbb{C}$ disebut titik pencil dari himpunan $S \subseteq C$

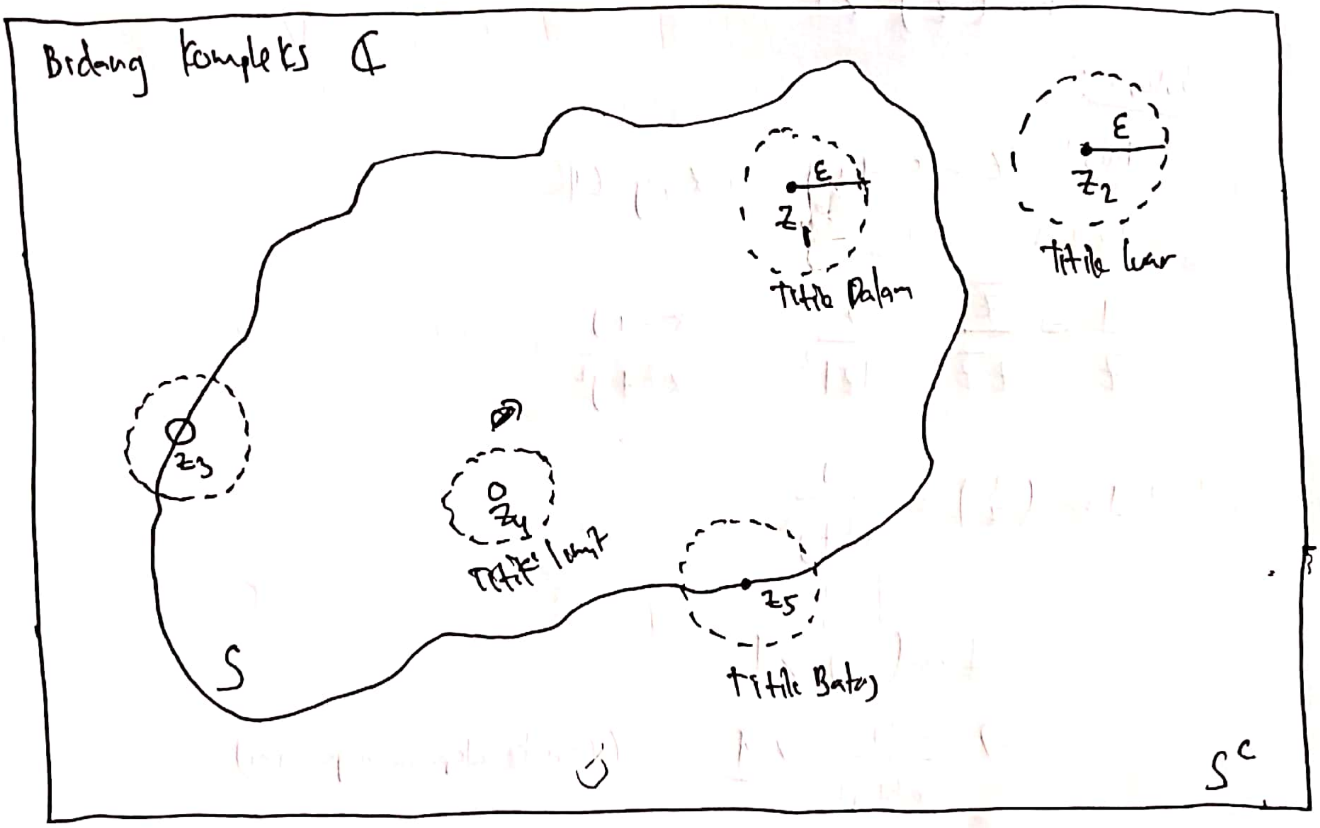
Jika z_0 bukan titik limit S.

Atau ingkaran dari no. 6 diatas, atau ~~dapat~~ dengan kata lain:

Jika $\exists\, \varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon^*(z_0) \cap S \neq \phi$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 18 Mei 2021



Ket:

1. <u>Titik Dalam</u> : $\exists \varepsilon > 0 \ni V_\varepsilon(z_0) \subseteq S$

dimana diketahui sebelumnya:

$$V_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$$

2. <u>Titik luar</u> : $\exists \varepsilon > 0 \ni V_\varepsilon(z_0) \subseteq S^c$

3. <u>Titik Batas</u> : $\forall \varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(z_0) \cap S \neq \phi$ dan $V_\varepsilon^*(z_0) \cap S^c \neq \phi$

4. <u>Titik Limit</u> : $\forall \varepsilon > 0$, $V_\varepsilon^*(z_0) \cap S \neq \phi$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 18 Mei 2024

E Sketsa himpunan

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$$

Solusi:

Misal $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$$

$$\Rightarrow \frac{-y}{x^2+y^2} > 1$$ (Cari ketaksamaannya ini)

Diperoleh $\frac{-y}{x^2+y^2} > 1$

$$\Rightarrow -y > x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + y < 0$$

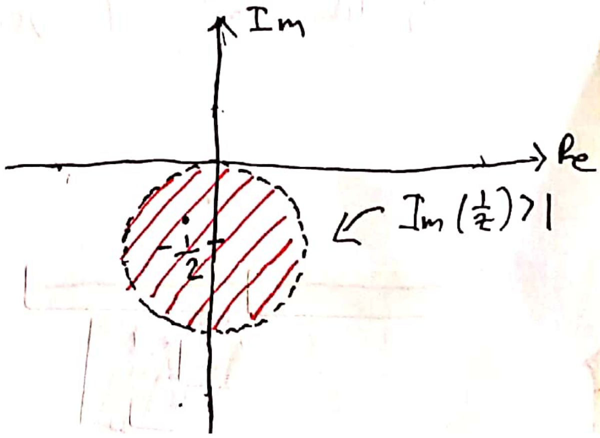
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + y + \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (x-0)^2 + (y + \tfrac{1}{2})^2 < (\tfrac{1}{2})^2$$

Merupakan lingkaran dengan pusat $(0, -\frac{1}{2})$ dengan jari-jari $\frac{1}{2}$.

Pusat $(0, -\frac{1}{2}) \Rightarrow z = -\frac{i}{2}$

sketsa (lihat gambar di samping)



Analisis Kompleks / Pertemuan ke-9 / Tugas Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 21 April 2021

PR

Sketsa himpunan berikut

① $|z - 2 + i| \leq 1$

Penyelesaian :

Misal $z = x + yi$; U/suatu $x, y \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa

$$|z - 2 + i| = |(x + yi) - 2 + i| = |(x-2) + (y+1)i|$$
$$= \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

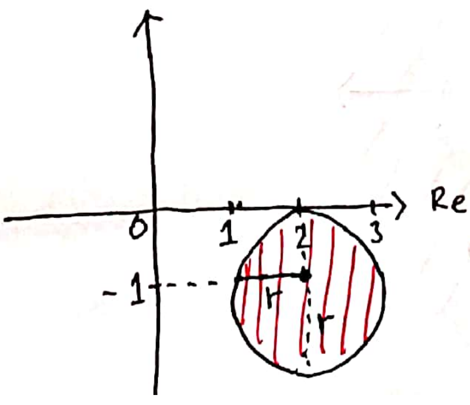
Maka diperoleh

$$|z - 2 + i| \leq 1$$
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \leq 1$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq (1)^2$$ [Kedua ruas dipangkatkan 2]

Ingat! Pers lingkaran dgn pusat $P(a,b)$ adalah
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Merupakan lingkaran dengan pusat $P(2, -1)$ dengan jari jari $r = 1$.

Gambar :



Imanuel Agung Sembe / 181141008 Makassar, 21 April 2021

② $|2z + 3| > 4$

<u>Penyelesaian</u> :

Misal $z = x + yi$; u/suatu $x, y \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa,

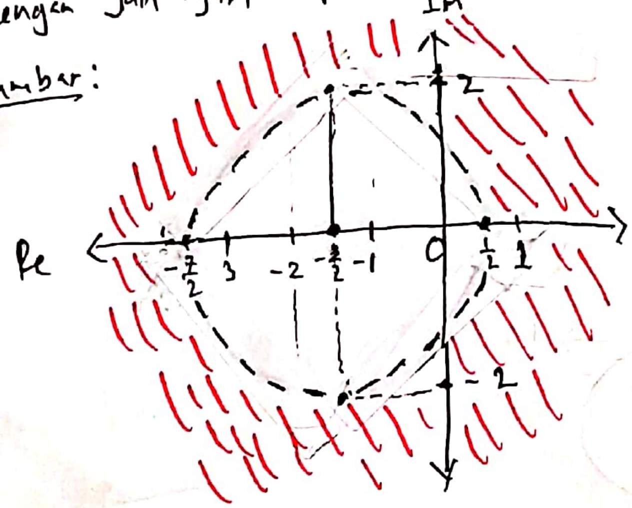
$$|2z+3| = |2(x+yi)+3| = |2x+2yi+3| = |(2x+3)+(2y)i|$$
$$= \sqrt{(2x+3)^2+(2y)^2}$$

Maka diperoleh,

$$|2z+3| > 4$$
$$\sqrt{(2x+3)^2+(2y)^2} > 4$$
$$(2x+3)^2+(2y)^2 > (4)^2 \quad \text{[Kedua ruas dipangkatkan 2]}$$
$$\frac{1}{4}\left[(2x+3)^2+(2y)^2\right] > (4)^2 \cdot \frac{1}{4}$$
$$\frac{(2x+3)(2x+3)}{4} + \frac{(2y)(2y)}{4} > 4$$
$$\frac{(2x+3)}{2}\frac{(2x+3)}{2} + \frac{2y}{2}\cdot\frac{2y}{2} > 4$$
$$(x+\tfrac{3}{2})(x+\tfrac{3}{2}) + y \cdot y > 4$$
$$(x+\tfrac{3}{2})^2 + (y-0)^2 > (2)^2$$

↳ Merupakan persamaan lingkaran dengan pusat $P(-\frac{3}{2}, 0)$ dengan jari-jari $r = 2$

<u>Gambar</u>:



Inanuel Agung Senke / 1811141008 Tanda tangan — Makassar, 4 April 2021

(3) $\text{Im}(z) > 1$

Penyelesaian :

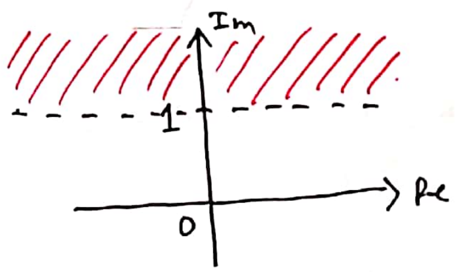
Misal $z = x + yi$; u/suatu $x, y \in \mathbb{R}$

Maka, $\text{Im}(z) = y$

Sehingga diperoleh,

$$\text{Im}(z) > 1$$
$$y > 1$$

Diperoleh gambar sketsa sebagai berikut



(4) $\text{Im}(z) = 1$

Penyelesaian :

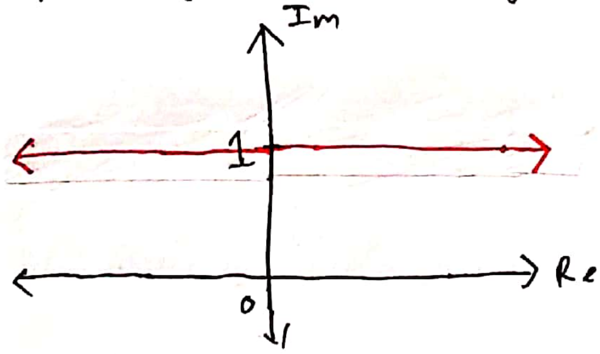
Misal $z = x + yi$; u/suatu $x, y \in \mathbb{R}$

Maka, $\text{Im}(z) = y$

sehingga diperoleh,

$$\text{Im}(z) = 1$$
$$y = 1$$

Diperoleh gambar sketsa sebagai berikut



Imanuel Agung Jeuhe / 1811141008

Makassar, 21 April 2021

(5) $|z-4| \geq |z|$

Penyelesaian :

Misal $z = x + yi$; u/suatu $x, y \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa

$$|z-4| = |(x+yi)-4| = |(x-4)+(y)i| = \sqrt{(x-4)^2+(y)^2}$$

dan

$$|z| = |x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Maka,

$$|z-4| \geq |z|$$
$$\sqrt{(x-4)^2+(y)^2} \geq \sqrt{x^2+y^2}$$
$$(x-4)^2+(y)^2 \geq x^2+y^2 \quad \text{[Kedua ruas dipangkatkan 2]}$$
$$(x^2-8x+16)+y^2 \geq x^2+y^2$$
$$-8x+16 \geq 0 \quad \text{[Kedua ruas dikurangkan } x^2+y^2\text{]}$$
$$-x+2 \geq 0$$
$$-x \geq -2$$
$$x \leq 2$$

Gambar :