

BAB II

Fungsi Keanggotaan Himpunan Kabur

2.1 Fungsi Keanggotaan

Misalkan X ruang semesta, maka himpunan kabur \tilde{A} di dalam X dinyatakan sebagai:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

dengan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ disebut Fungsi Keanggotaan (FK) untuk \tilde{A} atau derajat keanggotaan dari x di dalam \tilde{A} . FK menetapkan setiap unsur dari X ke ruang keanggotaan M ;

$$M = \{m \mid 0 \leq m \leq 1\}$$

Contoh 2.1

Misalkan $X = \{\text{Maros, Makassar, Sungguminawa}\}$ adalah himpunan kota-kota di Sulawesi Selatan yang dapat dipilih untuk tempat tinggal. Suatu himpunan kabur \tilde{Z} di dalam X didefinisikan sebagai "kota yang layak untuk tempat tinggal" dan dituliskan dalam pasangan berurutan sebagai berikut:

$$\tilde{Z} = \{(\text{Maros}, 0.8), (\text{Makassar}, 0.9), (\text{Sungguminawa}, 0.6)\}$$

Maka FK untuk \tilde{Z} adalah:

$$\mu_{\tilde{Z}}(x) = \begin{cases} 0.8 & , \text{jika } x = \text{Maros} \\ 0.9 & , \text{jika } x = \text{Makassar} \\ 0.6 & , \text{jika } x = \text{Sungguminawa} \end{cases}$$

Dalam contoh ini semesta X berupa variabel diskrit dan memuat objek-objek tak terurut, yakni tiga kota di Sulawesi Selatan. Derajat keanggotaan yang didaftar di atas cukup subyektif, yakni setiap orang dapat berbeda dalam menetapkan derajat keanggotaan dari anggota-anggota di dalam X , tetapi nilai-nilai tersebut tetap mencerminkan tingkat kesukaan.

Contoh 2.2

Misalkan $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ adalah "himpunan dari banyaknya anak dalam suatu keluarga". Suatu himpunan kabur \tilde{B} di dalam X menyatakan "banyaknya anak yang ideal di dalam suatu keluarga" dan dinyatakan dalam pasangan berurutan sebagai berikut:

$$\tilde{B} = \{(0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1)\}$$

Dalam contoh ini, semesta X berupa variabel diskrit dengan objek-objek terurut. Derajat keanggotaan dari himpunan kabur \tilde{B} jelaslah merupakan ukuran yang subyektif.

Contoh 2.3

Misalkan $X = \mathbb{R}^+$ adalah himpunan usia manusia yang mungkin untuk kehidupan. Maka himpunan kabur \tilde{A} didefinisikan sebagai "usia sekitar 50 tahun" dan dituliskan sebagai:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}, \text{ dengan}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^4} \text{ sebagai fungsi keanggotaan (FK).}$$

Dari contoh-contoh di atas, jelaslah bahwa konstruksi dari himpunan kabur tergantung pada dua hal: (i) identifikasi semesta pembicaraan yang cocok dan (ii) spesifikasi dari suatu fungsi keanggotaan yang sesuai. Spesifikasi fungsi keanggotaan bersifat subyektif, artinya pendefinisian fungsi keanggotaan untuk suatu konsep himpunan kabur dapat berbeda oleh setiap orang. Subyektivitas tersebut berasal dari perbedaan individu dalam mengekspresikan konsep-konsep abstrak. Oleh karena itu subyektivitas dan ketidakpastian dari himpunan kabur adalah perbedaan utama antara belajar himpunan kabur dan teori probabilitas, yang cenderung melibatkan perlakuan subyektif dari gejala (fenomena) acak.

2.2 Formulasi Fungsi Keanggotaan (FK) dan Parameterisasi

Malakassar, 23 Februari 2021

Berikut dibiarkan kelas-kelas fungsi parameter yang digunakan untuk mendefinisikan FK berdimensi satu dan dua. Penurunan FLC memperhatikan input-input dan parameternya. Penurunan-penurunan ini sangat penting di dalam pembahasan Sistem Inferensi Kabur (SIK) untuk memperoleh penentuan input/output yang diinginkan.

2.2.1 Fungsi Keanggotaan Berdimensi Satu

2.2.1.1 Fungsi Keanggotaan Segitiga

Fungsi keanggotaan segitiga dispesifikasikan oleh tiga parameter $\{a, b, c\}$ sebagai berikut:

$$\text{Segitiga}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{jika } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{jika } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{jika } x \geq c \end{cases}$$

Dengan menggunakan operator max dan min, maka ekspresi lain dari fungsi keanggotaan segitiga, yaitu:

$$\text{Segitiga}(x; a, b, c) = \max \left[\min \left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right]$$

Parameter-parameter $\{a, b, c\}$ dengan $a < b < c$ menentukan koordinat-koordinat untuk titik-titik sudut FK segitiga.

Contoh 2.4

Makassar, 23 Februari 2024

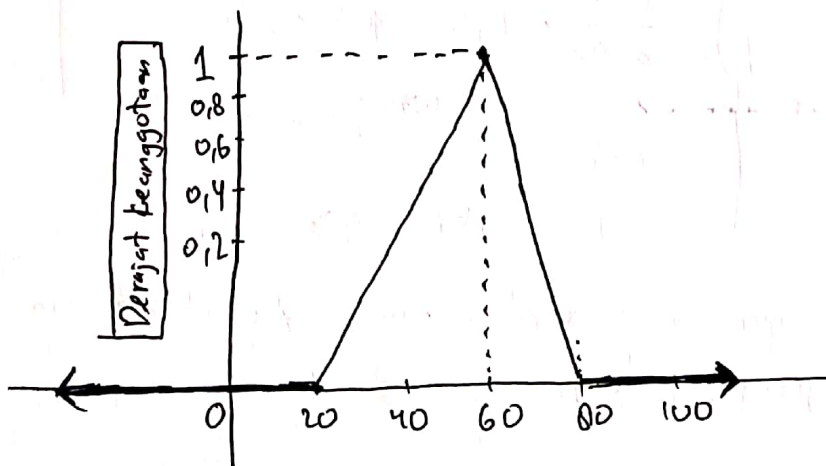
Diketahui FK segitiga yang didefinisikan oleh:

$$\text{Segitiga}(x; 20, 60, 80) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \leq 20 \\ \frac{x-20}{40} & \text{jika } 20 \leq x \leq 60 \\ \frac{80-x}{20} & \text{jika } 60 \leq x \leq 80 \\ 0 & \text{jika } x \geq 80 \end{cases}$$

} Prof lebih jutek yg ini

Maka:

- $\text{Segitiga}(30; 20, 60, 80) = \frac{30-20}{40} = \frac{1}{4}$ atau
 - $\text{Segitiga}(30; 20, 60, 80) = \max\left[\min\left(\frac{30-20}{60-20}, \frac{80-30}{80-60}\right), 0\right] = \frac{1}{4}$
- } pengetahuan tambahan saja



Gambar 2.1 Fungsi keanggotaan segitiga $(x; 20, 60, 80)$

2.2.1.2 Fungsi Keanggotaan Trapezoid

Fungsi keanggotaan trapezoid dispesifikasikan dengan 4 parameter $\{a, b, c, d\}$ sebagai berikut:

$$\text{Trapezoid}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \text{ jika } a \leq x \leq b \\ 1 & , \text{ jika } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & , \text{ jika } c \leq x \leq d \\ 0 & , \text{ jika } d \leq x \end{cases}$$

dibuktikan pakai contoh 2.5 apakah hasilnya benar atau tidak

Dengan menggunakan operator max dan min, maka ekspresi lain dari fungsi keanggotaan trapezoid adalah:

$$\text{Trapezoid}(x; a, b, c, d) = \max \left[\min \left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c} \right), 0 \right]$$

Parameter-parameter $\{a, b, c, d\}$ dengan $a < b \leq c < d$ menentukan koordinat-koordinat untuk keempat titik sudut Fk Trapezoid.

Contoh 2.5

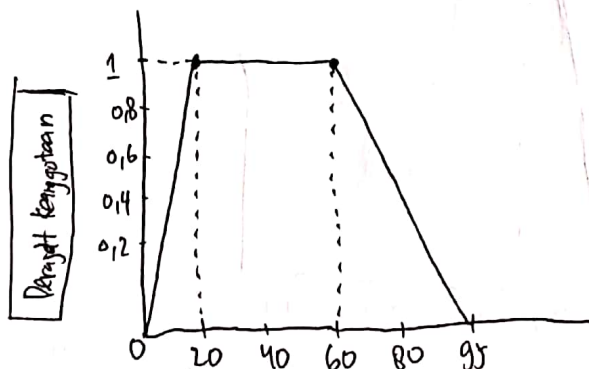
Diketahui fungsi keanggotaan trapezoid yang didefinisikan oleh:

$$\text{Trapezoid}(x; 10, 20, 60, 95) = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } x \leq 10 \\ \frac{x-10}{10} & , \text{ jika } 10 \leq x \leq 20 \\ 1 & , \text{ jika } 20 \leq x \leq 60 \\ \frac{95-x}{35} & , \text{ jika } 60 \leq x \leq 95 \\ 0 & , \text{ jika } 95 \leq x \end{cases}$$

Maka:

$$\bullet \text{Trapezoid}(15; 10, 20, 60, 95) = \frac{15-10}{10} = \frac{1}{2} = 0,50$$

$$\bullet \text{trapezoid}(75; 10, 20, 60, 95) = \frac{95-75}{35} = \frac{4}{7} = 0,57$$



Gambar 2.2 Fungsi Keanggotaan Trapezoid $(x; 10, 20, 60, 95)$.

2.2.1.3 Fungsi Keanggotan Bell-Shaped

Makassar, 23 Feb 2024

FK Bell-Shaped didefinisikan oleh tiga parameter $\{a, b, c\}$ sebagai berikut:

$$\text{Bell}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}, \text{ dengan } b \text{ selalu positif.}$$

x (x-anggota) adalah
bilangan real

Diketahui FK Bell-Shaped yang didefinisikan oleh $\text{Bell}(x; 20, 4, 50) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-50}{20} \right|^8}$

maka:

- $\text{Bell}(40; 20, 4, 50) = \frac{1}{1 + \left| \frac{40-50}{20} \right|^8} = 0,996$
- $\text{Bell}(50; 20, 4, 50) = \frac{1}{1 + \left| \frac{50-50}{20} \right|^8} = 1$

2.2.1.4 Fungsi Keanggotan Gauss (Jarang dipakai); lebih banyak dipakai yg trapezium sama segitiga.

Fungsi Keanggotan Gauss didefinisikan oleh dua parameter $\{c, \sigma\}$ sebagai berikut:

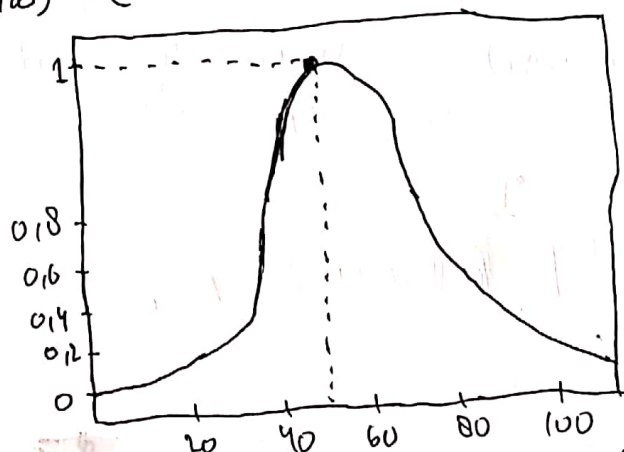
$$\text{Gauss}(x; c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-c}{\sigma} \right)^2}$$

FK Gauss ditentukan oleh parameter c dan σ , parameter c menentukan pusat dari FK dan $e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-50}{20} \right)^2}$ σ menentukan lebar dari FK.

contoh 2.7

Diketahui FK Gauss yang didefinisikan oleh $\text{Gauss}(x; 50, 20) =$, maka

- $\text{Gauss}(70; 50, 20) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{70-50}{20} \right)^2} = 0,61$
- $\text{Gauss}(50; 50, 20) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{50-50}{20} \right)^2} = 1$



Gambar 2.3. Fungsi Keanggotan Gauss $(x; 50, 20)$

Makassar, 23 Feb 2021

Latihan

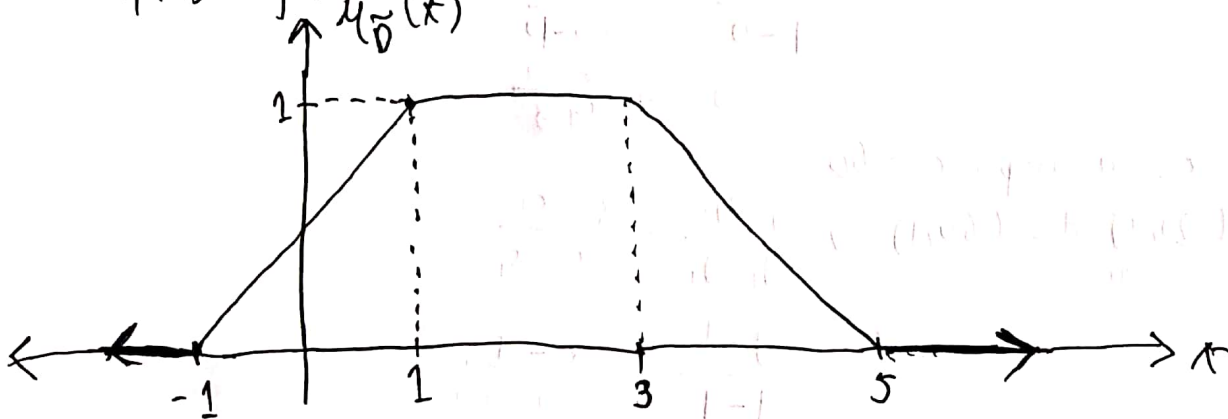
$$\mu_D(x) = \text{Trap}(x; -1, 1, 3, 5)$$

Tuliskan persamaannya!

Jawab:

$$\mu_D(x) = \text{Trap}(x; \underset{a}{-1}, \underset{b}{1}, \underset{c}{3}, \underset{d}{5}) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \leq -1 \vee x \geq 5 \\ \frac{x+1}{2} & \text{jika } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{jika } 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2} & \text{jika } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Gambarkan ya $\mu_D(x)$



Rumus Persamaan Garis yang Melalui Dua Buah Titik

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Misalnya Untuk Gambar 2.2 Diperoleh,

→ Untuk $x=10$ sampai $x=20$

Titik $(10,0)$ dan $(20,1)$ $\Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$x_1 \ y_1 \quad x_2 \ y_2$

$$\frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{x - 10}{20 - 10}$$

$$y = \frac{x - 10}{10}$$

→ Untuk $x=20$ sampai $x=60$

Titik $(20,1)$ dan $(60,1)$ $\Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$x_1 \ y_1 \quad x_2 \ y_2$

$$\frac{y - 1}{1 - 1} = \frac{x - 1}{60 - 20}$$

$$\frac{y - 1}{0} = \frac{x - 1}{40}$$

$$40y - 40 = 0$$

$$40y = 40$$

$$y = \frac{40}{40}$$

$$y = 1$$

→ Untuk $x=60$ sampai $x=95$

Titik $(60,1)$ dan $(95,0)$ $\Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$x_1 \ y_1 \quad x_2 \ y_2$

$$\frac{y - 1}{0 - 1} = \frac{x - 60}{95 - 60}$$

$$\frac{y - 1}{-1} = \frac{x - 60}{35}$$

$$35(y - 1) = -1(x - 60)$$

$$35y - 35 = -x + 60$$

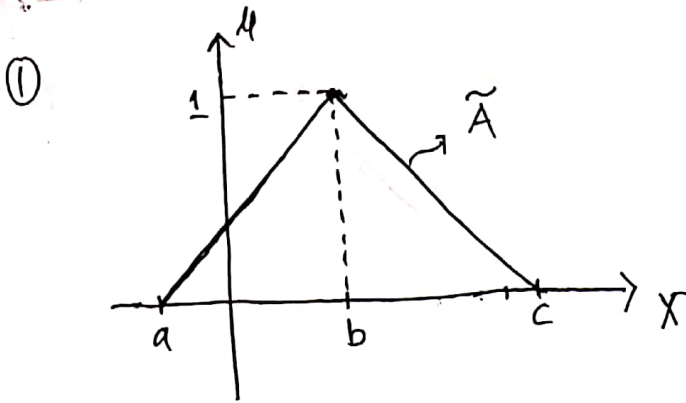
$$35y = -x + 95$$

$$y = \frac{-x + 95}{35}$$

$$y = \frac{95 - x}{35}$$

Immanuel AS

1811141008

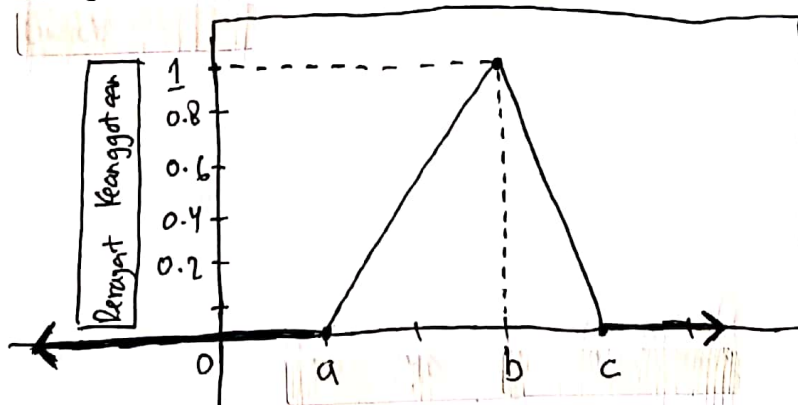


Buktikan bahwa

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{Segitiga}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } x \leq a \vee x \geq c \\ \frac{x-a}{b-a} & , \text{ untuk } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & , \text{ untuk } b \leq x \leq c \end{cases}$$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan rumus persamaan garis, diperoleh :



Dik Titik :

- (a, 0)
- (b, 1)
- (c, 0)

→ Untuk $x \leq a \vee x \geq c$

$$\Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{0 - 0} = \frac{x - a}{c - a}$$

$$(c - a)y = 0$$

$$\boxed{y = 0} \dots (1)$$

→ Untuk $a \leq x \leq b$

$$\Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{x - a}{b - a}$$

$$\boxed{y = \frac{x - a}{b - a}} \dots (2)$$

→ Untuk $b \leq x \leq c$

$$\Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 1}{0 - 1} = \frac{x - b}{c - b}$$

$$-(y - 1) = \frac{x - b}{c - b}$$

$$y - 1 = -\frac{x - b}{c - b}$$

$$y = \frac{b - x}{c - b} + \frac{c - b}{c - b}$$

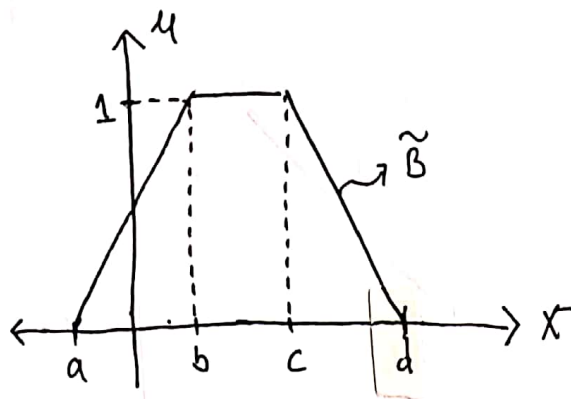
$$\boxed{y = \frac{c - x}{c - b}} \dots (3)$$

∴ Berdasarkan persamaan (1), (2) dan (3) maka diperoleh Fungsi Keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{Segitiga}(x; a, b, c)$ diatas terbukti. \square

Immanuel AS

1811141008

②



Buktikan bahwa

$$y_{\tilde{B}}(x) = \text{Trap}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } x \leq a \vee x \geq d \\ \frac{x-a}{b-a} & , \text{ untuk } a \leq x \leq b \\ 1 & , \text{ untuk } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & , \text{ untuk } c \leq x \leq d \end{cases}$$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan rumus persamaan garis, diperoleh

selengkapnya berdasarkan gambar di atas diketahui

bahwasanya titik-titik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rightarrow (a, 0) & \quad \rightarrow (c, 1) \\ \rightarrow (b, 1) & \quad \rightarrow (d, 0) \end{aligned}$$

Maka,

 \rightarrow untuk $x \leq a$ dan $x \geq d$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \left| \begin{array}{l} (a,0) \\ \text{dan} \\ (d,0) \end{array} \right.$$

$$\frac{y-0}{0-0} = \frac{x-a}{d-a}$$

$$(d-a)(y) = 0$$

$$\boxed{y = 0} \quad \dots (1)$$

 \rightarrow untuk $a \leq x \leq b$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\boxed{y = \frac{x-a}{b-a}} \quad \dots (2)$$

 \rightarrow Untuk $b \leq x \leq c$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-1}{1-1} = \frac{x-b}{c-b}$$

$$(c-b)(y-1) = 0$$

$$y-1 = 0$$

$$\boxed{y = 1} \quad \dots (3)$$

 \rightarrow untuk $c \leq x \leq d$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-1}{0-1} = \frac{x-c}{d-c}$$

$$y-1 = \frac{c-x}{d-c}$$

$$y = \frac{c-x}{d-c} + \frac{d-c}{d-c}$$

$$\boxed{y = \frac{d-x}{d-c}} \quad \dots (4)$$

 \therefore Dari (1), (2), (3) dan (4)

disimpulkan bahwa

$$y_{\tilde{B}}(x) = \text{Trap}(x; a, b, c, d)$$

dapat terbukti.



2.3 Latihan

① Tentukan nilai dari fungsi keanggotaan segitiga berikut :

a) segitiga (40; 20, 60, 80)

Penyelesaian :

$$\text{segitiga}(x; 20, 60, 80) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 20 \vee x \geq 80 \\ \frac{x-20}{40} & ; 20 \leq x \leq 60 \\ \frac{80-x}{20} & ; 60 \leq x \leq 80 \end{cases}$$

Maka,

$$\text{segitiga}(40; 20, 60, 80) = \frac{40-20}{40} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) Segitiga (40; 10, 30, 70)

Penyelesaian :

$$\text{segitiga}(x; 10, 30, 70) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 10 \vee x \geq 70 \\ \frac{x-10}{20} & ; 10 \leq x \leq 30 \\ \frac{70-x}{40} & ; 30 \leq x \leq 70 \end{cases}$$

Maka,

$$\text{segitiga}(40; 10, 30, 70) = \frac{70-40}{40} = \frac{3}{4}$$

Immanuel AS / 1811141008

Makassar, 16 Maret 2021

② Tentukan nilai dari fungsi keanggotaan trapezoid berikut:

a.) Trapezoid (30; 10, 20, 60, 95)

Penyelesaian:

$$\text{Trapezoid}(x; 10, 20, 60, 95) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 10 \vee x \geq 95 \\ \frac{x-10}{10} & ; 10 \leq x \leq 20 \\ 1 & ; 20 \leq x \leq 60 \\ \frac{95-x}{35} & ; 60 \leq x \leq 95 \end{cases}$$

Maka, $\text{Trapezoid}(30; 10, 20, 60, 95) = 1$.

b.) Trapezoid (30; 10, 30, 60, 95)

Penyelesaian:

$$\text{Trapezoid}(x; 10, 30, 60, 95) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 10 \vee x \geq 95 \\ \frac{x-10}{20} & ; 10 \leq x \leq 30 \\ 1 & ; 30 \leq x \leq 60 \\ \frac{95-x}{35} & ; 60 \leq x \leq 95 \end{cases}$$

Maka, $\text{Trapezoid}(30; 10, 30, 60, 95) = 1$.

Immanuel AS / 1811141008 ~~UFTW~~

Mabassar, 16 Maret 2021

③ Tentukan nilai dari fungsi anggota bell berikut:

a.) Bell (30; 20, 4, 50)

Penyelesaian:

$$\text{Bell}(x; 20, 4, 50) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-50}{20} \right|^8}$$

$$\text{Maka, Bell}(30; 20, 4, 50) = \frac{1}{1 + \left| \frac{30-50}{20} \right|^8} = \frac{1}{1 + \left| \frac{-20}{20} \right|^8} = \frac{1}{1 + (1)^8} = \frac{1}{2}$$

b.) Bell (30; 10, 2, 30)

Penyelesaian:

$$\text{Bell}(x; 10, 2, 30) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-30}{10} \right|^4}$$

$$\text{Maka, Bell}(30; 10, 2, 30) = \frac{1}{1 + \left| \frac{30-30}{10} \right|^4} = \frac{1}{1 + \left| \frac{0}{10} \right|^4} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$