Makassar, 11 November 20

TUGAS III

Teori Modul

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Makassar, 11 November 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Teori Modul - Tugas III

Soal Latihan

Untuk soal berikut (1 s/d 6) selidiki apakah M/N modul Faktor?

1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modul ; $N = 5\mathbb{Z}$ submodul di $\mathbb{Z}$

2. $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modul ; $N = 6\mathbb{Z}$ submodul di $\mathbb{Z}$

3. $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}$-modul ; $N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ submodul di $\mathbb{Z}_{12}$.

4. $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}$-modul ; $N = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$ submodul

5. $\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}$-modul ; $N = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$ submodul.

6. $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}$-modul ; $N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}, \overline{24}\}$.

Imanuel AS / 181114008 Makassar, 11 November 22

Modul Faktor

Definisi

Misalkan diketahui M, R-Modul. Karena M grup Abelian, maka sebarang subgrup dari M juga merupakan grub Abelian. Misalkan N merupakan sebarang subgrup dari M. Karena N subgrup Abelian, maka N merupakan subgrup normal terhadap M, yaitu $aN = Na$ untuk setiap $a \in M$.

Kemudian misalkan $M/N = \{a+N \mid a \in M\}$

$$M/N = \{a+N, b+N, c+N, \dots\} \ \forall a, b, c, \dots \in M$$

dengan definisi

$$+ : (a+N)+(b+N) = (a+b)+N$$ [operasi penjumlahan koset]

adalah Grup.

Karena M Grup Abelian, maka jelas bahwa

$$(a+N)+(b+N) = (a+b)+N \quad \text{[Definisi]}$$
$$= (b+a)+N \quad \text{[a, b elemen sebarang di M]}$$
$$= (b+N)+(a+N).$$

Jadi, M/N merupakan Grup Abelian terhadap operasi penjumlahan koset.

Imanuel AS / 181114008 Makassar, 11 Nov 2020

Selanjutnya, perhatikan Teorema berikut, sebagai kelanjutan (bagian) dari Definisi Modul Faktor

Teorema Modul Faktor

Diketahui M, R-modul, N sebarang submodul dari M, dan R ring dengan elemen/unsur kesatuan, maka M/N R-modul terhadap operasi penggandaan koset yakni $r(a+N) = (ra)+N$ untuk setiap $r \in R$ dan $(a+N) \in M/N$. Selanjutnya M/N disebut modul faktor.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa operasi penggandaan koset di atas merupakan operasi biner.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa operasi ini terdefinisi dengan baik.

Diambil sebarang $a+N$, $b+N \in M/N$ dengan $a+N = b+N$.

Menggunakan sifat kesamaan dua koset diperoleh $a-b \in N$.

Karena N submodul, maka untuk sebarang $r \in R$ berlaku,

$$r(a-b) = ra - rb \in N.$$

Dengan kata lain $(ra)+N = (rb)+N$,

sesuai dengan definisi operasi penggandaan koset $r(a+N) = r(b+N)$.

Terbukti operasi ini terdefinisi dengan baik.

Kedua, operasi ini tertutup karena $ra \in M$ untuk sebarang $r \in R$. dan $a \in M$ dan dengan demikian berlaku

$$r(a+N) = (ra)+N \in M/N.$$

Jadi, operasi penggandaan koset merupakan operasi biner.

Imanuel AS / 1811141008 Maru

Makassar, 11 Nov. 2020

Terakhir, diberikan sebarang $a+N$, $b+N \in M/N$ dan $r, r_1, r_2 \in R$.

Akan ditunjukkan bahwa operasi penggandaan koset memenuhi aksioma penggandaan skalar:

1.) $r((a+N)+(b+N)) = r((a+b)+N)$
$= (r(a+b))+N$
$= (ra+rb)+N$
$= (ra+N)+(rb+N)$
$= r(a+N)+r(b+N)$

2.) $(r_1+r_2)(a+N) = ((r_1+r_2)a)+N$
$= (r_1a+r_2a)+N$
$= (r_1a+N)+(r_2a+N)$
$= r_1(a+N)+r_2(a+N)$

3.) $(r_1r_2)(a+N) = ((r_1r_2)a)+N$
$= (r_1(r_2a))+N$
$= r_1(r_2a+N)$
$= r_1(r_2(a+N))$

4.) $1_R(a+N) = (1_Ra)+N$
$= a+N$.

Jadi, terbukti bahwa M/N merupakan modul atas R.

Imanuel AS / H11114008 Imanuel   Makassar, 11 Nov 2020

Penyelesaian :

(1.) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ -modul ; $N = 5\mathbb{Z}$ submodul di $\mathbb{Z}$

Penyelesaian :

> Diketahui : $\underset{\text{Modul}}{\mathbb{Z}}$, $\underset{\text{Ring}}{\mathbb{Z}}$ -modul

$N = 5\mathbb{Z}$ submodul di $\mathbb{Z}$ (Submodul)

> Diketahui pula $(\mathbb{Z}, +)$ adalah Grup Abelian
karena memenuhi sifat tutup, assosiatif, $\exists$ identitas, $\exists$ invers
dan $a+b = b+a \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$,

> Akan ditunjukkan : $(5\mathbb{Z}, +)$ subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$

(i) $(5\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +)$.
Jadi, $5\mathbb{Z}$ komplex dari $\mathbb{Z}$.

(ii) $5\mathbb{Z} \neq \phi$ karena $\exists\, 30 \in 5\mathbb{Z}$.
Jadi, $5\mathbb{Z}$ komplex tidak kosong dari $\mathbb{Z}$.

(iii) $(5\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup terhadap operasi yang sama dalam $(\mathbb{Z}, +)$.

Jadi, $(5\mathbb{Z}, +)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$ .... (*)

Imanuel AS / 181141008 ~~Ba~~ Tua   Makassar, 11 Nov 2020

Karena dari (*) diketahui $5\mathbb{Z}$ subgrup Abelian dari Grup $\mathbb{Z}$.

Maka $5\mathbb{Z}$ merupakan Grup Abelian

dan $5\mathbb{Z}$ merupakan subgrup normal terhadap $\mathbb{Z}$,

yakni berlaku :

$$\underbrace{5\mathbb{Z}.a}_{\boxed{\text{Koset kanan}}} = \underbrace{a.5\mathbb{Z}}_{\boxed{\text{Koset kiri}}} \quad ; \forall a \in \mathbb{Z}$$

dimana,

$$5\mathbb{Z}.a = \{na \mid n \in 5\mathbb{Z}\}$$

dan

$$a.5\mathbb{Z} = \{an \mid n \in 5\mathbb{Z}\}$$

Misal, pilih a sebarang $a \in \mathbb{Z}$

$$5\mathbb{Z}a = \{na \mid n \in 5\mathbb{Z}\}$$
$$= \{\{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}a\}$$
$$= \{\ldots, (-15.a), (-10.a)(-5.a), (0.a), (5.a), (10.a), (15.a)\}$$
$$= \{\ldots, (a.-15), (a.-10), (a.-5), (a.0), (a.5), (a.10), (a.15), \ldots\}$$
$$= \{a\{\ldots, -15, -10, -5, 0, 10, 5, 15, \ldots\}\}$$
$$= \{an \mid n \in 5\mathbb{Z}\}$$
$$= a5\mathbb{Z}$$

Kemudian, misalkan $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{a + 5\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{a+5\mathbb{Z}, b+5\mathbb{Z}, \ldots\} \quad ; \forall a, b, \ldots \in \mathbb{Z}$$

dengan definisi :

$$+ : (a+5\mathbb{Z}) + (b+5\mathbb{Z}) = (a+b)+5\mathbb{Z} \quad [\text{operasi penjumlahan koset}]$$

Akan ditunjukkan : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ Grup

(i) Tutup

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Tulis, $x = (a_1 + 5\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_1 \in \mathbb{Z}$

$y = (a_2 + 5\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_2 \in \mathbb{Z}$

Note that,
$$x + y = (a_1 + 5\mathbb{Z}) + (a_2 + 5\mathbb{Z})$$
$$= (a_1 + a_2) + 5\mathbb{Z} \quad [\text{Definisi } +]$$
$$= (a_1 + a_2) + 5\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \quad [a_1, a_2 \in \text{Grup } \mathbb{Z}]$$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 11 Nov 20..

(ii) Assosiatif.

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Tulis $x = (a_1 + 5\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_1 \in \mathbb{Z}$

$y = (a_2 + 5\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_2 \in \mathbb{Z}$

$z = (a_3 + 5\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_3 \in \mathbb{Z}$

Note that,

$$
\begin{aligned}
x + (y+z) &= (a_1+5\mathbb{Z}) + [(a_2+5\mathbb{Z}) + (a_3+5\mathbb{Z})] \\
&= (a_1+5\mathbb{Z}) + [(a_2+a_3) + 5\mathbb{Z}] \\
&= (a_1+(a_2+a_3)) + 5\mathbb{Z} \\
&= ((a_1+a_2)+a_3) + 5\mathbb{Z} \\
&= [(a_1+a_2)+5\mathbb{Z}] + (a_3+5\mathbb{Z}) \\
&= [(a_1+5\mathbb{Z}) + (a_2+5\mathbb{Z})] + (a_3+5\mathbb{Z}) \\
&= (x+y) + z
\end{aligned}
$$

(iii) $\exists$ identitas.

Pilih $x = (0 + 5\mathbb{Z})$

Ambil sebarang $y \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Tulis, $y = (a_1 + 5\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_1 \in \mathbb{Z}$

Note that,

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow x + y &= (0+5\mathbb{Z}) + (a_1+5\mathbb{Z}) \\
&= (0+a_1) + 5\mathbb{Z} \\
&= (a_1 + 5\mathbb{Z}) = y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow y + x &= (a_1+5\mathbb{Z}) + (0+5\mathbb{Z}) \\
&= (a_1+0) + 5\mathbb{Z} \\
&= (a_1 + 5\mathbb{Z}) = y
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $\exists$ identitas terbukti

(iv) $\exists$ invers

Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Tulis $x = (a_1 + 5\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_1 \in \mathbb{Z}$.

Pilih $y = (-a_1 + 5\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ u/ suatu $-a_1 \in \mathbb{Z}$.

Note that, $x + y = (a_1+5\mathbb{Z}) + (-a_1+5\mathbb{Z}) = [(a_1-a_1)+5\mathbb{Z}] = (0+5\mathbb{Z})$

dan $y + x = (-a_1+5\mathbb{Z}) + (a_1+5\mathbb{Z}) = [(-a_1+a_1)+5\mathbb{Z}] = (0+5\mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ $\exists$ invers terbukti.

Jadi, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ Grup.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 11 Nov 2020

Akan ditunjukkan: $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ Grup Abelian

Karena $(\mathbb{Z},+)$ Grup Abelian, maka jelas bahwa:

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Tulis, $x = (a_1 + 5\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_1 \in \mathbb{Z}$

$y = (a_2 + 5\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_2 \in \mathbb{Z}$

Note that,
$$\begin{aligned} x+y &= (a_1+5\mathbb{Z}) + (a_2+5\mathbb{Z}) \\ &= (a_1+a_2) + 5\mathbb{Z} && [\text{Definisi } +] \\ &= (a_2+a_1) + 5\mathbb{Z} && [a,b \in (\mathbb{Z},+)] \\ &= (a_2+5\mathbb{Z}) + (a_1+5\mathbb{Z}) \\ &= y + x. \end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ merupakan Grup Abelian terhadap operasi penjumlahan koset.

Selanjutnya, karena dari sebelumnya diperoleh bahwa:

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modul.
- $5\mathbb{Z}$ submodul dari Modul $\mathbb{Z}$. [Karena $5\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, sekaligun dari soal]
- $\mathbb{Z}$ ring dengan elemen/unsur kesatuan. [Krn $\exists\, 1 \in \mathbb{Z} \ni 1.a = a.1 = a \,;\, \forall a \in \mathbb{Z}$]

Maka menurut Teorema Modul Faktor:

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modul yang didefinisikan (operasi penggandaan koset)

• : $r(a+5\mathbb{Z}) = (ra) + 5\mathbb{Z}$ $\forall r \in \mathbb{Z}$, $a+5\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

disebut sebagai modul faktor.

$\therefore$ $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ adalah modul faktor. $\boxtimes$

Imanuel AS / 181114008 Imanuel

Makassar, 11 Nov 2020

(2.) $2\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$ - modul ; $N = 6\mathbb{Z}$ submodul di $\mathbb{Z}$.

Penyelesaian :

Modul — Ring

•) Diketahui : $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ - modul

$N = 6\mathbb{Z}$ submodul di $\mathbb{Z}$

Submodul

•) Diketahui pula $(\mathbb{Z}, +)$ adalah Grup Abelian karena memenuhi sifat tutup, assosiatif, $\exists$ identitas , $\exists$ invers dan $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

•) Akan ditunjukkan : $(6\mathbb{Z}, +)$ subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$

(i) $(6\mathbb{Z}, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +)$

Jadi, $6\mathbb{Z}$ komplex dari $\mathbb{Z}$.

(ii) $6\mathbb{Z} \neq \phi$ karena $\exists\ 30 \in 6\mathbb{Z}$.

Jadi, $6\mathbb{Z}$ komplex tidak kosong dari $\mathbb{Z}$.

(iii) $(6\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup terhadap operasi yang sama dalam $(\mathbb{Z}, +)$

[obvius]

Jadi, $(6\mathbb{Z}, +)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$ .... (*)

Imanuel AS / 1811141008 [illegible] Makassar, 11 Nov 2020

Karena dari (*) diketahui $6\mathbb{Z}$ subgrup Abelian dari Grup $\mathbb{Z}$.
Maka $6\mathbb{Z}$ merupakan Grup Abelian
dan $6\mathbb{Z}$ merupakan subgrup normal terhadap $\mathbb{Z}$,
yakni berlaku :

$$\underbrace{6\mathbb{Z}.a}_{\boxed{\text{Koset kanan}}} = \underbrace{a.6\mathbb{Z}}_{\boxed{\text{Koset kiri}}} \quad ; \forall a \in \mathbb{Z}$$

dimana,

$$6\mathbb{Z}.a = \{ n.a \mid n \in 6\mathbb{Z} \}$$

dan

$$a.6\mathbb{Z} = \{ a.n \mid n \in 6\mathbb{Z} \}$$

Kemudian, misalkan $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{ a+6\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z} \}$

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{ a+6\mathbb{Z}, b+6\mathbb{Z}, \dots \} \quad ; \forall a, b, \dots \in \mathbb{Z}$$

dengan definisi :

$$+ : (a+6\mathbb{Z}) + (b+6\mathbb{Z}) = (a+b)+6\mathbb{Z} \quad \text{[operasi penjumlahan koset]}$$

Akan ditunjukkan: $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ Grup

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Tulis, $x = (a_1 + 6\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_1 \in \mathbb{Z}$
$y = (a_2 + 6\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_2 \in \mathbb{Z}$
$z = (a_3 + 6\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_3 \in \mathbb{Z}$

(i) Tutup,
Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
Note that, $x + y = (a_1 + 6\mathbb{Z}) + (a_2 + 6\mathbb{Z})$
$= (a_1 + a_2) + 6\mathbb{Z}$ [Definisi +]
$= (a_1 + a_2) + 6\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ [$a_1, a_2 \in$ Grup $6\mathbb{Z}$]

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel Makassar, 11 Nove 2020

(ii) Assosiatif

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Note that,

$$
\begin{aligned}
x + (y+z) &= (a_1 + 6\mathbb{Z}) + [(a_2 + 6\mathbb{Z}) + (a_3 + 6\mathbb{Z})] \\
&= (a_1 + 6\mathbb{Z}) + [(a_2 + a_3) + 6\mathbb{Z}] \\
&= (a_1 + (a_2 + a_3)) + 6\mathbb{Z} \\
&= ((a_1 + a_2) + a_3) + 6\mathbb{Z} \\
&= [(a_1 + a_2) + 6\mathbb{Z}] + (a_3 + 6\mathbb{Z}) \\
&= [(a_1 + 6\mathbb{Z}) + (a_2 + 6\mathbb{Z})] + (a_3 + 6\mathbb{Z}) \\
&= (x + y) + z
\end{aligned}
$$

(iii) $\exists$ Identitas

Pilih $x = (0 + 6\mathbb{Z})$

Ambil sebarang $y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Tulis, $y = (a_1 + 6\mathbb{Z})$ u/suatu $a_1 \in \mathbb{Z}$

Note that,

$$
\left.
\begin{aligned}
\Rightarrow x + y &= (0 + 6\mathbb{Z}) + (a_1 + 6\mathbb{Z}) \\
&= (0 + a_1) + 6\mathbb{Z} \\
&= (a_1 + 6\mathbb{Z}) \\
&= y \\
\Rightarrow y + x &= (a_1 + 6\mathbb{Z}) + (0 + 6\mathbb{Z}) \\
&= (a_1 + 0) + 6\mathbb{Z} \\
&= (a_1 + 6\mathbb{Z}) \\
&= y
\end{aligned}
\right] \therefore \exists \text{ identitas terbukti.}
$$

(iv) $\exists$ Invers

Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Tulis $x = (a_1 + 6\mathbb{Z})$ u/suatu $a_1 \in \mathbb{Z}$.

Pilih $y = (-a_1 + 6\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ u/suatu $-a_1 \in \mathbb{Z}$.

Note that,

$\Rightarrow x + y = (a_1 + 6\mathbb{Z}) + (-a_1 + 6\mathbb{Z}) = [(a_1 - a_1) + 6\mathbb{Z}] = (0 + 6\mathbb{Z})$

$\Rightarrow y + x = (-a_1 + 6\mathbb{Z}) + (a_1 + 6\mathbb{Z}) = [(-a_1 + a_1) + 6\mathbb{Z}] = (0 + 6\mathbb{Z})$

$\therefore \exists$ Invers terbukti.

Jadi, $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ Grup

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 11 Novem 2020

1 Akan ditunjukkan: $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ Grup Abelian.

Karena $(\mathbb{Z},+)$ Grup Abelian, maka jelas bahwa:

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Tulis, $x = (a_1 + 6\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_1 \in \mathbb{Z}$.

$y = (a_2 + 6\mathbb{Z})$ u/ suatu $a_2 \in \mathbb{Z}$.

Note that,
$$\begin{aligned} x+y &= (a_1 + 6\mathbb{Z}) + (a_2 + 6\mathbb{Z}) \\ &= (a_1 + a_2) + 6\mathbb{Z} && [\text{Definisi } +] \\ &= (a_2 + a_1) + 6\mathbb{Z} && [a,b \in (\mathbb{Z},+)] \\ &= (a_2 + 6\mathbb{Z}) + (a_1 + 6\mathbb{Z}) \\ &= y + x \end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ merupakan Grup Abelian terhadap operasi penjumlahan koset.

Selanjutnya, karena dari sebelumnya diperoleh bahwa:

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modul.
- $6\mathbb{Z}$ submodul dari Modul $\mathbb{Z}$. [Karena $6\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, sekaligus dari goal]
- $\mathbb{Z}$ ring dengan elemen / unsur kesatuan. [Krn $\exists\, 1 \in \mathbb{Z} \ni 1.a = a.1 = a \; ; \forall a \in \mathbb{Z}$].

Maka menurut Teorema Modul Faktor:

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modul yang didefinisikan (operasi penggandaan koset)

- : $r(a + 6\mathbb{Z}) = (ra) + 6\mathbb{Z} \quad \forall r \in \mathbb{Z}$, $a + 6\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

disebut sebagai modul faktor.

$\therefore$ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ adalah modul faktor. ▨

Imanuel AS / 1811141008 ~~Imanuel~~ Makassar, 11 November 20..

(3.) $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}$-modul ; $N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ submodul di $\mathbb{Z}_{12}$.

<u>Penyelesaian</u> :

$\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

$N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$

$\Rightarrow N \subseteq \mathbb{Z}_{12}$

Modul Ring

$\Rightarrow$ Diketahui : $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}$ - modul

$N = \underbrace{\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}}_{\text{Submodul}}$ submodul di $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Akan ditunjukkan: $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ adalah Grup Abelian

Diingat kembali bahwa untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{12}$,
$\bar{a} = \bar{b}$ jika dan hanya jika $a - b = k.n$ w/ suatu $k \in \mathbb{Z}$

Selanjutnya didefinisikan operasi penjumlahan $+_{12}$ dengan definisi:

$$\bar{a} +_{12} \bar{b} \overset{def.}{=} \overline{a+b} \quad ; \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{12}$$

Berdasarkan pendefinisian operasi $+_{12}$ tersebut,
diperoleh bahwa operasi $+_{12}$ merupakan operasi biner.
Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_{12}$ merupakan grup.

Perhatikan bahwa,

1.) Tutup. Krn $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{12} \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \in \mathbb{Z}_{12}$.

2.) Assosiatif.

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_{12}$, berlaku

$$\begin{aligned}(\bar{a} +_{12} \bar{b}) +_{12} \bar{c} &= \overline{a+b} +_{12} c \\ &= \overline{(a+b)+c} \\ &= \overline{a+(b+c)} \\ &= \bar{a} +_{12} \overline{b+c} \\ &= \bar{a} +_{12} (\bar{b} +_{12} \bar{c})\end{aligned}$$

Inanuel AS / 1811141008 Aktif Formal

Makassar, 11 Nov 2020

3.) $\exists$ Identitas

Ambil sebarang $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{12}$

Pilih $\bar{0} \in \mathbb{Z}_{12}$

Berlaku,

- $\bar{0} +_{12} \bar{a} = \overline{0+a}$
$= \bar{a}$
- $\bar{a} +_{12} \bar{0} = \overline{a+0}$
$= \bar{a}$

4.) $\exists$ Invers

Ambil sebarang $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{12}$

Pilih $\overline{-a} \in \mathbb{Z}_{12}$

Berlaku,

- $\bar{a} +_{12} \overline{-a} = \overline{a+(-a)}$
$= \bar{0}$
- $\overline{-a} +_{12} \bar{a} = \overline{-a+a}$
$= \bar{0}$

$\therefore (\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ Grup.

- Akan ditunjukkan : $(N, +_{12})$ Subgrup dari $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$.

(i) $(N, +_{12}) \subseteq (\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$

Jadi, N komplex dari $\mathbb{Z}_{12}$.

(ii) $N \neq \phi$ karena $\exists\ \bar{4} \in N$.

Jadi, N komplex tidak kosong dari $\mathbb{Z}_{12}$.

(iii) $(N, +_{12})$ merupakan grup

- Tutup, krn $\forall \bar{a}, \bar{b} \in N \Rightarrow \bar{a} +_{12} \bar{b} = \overline{a+b} \in N$
- Assosiatif, krn $\forall a, b, c \in N$ berlaku:

$$\begin{aligned} a +_{12} (b +_{12} c) &= a +_{12} (\overline{b+c}) \\ &= \overline{a+(b+c)} \\ &= \overline{(a+b)+c} \\ &= (\overline{a+b}) +_{12} \bar{c} \\ &= (a +_{12} b) +_{12} \bar{c} \end{aligned}$$

Imanuel AS / 1811141008 Aktif Tarunan   Makassar, 11 Novem 20..

•) $\exists$ Identitas, karena

Perhatikan tabel cayley dibawah ini

$+_{12}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$

setiap elemen di $N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ mempunyai masing-masing identitas yang berbeda.

Misalnya, $\bar{8}$ memiliki invers yakni $\bar{4}$
karena $\bar{8} + \bar{4} = \bar{0}$

dll...

•) $\exists$ Invers, karena

Perhatikan tabel cayley dibawah ini

$+_{12}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$

setiap elemen di $N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ mempunyai masing-masing invers yang berbeda.

Misalnya, $\bar{8}$ memiliki invers yakni $\bar{8}$.
karena $\bar{8} + \bar{8} = \bar{4}$.

Jadi, $(N, +_{12})$ Grup.

$\therefore$ $(N, +_{12})$ subgrup dari $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$. ....(*)

Imanuel AS / 181114108 ~~Imanuel~~ Minggu, 11 Nov 2020

Karena dari (*) diketahui N subgrup abelian dari Grup $\mathbb{Z}_{12}$.
Maka N merupakan Grup Abelian,
dan N merupakan subgrup normal terhadap $\mathbb{Z}_{12}$,
yakni berlaku :

$$\underbrace{N \cdot \bar{a}}_{\boxed{\text{koset kanan}}} = \underbrace{\bar{a} \cdot N}_{\boxed{\text{koset kiri}}} \quad ; \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_{12}$$

dimana, $N \cdot \bar{a} = \{ n \cdot \bar{a} \mid n \in N \}$
dan
$\bar{a} \cdot N = \{ \bar{a} \cdot n \mid n \in N \}$

kemudian, misalkan $\mathbb{Z}_{12}/N = \{ \bar{a} +_{12} N \mid \bar{a} \in \mathbb{Z}_{12} \}$

$$\mathbb{Z}_{12}/N = \{ \bar{a} +_{12} N, \bar{b} +_{12} N, \bar{c} +_{12} N, \dots \} ; \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots \in \mathbb{Z}_{12}$$

dengan definisi :

$+_{12}$: $(\bar{a} +_{12} N) + (\bar{b} +_{12} N) = (\bar{a} +_{12} \bar{b}) +_{12} N$ [operasi penjumlahan koset]

Akan ditunjukkan : $(\mathbb{Z}_{12}/N, +_{12})$ Grup

Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_{12}/N$

Tulis, $\bar{x} = \bar{a}_1 +_{12} N$ u/ suatu $a_1 \in \mathbb{Z}_{12}$

$\bar{y} = \bar{a}_2 +_{12} N$ u/ suatu $a_2 \in \mathbb{Z}_{12}$

$\bar{z} = \bar{a}_3 +_{12} N$ u/ suatu $a_3 \in \mathbb{Z}_{12}$.

(i) Tutup.

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}_{12}/N$

Perhatikan, $x +_{12} y = (\bar{a}_1 +_{12} N) +_{12} (\bar{a}_2 +_{12} N)$

$= (\bar{a}_1 +_{12} \bar{a}_2) +_{12} N$ [Definisi penjumlahan koset]

$= (\bar{a}_1 +_{12} \bar{a}_2) +_{12} N \in \mathbb{Z}_{12}/N$ [$a_1, a_2 \in$ Grup $\mathbb{Z}_{12}$]

Imanuel AS/ 1811141008 ~~HR~~ Manuel

Makassar, 11 November 2020

(ii) Assosiatif

Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_{12}/N$

Note that,

$$\begin{aligned}
\bar{x} +_{12} (\bar{y} +_{12} \bar{z}) &= (\bar{a}_1 +_{12} N) +_{12} [(a_2 +_{12} N) +_{12} (a_3 +_{12} N)] \\
&= (\bar{a}_1 +_{12} N) +_{12} [(\bar{a}_2 +_{12} \bar{a}_3) +_{12} N] \\
&= (\bar{a}_1 +_{12} (\bar{a}_2 +_{12} \bar{a}_3)) +_{12} N \\
&= ((\bar{a}_1 +_{12} \bar{a}_2) +_{12} \bar{a}_3) +_{12} N \\
&= [(\bar{a}_1 +_{12} \bar{a}_2) +_{12} N] +_{12} (\bar{a}_3 +_{12} N) \\
&= [(\bar{a}_1 +_{12} N) +_{12} (\bar{a}_2 +_{12} N)] +_{12} (\bar{a}_3 +_{12} N) \\
&= (\bar{x} +_{12} \bar{y}) +_{12} \bar{z}
\end{aligned}$$

(operasi penjumlahan koset)

$+_{12}$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$
$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$
$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$
$\bar{2}+N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$
$\bar{3}+N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$
$\bar{4}+N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$
$\bar{5}+N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$
$\bar{6}+N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$
$\bar{7}+N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$
$\bar{8}+N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$
$\bar{9}+N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$
$\bar{10}+N$	$\bar{10}+_{12}N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$
$\bar{11}+N$	$\bar{11}+_{12}N$	$\bar{0}+_{12}N$	$\bar{1}+_{12}N$	$\bar{2}+_{12}N$	$\bar{3}+_{12}N$	$\bar{4}+_{12}N$	$\bar{5}+_{12}N$	$\bar{6}+_{12}N$	$\bar{7}+_{12}N$	$\bar{8}+_{12}N$	$\bar{9}+_{12}N$	$\bar{10}+_{12}N$

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 11 Nov 202

(iii) $\exists$ Identitas

Mudah ditunjukkan bahwa untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{12}/N$ mememiliki identitas.

Dengan menggunakan tabel cayley berdasarkan operasi penjumlahan koset di samping, diperoleh.

Perhatikan bahwa:

$\Rightarrow$ u/ $x = \bar{3} +_{12} N$ memiliki identitas, yakni $\bar{0} +_{12} N$

karena $(\bar{3} +_{12} N) +_{12} (\bar{0} +_{12} N) = (\bar{3} +_{12} \bar{0}) +_{12} N$

$= (\overline{3+0}) +_{12} N$

$= \bar{3} +_{12} N$

$\Rightarrow$ dll...

(iv) $\exists$ Invers.

Mudah ditunjukkan bahwa untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{12}/N$ memiliki invers.

Dengan menggunakan tabel cayley berdasarkan operasi penjumlahan koset di samping, diperoleh

Perhatikan bahwa:

$\Rightarrow$ u/ $x = \bar{3} +_{12} N$ memiliki invers, yakni $\bar{9} +_{12} N$

karena $(\bar{3} +_{12} N) +_{12} (\bar{9} +_{12} N) = (\bar{3} +_{12} \bar{9}) +_{12} N$

$= (\overline{3+9}) +_{12} N$

$= \bar{0} +_{12} N$.

$\Rightarrow$ dll ...

$\therefore (\mathbb{Z}_{12}/N, +_{12})$ Grup.

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 1811141008 [signature] Makassar, 11 Mei 20..

Akan ditunjukkan: $(\mathbb{Z}_{12}/N)$ Grup Abelian.

Karena $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ Grup Abelian maka jelas bahwa:

Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{12}/N$

Tulis $x = (\bar{a}_1 +_{12} N)$ u/suatu $\bar{a}_1 \in \mathbb{Z}_{12}$

$y = (\bar{a}_2 +_{12} N)$ u/suatu $\bar{a}_2 \in \mathbb{Z}_{12}$

Note that, $x +_{12} y = (\bar{a}_1 +_{12} N) +_{12} (\bar{a}_2 +_{12} N)$

$= (\bar{a}_1 +_{12} \bar{a}_2) +_{12} N$ [Penjumlahan Koset]

$= (\overline{a_1 + a_2}) +_{12} N$ [Penjumlahan modulo]

$= (\overline{a_2 + a_1}) +_{12} N$ [Krn $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in$ Grup $\mathbb{Z}_{12}$]

$= (\bar{a}_2 +_{12} \bar{a}_1) +_{12} N$ [Definisi penjumlahan modulo]

$= (\bar{a}_2 +_{12} N) +_{12} (a_1 +_{12} N)$ [Definisi penjumlahan koset]

$= y +_{12} x$

Jadi, $\mathbb{Z}_{12}/N$ merupakan Grup Abelian terhadap operasi penjumlahan koset.

Selanjutnya, karena dari sebelumnya diperoleh bahwa:

- $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}$-modul
- $N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ submodul dari Modul $\mathbb{Z}_{12}$ [Krn $N \subseteq \mathbb{Z}_{12}$, sekaligus dr soal]
- $\mathbb{Z}$ ring dengan elemen/unsur kesatuan. [Krn $\exists 1 \in \mathbb{Z} \ni 1.a = a.1 = a, \forall a \in \mathbb{Z}$]

Maka menurut Teorema Modul Faktor:

$\mathbb{Z}_{12}/N$, $\mathbb{Z}$-modul yang didefinisikan. (operasi penggandaan koset)

- : $r(a +_{12} N) = (ra) +_{12} N$, $\forall r \in \mathbb{Z}$, $a + N \in \mathbb{Z}_{12}/N$

disebut sebagai modul faktor.

$\therefore$ $\mathbb{Z}_{12}/N$ adalah modul Faktor.

[signature]

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel Makassar, 11 Nov 2020

(4.) $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}$-modul ; $N = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$ Submodul

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$

$N = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$

$\Rightarrow N \subseteq \mathbb{Z}_{15}$

Akan ditunjukkan : N Submodul dari $\mathbb{Z}_{15}$

(1.) $\exists\, \bar{0} \in N$

$\therefore$ Syarat (1) Terpenuhi.

(2) Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in N$.

Maka berlaku $(\bar{x} -_{15} \bar{y}) = (\overline{x-y}) \in N$

$\therefore$ Syarat (2) terpenuhi.

(3) Ambil sebarang $\bar{x} \in N$

Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$

Maka berlaku, $r.\bar{x} = \overline{rx} \in N$

$\therefore$ Syarat (3) terpenuhi.

$\therefore$ Karena memenuhi ketiga syarat pada Teorema 1 Submodul, maka

$N = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$ Submodul dari modul $\mathbb{Z}_{15}$.

Akan ditunjukkan : $\mathbb{Z}_{15}/N$ Modul Faktor.

Karena $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}$-modul, N submodul dari $\mathbb{Z}_{15}$,

dan $\mathbb{Z}$ ring dengan unsur kesatuan 1, maka

$\mathbb{Z}_{15}/N$ $\mathbb{Z}$-modul terhadap operasi penggandaan koset

yakni $r(\bar{a} +_{15} N) = (r\bar{a}) +_{15} N$, $\forall r \in \mathbb{Z}$

dan $(\bar{a} +_{15} N) \in \mathbb{Z}_{15}/N$.

Maka menurut Teorema Modul Faktor,

$\mathbb{Z}_{15}/N$ disebut Modul Faktor.

Inanuel AS / 181114008

Makassar, 11 November 2020

(5.) $\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}$ -modul ; $N = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$ submodul.

Penyelesaian:

$\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}\}$

$N = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$

$\Rightarrow N \subseteq \mathbb{Z}_{21}$

Akan ditunjukkan: N submodul dari $\mathbb{Z}_{21}$.

(1) $\exists\, \bar{0} \in N$

∴ Syarat (1) terpenuhi.

(2) Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in N$

Maka berlaku, $\bar{x} -_{21} \bar{y} = \overline{x-y} \in N$

∴ Syarat (2) terpenuhi.

(3) Ambil sebarang $\bar{x} \in N$

Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$

maka berlaku $r.\bar{x} = \overline{r.x} \in N$

∴ Syarat (3) terpenuhi.

∴ Karena memenuhi ketiga syarat pada Teorema 1 Submodul, maka $N = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$ submodul dari modul $\mathbb{Z}_{21}$.

Akan ditunjukkan: $\mathbb{Z}_{21}/N$ Modul Faktor.

Karena $\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}$-modul, N submodul dari $\mathbb{Z}_{21}$, dan $\mathbb{Z}$ ring dengan unsur kesatuan 1, maka $\mathbb{Z}_{21}/N$ $\mathbb{Z}$-modul terhadap operasi penggandaan koset yakni $r(\bar{a} +_{21} N) = (r\bar{a}) +_{21} N$; $\forall r \in \mathbb{Z}$.. dan $(\bar{a} +_{21} N) \in \mathbb{Z}_{21}/N$.

Maka menurut Teorema Modul Fakter

$\mathbb{Z}_{21}/N$ disebut Modul Faktor. ▨

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 11 November 20..

(6.) $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}$-modul ; $N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}, \overline{24}\}$

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}\}$

$N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}, \overline{24} = \bar{4}\}$

Sama jika dimodulo 20

$\Rightarrow N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\}$

$\Rightarrow N \subseteq \mathbb{Z}_{20}$

Akan ditunjukkan : N submodul dari $\mathbb{Z}_{20}$.

(1) $\exists\, \bar{0} \in N$

$\therefore$ Syarat (1) terpenuhi.

(2) Ambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in N$.

Maka berlaku $(\bar{x} -_{20} \bar{y}) = (\overline{x-y}) \in N$

$\therefore$ Syarat (2) terpenuhi.

(3) Ambil sebarang $\bar{x} \in N$.

Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$.

Maka berlaku $r \cdot \bar{x} = \overline{r \cdot x} \in N$

$\therefore$ Syarat (3) terpenuhi.

$\therefore$ Karena memenuhi ketiga syarat pada Teorema 1 Submodul, maka

$N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\}$ submodul dari Modul $\mathbb{Z}_{20}$.

Akan ditunjukkan : $\mathbb{Z}_{20}/N$ Modul Faktor.

Karena $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}$-modul, N submodul dari $\mathbb{Z}_{20}$, dan $\mathbb{Z}$ ring dengan unsur kesatuan 1, maka $\mathbb{Z}_{20}/N$ $\mathbb{Z}$-modul terhadap operasi penggandaan koset yakni $r(\bar{a} +_{20} N) = (r\bar{a}) +_{20} N$; $\forall r \in \mathbb{Z}$ dan $(\bar{a} +_{20} N) \in \mathbb{Z}_{20}/N$.

Maka menurut Teorema Modul Faktor,

$\mathbb{Z}_{20}/N$ disebut Modul Faktor.

$\mathbb{M}$