Makassar, 10 September 2020

Analisis Real II / Pertemuan ke-3 / Tugas Individu

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Tugas Individu

(I.) Misalnya kita akan membuktikan $\lim_{x \to 1} x^2 + 2x + 1 = 4$

Berarti kita akan menunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(x^2+2x+1)-4| < \varepsilon$

(a) Misalkan dibatasi $\delta \leq 1$

↳ Mengapa boleh dibatasi $\delta \leq 1$?

(b) Untuk $\delta = 1$, berapa minimal $\varepsilon > 0$ agar memenuhi:

$0 < |x-1| < 1 \Rightarrow |x^2+2x+1-4| < \varepsilon$

(c) Untuk nilai ε yang kurang dari nilai minimal ε yang diperoleh dibagian (b), carilah nilai δ yang berpadanan agar berlaku :

$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(x^2+2x+1)-4| < \varepsilon$

(d) Tulislah nilai δ dalam format berikut :

$$\delta = \begin{cases} \dots & , \varepsilon \geq \dots \\ \dots & , \varepsilon < \dots \end{cases}$$

Lalu tunjukkan untuk δ tsb, berlaku :

$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x^2+2x+1-4| < \varepsilon$

Makassar, 10 Septa 2020

Imanuel AS
1811141008

Penyelesaian:

a) Boleh dibatasi $\delta \leq 1$ karena sesuai definisi hal 3-, $\delta > 0$.
Pemilihan $\delta \leq 1$ juga sangat disarankan, yakni khususnya pada $\delta = 1$, karena agar supaya epsilon yang didapat nantinya tidak terlalu besar nilainya, selama itu δ yang dicari adalah sekecil mungkin dengan syarat $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{N}$, dan karena satu-satunya bilangan asli yang terkecil adalah 1, maka itu adalah pemilihan δ yg terbaik.

b.) Analisis Pendahuluan

Adb. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(x^2+2x+1)-4| < \varepsilon$

Mencari nilai δ:

(i) $\delta = 1$

Note that,

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1$$
$$-1+4 < x-1+4 < 1+4$$
$$3 < x+3 < 5$$
$$|x+3| < 5$$

Selanjutnya,

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |(x^2+2x+1)-4| = |x^2+2x-3|$$
$$= |(x+3)\cdot(x-1)|$$
$$= |x+3|\cdot|x-1|$$
$$= |x-1|\cdot|x+3|$$
$$< 1 \cdot (5)$$
$$< 5 = \varepsilon$$

Jadi, untuk $\delta = 1$, nilai minimal epsilon agar memenuhi:
$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(x^2+2x+1)-4| < \varepsilon$ adalah $\varepsilon \geq 5$

Imanuel AS
1811141008

Mabgan 10 Sept 2020

(c) (2) $\delta = \ldots ?$ (untuk $\varepsilon < 5$)

Note that,

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |(x^2+2x+1)-4| = |x^2+2x-3|$$
$$= |(x-1)\cdot(x+3)|$$
$$= |x-1| \cdot |x+3|$$
$$< \delta \cdot (5) = \varepsilon$$

Jadi, untuk nilai ε yang kurang dari nilai minimal ε yang diperoleh dibagian (b), nilai δ yang berpadanan agar berlaku:
$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(x^2+2x+1)-4| < \varepsilon$ adalah $\delta = \varepsilon/5$ untuk $\varepsilon < 5$.

(d). Dari (1) dan (2) diatas, diperoleh:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{, khusus untuk } \varepsilon \geq 5 \\ \varepsilon/5 & \text{, khusus untuk } \varepsilon < 5. \end{cases}$$

Bukti Formal:

Diambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Dipilih $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$

Maka $\forall$ $0 < |x-1| < \delta$ diperoleh

$$|(x^2+2x+1)-4| = |x^2+2x-3|$$
$$= |(x-1)\cdot(x+3)|$$
$$= |x-1| \cdot |x+3|$$
$$\leq \delta \cdot (5) = \varepsilon$$

$\therefore \lim_{x \to 1} x^2+2x+1 = 4$ .. (Terbukti) ▨

Dipindai dengan CamScanner

Makassar, 10 Septe 2020

Catatan :

•) $u/\varepsilon = 5 \Rightarrow \delta = 1$ (krn $\varepsilon \geq 5$)

Note that,

$$
\begin{aligned}
|(x^2+2x+1)-4| &= |x^2+2x-3| \\
&= |(x-1)(x+3)| \\
&= |x-1| \cdot |x+3| \\
&< \delta \cdot (5) \\
&< (1) \cdot 5 \\
&< 5 = \varepsilon \quad \text{(Memenuhi)}
\end{aligned}
$$

•) $u/\varepsilon = 10 \Rightarrow \delta = 1$ (krn $\varepsilon \geq 5$)

Note that,

$$
\begin{aligned}
|(x^2+2x+1)-4| &= |x^2+2x-3| \\
&= |(x-1)(x+3)| \\
&= |x-1| \cdot |x+3| \\
&< \delta \, (5) \\
&< (1) \cdot 5 \\
&< 5 \\
&< 10 = \varepsilon \quad \text{(Memenuhi)}
\end{aligned}
$$

•) $u/\varepsilon = 3 \Rightarrow \delta = \varepsilon/5 = 3/5$ (krn $\varepsilon < 5$)

Note that,

$$
\begin{aligned}
|(x^2+2x+1)-4| &= |x^2+2x-3| \\
&= |(x-1).(x+3)| \\
&= |x-1| \cdot |x+3| \\
&< \delta \cdot (5) \\
&< 3/5 \cdot 5 \\
&< 3 = \varepsilon \quad \text{(Memenuhi)}
\end{aligned}
$$

Imanuel AS
1811141008

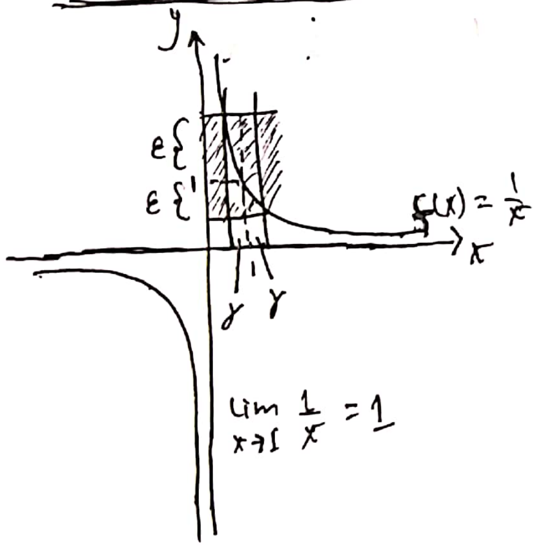
Makassar, 10 September 2020

(II) Buktikan $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$

(Hati-hati membatasi nilai δ)

Penyelesaian:

Analisis Pendahuluan:



Berdasarkan gambar disamping, kita harus mencari δ sedemikian rupa sehingga

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

Selanjutnya

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \left|1 - \frac{x}{x}\right| = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{|1|} \cdot |x-1|$$

Karena faktor $\frac{1}{|x|}$ menyulitkan, khususnya jika x dekat 0. Maka faktor ini dapat dibatasi jika kita dapat menjauhkan x dari 0.

Untuk maksud itu, perhatikan bahwa:

$$|1| = |1 - x + x| \leq |1-x| + |x|$$

sehingga

$$|x| \geq |1| - |x-1|$$

Jadi, jika dipilih $\delta \leq |1|/2$, maka kita berhasil dalam membuat $|x| \geq |1|/2$. Akhirnya, jika kita mensyaratkan $\delta \leq \varepsilon \cdot (1)^2/2$, maka

$$\frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{|1|} \cdot |x-1| < \frac{1}{|1|/2} \cdot \frac{1}{|1|} \cdot \frac{\varepsilon \cdot (1)^2}{2} = \varepsilon$$

Makassar, 10 September 2020

Imanuel AS

1811141008

Bukti Formal :

Diambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Dipilih $\delta = \min \left\{ |1|/2 \, , \, \varepsilon \cdot \frac{|1|^2}{2} \right\}$

Maka u/ $0 < |x-1| < \delta$ diperoleh

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1-x}{x} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{x} \right| \cdot |1-x|$$

$$= \frac{1}{|x|} \cdot |x-1|$$

$$< \frac{1}{1/2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot (1)^2}{2} = \varepsilon$$

$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$. (Terbukti) $\blacksquare$