Makassar, 6 Oktober 2020

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan VI —

(catatan)

Imanuel AS

181114008

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke-6 / Catatan

Makassar, 6 Oktober 2

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan Pertemuan ke - 6

Subgelanggang dan Ideal

$\boxed{D}$

Misal R ring subhimpunan $S \subseteq R$
$S \neq \phi$ disebut subring / subgelanggang
dari R. Jika S membentuk ring,
dengan operasi yang sama dengan di R.

$\boxed{E}$

(1) $\mathbb{R}$ ring, $\mathbb{Z}$ ring, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$
↳ Subring dari $\mathbb{R}$

(2) $\mathbb{Q}$ ring, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
↳ Subring dari $\mathbb{R}$

(3) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
↳ subring dari $\mathbb{Q}$

(4) $2\mathbb{Z} = \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ← Ring
$2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$
↳ subring dari $\mathbb{Z}$

Imanuel AS / 181114008

R ring

$\boxed{S \text{ Subring } R}$ → $S \neq \emptyset$
→ $S \subseteq R$
→ S Ring → $(S,+)$ Grup Abel
→ $(S,\times)$ semigrup
→ $(S,+,\times)$ distributif

$\boxed{T_1}$

Jika R ring, himpunan $S \neq \emptyset$, $S \subseteq R$ maka S subring R jika dan hanya jika

(1) $\forall a,b \in S \Rightarrow a+(-b) \in S$ atau $a-b \in S$

(2) $\forall a,b \in S \Rightarrow ab \in S$

Bukti

Bukti dari kiri ke kanan

$\Rightarrow$ Jika S subring dari R jelas (i) dan (ii) dipenuhi

Bukti dari kanan ke kiri

$\Leftarrow$ Misalkan S memenuhi (i) dan (ii) akan ditunjukkan S subring dari R. Dengan kata lain, akan ditunjukkan S membentuk ring, terhadap operasi yang sama di R.

Untuk itu, dari (i) yaitu $\forall x,y \in S$ maka $x-y \in S$ menunjukkan bahwa $(S,+)$ merupakan subgrup dari $(R,+)$.
Jelas $(S,+)$ juga komutatif (kenapa?)
dari (ii) $\forall x,y \in S$, maka $xy \in S$ menunjukkan $(S,\cdot)$ tertutup dan jelas $(S,\cdot)$ juga assosiatif.

Masih perlu ditunjukkan : $\forall x,y,z \in S$, berlaku:
$x(y+z) = xy + xz$ dan $(x+y)z = xz + yz$.
Untuk itu, gunakan pengertian bahwa $S \subseteq R$, sehingga $x,y,z \in R$.
Diketahui R ring sehingga $\forall x,y,z \in S$,
Berlaku $x(y+z) = xy + xz$ dan $(x+y)z = xz + yz$.

Oleh karena itu, $(S,+,\cdot)$ merupakan ring.
Jadi S subring dari R.

manuel AS / 181114008

Makassar, 6 Ok

$\boxed{N}$

R ring

$\boxed{S \text{ subring } R} \to S \neq \phi$, $S \subseteq R$, $\forall a,b \in S \Rightarrow a-b \in S$ dan $ab \in S$

$\boxed{E}$

① Buktikan bahwa

$$\boxed{P = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{Z} \right\}}$$

adalah subring dari $M_2(\mathbb{Z})$

Bukti

(1) Adb. $P \neq \phi$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P$$

$\therefore P \neq \phi$

(2) $P \subseteq M_2(\mathbb{Z})$ [obvius]

(3) Ambil $A, B \in P$ sebarang, tulis:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$$ untuk suatu $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

$$B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & b_1 - b_2 \end{pmatrix} \in P$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix} \in P$$

$\therefore$ P subring $M_2(\mathbb{Z})$

Makassar, 6,

Imanuel AS/181141008

② $n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots\}$ subring dari $\mathbb{Z}$.

$2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$

③ Himpunan bilangan bulat Gauss $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ merupakan subring dari $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ $\boxed{D_2}$

Bukti:

(1) Adb. $\mathbb{Z}[i] \neq \phi$

$x = (2+5i) \in \mathbb{Z}[i]$

$\therefore \mathbb{Z}[i] \neq \phi$

(2) $\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$ [obvius]

Karena $a,b \in \mathbb{Z}$ adalah subset dari $\mathbb{R}$.

(3) Ambil $x,y \in \mathbb{Z}[i]$ sebarang, tulis:

$x = (a_1+b_1i)$ untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$

$y = (a_2+b_2i)$ untuk suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

Note that,

$$
\begin{aligned}
x-y &= (a_1+b_1i)-(a_2+b_2i) \\
&= (a_1+b_1i)+[-(a_2+b_2i)] \\
&= (a_1+b_1i)+(-a_2-b_2i) \\
&= (a_1+(-a_2))+(b_1+(-b_2))i \in \mathbb{Z}[i]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
xy &= (a_1+b_1i)(a_2+b_2i) \\
&= (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i \in \mathbb{Z}[i]
\end{aligned}
$$

$\therefore \mathbb{Z}[i]$ subruang $\mathbb{C}$.

Imanuel AS / 1811141008 ~~Grafik~~ Makassar, 6 Oktober

(4) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ subruang $\mathbb{R}$ $\boxed{D_3}$

Bukti :

(1) Adb. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \neq \phi$

$x = (5 + 7\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\therefore \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \neq \phi$

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$ [obvius]

(3) Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sebarang,

Tulis $x = (a_1 + b_1\sqrt{2})$ untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$

$y = (a_2 + b_2\sqrt{2})$ untuk suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$

Note that,

$$\begin{aligned} x - y &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) - (a_2 + b_2\sqrt{2}) \\ &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) + [-(a_2 + b_2\sqrt{2})] \\ &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (-a_2 + (-b_2)\sqrt{2}) \\ &= (a_1 + (-a_2)) + (b_1 + (-b_2))\sqrt{2} \quad \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= (a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2} \quad \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$\therefore \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ subruang $\mathbb{R}$.

Imanuel AS / 181114008

⑤ Periksa yang mana dari himpunan berikut yang merupakan subring dari $M_2(\mathbb{Z})$

$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z} \right\}$

Penyelesaian :

(1) Adb $P_1 \neq \phi$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5+2 \\ 5+2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \in P_1$$

$\therefore P_1 \neq \phi$

(2) $P_1 \subseteq M_2(\mathbb{Z})$ [obvious]

karena P_1 adalah matriks 2x2 dengan entri-entri bilangan bulat.

(3) Ambil $A, B \in P_1$ sebarang,

Tulis, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1+b_1 \\ a_1+b_1 & b_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & a_2+b_2 \\ a_2+b_2 & b_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

Note that,

$$A - B = \begin{pmatrix} a_1 & a_1+b_1 \\ a_1+b_1 & b_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & a_2+b_2 \\ a_2+b_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & a_1+b_1-(a_2+b_2) \\ a_1+b_1-(a_2+b_2) & b_1 - b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & a_1+b_1-a_2-b_2 \\ a_1+b_1-a_2-b_2 & b_1-b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & (a_1-a_2)+(b_1-b_2) \\ (a_1-a_2)+(b_1-b_2) & b_1-b_2 \end{pmatrix} \in P_1$$

$$A\,B = \begin{pmatrix} a_1 & a_1+b_1 \\ a_1+b_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & a_2+b_2 \\ a_2+b_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 + (a_1+b_1)a_2+b_2 & a_1(a_2+b_2) + (a_1+b_1)b_2 \\ (a_1+b_1)a_2 + b_1(a_2+b_2) & a_1+b_1(a_2+b_2) + b_1 \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 + (a_1a_2+a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2) & a_1a_2+a_1b_2+a_1b_2+b_1b_2 \\ a_1a_2+b_1a_2+b_1a_2+b_1b_2 & (a_1a_2+a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2)+b_1b_2 \end{pmatrix} \notin P_1$$

$\therefore$ Karena $AB \notin P_1$ maka P_1 bukan subring dari $M_2(\mathbb{Z})$.

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 1811141008 ~~[illegible]~~

Makassar, 6 Oktober 2x

$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

Penyelesaian

(1) Adb $P_2 \neq \phi$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7-2 \\ 7-2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in P_2$$

$\therefore P_2 \neq \phi$

(2) $P_2 \subseteq M_2(\mathbb{Z})$ [obvious]

Karena P_2 adalah matriks 2x2 dengan entri-entri bilangan bulat.

(3) Ambil $A, B \in P_2$ sebarang

Tulis, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1-b_1 \\ a_1-b_1 & b_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$

$B = \begin{pmatrix} a_2 & a_2-b_2 \\ a_2-b_2 & b_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

Note that,

$$A - B = \begin{pmatrix} a_1 & a_1-b_1 \\ a_1-b_1 & b_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & a_2-b_2 \\ a_2-b_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & (a_1-b_1)-(a_2-b_2) \\ (a_1-b_1)-(a_2-b_2) & b_1 - b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & (a_1-a_2)-(b_1-b_2) \\ (a_1-a_2)-(b_1-b_2) & b_1 - b_2 \end{pmatrix} \in P_2$$

$$A\,B = \begin{pmatrix} a_1 & a_1-b_1 \\ a_1-b_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & a_2-b_2 \\ a_2-b_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 + [(a_1-b_1)(a_2-b_2)] & a_1(a_2-b_2) + (a_1-b_1)b_2 \\ (a_1-b_1)a_2 + b_1(a_2-b_2) & (a_1-b_1)(a_2-b_2) + b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 + (a_1a_2 - a_1b_2 - b_1a_2 + b_1b_2) & a_1a_2 - a_1b_2 + a_1b_2 - b_1b_2 \\ a_1a_2 - b_1a_2 + b_1a_2 - b_1b_2 & a_1a_2 - \cancel{a_1}b_2 - b_1a_2 + b_1b_2 + b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 + a_1a_2 - a_1b_2 - b_1a_2 + b_1b_2 & a_1a_2 - b_1b_2 \\ a_1a_2 - b_1b_2 & a_1a_2 - a_1b_2 - b_1a_2 + b_1b_2 + b_1b_2 \end{pmatrix} \in P_2$$

$\therefore$ P_2 subring dari $M_2(\mathbb{Z})$.

Imanuel AS/ 181114008

$P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

<u>Penyelesaian</u> :

(1) Adb. $P_3 \neq \phi$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in P_3$$

$\therefore P_3 \neq \phi$

(2) $P_3 \subseteq M_2(\mathbb{Z})$ [obvius]

Karena P_3 adalah matriks 2×2 dengan entri-entri bilangan bulat

(3) Ambil $A, B \in P_3$ sebarang,

Tulis, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$

$B = \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

Note that

$$A - B = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 & b_1 - b_2 \end{pmatrix} \in P_3$$

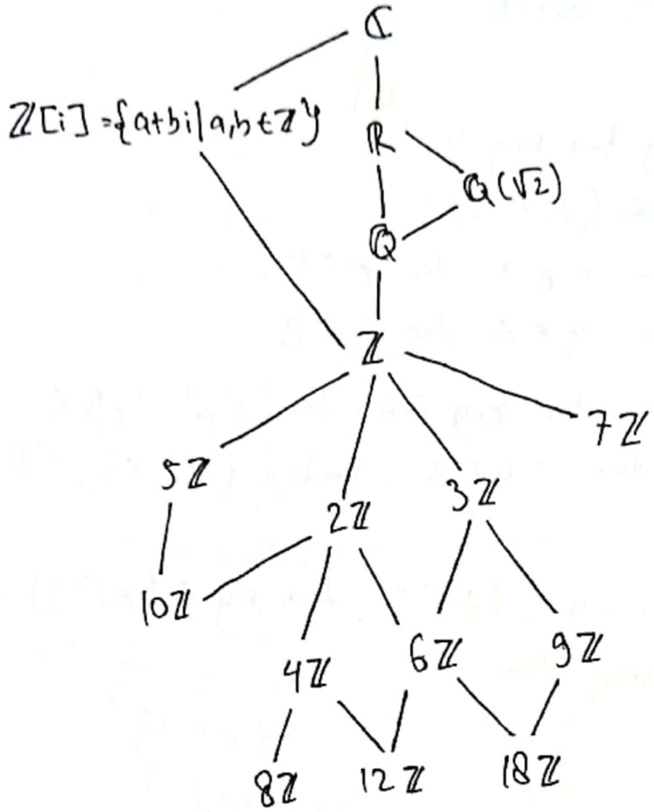
$$A\ B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 + a_1b_2 & a_1a_2 + a_1b_2 \\ b_1a_2 + b_1b_2 & b_1a_2 + b_1b_2 \end{pmatrix} \in P_3$$

$\therefore P_3$ subring dari $M_2(\mathbb{Z})$

manuel AS / 1811141008 Manula

Makassar, 6 oktober 2020

diperoleh diagram lapis sebagai berikut:



Maksudnya adalah

- $\mathbb{R}$ subring dari $\mathbb{C}$
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ subring dari $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Z}[i]$ subring dari $\mathbb{C}$
- $\mathbb{Q}$ subring dari $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Q}$ subring dari $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ subring dari $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Z}$ subring dari $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Z}$ subring dari $\mathbb{Z}[i]$
- $7\mathbb{Z}$ subring dari $\mathbb{Z}$
- $3\mathbb{Z}$ subring dari $\mathbb{Z}$
- $2\mathbb{Z}$ subring dari $\mathbb{Z}$
- $6\mathbb{Z}$ subring dari $2\mathbb{Z}$
- $6\mathbb{Z}$ subring dari $3\mathbb{Z}$

dst

Imanuel AS/1811141008

Makassar, 6 ok

$\boxed{T}$

Jika A dan B adalah subring dari ring R maka $A \cap B$ subring dari R

$\boxed{D_5}$

Bukti :

Misalkan A;B subring dari ring R.

Ambil sebarang $x, y \in (A \cap B)$;

$x \in (A \cap B)$ maka $x \in A$ dan $x \in B$

$y \in (A \cap B)$ maka $y \in A$ dan $y \in B$

karena A, B subring, dan $x, y \in A$ dan juga $x, y \in B$

Maka $x - y \in A$, dan $xy \in A$, demikian juga $x - y \in B$ dan $xy \in B$.

Dengan demikian $x - y \in (A \cap B)$ dan $xy \in (A \cap B)$.

Jadi $A \cap B$ subring dari R. ∎

manuel AS/ 1811141008

Makassar, 6 Oktober 2020

Ideal

Misal R ring, subhimpunan $I \subseteq R$, $I \neq \phi$ disebut Ideal jika

(1) I subgrup dari $(R,+)$

(2) $\forall a \in I$, $r \in R$ berlaku $ra \in I$ (Ideal Kiri) dan $ar \in I$ (Ideal kanan).

$\boxed{N}$

(1) I Ideal R
- $\to I \neq \phi$
- $\to I \subseteq R$
- $\to \forall a,b \in I \Rightarrow a-b \in I$
- $\to \forall a \in I, r \in R \Rightarrow ra \in I$ dan $ar \in I$

(2) I Ideal kanan R
- $\to I \neq \phi$
- $\to I \subseteq R$
- $\to \forall a,b \in I \Rightarrow a-b \in I$
- $\to \forall a \in I, r \in R \Rightarrow ar \in I$

(3) I Ideal kiri R
- $\to I \neq \phi$
- $\to I \subseteq R$
- $\to \forall a,b \in I \Rightarrow a-b \in I$
- $\to \forall a \in I, r \in R \Rightarrow ra \in I$

Catatan:

- Ideal yang dibangun oleh satu (tunggal) unsur disebut Ideal Utama
- Ideal yang dibangun oleh himpunan terhingga disebut finitely generated ideal.

Imanuel AS/1811141008 Makassar, 6 Ok

$\boxed{E}$

① $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$

(a) $P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ Ideal Kanan tapi bukan ideal kiri dari $M_2(\mathbb{R})$

Bukti :

(1) $P_1 \neq \phi$ karena $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_1$

(2) $P_1 \subseteq M_2(\mathbb{R})$ [Jelas]

(3) Ambil $A, B \in P_1$, $R \in M_2(\mathbb{R})$ sebarang

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

$R = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_3, b_3, c_3, d_3 \in \mathbb{R}$

Note that

$A - B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_1$

$AR = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_3 + b_1 c_3 & a_1 b_3 + b_1 d_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_1$

Jadi, P_1 Ideal Kanan, tetapi

misal $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_1$ dan

$R_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ diperoleh

$R_1 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \notin P_1$

$\therefore$ P_1 Ideal kanan tapi bukan ideal kiri.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 6 oktober 20

(6) $P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ Ideal kiri tapi bukan ideal kanan.

$\boxed{D_6}$

Bukti :

(1) $P_2 \neq \phi$ karena $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in P_2$

(2) $P_2 \subseteq M_2(\mathbb{R})$ [Jelas]

(3) Ambil $A, B \in P_2$, $R \in M_2(\mathbb{R})$ sebarang

$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

$R = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_3, b_3, c_3, d_3 \in \mathbb{R}$

Note that,

$$A - B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & 0 \\ b_1 - b_2 & 0 \end{pmatrix} \in P_2$$

$$RA = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 a_1 + b_3 b_1 & 0 \\ c_3 a_1 + d_3 b_1 & 0 \end{pmatrix} \in P_2$$

Jadi, P_2 Ideal kiri, tetapi

misal $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in P_2$ dan

$R_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ diperoleh

$$A_1 R_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \notin P_2$$

$\therefore$ P_2 Ideal kiri tapi bukan ideal kanan.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 6 Okto

$\boxed{T_2}$ Jika I_1 dan I_2 Ideal dari ring R maka $I_1 \cap I_2$ dan $I_1 + I_2$ Ideal dari R.

$$I_1 + I_2 = \{a+b \mid a \in I_1, b \in I_2\}$$

Apa kaitan antara Ideal dan subring?

Ideal pasti subring, tetapi subring belum tentu ideal.

$$R \text{ ring} \begin{cases} R \\ \{0_R\} \end{cases}$$

} Ideal trivial (Paling tidak mempunyai dua ideal, yaitu R sendiri dan 0_R)

Inanuel AS / 181114008 [signature] Makassar, 6 Okt

D

Daerah Ideal Utama / Principal Ideal Domain

Daerah integral yang setiap idealnya merupakan ideal utama disebut Daerah Ideal Utama / principal Ideal Domain (P. I. D)

Fakta

$\mathbb{Z}$ merupakan P. I. D $\boxed{D_8}$

T

Jika R ring komutatif dengan unsur kesatuan 1 maka R lapangan jika dan hanya jika R tidak memiliki ideal lain selain R dan O_R $\boxed{D_9}$

Imanuel AS / 181114008 Makassar, 6 Okt

Ideal Utama / Principal Ideal

$\boxed{\text{D}}$ Misal R ring abelian dengan unsur kesatuan, tulis:

$$\boxed{\langle a \rangle = \{ ar \mid r \in R \}}, a \in R$$

merupakan ideal utama (ideal yang dibangun oleh $a \in R$)

Fakta

$$\boxed{\langle a \rangle = \{ ar \mid r \in R \}}$$

merupakan ideal terkecil yang memuat a.

Bukti:

Akan ditunjukkan Na ideal terkecil N yang memuat a.
Karena N near-ring dengan elemen satuan $1 \in N$, maka $1.a \in Na \Rightarrow a \in Na$
Artinya untuk menunjukkan Na ideal utama yang dibangun oleh a harus ditunjukkan bahwa Na ideal terkecil N yang memuat a juga memuat Na.
Misalkan K ideal N yang memuat a dan $na \in Na$, $n \in N$.
Karena K ideal N yang memuat a maka $a \in K$ sehingga $na \in K$. Jadi $na \in Na \Rightarrow Na \in K$ yang artinya $Na \subseteq K$.
Jadi Na termuat dalam setiap ideal N yang memuat a atau Na ideal terkecil N yang memuat a.
Dengan kata lain Na ideal utama N yang dibangun oleh a.

//