Makassar 30 Maret 2020

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan XIV —

(Catatan)

Imanuel AS

1811141008

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke - 14 / Catatan Makassar, 23 Novem 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan pertemuan ke - 14.

Faktorisasi Daerah Integral (Bagian II)

Asosiasi / Sekawan

Misalkan D daerah integral, $a \in D \setminus \{0_R\}$ disebut berasosiasi / sekawan dengan $b \in D \setminus \{0_R\}$ jika $a|b$ dan $b|a$.

Notasi : $a \sim b \Leftrightarrow a|b$ dan $b|a$

baca : a sekawan dengan b jika dan hanya jika a membagi b dan b membagi a.

$\boxed{E}$

1. $\mathbb{Z} \rightarrow$ Daerah Integral

   $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ berasosiasi dengan $-a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

   karena $a|-a$ dan $-a|a$, jadi $a \sim -a$.

2. $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}, i^2 = \sqrt{-1}\}$

   $\hookrightarrow$ Gaussian Integer (Daerah integral)

   $a+bi \rightsquigarrow$ Berasosiasi dengan $-a-bi$, $-b+ai$, dan $b-ia$.

Imanuel AS / 181141008

Makassar, 23 November

$\boxed{T_1}$ $\boxed{D_1}$

Jika D daerah integral maka relasi asosiasi $\sim$ pada $D \setminus \{0_R\}$ merupakan relasi yang ekuivalen.

Bukti:

Adb: Relasi $\sim$ pada $D \setminus \{0_R\}$ merupakan relasi ekuivalen.

Akan ditunjukkan: (1) Refleksif
(2) Simetri
(3) Transitif

(1) Adb. $a \sim a \quad \forall a \in D \setminus \{0_R\}$

Ambil sebarang $a \in D \setminus \{0_R\}$

Perhatikan bahwa,

$a \mid a$ karena D daerah integral dan $a \in D \setminus \{0_R\}$ [T_1 Faktorisasi Daerah Integral]

$\therefore$ $a \sim a \quad \forall a \in D \setminus \{0_R\}$

(2) Adb. $a \sim b \Rightarrow b \sim a \quad \forall a, b \in D \setminus \{0_R\}$

Ambil sebarang $a, b \in D \setminus \{0_R\}$

Karena diketahui, $a \sim b$ maka berlaku $a \mid b$ dan $b \mid a$.

Atau dengan kata lain $b \mid a$ dan $a \mid b$.

Karena $b \mid a$ dan $a \mid b$ maka dikatakan $b \sim a$.

(3) Adb. $\forall a, b, c \in D \setminus \{0_R\}$.

Jika $a \sim b$ dan $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Ambil sebarang $a, b, c \in D \setminus \{0_R\}$

Dik: $a \sim b$ maka berlaku $a \mid b$ dan $b \mid a$
$b \sim c$ maka berlaku $b \mid c$ dan $c \mid a$

Akan ditunjukkan: $a \mid c$ dan $c \mid a$.

Karena $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$ [Sifat Transitif – T_1. F.D.I]

dan

Karena $a \mid c$ dan $c \mid a$ maka $a \sim c$.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 23 Novem 2016

$\boxed{T_2}$

Ideal utama yang dibangun oleh dua anggota dalam daerah integral sama jika dan hanya jika dua anggota tersebut berasosiasi.

Bukti

Misal D daerah integral, $a, b \in D$

Misal

$\langle a \rangle = \{ar \mid r \in D\}$, $\langle b \rangle = \{br \mid r \in D\}$

$(\Rightarrow)$ Misal $\langle a \rangle = \langle b \rangle$. Adb $a \sim b$

Perhatikan bahwa,

$\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle \Rightarrow a \in \langle b \rangle$

$\Rightarrow a = br$ u/suatu $r \in D$

$\Rightarrow b \mid a$

$\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle \Rightarrow b \in \langle a \rangle$

$\Rightarrow b = ar$ u/suatu $r \in D$

$\Rightarrow a \mid b$

Jadi $a \sim b$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 23 November 2020

($\Leftarrow$) Misal $a \sim b$. Adb. $\langle a \rangle = \langle b \rangle$

$a \sim b \Rightarrow$ terdapat $r_1, r_2 \in D$

sehingga $a = br_1$ dan $b = ar_2$

(1) Adb. $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$

Ambil $x \in \langle a \rangle$ sebarang

Tulis $x = ar$ u/suatu $r \in D$.

Akibatnya, $x = ar = (br_1)r = b(r_1 r) \subseteq \langle b \rangle$

Jadi, $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$

(2) Adb. $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$

Ambil $y \in \langle b \rangle$ sebarang,

Tulis $y = bx$ u/suatu $x \in R$,

diperoleh $y = bx = (ar_2)x = a(r_2 x) \in \langle a \rangle$

Jadi $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$

$\therefore \langle a \rangle = \langle b \rangle$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 23 Novem 2016

$\boxed{D}$

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Misal D daerah integral, $g \in D \setminus \{0_R\}$ disebut FPB dari $a, b \in D \setminus \{0_R\}$. Jika

(1) $g|a$ dan $g|b$.

(2) $\forall h \in D \setminus \{0_R\}$, $h|a$ dan $h|b \Rightarrow h|g$.

$\boxed{D_2}$ Cari contoh dari FPB (selain $\mathbb{Z}$)

① Diketahui $\mathbb{R}$ daerah integral, $150 \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ disebut FPB dari $200, 150 \in \mathbb{R} \setminus \{0_R\}$, karena berlaku:

(1) $150 | 200$ dan $150 | 150$ [$150 | 200$ krn $200 = 150 \cdot \frac{200}{150}$; $\frac{200}{150} \in \mathbb{R} \setminus \{0_R\}$. $150 | 150$ jelas.]

(2) $\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0_R\}$, $h | 200$ dan $h | 150 \Rightarrow h | 150$

[Jelas, karena 150 merupakan bilangan $\mathbb{R}$ terbesar yang membagi 200 dan 150 Maka berarti bahwa $h < 150$ dimana $h | 150$.]

② Diketahui $\mathbb{Q}$ daerah integral, $\frac{990}{10} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$ disebut FPB dari $990, 123 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$, karena berlaku:

(1) › $\frac{990}{10} | 990$ karena $990 = \frac{990}{10} \cdot 10$; $10 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$

› $\frac{990}{10} | 123$ karena $123 = \frac{990}{10} \frac{(123)(10)}{990}$; $\frac{(123)(10)}{990} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$

(2) Ambil sebarang $h \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$, Tulis $h = \frac{a}{b}$ u/suatu $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ Sederhanakan sehingga berlaku

› $h | 990$ krn $990 = h \cdot \frac{990}{h}$; $\frac{990}{h} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\} \Rightarrow h \in \mathbb{Z}$ jelas.

› $h | 123$ krn $123 = h \cdot \frac{123}{h}$; $\frac{123}{h} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\} \Rightarrow h \in \mathbb{Z}$ jelas.

Maka, $\frac{990}{\cancel{777}} = h \cdot \frac{990/10}{h}$; $\frac{990/10}{h} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$ krn $\frac{990}{10}, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$

Jadi $\forall h \in \mathbb{Q}$, $h|a$ dan $h|b \Rightarrow h|g$.

Imanuel AS / 1811141008 [signature] Makassar, 23 November

$\boxed{D_2}$

Misal D daerah integral, $\ell \in D \setminus \{0_D\}$
disebut KPK dari $a, b \in D \setminus \{0_D\}$. Jika
(1) $a \mid \ell$ dan $b \mid \ell$
(2) $\forall m \in D \setminus \{0_D\}$ dengan $a \mid m$ dan $b \mid m$ maka $\ell \mid m$

$\boxed{D_3}$

Cari contoh dari KPK (selain $\mathbb{Z}$)

① Diketahui $\mathbb{R}$ daerah integral, $357 \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$
disebut KPK dari $12, 71 \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$, karena berlaku:
(1) $12 \mid 357$ dan $71 \mid 357$
(2) $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ dengan $12 \mid m$ dan $71 \mid m$ maka $357 \mid m$

② Diketahui $\mathbb{Q}$ daerah integral, $8019 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$
disebut KPK dari $99, 81 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$. Karena berlaku:
(1) $99 \mid 8019$ karena $8019 = 99 \cdot 81$; $81 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$
$81 \mid 8019$ karena $8019 = 81 \cdot 99$; $99 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$
(2) Ambil sebarang $m \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$ sedemikian sehingga berlaku
• $99 \mid m$ krn $m = 99 \cdot \frac{m}{99}$; $\frac{m}{99} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$ jelas.
• $81 \mid m$ krn $m = 81 \cdot \frac{m}{81}$; $\frac{m}{81} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$ jelas
Maka $m = 8019 \cdot \frac{m}{8019}$; $\frac{m}{8019} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$ krn $m \in \mathbb{Z}$.

Jadi, $\forall m \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$ dengan $99 \mid m$ dan $81 \mid m$ maka $8019 \mid m$.

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 26 November 2020

$\boxed{5}$ (1) Buktikan bahwa setiap pasangan anggota di Daerah Ideal Utama selalu memiliki FPB

BUKTI :

Misalkan D daerah ideal utama
Ambil sebarang $a, b \in D \setminus \{0_R\}$
dan misalkan $\langle a \rangle$ dan $\langle b \rangle$ ideal utama di D yang berturut-turut dibangun oleh a dan b.

Atau dapat ditulis, ada $a \in R$

$$\langle a \rangle = \{ar \mid r \in R\}$$
$$\langle b \rangle = \{br \mid r \in R\}$$

Karena jumlah dua ideal juga merupakan ideal, maka
$\langle a \rangle + \langle b \rangle$ ideal utama di D.

Selanjutnya, karena D daerah ideal utama, maka setiap idealnya merupakan ideal utama, untuk itu ada $g \in D \setminus \{0_R\}$ yang membentuk ideal utama g di D. Atau dapat ditulis, ada $a \in R$

$$\langle g \rangle = \{gr \mid r \in R\}$$

sehingga $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle g \rangle$.

Asumsikan $g =$ FPB dari a dan b.

Karena $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle g \rangle$ maka $\langle a \rangle \subset \langle g \rangle$ dan $\langle b \rangle \subset \langle g \rangle$.

Jika $\langle a \rangle \subset \langle g \rangle$ maka $a \subset \langle g \rangle$ dan $a = x \cdot g$ untuk beberapa $x \in D$, akibatnya $g \mid a$.

Jika $\langle b \rangle \subset \langle g \rangle$ maka $b \subset \langle g \rangle$ dan $b = y \cdot g$ untuk beberapa $y \in D$, akibatnya $g \mid b$.

Karena $g \mid a$ dan $g \mid b$, maka g adalah FPB dari a dan b.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 26 November ...

Misalkan ada lagi FPB dari a dan b, yaitu e.

Maka $e|a$ dan $e|b$ sehingga

$a = em_1$ dan $b = em_2$ dimana $m_1, m_2 \in D$. Akibatnya:

$$x \in \langle a \rangle \Rightarrow x = ax_1 \text{ untuk beberapa } x_1 \in D$$
$$\Rightarrow x = (em_1)x_1$$
$$\Rightarrow x = e(m_1 x_1)$$
$$\Rightarrow x \subset \langle e \rangle \text{, jadi } \langle a \rangle \subset \langle e \rangle.$$

Selanjutnya,

$$y \in \langle b \rangle \Rightarrow y = by_1 \text{ untuk beberapa } y_1 \in D$$
$$\Rightarrow y = (em_2)y_1$$
$$\Rightarrow y = e(m_2 y_1)$$
$$\Rightarrow y \subset \langle e \rangle \text{, jadi } \langle b \rangle \subset \langle e \rangle.$$

Karena $e|a$ dan $e|b$, maka $\langle a \rangle \subset \langle e \rangle$ dan $\langle b \rangle \subset \langle e \rangle$,

Sehingga, $\langle g \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$ dan $\langle g \rangle \subset \langle e \rangle$.

Jelas, $g \subset \langle e \rangle$ sedemikian sehingga $g = ex$ untuk beberapa $x \in D$,

dan $e|g$

Terbukti g = FPB a dan b, karena setiap faktor persekutuan a dan b selalu merupakan pembagi (faktor) dari g.

: Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 26 November 2020

(2) Buktikan bahwa setiap pasangan anggota di Daerah Ideal Utama selalu memiliki KPK.

<u>BUKTI</u> :

Misalkan D daerah ideal utama

Ambil sebarang $a, b \in D \setminus \{0_R\}$

dan misalkan $\langle a \rangle$ dan $\langle b \rangle$ ideal utama di D yang berturut-turut dibangun oleh a dan b.

Atau dapat ditulis, ada $a \in R$

$$\langle a \rangle = \{ar \mid r \in R\}$$

$$\langle b \rangle = \{br \mid r \in R\}$$

Karena irisan dari dua ideal juga adalah ideal, maka

$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ ideal utama di D.

Sehingga, terdapat unsur e di D sedemikian sehingga

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$$

Asumsikan e = KPK dari a dan b.

Karena $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$ maka $\langle e \rangle \subset \langle a \rangle$ dan $\langle e \rangle \subset \langle b \rangle$.

Jika $\langle e \rangle \subset \langle a \rangle$ maka $e \subset \langle a \rangle$ dan $e = x \cdot a$ untuk beberapa $x \in D$ akibatnya $a \mid e$.

Jika $\langle e \rangle \subset \langle b \rangle$ maka $e \subset \langle b \rangle$ dan $e = y \cdot b$ untuk beberapa $y \in D$ akibatnya $b \mid e$.

Karena $a \mid e$ dan $b \mid e$, maka e adalah KPK dari a dan b.

Imanuel AS / 1811141008 / Mat A

Makassar, 26 Nov 2020

Misalkan ada lagi KPK dari a dan b, yaitu n.

Maka $a|n$ dan $b|n$ sehingga

$n = am_1$ dan $n = bm_2$ dimana $m_1, m_2 \in D$. Akibatnya:

$$x \in \langle n \rangle \Rightarrow x = nx_1 \text{ untuk beberapa } x_1 \in D$$
$$\Rightarrow x = (am_1)x_1$$
$$\Rightarrow x = a(m_1x_1)$$
$$\Rightarrow x \subset \langle a \rangle \text{ , jadi } \langle n \rangle \subset \langle a \rangle.$$

Selanjutnya,

$$y \in \langle n \rangle \Rightarrow y = ny_1 \text{ untuk beberapa } y_1 \in D$$
$$\Rightarrow y = (bm_2)y_1$$
$$\Rightarrow y = b(m_2y_1)$$
$$\Rightarrow y \subset \langle b \rangle \text{ , jadi } \langle n \rangle \subset \langle b \rangle.$$

Karena $\langle n \rangle \subset \langle a \rangle$ dan $\langle n \rangle \subset \langle b \rangle$, maka $\langle n \rangle \subset \{\langle a \rangle \cap \langle b \rangle\} = \langle e \rangle$.

Sehingga, $\langle n \rangle \subset \langle e \rangle$ dan $n \in \langle e \rangle$ sedemikian sehingga $n = ek$ untuk beberapa $k \in D$.

Jadi, $e|n$.

Terbukti e = KPK a dan b, karena setiap kelipatan persekutuan dari a dan b selalu merupakan kelipatan dari e.