Makassar, 16 November 2020

TUGAS IV

Teori Model

Nama : Imanuel AS

NIM : 181114008

Makassar, 16 November 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 181114 1008

Teori Modul - Tugas IV

Soal Latihan

(1) Misal $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan komplex, dan $M_2(\mathbb{R})$ adalah himpunan matriks ordo dua dengan entri-entri bilangan real.

Didefinisikan : $f : \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

dengan $f(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \forall (a+bi) \in \mathbb{C}$

Selidiki apakah f homomorfisma modul?

Penyelesaian :

Sebelumnya, dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{C}$ dan $M_2(\mathbb{R})$ adalah $\mathbb{R}$-modul.

Selanjutnya, ambil $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ sebarang

Tulis, $x_1 = (a_1 + b_1 i)$ untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$x_2 = (a_2 + b_2 i)$ untuk suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

Ambil sebarang $r \in \mathbb{R}$

Note that,

$\gg$ $f(x_1 + x_2) = f((a_1+b_1 i) + (a_2+b_2 i))$ [Definisi x_1 dan x_2]

$= f((a_1+a_2) + (b_1+b_2)i)$ [Penjumlahan dalam bil. komplex]

$= \begin{bmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) \\ -(b_1+b_2) & (a_1+a_2) \end{bmatrix}$ [Pemetaan f]

$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$ [Jelas]

$= f(a_1+b_1 i) + f(a_2+b_2 i)$ [Definisi Pemetaan f]

$= f(x_1) + f(x_2)$ [Definisi $(a_1+b_1 i)$ dan $(a_2+b_2 i)$]

Imanuel AS / 1811141008 ~~Imanuel~~

Makassar, 16 November 2020

$$\bullet) \quad f(r x_1) = f(r.(a_1 + b_1 i)) \quad \text{[Definisi } x_1\text{]}$$

$$= f(ra_1 + rb_1 i) \quad \text{[Perkalian pada bil. Komplex]}$$

$$= \begin{bmatrix} ra_1 & rb_1 \\ -rb_1 & ra_1 \end{bmatrix} \quad \text{[Pemetaan } f\text{]}$$

$$= r.\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \quad \text{[Jelas]}$$

$$= r.\ f(a_1 + b_1 i) \quad \text{[Defisi Pemetaan } f\text{]}$$

$$= r.\ f(x_1) \quad \text{[Defisisi } (a_1 + b_1 i)\text{]}$$

$\therefore$ f homomorfisma modul. //

: Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 16 November '20

② Misal $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ adalah Matriks ordo dua dengan entri-entri bilangan rasional $\mathbb{Q}$.

Didefinisikan : $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$

dengan $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = a \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$

dimana a, d bilangan rasional yang tidak sama dengan nol.

Periksa apakah f homomorfisma modul?

Penyelesaian :

Sebelumnya, dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ dan $\mathbb{Q}$ adalah $\mathbb{Q}$-modul.
Selanjutnya, ambil $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ sebarang dengan syarat entri 21 nya bernilai 0.

Tulis, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$ u/suatu $a_1, b_1, d_1 \in \mathbb{Q}$

$B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ u/suatu $a_2, b_2, d_2 \in \mathbb{Q}$

Ambil sebarang $r \in \mathbb{Q}$, tulis $r = \frac{x}{y}$ untuk suatu $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$.
Note that,

•) $f(A+B) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi A dan B]

$= f\left(\begin{bmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) \\ 0 & (d_1+d_2) \end{bmatrix}\right)$ [Penjumlahan dalam $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$]

$= (a_1 + a_2)$ [Definisi Pemetaan f]

$= (a_1) + (a_2)$ [Jelas]

$= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi Pemetaan f]

$= f(A) + f(B)$ [Definisi A dan B]

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 16 Nov 20..

$$\Rightarrow f(rA) = f\left(r\cdot\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right)$$ [Definisi A]

$$= f\cdot\left(\begin{bmatrix} ra_1 & rb_1 \\ 0 & rd_1 \end{bmatrix}\right)$$ [Perkalian pada $M_2(\mathbb{Q})$]

$$= ra_1$$ [Pemetaan f]

$$= r\cdot(a_1)$$ [Jelas, krn $a_1 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$]

$$= r\cdot f\cdot\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right)$$ [Definisi pemetaan f]

$$= r\cdot f\cdot(A)$$ [Definisi A]

$\therefore$ f homomorfisma modul.

Dipindai dengan CamScanner

: Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 16 Novemb 20..

③ $f : M_2(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$

dengan $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = b \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$

Periksa apakah f homomorfisma modul ?

Penyelesaian :

Sebelumnya, dapat ditunjukkan bahwa $M_2(\mathbb{Q})$ dan $\mathbb{Q}$ adalah $\mathbb{Q}$ - modul.
Selanjutnya, ambil $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ sebarang dengan syarat entri 21nya bernilai 0.

Tulis, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$ u/suatu $a_1, b_1, d_1 \in \mathbb{Q}$

$B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ u/suatu $a_2, b_2, d_2 \in \mathbb{Q}$

Ambil sebarang $r \in \mathbb{Q}$, tulis $r = \frac{x}{y}$ untuk suatu $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$.
Note that,

i) $f(A+B) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi A dan B]

$= f\left(\begin{bmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) \\ 0 & (d_1+d_2) \end{bmatrix}\right)$ [Penjumlahan dalam $M_2(\mathbb{Q})$]

$= (b_1 + b_2)$ [Definisi Pemetaan f]

$= (b_1) + (b_2)$ [Jelas]

$= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi pemetaan f]

$= f(A) + f(B)$ [Definisi A dan B]

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 16 Nov 2020

$$\cdot\rangle\ f(rA) = f\left(r\cdot\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{[Definisi A]}$$

$$= f\left(\begin{bmatrix} ra_1 & rb_1 \\ 0 & rd_1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{[Perkalian pada } M_2(\mathbb{Q})\text{]}$$

$$= rb_1 \quad \text{[Pemetaan } f\text{]}$$

$$= r\cdot(b_1) \quad \text{[Jelas, krn } b_1 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}\text{]}$$

$$= r\cdot f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{[Definisi pemetaan } f\text{]}$$

$$= r\cdot f(A) \quad \text{[Definisi A]}$$

$\therefore$ f homomorfisma modul.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 16 Nov 2020

(4.) Misalkan $A = \{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$

$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & 4b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

didefinisikan :

$f : A \longrightarrow B$

dengan $f(a+b\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} a & 4b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \forall (a+b\sqrt{3}) \in A$

Periksa apakah f homomorfisma modul ?

Penyelesaian :

Sebelumnya, dapat ditunjukkan bahwa A dan B adalah $\mathbb{Z}$ - modul.

Selanjutnya, ambil $x_1, x_2 \in A$ sebarang.

Tulis, $x_1 = (a_1 + b_1\sqrt{3})$ untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$.

$x_2 = (a_2 + b_2\sqrt{3})$ untuk suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$.

Ambil $r \in \mathbb{Z}$ sebarang.

Note that,

$$
\begin{aligned}
> f(x_1 + x_2) &= f\big((a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3})\big) && [\text{Definisi } x_1 \text{ dan } x_2] \\
&= f\big((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3}\big) && [\text{Penjumlahan pada } \mathbb{Z}[\sqrt{3}]] \\
&= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) & 4(b_1 + b_2) \\ (b_1 + b_2) & (a_1 + a_2) \end{bmatrix} && [\text{Definisi Pemetaan } f] \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 4b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 4b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} && [\text{Penjumlahan Matriks}] \\
&= f(a_1 + b_1\sqrt{3}) + f(a_2 + b_2\sqrt{3}) && [\text{Definisi pemetaan } f] \\
&= f(x_1) + f(x_2) && [\text{Definisi } x_1 \text{ dan } x_2]
\end{aligned}
$$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 16 Nov 2020

$\cdot) \; f(r\,x_1) = f\cdot(r\cdot(a_1 + b_1\sqrt{3}))$ [Depinisi x_1]

$= f\cdot(ra_1 + rb_1\sqrt{3})$ [Perkalian pada bil. $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$]

$= \begin{bmatrix} ra_1 & 4rb_1 \\ rb_1 & ra_1 \end{bmatrix}$ [Pemetaan f]

$= r\cdot\begin{bmatrix} a_1 & 4b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$ [Jelas]

$= r\cdot f(a_1 + b_1\sqrt{3})$ [Definisi Pemetaan f]

$= r\cdot f(x_1)$ [Depinisi x_1]

$\therefore$ f homomorfisma modul.

: Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 16 Nov 2020

(5.) Misal $A = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$ submodul di $\mathbb{Z}_9$.

$M_2(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in A \right\}$

Didefinisikan :

$$f : M_2(A) \longrightarrow M_2(A)$$

dengan $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$

Periksa apakah f homomorfisma modul ?

Didefinisikan $g : M_2(A) \longrightarrow M_2(A)$

dengan $g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

Periksa apakah g homomorfisma modul ?

Penyelesaian :

(*) Karena A submodul dari $\mathbb{Z}_9$, maka $A \subseteq \mathbb{Z}_9$, $A \neq 0$
dan diketahui pula $\mathbb{Z}_9$ adalah $\mathbb{Z}$-modul ($\mathbb{Z}_9$ adalah modul atas Ring $\mathbb{Z}$).
Jadi, selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $M_2(A)$ dan $M_2(A)$ adalah $\mathbb{Z}$-modul
Selanjutnya, ambil $L, K \in M_2(A)$ sebarang
Tulis, $L = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ untuk suatu $a_1, b_1, c_1, d_1 \in A$.

$K = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ untuk suatu $a_2, b_2, c_2, d_2 \in A$.

Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$.

Imanuel AS/ 1811141008 Imanuel

Makassar, 16 November 2018

Note that,

$\Rightarrow f(L+K) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi L dan K]

$= f\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right)$ [Penjumlahan Matriks]

$= \begin{bmatrix} 0 & b_1+b_2 \\ 0 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$ [Pemetaan f]

$= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ [Jelas]

$= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$ [Pemetaan f]

$= f(L) + f(K)$ [Definisi L dan K]

$\Rightarrow f(r.L) = f\left(r.\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi L]

$= f\left(\begin{bmatrix} ra_1 & rb_1 \\ rc_1 & rd_1 \end{bmatrix}\right)$ [Perkalian Matriks]

$= \begin{bmatrix} 0 & rb_1 \\ 0 & rd_1 \end{bmatrix}$ [Pemetaan f]

$= r.\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$ [Jelas]

$= r.\ f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi Pemetaan f]

$= r.\ f(L)$

$\therefore$ f homomorfisma modul.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 16 November 2020

Berdasarkan (*) akan ditunjukkan g homomorfisma modul.

Note that,

- $g(L+K) = g\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi L dan K]

$= g\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right)$ [Penjumlahan Matriks]

$= \begin{bmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ 0 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$ [Pemetaan g]

$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ [Jelas]

$= g\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + g\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi Pemetaan g]

$= g(L) + g(K)$ [Definisi L dan K]

- $g(r.L) = g\left(r.\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi L]

$= g\left(\begin{bmatrix} ra_1 & rb_1 \\ rc_1 & rd_1 \end{bmatrix}\right)$ [Perkalian Matriks]

$= \begin{bmatrix} ra_1 & 0 \\ 0 & rd_1 \end{bmatrix}$ [Pemetaan g]

$= r.\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$ [Jelas]

$= r.\, g\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right)$ [Definisi Pemetaan g]

$= r.\, g(L)$ [Definisi L]

$\therefore$ g homomorfisma modul.