Struktur Aljabar II / pertemuan ke -4/ Diskusi Myk learn

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Misalkan R_1, R_2 merupakan daerah integral,

Buktikan bahwa $R_1 \times R_2$ bukan daerah Integral

Penyelesaian :

Diketahui : $R_1 \times R_2 = \{(a,b) \mid a \in R_1, b \in R_2\}$

dengan $x = (a_1, b_1)$, $y = (a_2, b_2)$, $a_1, a_2 \in R_1$, $b_1, b_2 \in R_2$

Operasinya :

$x + y = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

$xy = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$

Definisi 2.8 Syarat Daerah Integral : (1) $R_1 \times R_2$ merupakan Ring Komutatif

(2) $R_1 \times R_2 \ni$ unsur kesatuan

(3) $R_1 \times R_2 \not\ni$ pembagi nol

By trial and error,

Note that,

(1) Adb. $\forall x, y \in R_1 \times R_2 \ni x \cdot y = y \cdot x$

Ambil sebarang $x, y \in R_1 \times R_2$

Tulis $x = (a_1, b_1)$ untuk suatu $a_1 \in R_1$, $b_1 \in R_2$

$y = (a_2, b_2)$ untuk suatu $a_2 \in R_2$, $b_2 \in R_2$

Note that,

$$x \cdot y = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$$
$$= (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$$
$$= (a_2 \cdot a_1, b_2 \cdot b_1)$$
$$= (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1)$$
$$= y \cdot x \quad \text{............................} ✓$$

Imanuel AS
1811141008

(2) Adb. $\forall x \in R_1 \times R_2$, $\exists\, 1_{R_1 \times R_2} \in R_1 \times R_2 \ni x \cdot 1_{R_1 \times R_2} = 1_{R_1 \times R_2} \cdot x = x$

Ambil sebarang $x \in R_1 \times R_2$

Tulis $x = (a_1, b_1)$ untuk suatu $a_1 \in R_1$, $b_1 \in R_2$

Pilih $1_{R_1 \times R_2} = (1,1)$ untu bantu $1 \in R_1$, $1 \in R_2$

Note that,

$\Rightarrow$ $x \cdot 1_{R_1 \times R_2} = (a_1, b_1) \cdot (1,1)$

$\qquad\qquad = (a_1 \cdot 1), (b_1 \cdot 1)$

$\qquad\qquad = (a_1, b_1)$

$\qquad\qquad = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\dagger)$

$\Rightarrow$ $1_{R_1 \times R_2} \cdot x = (1,1) \cdot (a_1, b_1)$

$\qquad\qquad = (1 \cdot a_1, 1 \cdot b_1)$

$\qquad\qquad = (a_1, b_1)$

$\qquad\qquad \sim x \quad \ldots\ldots\ldots (\ast\ast)$

Dari $(\dagger)$ dan $(\ast\ast)$ maka diperoleh $x \cdot 1_{R_1 \times R_2} = 1_{R_1 \times R_2} \cdot x = x \quad \ldots\ldots$ ▨

(3) Adb. $\exists$ $a, b \in R_1 \times R_2$, $a \neq (0,0)$, $b \neq (0,0)$ $\ni$ $ab = (0,0)$

Penyelesaian :

Pilih $a = (0,1) \in R_1 \times R_2$, $0 \in R_1$, $1 \in R_2$, $a \neq (0,0)$

$b = (1,0) \in R_1 \times R_2$, $1 \in R_1$, $0 \in R_2$, $b \neq (0,0)$

Note that,

$a \cdot b = (0,1) \cdot (1,0)$

$= (0 \cdot 1, 1 \cdot 0)$

$= (0,0)$

Karena $ab = (0,0)$ $\Rightarrow$ $\exists$ pembagi nol kiri $= a$ dan pembagi nol kanan $= b$

untuk suatu $a = (0,1)$, $b = (1,0)$, $a \neq (0,0)$, $b \neq (0,0)$ maka

terdapat pembagi nol. sedemikian sehingga syarat (3) tidak terpenuhi.

$\therefore$ Karena syarat (3) tidak dipenuhi, maka $R_1 \times R_2$ bukan daerah integral.

(Terbukti)