Makassar, 30 November 2020

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan $\underline{\overline{X}}$ —

(Catatan)

Imanuel AS

1811141008

Imanuel

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke - 10 / Catatan

Makassar, 21 Oktober 2020

Nama : Imanuel A S

NIM : 181114100 8

Struktur Aljabar II : Catatan Pertemuan ke - 10 /

Homomorfisma Gelanggang

Definisi

Misalkan R dan R' merupakan gelanggang. Pemetaan $f : R \to R'$ disebut homomorfisma gelanggang jika

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall a,b \in R$

(2) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad \forall a,b \in R$

$\boxed{E}$

① $f : R \to R'$, $f(a) = 0_{R'}$, $\forall a \in R$

$a \mapsto 0_{R'}$

f merupakan homomorfisma

Bukti

(a) Adb f pemetaan, ambil $a,b \in f$ sebarang dengan $a=b$, perhatikan $f(a) = 0_{R'} = f(b)$

(b) Ambil $a,b \in R$ sebarang, Perhatikan bahwa

$f(a+b) = 0_{R'}$ dilain pihak diperoleh

$f(a)+f(b) = 0_{R'} + 0_{R'}$, Jadi

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

Imanuel AS / 1811141008 ~~Imanuel~~ Makassar, 21 Oktober 2020

Selanjutnya,

$f(a \cdot b) = 0_{R'}$, $f(a) \cdot f(b) = 0_{R'} \cdot 0_{R'} = 0_{R'}$

Jadi,

$f(ab) = f(a) \cdot f(b)$

$\therefore$ f homomorfisma gelanggang

(2) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$

$a+bi \mapsto a-bi$, $f(a+bi) = a-bi$

Adb. ϕ homomorfisma gelanggang.

Bukti

Ambil $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sebarang,

tulis, $z_1 = a_1 + b_1 i$ u/suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$z_2 = a_2 + b_2 i$ u/suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

(a) Adb f pemetaan

Misal $z_1 = z_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$

Perhatikan bahwa

$$f(z_1) = f(a_1 + b_1 i) = a_1 - b_1 i = a_2 - b_2 i$$
$$= f(a_2 + b_2 i)$$
$$= f(z_2)$$

$\therefore$ f pemetaan

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 21 Oktober 2020

(b) Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
f(z_1+z_2) &= f((a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)) \\
&= f((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i) \\
&= (a_1-b_1 i)+(a_2-b_2 i) \\
&= f(a_1+b_1 i)+f(a_2+b_2 i) \\
&= f(z_1)+f(z_2)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
f(z_1 . z_2) &= f((a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)) \quad \rightarrow \boxed{i^2=-1} \\
&= f((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i) \\
&= (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i \\
&= (a_1-b_1 i)(a_2-b_2 i) \\
&= f(a_1+b_1 i) . f(a_2+b_2 i) \\
&= f(z_1) . f(z_2)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ f homomorfisma gelanggang "

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 21 Oktober 2020

(3) $\phi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{30}$, $\phi([a]) = [6a]$

$[a] \mapsto [6a]$

ϕ homomorfisma gelanggang

Bukti

(1) Adb ϕ pemetaan

Ambil $[a], [b] \in \mathbb{Z}_5$ sebarang dengan

$$\underbrace{[a] = [b]}_{\text{ini sama jika dan hanya jika } 5 \mid (a-b)} \Rightarrow 5 \mid (a-b)$$

$\Rightarrow 30 \mid 6(a-b)$

$\Rightarrow [6a] = [6b]$ di $\mathbb{Z}_{30}$

$\Rightarrow \phi([a]) = \phi([b])$

[operasi bilangan modulo]

$\therefore$ ϕ pemetaan

(2) Ambil $[a], [b] \in \mathbb{Z}_5$ sebarang

$$\begin{aligned}\phi([a]+[b]) &= \phi([a+b]) \\ &= [6(a+b)] \\ &= [6a+6b] \\ &= [6a] + [6b] \\ &= \phi([a]) + \phi([b])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi([ab]) &= [6ab] \\ &= [6a \cdot 6b] \\ &= [6a] \cdot [6b] \\ &= \phi([a]) \cdot \phi([b])\end{aligned}$$

$\phi(\boxed{a}) = [6a]$

$\therefore$ ϕ homomorfisma gelanggang.

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 21 Oktober 20

(4) $\phi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{30}$ $\phi([a]) = [4a]$

$[a] \longmapsto [4a]$

Perhatikan bahwa

Misal $[6] = [1]$ di $\mathbb{Z}_5$

$\phi([6]) = [4(6)] = [24]$

$\phi([1]) = [4(1)] = [4]$

$[4] \neq [24]$ di $\mathbb{Z}_{30}$

Jadi $\phi([6]) \neq \phi([1])$

ϕ Bukan Pemetaan

ϕ Bukan homomorfisma gelanggang

Catatan:
Cara melihatnya, untuk mengambil contoh penyangkal, kaya $[6] = [1]$ diatas

$\phi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{30}$

$[a] \longmapsto [4a]$

$\phi([a]) = [4a]$

$[a] = [b]$

$\vdots$

$[4a] = [4b]$

$\phi([a]) = \phi([b])$

$5 \mid a-b$ $a-b = 5$

$30 \mid 4a-4b \Rightarrow 30 \nmid 4(a-b)$

Inanuel AS / 181114 1008

Makassar, 22 Okt 2020

$\boxed{D_1}$

Periksa manakah dari pengaitan berikut yang merupakan homomorfisma gelanggang

① $\phi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{30}$, $\phi([a]) = [7a]$

$[a] \longmapsto [7a]$

② $\phi : \mathbb{Z}_7 \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$, $\phi([a]) = [4a]$

$[a] \longmapsto [4a]$

③ Misal $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbb{R} \right\}$

$f : \mathbb{C} \longrightarrow S$, $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$a+bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

④ Misal $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z} \}$

$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbb{Z} \right\}$

$\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \longrightarrow H$

$a+b\sqrt{2} \longmapsto \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\varphi(a+b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 22 oktober 20..

Jawaban:

(1) $\phi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{30}$, $\phi([a]) = [7a]$

$[a] \longmapsto [7a]$

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa,

Misal $[6] = [1]$ di $\mathbb{Z}_5$

$\phi([6]) = [7\cdot(6)] = [42]$; $\phi([1]) = [7\cdot(1)] = [7]$ $\Big\}$ $\cdot\!> [42] = [12]$ di $\mathbb{Z}_{30}$; $\cdot\!> [7] = [7]$ di $\mathbb{Z}_{30}$ $\Big\}$ $[12] \neq [7]$ di $\mathbb{Z}_{30}$

Jadi, $\phi([6]) \neq \phi([1])$

ϕ Bukan Pemetaan

ϕ Bukan homomorfisma Gelanggang

(2) $\phi : \mathbb{Z}_7 \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$, $\phi([a]) = [4a]$

$[a] \longmapsto [4a]$

Penyelesaian:

perhatikan bahwa

Misal $[15] = [1]$

$\phi([15]) = [4\cdot(15)] = [60] = [0]$ di $\mathbb{Z}_{12}$; $\phi([1]) = [4\cdot(1)] = [4]$ di $\mathbb{Z}_{12}$ $\Big\}$ $[0] \neq [4]$ di $\mathbb{Z}_{12}$

Jadi, $\phi([15]) \neq \phi([1])$

ϕ Bukan pemetaan

ϕ Bukan homomorfisma Gelanggang.

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 22 oktober 2020

③ Misal $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$f : \mathbb{C} \longrightarrow S$, $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$a+bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Penyelesaian :

Adb. f homomorfisma gelanggang.

Bukti :

Ambil $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sebarang,

Tulis, $z_1 = a_1 + b_1 i$ u/suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$z_2 = a_2 + b_2 i$ u/suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

(a) Adb ϕ pemetaan

Misal $z_1 = z_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$

Perhatikan bahwa,

$f(z_1) = f(a_1 + b_1 i)$

$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ $[a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2]$

$= f(a_2 + b_2 i)$

$\boxed{f(z_1) = f(z_2)}$

$\therefore \phi$ pemetaan

Imanuel AS / 181114100 8 Imanuel

Makassar, 22 oktober 2020

(b) Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
f(z_1 + z_2) &= f\left((a_1+b_1 i) + (a_2+b_2 i)\right) \\
&= f\left((a_1+a_2) + (b_1+b_2) i\right) \\
&= \begin{pmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) \\ -(b_1+b_2) & (a_1+a_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \\
&= f(a_1+b_1 i) + f(a_2+b_2 i) \\
&= f(z_1) + f(z_2)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
f(z_1 \cdot z_2) &= f\left((a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)\right) \\
&= f\left((a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 b_2 + b_1 \cdot a_2) i\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ -(a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \\
&= f(a_1+b_1 i) \cdot f(a_2+b_2 i) \\
&= f(z_1) \cdot f(z_2)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ f adalah homomorfisma gelanggang.

Inanuel AS / 181114008

Mabassar, 22 Oktober 2021

(4.) Misal $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

$\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \longrightarrow H$

$a + b\sqrt{2} \longmapsto \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\varphi(a + b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$

Penyelesaian :

Akan diperiksa : φ homomorfisma gelanggang atau bukan ??

Bukti :

Ambil $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sebarang

Tulis, $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ u/ suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$

$x_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ u/ suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

(a) Adb. φ pemetaan

Misal $x_1 = x_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$

Note that,

$\varphi(x_1) = \varphi(a_1 + b_1\sqrt{2})$

$= \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ $[a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2]$

$= \varphi(a_2 + b_2\sqrt{2})$

$\boxed{\varphi(x_1) = \varphi(x_2)}$

$\therefore$ φ pemetaan.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 22 oktobe

(b) Perhatikan bahwa,

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi\left((a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})\right)$$

$$= \varphi\left((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) & 2(b_1 + b_2) \\ (b_1 + b_2) & (a_1 + a_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \varphi(a_1 + b_1\sqrt{2}) + \varphi(a_2 + b_2\sqrt{2})$$

$$= \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) = \\ (a_1 \cdot a_2 + a_1 b_2\sqrt{2} + b_1\sqrt{2} \cdot a_2 + b_1\sqrt{2} \cdot b_2\sqrt{2}) \\ (a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{2} + b_1 \cdot b_2 \cdot \sqrt{4}) \\ (a_1 \cdot a_2 + 2 b_1 \cdot b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{2}) \end{array}}$$

Selanjutnya,

$$\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi\left((a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2})\right)$$

$$= \varphi\left((a_1 a_2 + 2b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 a_2 + 2b_1 b_2) & 2(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ (a_1 b_2 + a_2 b_1) & (a_1 a_2 + 2b_1 b_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \varphi(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot \varphi(a_2 + b_2\sqrt{2})$$

$$= \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$$

$\therefore$ φ adalah homomorfisma gelanggang.

Makassar, 30 Oktober 2020

Imanuel AS / 1811141008

Sifat-Sifat Homomorfisma Gelanggang

$\boxed{T_1}$ Jika $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ suatu homomorfisma gelanggang, maka

(1) $\phi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$ $\begin{bmatrix} 0_{R_1} \text{ unsur nol di } R_1 \\ 0_{R_2} \text{ unsur nol di } R_2 \end{bmatrix}$

(2) $\phi(-a) = -\phi(a) \quad \forall a \in R_1$ $\boxed{D_2}$

Bukti :

(1) Misal $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ homomorfisma gelanggang

0_{R_1} unsur nol di R_1

0_{R_2} unsur nol di R_2

Perhatikan

$0_{R_1} + 0_{R_1} = 0_{R_1}$

$\Rightarrow \phi(0_{R_1} + 0_{R_1}) = \phi(0_{R_1})$

$\Rightarrow \phi(0_{R_1}) + \phi(0_{R_1}) = \phi(0_{R_1})$

Jadi $\phi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$

(2) Selanjutnya, untuk sebarang $a \in R$, maka

$a + (-a) = 0 \Rightarrow \phi(a + (-a)) = f(0)$

$\Rightarrow \phi(a) + \phi(-a) = f(0)$

dengan cara yang sama

$-a + a = 0 \Rightarrow \phi(-a) + \phi(a) = \phi(0)$

Jadi, $\phi(a) + \phi(-a) = \phi(-a) + \phi(a) = \phi(0)$, $\forall \phi(a) \in R'$

akibatnya, $\phi(-a) = -\phi(a)$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 30 oktober 2020

$\boxed{T_2}$ $\boxed{D_3}$

Jika $\phi : R_1 \longrightarrow R_2$ suatu homomorfisma gelanggang.
A ideal dari R_1 dan B ideal dari R_2 maka :

(1) $\phi(nr) = n . \phi(r)$ dan $\phi(r^n) = (\phi(r))^n$
$\forall n \in \mathbb{N}, r \in R_1$

(2) $\phi(A) = \{\phi(a) \mid a \in A\}$ subgelanggang dari R_2.

(3) Jika R_1 komutatif, maka :
$\phi(R_1) = \{y \in R_2 \mid y = \phi(x)$ u/suatu $x \in R_1\}$
komutatif

(4) Jika R_1 memiliki unsur kesatuan yaitu
$1_{R_1} \in R_1$, $R_2 \neq \{0_{R_2}\}$ dan ϕ surjectif maka
$\phi(1_{R_1})$ merupakan unsur kesatuan di R_2.

(5) Jika A ideal dari R_1 maka
$\phi(A) = \{b \in R_2 \mid b = \phi(a)$ untuk suatu $a \in A\}$
merupakan ideal dari R_2.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 6 November 2020

Bukti $\boxed{T_2}$ $\boxed{D_3}$

Jika $\phi : R_1 \to R_2$ suatu homomorfisma gelanggang.
A ideal dari R_1 dan B ideal dari R_2 maka:

Sebelumnya diketahui dari pernyataan diatas bahwa:

- $\phi : R_1 \to R_2$ artinya setiap anggota di R_1 memiliki tepat satu anggota di R_2.
- $\phi : R_1 \to R_2$ suatu homomorfisma gelanggang
  Maka berlaku:
  (1) $f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall a,b \in R_1$
  (2) $f(a.b) = f(a) \cdot f(b) \quad \forall a,b \in R_1$
- A ideal dari R_1
  Maka berlaku:

(i) A ideal kiri dari R_1
- (*) $A \neq \phi$
- (*) $A \subseteq R_1$
- (*) $\forall a,b \in A \Rightarrow a-b \in A$
- (*) $\forall a \in A,\ r \in R_1 \Rightarrow ra \in A$

(ii) A ideal kanan dari R_1
- (*) $A \neq \phi$
- (*) $A \subseteq R_1$
- (*) $\forall a,b \in A \Rightarrow a-b \in A$
- (*) $\forall a \in A,\ r \in R_1 \Rightarrow ar \in A$

- B ideal dari R_2
  Maka berlaku:

(i) B ideal kiri dari R_2
- (*) $B \neq \phi$
- (*) $B \subseteq R_2$
- (*) $\forall a,b \in B \Rightarrow a-b \in B$
- (*) $\forall b \in B,\ r \in R_2 \Rightarrow rb \in B$

(ii) B ideal kanan dari R_2
- (*) $B \neq \phi$
- (*) $B \subseteq R_2$
- (*) $\forall a,b \in B \Rightarrow a-b \in B$
- (*) $\forall b \in B,\ r \in R_2 \Rightarrow br \in B$

Imanuel AS / 1811141008 [signature]

Makassar, 6 November 2020

(1) Adb. $\phi(nr) = n \cdot \phi(r)$ dan $\phi(r^n) = (\phi(r))^n$

$\forall n \in \mathbb{N}, r \in R_1$

Bukti :

Ambil $n \in \mathbb{N}$ sebarang

Ambil $r \in R_1$ sebarang

Perhatikan bahwa,

, Dengan menggunakan induksi diperoleh,

⇒ Sebelumnya, diketahui bahwa $\forall n = 1$ adalah benar.

Karena $\phi(1.r) = \phi(1) \cdot \phi(r) = \phi(r)$

⇒ Perhatikan bahwa,

$\phi(2.r) = \phi(2) \cdot \phi(r)$ [$\phi(a.b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ $\forall a,b \in R_1$]

$= \phi(1+1) \cdot \phi(r)$ [Jelas]

$= [\phi(1) + \phi(1)] \cdot \phi(r)$ [$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ $\forall a,b \in R_1$]

$= [\phi(1) \cdot \phi(r)] + [\phi(1) \cdot \phi(r)]$ [Distributif Ring]

$= [\phi(1 \cdot r)] + [\phi(1 \cdot r)]$ [$\phi(a.b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ $\forall a,b \in R_1$]

$= \phi(r) + \phi(r)$ [Jelas]

$= 2 \cdot \phi(r)$ ....(*) [Jelas]

$\phi(3.r) = \phi(3) \cdot \phi(r)$

$= \phi(2+1) \cdot \phi(r)$

$= [\phi(2) + \phi(1)] \cdot \phi(r)$

$= [\phi(2) \cdot \phi(r)] + [\phi(1) \cdot \phi(r)]$

$= [\phi(2 \cdot r)] + [\phi(1 \cdot r)]$

$= [2 \cdot \phi(r)] + \phi \cdot r$ [(*)]

$= (2+1) \cdot \phi(r)$

$= 3 \cdot \phi(r)$

⋮

$\phi(k.r) = \ldots\ldots$ ⟶ next

Imanuel AS / 181114008 Imanuel Makassar, 6 November 2020

$\vdots$

$\phi(k.r) = \phi(k) . \phi(r) = k . \phi(r)$ ..(**) [Berdasarkan looping sebelumnya]

$$
\begin{aligned}
\phi((k+1).r) &= \phi(k+1) . \phi(r) \\
&= [\phi(k)+\phi(1)] . \phi(r) \\
&= [\phi(k) . \phi(r)] + [\phi(1) . \phi(r)] \\
&= \phi(k.r) + \phi(1.r) \\
&= \phi(k.r) + \phi(r) \\
&= k . \phi(r) + \phi(r) \qquad [(**)] \\
&= (k+1) . \phi(r)
\end{aligned}
$$

Jadi, $\phi(n.r) = n . \phi(r)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dan $r \in R_1$. $\blacksquare$

Imanuel AS / 181114008 Imanuel   Makassar, 6 Nov 2020

Selanjutnya Adb. $\phi(r^n) = (\phi(r))^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dan $r \in R_1$.

Dengan menggunakan induksi diperoleh,

- Sebelumnya, diketahui bahwa $n = 1$ adalah benar.

  Karena $\phi(r^1) = \phi(r) = (\phi(r))^1$

- Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \phi(r^2) &= \phi(r \cdot r) && [\text{ Jelas }] \\ &= \phi(r) \cdot \phi(r) && [\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \quad \forall a,b \in R_1] \\ &= (\phi(r))^2 && [\text{ Jelas}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(r^3) &= \phi(r \cdot r \cdot r) \\ &= \phi((r \cdot r) \cdot r) \\ &= \phi(r \cdot r) \cdot \phi(r) \\ &= \phi(r) \cdot \phi(r) \cdot \phi(r) \\ &= (\phi(r))^3 \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\phi(r^k) = \phi(\underbrace{r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}_{k \text{ suku}}) = (\phi(r))^k \ldots (*) \ [\text{berdasarkan looping sebelumnya}]$$

$$\begin{aligned} \phi(r^{k+1}) &= \phi(r^k \cdot r) && [\text{Jelas}] \\ &= \phi(r^k) \cdot \phi(r) && [\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \quad \forall a,b \in R_1] \\ &= (\phi(r))^k \cdot \phi(r) && [(*)] \\ &= (\phi(r))^{k+1} && [\text{Jelas}] \end{aligned}$$

Jadi, $\phi(r^n) = (\phi(r))^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dan $r \in R_1$.

Imanuel AS / 181114008 ~~Imanuel~~ Makassar, 6 Nov 2020

(2) Adb. $\phi(A) = \{\phi(a) \mid a \in A\}$ subgelanggang dari R_2.

Misalkan x, y dua anggota sebarang dari $\phi(R_1)$,
maka $x = \phi(a)$ dan $y = \phi(b)$, untuk suatu $a, b \in R_1$.

$a \in R_1$, $b \in R_1$ maka $-b \in R_1 \Rightarrow \phi(a+(-b)) \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow \phi(a) + \phi(-b) \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow \phi(a) - \phi(b) \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow x - y \in \phi(R_1)$

Juga, $a \in R_1$, $b \in R_1 \Rightarrow ab \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow \phi(ab) \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow \phi(a) \cdot \phi(b) \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow x \cdot y \in \phi(R_1)$

Jadi untuk sebarang $x, y \in \phi(R_1) \Rightarrow x - y \in \phi(R_1)$ dan $xy \in \phi(R_1)$.
Dengan demikian, $\phi(R_1)$ subgelanggang dari R_2. ..... (*)

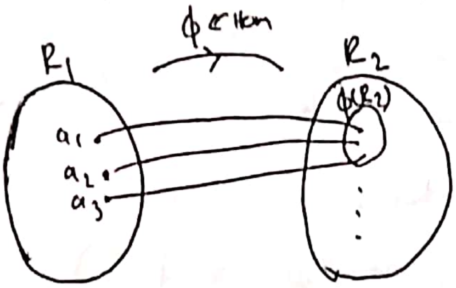
Selanjutnya, karena A ideal dari R_1.
Maka $A \neq \emptyset$ dan $A \subseteq R_1$.
Karena $\phi(A) = \{\phi(a) \mid a \in A\}$ artinya $\phi(A) \subseteq \phi(R_1)$.
Jadi, karena $\phi(A) \subseteq \phi(R_1)$ maka jelas
$\phi(A)$ subgelanggang dari R_2.

$\blacksquare$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 6 Nov 2020

(3) Adb. Jika R_1 komutatif, maka :

$\phi(R_1) = \{ y \in R_2 \mid y = \phi(x) \text{ u/ suatu } x \in R_1 \}$ komutatif.



Ambil $a, b \in \phi(R_1)$ sebarang

Maka terdapat $x, y \in R_1$ sehingga

$\phi(x) = a$

$\phi(y) = b$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow a \cdot b &= \phi(x) \cdot \phi(y) \\
&= \phi(xy) \\
&= \phi(yx) \\
&= \phi(y) \cdot \phi(x) \\
&= b \cdot a
\end{aligned}
$$

Jadi $\phi(R_1) = \{ y \in R_2 \mid y = \phi(x) \text{ u/ suatu } x \in R_1 \}$ komutatif jika R_1 komutatif. ∎

Imanuel AS / 181114l008 Imanuel

Makassar, 6 Novem 2020

(4) Adb. Jika R_1 memiliki unsur kesatuan yaitu $1_{R_1} \in R_1$, $R_2 \neq \{0_{R_2}\}$ dan ϕ surjektif maka $\phi(1_{R_1})$ merupakan unsur kesatuan di R_2.

Bukti:

Diketahui : $1_{R_1} \in R_1$ unsur kesatuan di R_1.

Akan ditunjukkan: $\phi(1_{R_1})$ unsur kesatuan di R_2.

Ambil sebarang $a' \in R_2$.

Karena ϕ surjektif, maka ada a di R_1, sehingga $\phi(a) = a'$.

Pandang
$$\begin{aligned}
\phi(1_{R_1}) \cdot a' &= \phi(1_{R_1}) \cdot \phi(a) && [\phi(a) = a'] \\
&= \phi(1_{R_1} \cdot a) && [\phi \text{ homomorfisma}] \\
&= \phi(a) && [1_{R_1} \cdot a = a] \\
&= a'
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh
$a' \cdot \phi(1_{R_1}) = \phi(a) \cdot \phi(1_{R_1}) = a'$.

Oleh karena a' diambil sebarang di R_1,

Maka $\phi(1_{R_1}) \cdot a' = a' \cdot \phi(1_{R_1}) = a'$, untuk setiap $a' \in R_2$.

Jadi $\phi(1_{R_1})$ merupakan unsur kesatuan di R_2.

(5) Adb : Jika A ideal dari R_1 maka

$\phi(A) = \{b \in R_2 \mid b = \phi(a)$ untuk suatu $a \in A\}$

merupakan ideal dari R_2.

Bukti :

Misalkan x, y dua anggota sebarang dari $\phi(R_1)$

Maka $x = \phi(a)$ dan $y = \phi(b)$, untuk suatu $a, b \in R_1$

$$a \in R_1,\ b \in R_1 \text{ maka } -b \in R_1 \Rightarrow \phi(a+(-b)) \in \phi(R_1)$$
$$\Rightarrow \phi(a) + \phi(-b) \in \phi(R_1)$$
$$\Rightarrow \phi(a) - \phi(b) \in \phi(R_1)$$
$$\Rightarrow x - y \in \phi(R_1)$$

Juga, $a \in R_1, b \in R_1 \Rightarrow a \cdot b \in \phi(R_1)$
$$\Rightarrow \phi(ab) \in \phi(R_1)$$
$$\Rightarrow \phi(a) \cdot \phi(b) \in \phi(R_1)$$
$$\Rightarrow x \cdot y \in \phi(R_1)$$

Jadi, untuk sebarang $x, y \in \phi(R_1) \Rightarrow x - y \in \phi R_1$ dan $xy \in \phi(R_1)$

Maka menurut Teorema 1 Subring :

Dengan demikian, $\phi(R_1)$ subring dari R_2. ......(*)

Selanjutnya, karena A ideal dari R_1

Maka $A \subseteq R_1$, sehingga $\phi(A) \subseteq \phi(R_1)$

Maka berdasarkan (*) :

$\phi(A)$ subring dari R_2.

Karena $\phi(A)$ subring dari R_2, maka menurut Teorema 1 subring berlaku :

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \forall a,b \in \phi(A) \Rightarrow a-b \in \phi(A) \\ (2)\ \forall a,b \in \phi(A) \Rightarrow ab \in \phi(A)\end{array}\right\} \ldots(**)$$

Karena (**) terjadi, dan jelas $\phi(A) \neq \phi$ dan $\phi(A) \subseteq R_2$ berlaku.

Maka menurut Teorema 2.28 Buku Struktur Aljabar Prof. Suradi :

$\phi(A)$ merupakan ideal dari R_2. ▨

Karena $a, b \in \phi(A)$ sebarang dan $\phi(A) \subseteq R_2$

maka jelas untuk $c \in R_2$ sebarang berlaku

$a \cdot c \in \phi(A)$

$c \cdot a \in \phi(A)$

Imanuel AS / 1811141008 [signature]

Makassar, 30 Oktober 2020

$\boxed{N}$

Jika $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ homomorfisma gelanggang, maka:

(1) Jika ϕ surjektif / onto maka ϕ epimorfisma.

(2) Jika ϕ injektif / satu-satu maka ϕ monomorfisma.

(3) Jika ϕ bijektif maka ϕ isomorfisma

$(R_1 \cong R_2$ "R_1 isomorf R_2")

(4) Jika $R_1 = R_2$ maka ϕ endomorfisma.

(5) Jika ϕ endomorfisma dan ϕ bijektif maka ϕ Automorfisma

$\boxed{D_4}$ Berikan masing-masing 1 contoh dan buktikan dari no (1) s/d no (5).

Imanuel AS/ 1811141008

Makassar, 30 Oktober 2020

Catatan juga :

(1.) $\phi : R_1 \to R_2$ hom + ϕ surjektif

$\Rightarrow$ ϕ epimorfisma

(2.) $\phi : R_1 \to R_2$ hom + ϕ injektif

$\Rightarrow$ ϕ monomorfisma

(3.) $\phi : R_1 \to R_2$ hom + ϕ bijektif

$\Rightarrow$ ϕ isomorfisma

(4.) $\phi : R_1 \to R_1$ hom

$\Rightarrow$ ϕ endomorfisma

} Pemetaan ke ring yang sama

(5.) ϕ endomorfisma + ϕ bijektif

$\Rightarrow$ ϕ Automorfisma.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 6 Nov 2020

$\boxed{D_4}$ Berikan masing-masing 1 contoh dan buktikan dari no(1) s/d no(5).

Penyelesaian :

(1) Contoh Epimorfisma Ring

Diketahui : $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah Ring

$(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ adalah Ring

Misalkan $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ $[\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}]$

$\phi(a) = [a]_n = a \bmod n$

Perhatikan bahwa

$\vdots$

$\phi(-6) = \bar{6} = \bar{1}$

$\phi(-5) = \bar{5} = \bar{0}$

$\phi(-4) = \bar{4}$

$\phi(-3) = \bar{3}$

$\phi(-2) = \bar{2}$

$\phi(-1) = \bar{1}$

$\phi(0) = \bar{0}$

$\phi(1) = \bar{1}$

$\phi(2) = \bar{2}$

$\phi(3) = \bar{3}$

$\phi(4) = \bar{4}$

$\phi(5) = \bar{5} = \bar{0}$

$\phi(6) = \bar{6} = \bar{1}$

$\vdots$

Jadi, ϕ Surjektif (onto)

Selanjutnya,

- Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$
  $\Rightarrow \phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$
- Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$
  $\Rightarrow \phi(a.b) = \phi(a) . \phi(b)$

Jadi, ϕ Homomorfisma Ring

$\therefore$ Karena ϕ homomorfisma ring yang surjektif (onto), maka ϕ epimorfisma ring.

Imanuel AS/ 1811141008 [signature] Makassar, 6 Nov 2020

(2) Contoh Monomorfisma Ring

Diketahui : $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Ring

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ Ring

Misalkan $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$f(n) = n$

- Adb ϕ homomorfisma ring

Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$ sebarang

Perhatikan bahwa

$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$

dan juga

$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$

- Adb ϕ injektif

Ambil sebarang $a \in \mathbb{Z}$

Maka $f(n) = n$

ϕ injektif karena $\phi(a) = \phi(a')$ berlaku $a = a'$

$\therefore$ Karena ϕ homomorfisma ring yang injektif, maka

ϕ Monomorfisma Ring

· Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 6 Nov 2020

(3) Contoh Isomorfisma

Misalkan $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Himpunan $(R, +, \cdot)$ Ring [Diketahui]

Didefinisikan pemetaan ϕ dari ring $\mathbb{C}$ ke ring R, yaitu

$$\phi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

untuk setiap $a+bi \in \mathbb{C}$.

→ Adb. ϕ merupakan homomorfisma

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$

Tulis $x = a_1 + b_1 i$

$y = a_2 + b_2 i$

Note that

$$\begin{aligned}
\phi(x \cdot y) &= \phi((a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)) \\
&= \phi(a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + (b_1 \cdot b_2) i^2) \\
&= \phi(a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + (b_1 \cdot b_2)) \quad [i^2 = -1] \\
&= \phi((a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i) \\
&= \begin{bmatrix} (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) & (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \\ -(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) & (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \phi(a_1 + b_1 i) \cdot \phi(a_2 + b_2 i) \\
&= \phi(x) \cdot \phi(y)
\end{aligned}$$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 6 Nov 2020

$$\begin{aligned}
\phi(x+y) &= \phi((a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)) \\
&= \phi((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i) \\
&= \begin{bmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) \\ -(b_1+b_2) & (a_1+a_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \phi(a_1+b_1 i) + \phi(a_2+b_2 i) \\
&= \phi(x) + \phi(y)
\end{aligned}$$

$\therefore$ ϕ adalah homomorfisma ring.

•) Adb. ϕ bijektif

Ambil sebarang $a+bi$ dan $x+yi \in \mathbb{C}$

sedemikian sehingga $\phi(a+bi) = \phi(x+yi)$

Karena $\phi(a+bi) = \phi(x+yi)$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

Akibatnya $a=x$ dan $b=y$.

Dengan demikian $a+bi = x+yi$, yang berarti ϕ injektif.

Ambil sebarang $A = \begin{bmatrix} r & s \\ -s & r \end{bmatrix} \in R$

Berarti $r, s \in \mathbb{R}$.

Dibentuk $c = r+si$, maka jelas $c \in \mathbb{C}$.

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\phi(c) = \phi(r+si) = A$$

Oleh karena itu, ϕ bersifat surjektif.

$\therefore$ Karena ϕ injektif sekaligus surjektif, maka ϕ bijektif.

$\therefore$ Karena ϕ homomorfisma ring dan ϕ bijektif, maka ϕ Isomorfisma Ring.

(4) Contoh Endomorfisma Ring

$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad , \phi(z) = \overline{z}$

$a+bi \longmapsto a-bi \quad , \phi(a+bi) = a-bi$

ϕ Endomorfisma Ring.

Bukti :

Ambil $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sebarang,

Tulis, $z_1 = a_1 + b_1 i$ u/ suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$z_2 = a_2 + b_2 i$ u/ suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

(a) Adb. ϕ pemetaan

Misal $z_1 = z_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$

Note that,

$$\phi(z_1) = \phi(a_1+b_1 i) = a_1 - b_1 i = a_2 - b_2 i$$
$$= \phi(a_2 + b_2 i)$$
$$= \phi(z_2)$$

$\therefore \phi$ pemetaan

(b) Perhatikan bahwa,

$$\phi(z_1 + z_2) = \phi((a_1+b_1 i) + (a_2+b_2 i))$$
$$= \phi((a_1+a_2) + (b_1+b_2)i)$$
$$= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i)$$
$$= \phi(a_1+b_1 i) + \phi(a_2+b_2 i)$$
$$= \phi(z_1) + \phi(z_2)$$

Selanjutnya

$$\phi(z_1 \cdot z_2) = \phi((a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)) \quad \rightarrow \boxed{i^2=-1}$$
$$= \phi((a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i)$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$
$$= (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i)$$
$$= \phi(a_1+b_1 i) \cdot \phi(a_2+b_2 i)$$
$$= \phi(z_1) \cdot \phi(z_2)$$

$\therefore \phi$ homomorfisma ring

$\therefore$ Karena ϕ homomorfisma ring yang merupakan pemetaan ke ring yang sama, maka:

ϕ Endomorfisma Ring.

Imanuel AS / 181114008

Makassar 6 Nov 2020

(5) Contoh Automorfisma Ring.

Diperhatikan kembali contoh (4) Endomorfisma Ring sebelumnya.

Diketahui bahwa,

$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\phi(z) = \overline{z}$.

$a+bi \longmapsto a-bi$, $\phi(a+bi) = a-bi$.

ϕ Endomorfisma Ring.

<u>Adb. ϕ Bijektif.</u>

Ambil sebarang a_1+b_1i dan $a_2+b_2i \in \mathbb{C}$

sedemikian sehingga $\phi(a_1+b_1i) = \phi(a_2+b_2i)$

Karena $\phi(a_1+b_1i) = \phi(a_2+b_2i)$, diperoleh

$$a_1-b_1i = a_2-b_2i$$

Akibatnya $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$.

Dengan demikian $a_1+b_1i = a_2+b_2i$, yang berarti ϕ injektif.

Ambil sebarang $A = a-bi \in \mathbb{C}$

Berarti $a, b \in \mathbb{R}$.

Dibentuk $c = a+bi$, maka jelas $c \in \mathbb{C}$.

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\phi(c) = \phi(a+bi) = A.$$

Oleh karena itu, ϕ bersifat surjektif.

Karena ϕ injektif sekaligus surjektif, maka

ϕ bijektif.

$\therefore$ Karena ϕ endomorfisma ring dan ϕ bijektif, maka

ϕ Automorfisma Ring.