Makassar, 30 Oktober 2020

TUGAS

Teori Modul

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 29 Oktober 2020

Tugas 4

Bagaimana dengan $H \cup K$? Perlihatkan !

Penyelesaian :

Untuk H dan K masing-masing merupakan submodul dari M, maka $H \cup K$ tidak selamanya merupakan submodul dari M.

Counter Example :

Misal : Untuk $2\mathbb{Z}$ dan $3\mathbb{Z}$ masing-masing merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$.

∘) $2\mathbb{Z}$ submodul dari $\mathbb{Z}$ [obvious]

∘) Adb. $3\mathbb{Z}$ submodul dari $\mathbb{Z}$.

Dik : $\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$-modul, dan $3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ [obvious]

Note that,

(i) $\exists\ 0 \in 3\mathbb{Z}$ [obvious]

(ii) Ambil sebarang $z_1, z_2 \in 3\mathbb{Z}$

Tulis $z_1 = 3k_1$ u/ suatu $k_1 \in \mathbb{Z}$

$z_2 = 3k_2$ u/ suatu $k_2 \in \mathbb{Z}$

Note that,

$$(z_1 - z_2) = 3k_1 - 3k_2$$
$$= 3(k_1 - k_2) \in 3\mathbb{Z}$$

(iii) Ambil sebarang $z \in 3\mathbb{Z}$, Tulis $z = 3k$ u/ suatu $k \in \mathbb{Z}$

Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$

Note that, $r \cdot z = r \cdot 3k$

$= 3 \cdot (kr) \in 3\mathbb{Z}$

$\therefore 3\mathbb{Z}$ submodul dari $\mathbb{Z}$ . . . . (*)

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 29 Okto 2020

Selanjutnya,

Perhatikan bahwa, $2\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

$3\mathbb{Z} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = \{\dots, -9, -6, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 6, 9, \dots\}$

Akan ditunjukkan : $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ bukan submodul dari $\mathbb{Z}$

Dik : $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$-modul, dan

$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ [obvious]

Dengan menggunakan Teorema 1, perhatikan bahwa,

(i) $\exists\ 0 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

(ii) Ambil $-4, -3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

Note that,

$(-4-(-3)) = (-4+3)$

$= -1 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

Jadi, syarat (ii) pada Teorema 1 tidak terpenuhi.

$\therefore$ Karena syarat (ii) pada Teorema 1 tidak terpenuhi, maka untuk H dan K masing-masing merupakan submodul dari M, tidak selamanya $H \cup K$ merupakan submodul dari M. $\boxtimes$.

Imanuel AS / 1811141008 [illegible]

Makassar, 29 oktober 2020

Tugas 2

coba perlihatkan bukti Teorema 3 dengan menggunakan Teorema 2.

Penyelesaian:

Misal M adalah R-modul dan N_i dengan $i = 1, 2, \dots, k$.

N_i adalah submodul dari M.

Maka $\bigcap_{i=1}^{k} N_i$ merupakan submodul dari M.

Bukti: (Dengan menggunakan Teorema 2.)

Dik: N_i adalah submodul dari M, artinya $N_1, N_2, N_3, \dots, N_k$ masing-masing merupakan submodul dari M. (Modul atas ring R).

Maka menurut Teorema 2,

$N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \dots \cap N_k$ juga merupakan submodul dari M.

Atau dengan kata lain,

$\bigcap_{i=1}^{k} N_i$ merupakan submodul dari M. ■.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 29 Oktober 2020

Tugas 3

Coba Perlihatkan Teorema 4 dengan menggunakan teorema 1

Penyelesaian :

Dik : M adalah R-modul, dan $N_1 + N_2 + \dots + N_k \subseteq M$

Diperhatikan bahwa,

$$N_1 + N_2 + \dots + N_k = \{ n_1 + n_2 + \dots + n_k \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2, \dots, n_k \in N_k \}$$

(i.) $0 \in N_1 + N_2 + \dots + N_k$ [obvius] (krn $N_1, N_2, \dots, N_k$ Submodul dari M).

(ii) Ambil sebarang $x_1, x_2 \in N_1 + N_2 + \dots + N_k$

Tulis, $x_1 = (n_{1_1} + n_{2_1} + \dots + n_{k_1})$

$x_2 = (n_{1_2} + n_{2_2} + \dots + n_{k_2})$

untuk suatu $n_{1_1}, n_{1_2} \in N_1$

$n_{2_1}, n_{2_2} \in N_2$

$\vdots$

$n_{k_1}, n_{k_2} \in N_k$

Karena $N_1, N_2, \dots, N_k$ adalah submodul,

maka $(n_{1_1} - n_{1_2}) \in N_1$

$(n_{2_1} - n_{2_2}) \in N_2$

$\vdots$

$(n_{k_1} - n_{k_2}) \in N_k$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= (n_{1_1} + n_{2_1} + \dots + n_{k_1}) - (n_{1_2} + n_{2_2} + \dots + n_{k_2}) \\ &= (n_{1_1} - n_{1_2}) + (n_{2_1} - n_{2_2}) + \dots + (n_{k_1} - n_{k_2}) \\ &\in N_1 + N_2 + \dots + N_k \end{aligned}$$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 29 Oktober 2020

(iii) Ambil sebarang $r \in R$

karena $N_1, N_2, \ldots, N_k$ adalah submodul,

maka $rn_1 \in N_1$, $rn_2 \in N_2, \ldots, rn_k \in N_k$

Akibatnya $r x_1 = r(n_{1_1} + n_{2_1} + \ldots + n_{k_1})$

$= rn_{1_1} + rn_{2_1} + \ldots + rn_{k_1} \in N_1 + N_2 + \ldots + N_k$

$\therefore$ Menurut Teorema 1 disimpulkan bahwa

$N_1 + N_2 + \ldots + N_k$ submodul dari M atau

$\sum_{i=1}^{k} N_i$ submodul dari M. $\blacksquare$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 30 Oktober 2020

(2) $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

Misal $\mathbb{Z}_7$ adalah $\mathbb{Z}_7$ - Modul

$$\mathbb{Z}_7 = \langle \bar{1} \rangle = \{ n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_7 \}$$

$$= \{ (\bar{0}.\bar{1}), (\bar{1}.\bar{1}), (\bar{2},\bar{1}), (\bar{3}.\bar{1}), (\bar{4},\bar{1}), (\bar{5},\bar{1}), (\bar{6},\bar{1}) \}$$

$$= \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6} \}$$

Jadi $\mathbb{Z}_7$ adalah modul siklik yang dibangun oleh $\bar{1}$.

Tugas 4

Model Siklik
- Berhingga
- Tak Berhingga

Bagaimana dengan $\langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{4} \rangle, \langle \bar{5} \rangle, \langle \bar{6} \rangle$?

- Untuk $\langle \bar{2} \rangle$

Perhatikan bahwa,

$$\mathbb{Z}_7 = \langle \bar{2} \rangle = \{ n.\bar{2} \mid n \in \mathbb{Z}_7 \}$$

$$= \{ (\bar{0}.\bar{2}), (\bar{1}.\bar{2}), (\bar{2}.\bar{2}), (\bar{3}.\bar{2}), (\bar{4}.\bar{2}), (\bar{5}.\bar{2}), (\bar{6}.\bar{2}) \}$$

$$= \{ \bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8} = \bar{1}, \overline{10} = \bar{3}, \overline{12} = \bar{5} \}$$

$$= \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6} \}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_7$ adalah modul siklik yang dapat dibangun oleh $\bar{2}$ juga.

- Untuk $\langle \bar{3} \rangle$

Perhatikan bahwa,

$$\mathbb{Z}_7 = \langle \bar{3} \rangle = \{ n.\bar{3} \mid n \in \mathbb{Z}_7 \}$$

$$= \{ (\bar{0}.\bar{3}), (\bar{1}.\bar{3}), (\bar{2}.\bar{3}), (\bar{3}.\bar{3}), (\bar{4}.\bar{3}), (\bar{5}.\bar{3}), (\bar{6}.\bar{3}) \}$$

$$= \{ \bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9} = \bar{2}, \overline{12} = \bar{5}, \overline{15} = \bar{1}, \overline{18} = \bar{4} \}$$

$$= \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6} \}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_7$ adalah modul siklik yang dapat dibangun oleh $\langle \bar{3} \rangle$ juga.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 30 oktober 2020

- Untuk $\langle\bar{4}\rangle$

Perhatikan bahwa,

$$\mathbb{Z}_7 = \langle\bar{4}\rangle = \{n.\bar{4} \mid n \in \mathbb{Z}_7\}$$
$$= \{(\bar{0}.\bar{4}), (\bar{1}.\bar{4}), (\bar{2}.\bar{4}), (\bar{3}.\bar{4}), (\bar{4}.\bar{4}), (\bar{5}.\bar{4}), (\bar{6}.\bar{4})\}$$
$$= \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}=\bar{1}, \overline{12}=\bar{5}, \overline{16}=\bar{2}, \overline{20}=\bar{6}, \overline{24}=\bar{3}\}$$
$$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_7$ adalah modul siklik yang dapat dibangun oleh $\langle\bar{4}\rangle$ juga.

- Untuk $\langle\bar{5}\rangle$

Perhatikan bahwa,

$$\mathbb{Z}_7 = \langle\bar{5}\rangle = \{n.\bar{5} \mid n \in \mathbb{Z}_7\}$$
$$= \{(\bar{0}.\bar{5}), (\bar{1}.\bar{5}), (\bar{2}.\bar{5}), (\bar{3}.\bar{5}), (\bar{4}.\bar{5}), (\bar{5}.\bar{5}), (\bar{6}.\bar{5})\}$$
$$= \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}=\bar{3}, \overline{15}=\bar{1}, \overline{20}=\bar{6}, \overline{25}=\bar{4}, \overline{30}=\bar{2}\}$$
$$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_7$ adalah modul siklik yang dapat dibangun oleh $\langle\bar{5}\rangle$ juga.

- Untuk $\langle\bar{6}\rangle$

Perhatikan bahwa,

$$\mathbb{Z}_7 = \langle\bar{6}\rangle = \{n.\bar{6} \mid n \in \mathbb{Z}_7\}$$
$$= \{(\bar{0}.\bar{6}), (\bar{1}.\bar{6}), (\bar{2}.\bar{6}), (\bar{3}.\bar{6}), (\bar{4}.\bar{6}), (\bar{5}.\bar{6}), (\bar{6}.\bar{6})\}$$
$$= \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}=\bar{5}, \overline{18}=\bar{4}, \overline{24}=\bar{3}, \overline{30}=\bar{2}, \overline{36}=\bar{1}\}$$
$$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_7$ adalah modul siklik yang dapat dibangun oleh $\langle\bar{6}\rangle$ juga.