Makassar, 30 November 2018

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan XIII —

(Catatan)

Imanuel AS

1811141008

Imanuel

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke-13 / Catatan Makassar, 23 Nova 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan pertemuan ke-13

# Faktorisasi Daerah Integral (Bagian I)

D daerah integral →
- D ring komutatif
- D punya unsur kesatuan
- D tidak ada pembagi nol

$\boxed{D}$ Misal $D$ daerah integral dengan $a \in D\setminus\{0_R\}$, $b \in D\setminus\{0_R\}$. $a$ disebut membagi $b$ jika ada $c \in D\setminus\{0_R\}$ sehingga $b = ac$ $(a|b)$

$\boxed{E}$ (1.) $\mathbb{Q}$ daerah integral

$7|13$ karena terdapat $\frac{13}{7} \in \mathbb{Q}$

sehingga $13 = 7 \cdot \frac{13}{7}$

(2) $\mathbb{Z}$ daerah integral

$2|4 \Rightarrow \exists\ 2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $4 = 2 \times 2$

$2 \nmid 5 \Rightarrow \nexists\ c \in \mathbb{Z}$ sehingga $5 = 2 \cdot c$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel                                                  Makassar, 23 November 2020

$\boxed{T_1}$

Jika $D$ daerah integral maka untuk setiap $a, b, c \in D\setminus\{0_R\}$ berlaku:

(1) $a|a$ $\forall a \in D\setminus\{0_R\}$ [Sifat refleksif] $\boxed{D_1}$

(2) Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$ [Sifat transitif]

(3.) Jika $a|b$ maka $b\nmid a$ [Tidak Simetri] $\boxed{D_2}$

(4.) Jika $a|b$ dan $a|c$ maka $\boxed{D_3}$

(a) $a|(b+c)$

(b.) $a|(b-c)$

(5.) Jika $a|b$ maka $a|bc$. $\boxed{D_4}$

Bukti:

(1) Adb $a|a$ $\forall a \in D\setminus\{0_R\}$ [Sifat refleksif]

Ambil sebarang $a \in D\setminus\{0_R\}$

Terdapat $1_R \in D$ sehingga $a = a1$,

dimana $1_R$ adalah unsur kesatuan dalam daerah integral $D$.

Hal ini berarti $a$ membagi $a$ atau $a|a$ $\forall a \in D\setminus\{0_R\}$.

(2) Adb Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$ [Sifat Transitif]

Misal $D$ daerah integral

Ambil $a, b, c \in D\setminus\{0_R\}$ sebarang dengan $a|b$ dan $b|c$

Adb. $a|c$.

Perhatikan bahwa

$a|b \Rightarrow \exists\, d \in D\setminus\{0_R\} \ni b = ad$

$b|c \Rightarrow \exists\, e \in D\setminus\{0_R\} \ni c = be$

Akibatnya, $c = be = (ad)e$

$= a(de)$ [Asosiatif]

Karena $d \neq 0_R$ dan $e \neq 0_R$, $D$ daerah integral akibatnya $de \neq 0_R$.

Pilih $f = de \in D\setminus\{0_R\}$ sehingga

$c = af \Rightarrow a|c$.

Imanuel AS / 1811141008 [signature] Makassar, 23 Novem 2016

(3) Adb. $a|b$ maka $b \nmid a$ [Tidak simetri]

Faktorisasi dalam daerah integral tidak simetri.
Sebagai contoh, pandang $(\mathbb{Z}, +, \times)$ daerah integral.
Jelas 2 membagi 6, tetapi 6 tidak membagi 2.

(4). Adb. Jika $a|b$ dan $a|c$ maka
(a) $a|(b+c)$
(b) $a|(b-c)$

Misalkan $D$ daerah integral.
Ambil sebarang $a, b, c \in D \setminus \{0_R\}$ sehingga $b = ad$. dan $c = ae$
Sehingga $b + c = ad + ac = a(d+c)$.

Karena $d, e \in D\setminus\{0_R\}$ maka $(d+c) \in D\setminus\{0_R\}$
Jadi $a$ membagi $(b+c)$, atau $a|(b+c)$.
Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan $a|(b-c)$.

(5) Adb. Jika $a|b \Rightarrow a|bc$

Misalkan $a, b \in D\setminus\{0_R\}$ dengan $a|b$
Ambil sebarang $c \in D\setminus\{0_R\}$
Karena $a|b \Rightarrow$ ada $d \in D\setminus\{0_R\}$ sehingga $b = ad$.
Pandang $bc = (ad)c$
$= a(dc)$ [Assosiatif]

Jelas $dc \in D\setminus\{0_R\}$ karena $d \in D\setminus\{0_R\}$ dan $c \in D\setminus\{0_R\}$
maka berlaku sifat tutup pada semigrup $(R, \times)$.
Jadi $a|bc$.

Imanuel AS / 1811141008 Matematika  Makassar, 23 November 2020

D daerah Ideal Utama (P.I.D)

↳ Daerah integral yang setiap idealnya merupakan ideal utama.

Ideal utama ⟶ Ideal yang dibangun oleh satu unsur.

$\boxed{T_2}$

Jika D daerah integral dan $I_1$, $I_2$ ideal utama yang dibangun oleh $a \in D \setminus \{0_R\}$ dan $b \in D \setminus \{0_R\}$ maka $a|b$ jika dan hanya jika $I_2 \subset I_1$

Bukti

Misal $a, b \in D \setminus \{0_R\}$

$I_1 := \langle a \rangle = \{ra \mid r \in D\}$

$I_2 = \langle b \rangle = \{rb \mid r \in D\}$

$\Rightarrow$ $a|b \Rightarrow \exists\, c \in D \setminus \{0_R\} \ni b = ac$

Adb. $I_2 \subset I_1$

Ambil $x \in I_2$ sebarang,

Jadi $x = rb$ u/ suatu $r \in D$

$= r(ac)$

$= r(ca)$

$= (rc)a \in I_1$

Jadi, $I_2 \subset I_1$

$\Leftarrow$ Misal $I_2 \subset I_1$

Karena $I_2 = \langle b \rangle$, Jadi $b \in I_2 \subset I_1$

Jadi $b \in I_1$

$b = ra$ u/ suatu $r \in D \setminus \{0_R\}$

$= ar$

Jadi, $a|b$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 23 November 2020

## Unit

$\boxed{D}$ Misal D daerah integral, $a \in D$ disebut unit jika $a | b \ \forall b \in D \setminus \{0_D\}$.

$\boxed{E}$

(1) $\mathbb{Z}$ daerah integral, $1$ unit di $\mathbb{Z}$

karena $\forall b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $1 | b$

$-1$ unit di $\mathbb{Z}$ karena $\forall b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $-1 | b$

(2) $\mathbb{Q}$ daerah integral

$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ unit karena $\frac{2}{3} | b$ $\forall b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\forall p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ merupakan

$\frac{2}{3} | b$

$\Rightarrow b = \frac{2}{3} c \quad c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$b = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} b\right)$

$b = b$

$\therefore$ c ada

$\boxed{D_5}$ Cari contoh Daerah Integral lain, Tentukan unsur unitnya.

Jawab :

(1) $\mathbb{R}$ daerah integral, $1$ unit di $\mathbb{R}$

karena $\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $1 | b$.

Dan $-1$ juga unit di $\mathbb{R}$ karena $\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $-1 | b$.

(2) $(\mathbb{Z}_5, +_5, \times_5)$ daerah integral, $\bar{1}$ unit di $(\mathbb{Z}_5, +_5, \times_5)$

karena $\forall \bar{b} \in (\mathbb{Z}_5, +_5, \times_5) \setminus \{\bar{0}\}$ $\bar{1} | b$.