Makassar, 30 November 2020

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan IX —

(catatan)

Imanuel AS

1811141008

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke-9 / Catatan Makassar, 14 oktober 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan Pertemuan ke-9

Ring Kuosien / Ring Faktor

Misal R ring, I ideal R, $a \in R$

$I + a = \{x + a \mid x \in I\}$ ⇝ Koset kanan

$a + I = \{a + x \mid x \in I\}$ ⇝ Koset kiri

$\boxed{E}$

$\mathbb{Z}$ ring, $2\mathbb{Z}$ Ideal dari $\mathbb{Z}$, misal $a \in \mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z} + a = \{x + a \mid x \in 2\mathbb{Z}\}$

$a + 2\mathbb{Z} = \{a + x \mid x \in 2\mathbb{Z}\}$

$\wp_r = \{2\mathbb{Z} + a \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

$a = 1 \Rightarrow 2\mathbb{Z} + 1 = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

$a = 2 \Rightarrow 2\mathbb{Z} + 2 = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots\} = 2\mathbb{Z}$

$\wp_r = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} + 1\}$.

Serupa dengan hal diatas, juga dapat diperiksa untuk koset-koset kirinya juga hanya dipenuhi oleh:

$\wp_l = \{2\mathbb{Z} + 1 + 2\mathbb{Z}\}$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 Oktober 202

•)

+	$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}+1$
$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}+1$
$2\mathbb{Z}+1$	$2\mathbb{Z}+1$	$2\mathbb{Z}$

$\rightarrow (\wp_r, +)$ Grup Abelian

•)

x	$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}+1$
$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$
$2\mathbb{Z}+1$	$2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}+1$

$\rightarrow (\wp_r, \times)$ Semigrup

•) $(\wp_r, +, \times)$ Distributif

$\therefore (\wp_r, +, \times)$ Ring

Imanuel AS / 1811141008 Manuel

Makassar, 14 oktober 2020

Definisi Ring Kosien

Misalkan R ring, I ideal dari R

$R/_I = \{ \bar{x} = a + I \mid a \in R \}$

dengan definisi pengaitan penjumlahan :

$$+ : R/_I \times R/_I \to R/_I$$
$$(a+I, b+I) \mapsto (a+b) + I$$

dan perkalian :

$$\times : R/_I \times R/_I \longrightarrow R/_I$$
$$(a+I, b+I) \longmapsto (ab) + I$$

Adb. Pengaitan ini well defined.

Misal $\bar{x}_1 = a_1 + I$ $\quad \bar{y}_1 = b_1 + I$, $\bar{x}_2 = a_2 + I$ $\quad \bar{y}_2 = b_2 + I$ dengan

(1) $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \Rightarrow a_1 + I = a_2 + I$

(2) $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 \Rightarrow b_1 + I = b_2 + I$

Akan ditunjukkan bahwa

(1) $(a_1 + b_1) + I = (a_2 + b_2) + I$

(2) $(a_1 b_1) + I = (a_2 b_2) + I$

Imanuel AS / 1811141008 Imanu

Makassar, 14 Oktober 20..

$\boxed{N}$ Jika I ideal dari ring R maka
$$a+I = b+I \Leftrightarrow a-b \in I$$

(1) Adb. $(a_1+b_1)+I = (a_2+b_2)+I$

Perhatikan bahwa

$a_1+I = a_2+I \Leftrightarrow a_1-a_2 \in I$ .....(*)

$b_1+I = b_2+I \Leftrightarrow b_1-b_2 \in I$ ....(**)

diperoleh :

$(a_1+b_1)-(a_2+b_2) = (a_1-a_2)+(b_1-b_2) \in I$

[Dari (*) dan (**) berlaku operasi tutup pada penjumlahan I]

yang berakibat

$$(a_1+b_1)+I = (a_2+b_2)+I$$

$\therefore$ Berdasarkan operasi penjumlahannya, dia well defined.

(2) Adb. $(a_1b_1)+I = (a_2b_2)+I$ $\boxed{D_1}$

Perhatikan bahwa

$a_1+I = a_2+I \Leftrightarrow (a_1-a_2) \in I$

$b_1+I = b_2+I \Leftrightarrow (b_1-b_2) \in I$

Jadi, $a_2 \in a_1+I$ dan $b_2 \in b_1+I$

Oleh karena itu, ada $\alpha, \beta \in I$ sedimikian rupa sehingga

$a_2 = a_1+\alpha$ dan $b_2 = b_1+\beta$

Perhatikan bahwa,

$$a_2b_2 = (a_1+\alpha)(b_1+\beta)$$
$$a_2b_2 = a_1b_1 + a_1\beta + \alpha b_1 + \alpha\beta$$
$$a_2b_2 - a_1b_1 = a_1\beta + \alpha b_1 + \alpha\beta \in I$$

yang berakibat

$$(a_1b_1)+I = (a_2b_2)+I$$

$\therefore$ Berdasarkan operasi perkaliannya, dia well defined.

Imanuel AS / 1811141008 Ihsan

Makassar, 14 Oktober 20

Fakta $\boxed{D_2}$

$R/I = \{ \bar{x} = a + I \mid a \in R \}$

$(R/I, +, \times)$ merupakan ring

.) Identitas $(+) \Rightarrow 0_R + I = I$

.) Invers $(+)$ dari $\bar{x}$ $a + I$ adalah $-\bar{x} = -a + I$

Bukti :

Pertama harus ditunjukkan, bahwa operasi tersebut terdefinisi dengan baik. [DONE]

Selanjutnya, akan diselidiki sifat-sifat dari operasi di R/I, yaitu:

(i) Assosiatif dalam penjumlahan

Jika $(a+I)$, $(b+I)$, dan $(c+I)$ anggota sebarang di R/I maka berlaku :

$$\begin{aligned}\{(a+I)+(b+I)\}+(c+I) &= \{(a+b)+I\} + (c+I) \\ &= \{(a+b)+c\} + I \\ &= \{a+(b+c)\} + I \\ &= (a+I) + \{(b+c)+I\} \\ &= (a+I) + \{(b+I)+(c+I)\}\end{aligned}$$

(ii) Ada unsur identitas terhadap penjumlahan, yaitu $(0+I) \in R/I$, karena untuk sebarang $(a+I)$ di R/I memenuhi :

$(a+I)+(0+I) = (a+0)+I = a+I$ dan

$(0+I)+(a+I) = (0+a)+I = a+I$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 oktober 2020

(iii) Tiap-tiap anggota di R/I mempunyai invers terhadap penjumlahan di R/I.

Misalkan $(a+I) \in R/I$ sebarang,

maka $((-a)+I) \in R/I$ dan memenuhi:

$(a+I)+((-a)+I) = (a+(-a))+I = 0+I$ dan

$((-a)+I)+(a+I) = ((-a)+a)+I = 0+I$

oleh karena itu, untuk setiap $(a+I) \in R/I$ mempunyai invers di R/I, yaitu $((-a)+I)$.

(iv) Komutatif terhadap operasi penjumlahan

$$\begin{aligned}(a+I)+(b+I) &= (a+b)+I \\ &= (b+a)+I \\ &= (b+I)+(a+I)\end{aligned}$$

Dari keempat sifat tersebut diatas, yang dipenuhi oleh penjumlahan koset, menunjukkan R/I merupakan grup komutatif terhadap penjumlahan koset.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 oktober 2020

(V) Assosiatif terhadap perkalian di R/I

jika $(a+I)$, $(b+I)$, dan $(c+I)$ di R/I,

$$\{(a+I)(b+I)\}(c+I) = \{(ab)+I\}(c+I)$$
$$= \{(ab)c\}+I$$
$$= \{a(bc)\}+I$$
$$= (a+I)\{(bc)+I\}$$
$$= (a+I)\{(b+I)(c+I)\}$$

(Vi) Distributif perkalian terhadap penjumlahan di R/I,

jika $(a+I)$, $(b+I)$ dan $(c+I)$ di R/I, maka

$$(a+I)\{(b+I)+(c+I)\} = (a+I)\{(b+c)+I\}$$
$$= a(b+c)+I$$
$$= (ab+ac)+I$$
$$= ((ab)+I+(ac)+I)$$
$$= ((a+I)(b+I))+((a+I)(c+I))$$

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan:

$$\{(a+I)+(b+I)\}(c+I) = ((a+I)(c+I))+((b+I)(c+I))$$

dari semua sifat di atas (i) s/d (Vi), disimpulkan R/I merupakan ring, dan disebut ring kelas residu.

Imanuel AS / 181114l008 ATF

Makassar, 14 Oktober 2020

$\boxed{E}$ $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \rightsquigarrow$ Ring

$I = \{\bar{0}, \bar{2}\} \rightsquigarrow$ Ideal dari $\mathbb{Z}_4$

$\bar{0} + I = \{\bar{0}, \bar{2}\} = I$

$\bar{1} + I = \{\bar{1}, \bar{3}\}$

$\bar{2} + I = \{\bar{2}, \bar{0}\} = I$

$\bar{3} + I = \{\bar{3}, \bar{1}\}$

$\mathbb{Z}_4 / I = \{I, \bar{1} + I\}$

$\hookrightarrow$ Ring

+	I	1+I
I	I	1+I
1+I	1+I	I

×	I	1+I
I	I	I
1+I	I	1+I

$\boxed{D_3}$ (1) Misalkan $\mathbb{Z}$ ring dengan $4\mathbb{Z}$ ideal dari $\mathbb{Z}$.
Tentukan $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(2) Misalkan $2\mathbb{Z}$ ring dengan $6\mathbb{Z}$ ideal dari $2\mathbb{Z}$.
Tentukan $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Imanuel AS / 181114008 Makassar, 24 Oktober 20

Jawab:

(1) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \rightsquigarrow$ Ring

$4\mathbb{Z} = \{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\} \rightsquigarrow$ Ideal dari $\mathbb{Z}$

Note that

$\vdots$

$3+4\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$

$2+4\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$

$1+4\mathbb{Z} = \{\ldots, -7, -5, 1, 5, 9, \ldots\}$

$0+4\mathbb{Z} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$

$-1+4\mathbb{Z} = \{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, \ldots\}$

$-2+4\mathbb{Z} = \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, \ldots\}$

$-3+4\mathbb{Z} = \{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, \ldots\}$

$\vdots$

$\therefore \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{x} = a + 4\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ //

(2) $2\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} \rightsquigarrow$ Ring

$6\mathbb{Z} = \{\ldots, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \ldots\} \rightsquigarrow$ Ideal dari $2\mathbb{Z}$

Note that

$\vdots$

$-4+6\mathbb{Z} = \{\ldots, -16, -10, -4, 2, 8, \ldots\}$

$-2+6\mathbb{Z} = \{\ldots, -14, -8, -2, 4, 10, \ldots\}$

$=$ $0+6\mathbb{Z} = \{\ldots, -12, -6, 0, 6, 12, \ldots\} \to = 6\mathbb{Z}$

$2+6\mathbb{Z} = \{\ldots, -10, -4, 2, 8, 14, \ldots\}$ $=$

$4+6\mathbb{Z} = \{\ldots, -8, -2, 4, 10, 16, \ldots\}$

$\vdots$

$\therefore 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{x} = a + 6\mathbb{Z} \mid a = \ldots, -6, -4, -2, 0 \in 2\mathbb{Z}\}$

//

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 Oktober 2020

$\boxed{T}$ Jika I ideal dan ring R maka

(1) Jika R komutatif maka R/I komutatif

(2) Jika R memiliki unsur kesatuan maka R/I memiliki unsur kesatuan. $\boxed{D_4}$

$\rightarrow (1_R \in R)$ $(T = 1_R + I)$

Bukti

(1) Misal I ideal dari Ring komutatif R.

Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in R/I$ sebarang.

Tulis, $\left.\begin{aligned} \bar{x} &= a + I \\ \bar{y} &= b + I \end{aligned}\right\}$ untuk suatu $a, b \in R$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot \bar{y} = (a+I)(b+I) &= (ab) + I \\ &= (ba) + I \\ &= (b+I)(a+I) \\ &= \bar{y} \cdot \bar{x} \end{aligned}$$

(2) Misal I ideal dan ring komutatif R.

Dik $\exists\ 1_R \in R$, Ambil sebarang $\bar{x} = a + I \in R/I$ untuk suatu $a \in R$

Pilih $T = (1_R + I) \in R/I$ sedemikian sehingga

berlaku,

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot T = (a+I) \cdot (1_R + I) &= (a \cdot 1_R) + I \\ &= (1_R \cdot a) + I \\ &= (1_R + I) \cdot (a + I) \\ &= T \cdot \bar{x} \end{aligned}$$

Imanuel AS/1811141008

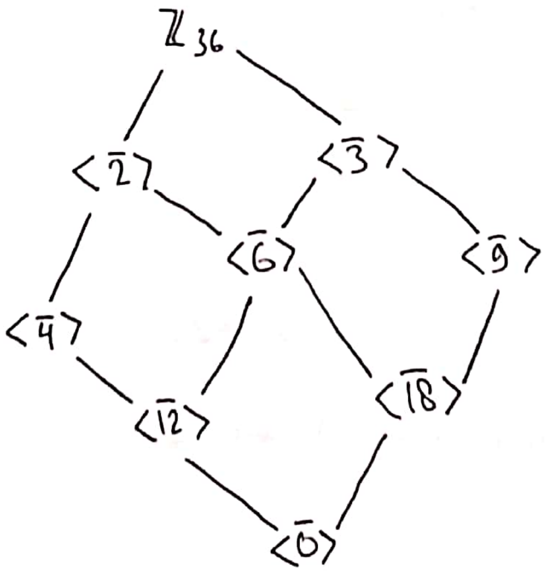
Makassar, 14 Oktober 2020

Ideal Maksimal

$\to M \neq R$

Proper ideal M dari ring R disebut ideal maksimal, jika untuk setiap I ideal dari R dengan $M \subseteq I \subseteq R$ Berakibat $M = I$ atau $I = R$

$\boxed{E}$ (1) $\mathbb{Z}_{36}$ merupakan ring, diperoleh



$\langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{3} \rangle$ merupakan ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{36}$

$\boxed{N}$ R ring, $a \in R$, $\langle a \rangle = \{ar \mid r \in R\}$

Imanuel AS / 1811141008 ~~Kelas~~ ~~Maulana~~ Makassar, 14 Oktober 2020

(2) Cari semua ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_4$

Solusi

$\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \rightarrow |\mathbb{Z}_4| = 4$

Ingat! Teorema Langrange: "Kalau kita punya grup yang ordernya adalah 4 maka subgrupnya itu haruslah merupakan faktor-faktor dari 4 yakni 1, 2, 4".

$1|4 \rightarrow \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$2|4 \rightarrow \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}\}$

$4|4 \rightarrow \langle \bar{0} \rangle$

Perhatikan bahwa

$\langle \bar{0} \rangle \subsetneq \langle \bar{2} \rangle \subsetneq \langle \bar{1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_4$

Jadi $\langle \bar{2} \rangle$ ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_4$

$\boxed{D_5}$

(1) Cari semua ideal maksimal dari

(a) $\mathbb{Z}_8$

(b) $\mathbb{Z}_{10}$

(c) $\mathbb{Z}_{12}$

(2) Buktikan ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{36}$ adalah $\langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{3} \rangle$.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 14 Oktober 2020

D5 (1) Cari semua ideal maksimal dari

(a) $\mathbb{Z}_8$

Penyelesaian

$\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\} \rightarrow |\mathbb{Z}_8| = 8$

Sesuai Teorema Langrange : "Grup yang ordernya adalah 8 maka subgrupnya itu haruslah merupakan faktor-faktor dari 8 yakni 1, 2, 4, 8".

$1 | 8 \rightarrow \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$2 | 8 \rightarrow \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$

$4 | 8 \rightarrow \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}\}$

$8 | 8 \rightarrow \langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

Perhatikan bahwa

$$\langle \bar{0} \rangle \subsetneq \langle \bar{4} \rangle \subsetneq \langle \bar{2} \rangle \subsetneq \langle \bar{1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_8$$

Jadi, $\langle \bar{2} \rangle$ ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_8$

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 14 Oktober 2020

(b) $\mathbb{Z}_{10}$

Penyelesaian:

$\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\} \rightarrow |\mathbb{Z}_{10}| = 10$

Sesuai Teorema Langrange : "Grup yang ordernya adalah 10 maka subgrupnya itu adalah merupakan faktor-faktor dari 10 yakni 1, 2, 5, 10".

$1|10 \rightarrow \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$

$2|10 \rightarrow \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$

$5|10 \rightarrow \langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

$10|10 \rightarrow \langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

Perhatikan bahwa

$$\langle \bar{0} \rangle \subsetneq \langle \bar{5} \rangle \subsetneq \langle \bar{2} \rangle \subsetneq \langle \bar{1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$$

Jadi, $\langle \bar{2} \rangle$ Ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{10}$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 14 Oktober 2020

(c) $\mathbb{Z}_{12}$

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\} \rightarrow |\mathbb{Z}_{12}| = 12$

Sesuai Teorema Langrange : "Grup yang ordernya adalah 12 Maka subgrupnya itu adalah merupakan faktor-faktor dari 12 yakni 1, 2, 4, 6, 12."

$1|12 \rightarrow \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$

$2|12 \rightarrow \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$

$4|12 \rightarrow \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$

$6|12 \rightarrow \langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}\}$

$12|12 \rightarrow \langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

Perhatikan bahwa

$$\langle \bar{0} \rangle \subsetneqq \langle \bar{6} \rangle \subsetneqq \langle \bar{4} \rangle \subsetneqq \langle \bar{2} \rangle \subsetneqq \langle \bar{1} \rangle \nearrow \mathbb{Z}_{12}$$

Jadi, $\langle \bar{2} \rangle$ Ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Imanuel AS/ 1811141008

Makassar, 14 oktober 2020

(2) Buktikan Ideal Maksimal dari $\mathbb{Z}_{36}$ adalah $\langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{3} \rangle$

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{36} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$

Imanuel AS / 1811141008 ~~Acc~~

Makassar, 14 Oktober 2020

$\boxed{T}$ $\boxed{D_6}$

Jika R ring komutatif ~~dan I ideal R~~ dengan unsur kesatuan dan I ideal proper dari R maka I ideal maksimal jika dan hanya jika R/I Lapangan".

Bukti

$\Rightarrow$ Dik : I Ideal maksimal

Adb : R/I Lapangan

$\Leftarrow$ Dik : R/I Lapangan

Adb : I Ideal maksimal

Karena R ring komutatif dengan unsur kesatuan, maka R/I juga merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan. Unsur I+0 dan I+1 berturut-turut sebagai unsur nol dan unsur kesatuan di R/I, dimana 0 dan 1 adalah unsur nol dan kesatuan di ring R.

$\longrightarrow$ Lanjut

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 Okt 2020

Bukti dari kiri ke kanan

$\Rightarrow$ Misalkan ideal I maksimal di R.

Akan ditunjukkan R/I adalah field (Lapangan).
Untuk itu, cukup diperlihatkan bahwa setiap anggota taknol di R/I mempunyai invers di R/I.

Ambil $I+a$ sebarang, anggota taknol di R/I, sehingga $I+a \neq I+0$ oleh karena itu $a \notin I$ (ingat $I+a = I+0 \Leftrightarrow a \in I$).

Misalkan T ideal utama di R yang dibentuk oleh a.
Jadi $T = \{ \alpha a \mid \alpha \in R \}$
Karena jumlah dua ideal di R juga merupakan ideal di R, maka $I+T$ merupakan ideal di R

Telah diketahui, $a \notin I$ dan $a = 0 + 1a \in M+T$.
Jadi ideal I termuat di dalam $I+T$.

Tetapi I ideal maksimal, maka haruslah $I+T = R$.
Selanjutnya, diketahui $1 \in R$, maka dapat ditulis:
$1 = b + \alpha a$ untuk suatu $b \in I$ dan αR (ingat $R = I+T$).
$1 - \alpha a = b \in I$.
Akibatnya, $I+1 = I + (\alpha a)$ atau
$I+1 = (I+\alpha)(I+a)$ dimana $\alpha \in R$
Dengan cara yang sama, diperoleh
$I+1 = (I+a)(I+\alpha)$.
Oleh karena itu, $(I+a)^{-1} = (I+\alpha) \in R/I$
Hal ini menunjukkan, bahwa setiap anggota taknol dari R/I mempunyai invers di R/I terhadap perkalian koset.

· Jadi R/I merupakan koset.

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 14 Oktober, 2020

Bukti dari kanan ke kiri

$\Leftarrow$ Misalkan I ideal di R, sedemikian sehingga R/I field (lapangan)
Akan ditunjukkan I ideal maksimal.
Untuk itu harus diperlihatkan bahwa suatu ideal di R
yang memuat I, maka ideal tersebut tidak lain adalah R sendiri.
Misalkan N sebarang ideal di R yang memuat I, dan $N \neq I$.
Jelas bahwa $\forall x \in I$ maka $x \in N$, untuk itu perlu ditunjukkan
bahwa setiap anggota R yang bukan anggota I, juga merupakan anggota N.
Ambil sebarang $a \in R, a \notin I$
$a \notin I$ maka $I+a \neq I+0$, ini berarti
$(I+a)$ bukan anggota nol di R/I.
Karena $I \subset N, I \neq N$, maka ada $b \in N$ dan $b \notin I$
Diketahui, R/I field.
$(I+a) \in R/I, (I+b) \in R/I$
$\Rightarrow (I+a)(I+b)^{-1} \in R/I$
$\Rightarrow (I+a)(I+b^{-1}) \in R/I$ $\quad [(I+b)^{-1} = (I+b^{-1})]$
$\Rightarrow I+(ab^{-1}) \in R/I$
$\Rightarrow ab^{-1} \in R$
Karena N ideal di R,
$ab^{-1} \in R, b \in N$ maka $(ab^{-1})b \in N \Rightarrow a \in N$
Jadi setiap anggota di R yang bukan anggota I,
juga merupakan anggota I.
Untuk itu, tidak ada ideal sejati dari R yang memuat I.
Jadi I merupakan ideal Maksimal.

Makassar, 30 November 2020

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan X —

(Catatan)

Imanuel AS

1811141008

Imanuel

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke - 10 / Catatan

Makassar, 21 Oktober 2020

Nama : Imanuel A S

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan Pertemuan ke - 10

Homomorfisma Gelanggang

Definisi

Misalkan R dan R' merupakan gelanggang. Pemetaan $f: R \to R'$ disebut homomorfisma gelanggang jika

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall a,b \in R$

(2) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad \forall a,b \in R$

E

① $f: R \to R'$, $f(a) = 0_{R'}$, $\forall a \in R$

$a \mapsto 0_{R'}$

f merupakan homomorfisma

Bukti

(a) Adb f pemetaan, ambil $a,b \in f$ sebarang dengan $a = b$, perhatikan $f(a) = 0_{R'} = f(b)$

(b) Ambil $a,b \in R$ sebarang, Perhatikan bahwa

$f(a+b) = 0_{R'}$ dilain pihak diperoleh

$f(a)+f(b) = 0_{R'} + 0_{R'}$, Jadi

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 21 Oktober 2020

Selanjutnya,

$f(a \cdot b) = 0_{R'}$, $f(a) \cdot f(b) = 0_{R'} \cdot 0_{R'} = 0_{R'}$

Jadi,

$f(ab) = f(a) \cdot f(b)$

$\therefore$ f homomorfisma gelanggang

(2) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$

$a+bi \longmapsto a-bi$, $f(a+bi) = a-bi$

Adb. ϕ homomorfisma gelanggang.

Bukti

Ambil $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sebarang,

tulis, $z_1 = a_1 + b_1 i$ u/suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$z_2 = a_2 + b_2 i$ u/suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

(a) Adb f pemetaan

Misal $z_1 = z_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$

Perhatikan bahwa

$f(z_1) = f(a_1 + b_1 i) = a_1 - b_1 i = a_2 - b_2 i$

$= f(a_2 + b_2 i)$

$= f(z_2)$

$\therefore$ f pemetaan

Imanuel AS / 181114008 Imanuel

Makassar, 21 Oktober 2020

(b) Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
f(z_1+z_2) &= f((a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)) \\
&= f((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i) \\
&= (a_1-b_1i)+(a_2-b_2i) \\
&= f(a_1+b_1i)+f(a_2+b_2i) \\
&= f(z_1)+f(z_2)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
f(z_1 . z_2) &= f((a_1+b_1i)(a_2+b_2i)) \quad \rightarrow \boxed{i^2=-1} \\
&= f((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i) \\
&= (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i \\
&= (a_1-b_1i)(a_2-b_2i) \\
&= f(a_1+b_1i) . f(a_2+b_2i) \\
&= f(z_1) . f(z_2)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ f homomorfisma gelanggang $_{//}$

Imanuel AS / 1811141008 ~~Aditi~~ Imanuel

Makassar, 21 Oktober 2020

(3) $\phi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{30}$, $\phi([a]) = [6a]$

$[a] \mapsto [6a]$

ϕ homomorfisma gelanggang

Bukti

(1) Adb ϕ pemetaan

Ambil $[a], [b] \in \mathbb{Z}_5$ sebarang dengan

$\underbrace{[a] = [b]}$ $\Rightarrow 5 \mid (a-b)$

$\Rightarrow 30 \mid 6(a-b)$

ini sama jika dan hanya jika $5 \mid (a-b)$ $\Rightarrow [6a] = [6b]$ di $\mathbb{Z}_{30}$

$\Rightarrow \phi([a]) = \phi([b])$

[operasi bilangan modulo]

$\therefore \phi$ pemetaan

(2) Ambil $[a], [b] \in \mathbb{Z}_5$ sebarang

$$\begin{aligned}\phi([a]+[b]) &= \phi([a+b]) \\ &= [6(a+b)] \\ &= [6a+6b] \\ &= [6a]+[6b] \\ &= \phi([a])+\phi([b])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi([ab]) &= [6ab] \\ &= [6a.6b] \\ &= [6a] \cdot [6b] \\ &= \phi([a]) \cdot \phi([b])\end{aligned}$$

$\phi([a]) = [6a]$

$\therefore \phi$ homomorfisma gelanggang.

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 21 Oktober 2020

(4) $\phi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{30}$ $\quad\quad$ $\phi([a]) = [4a]$

$[a] \longmapsto [4a]$

Perhatikan bahwa

Misal $[6] = [1]$ di $\mathbb{Z}_5$

$\phi([6]) = [4(6)] = [24]$

$\phi([1]) = [4(1)] = [4]$

$[4] \neq [24]$ di $\mathbb{Z}_{30}$

Jadi $\phi([6]) \neq \phi([1])$

ϕ Bukan Pemetaan

ϕ Bukan homomorfisma gelanggang

Catatan:
Cara melihatnya, untuk mengambil contoh penyangkal, kaya $[6] = [1]$ diatas

$\phi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{30}$

$[a] \longmapsto [4a]$

$\phi([a]) = [4a]$

$[a] = [b]$

$\vdots$

$[4a] = [4b]$

$\phi([a]) = \phi([b])$

$5 \mid a-b \quad\quad a-b = 5$

$30 \mid 4a-4b \Rightarrow 30 \nmid 4(a-b)$

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 22 Okt 2020

$\boxed{D_1}$

Periksa manakah dari pengaitan berikut yang merupakan homomorfisma gelanggang

① $\phi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{30}$, $\phi([a]) = [7a]$

$[a] \longmapsto [7a]$

② $\phi : \mathbb{Z}_7 \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$, $\phi([a]) = [4a]$

$[a] \longmapsto [4a]$

③ Misal $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$f : \mathbb{C} \longrightarrow S$, $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$a+bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

④ Misal $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$

$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

$\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \longrightarrow H$

$a + b\sqrt{2} \longmapsto \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\varphi(a+b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 22 oktober 2021

Jawaban:

(1) $\phi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{30}$, $\phi([a]) = [7a]$

$[a] \longmapsto [7a]$

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa,

Misal $[6] = [1]$ di $\mathbb{Z}_5$

$$\left.\begin{array}{l}\phi([6]) = [7\cdot(6)] = [42] \\ \phi([1]) = [7\cdot(1)] = [7]\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\cdot\!\!> [42] = [12] \text{ di } \mathbb{Z}_{30} \\ \cdot\!\!> [7] = [7] \text{ di } \mathbb{Z}_{30}\end{array}\right\} [12] \neq [7] \text{ di } \mathbb{Z}_{30}$$

Jadi, $\phi([6]) \neq \phi([1])$

ϕ Bukan Pemetaan

ϕ Bukan homomorfisma Gelanggang

(2) $\phi : \mathbb{Z}_7 \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$, $\phi([a]) = [4a]$

$[a] \longmapsto [4a]$

Penyelesaian:

perhatikan bahwa

Misal $[15] = [1]$

$$\left.\begin{array}{l}\phi([15]) = [4\cdot(15)] = [60] = [0] \text{ di } \mathbb{Z}_{12} \\ \phi([1]) = [4\cdot(1)] = [4] \text{ di } \mathbb{Z}_{12}\end{array}\right\} [0] \neq [4] \text{ di } \mathbb{Z}_{12}$$

Jadi, $\phi([15]) \neq \phi([1])$

ϕ Bukan pemetaan

ϕ Bukan homomorfisma Gelanggang.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 22 oktober 2020

③ Misal $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$

$f : \mathbb{C} \longrightarrow S$, $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$a+bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Penyelesaian :

Adb. f homomorfisma gelanggang.

Bukti :

Ambil $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sebarang,

Tulis, $z_1 = a_1 + b_1 i$ u/suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$z_2 = a_2 + b_2 i$ u/suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

(a) Adb ϕ pemetaan

Misal $z_1 = z_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$

Perhatikan bahwa,

$$f(z_1) = f(a_1 + b_1 i)$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad [a_1 = a_2 \text{ dan } b_1 = b_2]$$
$$= f(a_2 + b_2 i)$$

$$\boxed{f(z_1) = f(z_2)}$$

$\therefore \phi$ pemetaan

Imanuel AS / 181114100 8

Makassar, 22 oktober 2020

(b) Perhatikan bahwa,

$$f(z_1 + z_2) = f((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i))$$
$$= f((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i)$$
$$= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) & (b_1 + b_2) \\ -(b_1 + b_2) & (a_1 + a_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$
$$= f(a_1 + b_1 i) + f(a_2 + b_2 i)$$
$$= f(z_1) + f(z_2)$$

Selanjutnya,

$$f(z_1 \cdot z_2) = f((a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i))$$
$$= f((a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 b_2 + b_1 \cdot a_2) i)$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ -(a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$
$$= f(a_1 + b_1 i) \cdot f(a_2 + b_2 i)$$
$$= f(z_1) \cdot f(z_2)$$

$\therefore$ f adalah homomorfisma gelanggang.

Dipindai dengan CamScanner

Inanuel AS / 1811141008 ICP Matematika Mabassar, 22 Oktober 2021

(4.) Misal $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$

$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{Z} \right\}$

$\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \longrightarrow H$

$a+b\sqrt{2} \longmapsto \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\varphi(a+b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$

<u>Penyelesaian</u>:

Akan diperiksa : φ homomorfisma gelanggang atau bukan ??

<u>Bukti</u>:

Ambil $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sebarang

Tulis, $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ u/ suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$

$x_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ u/ suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

(a) Adb. φ pemetaan

Misal $x_1 = x_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$

Note that,

$\varphi(x_1) = \varphi(a_1 + b_1\sqrt{2})$

$= \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ $[a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2]$

$= \varphi(a_2 + b_2\sqrt{2})$

$\boxed{\varphi(x_1) = \varphi(x_2)}$

$\therefore$ φ pemetaan.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel | Makassar, 22 oktober

(b) Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1+x_2) &= \varphi\left((a_1+b_1\sqrt{2}) + (a_2+b_2\sqrt{2})\right)\\
&= \varphi\left((a_1+a_2) + (b_1+b_2)\sqrt{2}\right)\\
&= \begin{pmatrix} (a_1+a_2) & 2(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2) & (a_1+a_2) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}\\
&= \varphi(a_1+b_1\sqrt{2}) + \varphi(a_2+b_2\sqrt{2})\\
&= \varphi(x_1) + \varphi(x_2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&(a_1+b_1\sqrt{2})\cdot(a_2+b_2\sqrt{2}) =\\
&(a_1\cdot a_2 + a_1b_2\sqrt{2} + b_1\sqrt{2}\cdot a_2 + b_1\sqrt{2}\cdot b_2\sqrt{2})\\
&(a_1a_2 + (a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2} + b_1\cdot b_2\cdot\sqrt{4})\\
&(a_1\cdot a_2 + 2b_1\cdot b_2 + (a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2})
\end{aligned}}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1\cdot x_2) &= \varphi\left((a_1+b_1\sqrt{2})\cdot(a_2+b_2\sqrt{2})\right)\\
&= \varphi\left((a_1a_2+2b_1b_2) + (a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\right)\\
&= \begin{pmatrix} (a_1a_2+2b_1b_2) & 2(a_1b_2+a_2b_1) \\ (a_1b_2+a_2b_1) & (a_1a_2+2b_1b_2) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}\\
&= \varphi(a_1+b_1\sqrt{2}) \cdot \varphi(a_2+b_2\sqrt{2})\\
&= \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)
\end{aligned}$$

$\therefore$ φ adalah homomorfisma gelanggang.

Imanuel AS/ 1811141008 Imanuel

Makassar, 30 Oktober 2020

Sifat-Sifat Homomorfisma Gelanggang

$\boxed{T_1}$

Jika $\phi : R_1 \longrightarrow R_2$ suatu homomorfisma gelanggang, maka

(1) $\phi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$ $\left[\begin{array}{l} 0_{R_1} \text{ unsur nol di } R_1 \\ 0_{R_2} \text{ unsur nol di } R_2 \end{array}\right]$

(2) $\phi(-a) = -\phi(a) \quad \forall a \in R_1$ $\boxed{D_2}$

Bukti :

(1) Misal $\phi : R_1 \longrightarrow R_2$ homomorfisma gelanggang

0_{R_1} unsur nol di R_1

0_{R_2} unsur nol di R_2

Perhatikan

$0_{R_1} + 0_{R_1} = 0_{R_1}$

$\Rightarrow \phi(0_{R_1} + 0_{R_1}) = \phi(0_{R_1})$

$\Rightarrow \phi(0_{R_1}) + \phi(0_{R_1}) = \phi(0_{R_1})$

Jadi $\phi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$

(2) Selanjutnya, untuk sebarang $a \in R$, maka

$a + (-a) = 0 \Rightarrow \phi(a + (-a)) = f(0)$

$\Rightarrow \phi(a) + \phi(-a) = f(0)$

dengan cara yang sama

$-a + a = 0 \Rightarrow \phi(-a) + \phi(a) = \phi(0)$

Jadi, $\phi(a) + \phi(-a) = \phi(-a) + \phi(a) = \phi(0)$, $\forall \phi(a) \in R'$

akibatnya, $\phi(-a) = -\phi(a)$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 30 oktober 2020

$\boxed{T_2}$ $\boxed{D_3}$

Jika $\phi : R_1 \longrightarrow R_2$ suatu homomorfisma gelanggang.
A ideal dari R_1 dan B ideal dari R_2 maka :

(1) $\phi(nr) = n \cdot \phi(r)$ dan $\phi(r^n) = (\phi(r))^n$
$\forall n \in \mathbb{N}, r \in R_1$

(2) $\phi(A) = \{\phi(a) \mid a \in A\}$ subgelanggang dari R_2.

(3) Jika R_1 komutatif, maka :
$\phi(R_1) = \{y \in R_2 \mid y = \phi(x)$ u/suatu $x \in R_1\}$
komutatif

(4) Jika R_1 memiliki unsur kesatuan yaitu
$1_{R_1} \in R_1$, $R_2 \neq \{0_{R_2}\}$ dan ϕ subjectif maka
$\phi(1_{R_1})$ merupakan unsur kesatuan di R_2.

(5) Jika A ideal dari R_1 maka
$\phi(A) = \{b \in R_2 \mid b = \phi(a)$ untuk suatu $a \in A\}$
merupakan ideal dari R_2.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 5 November 2020

Bukti $\boxed{I_2}$ $\boxed{D_3}$

Jika $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ suatu homomorfisma gelanggang.
A ideal dari R_1 dan B ideal dari R_2 maka:

Sebelumnya diketahui dari pernyataan diatas bahwa:

- $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ artinya setiap anggota di R_1 memiliki tepat satu anggota di R_2.
- $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ suatu homomorfisma gelanggang
  Maka berlaku:
  (1) $f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \forall a,b \in R_1$
  (2) $f(a.b) = f(a) \cdot f(b) \quad \forall a,b \in R_1$
- A ideal dari R_1
  Maka berlaku:

  (i) A ideal kiri dari R_1
  (*) $A \neq \phi$
  (*) $A \subseteq R_1$
  (*) $\forall a,b \in A \Rightarrow a-b \in A$
  (*) $\forall a \in A, r \in R_1 \Rightarrow ra \in A$

  (ii) A ideal kanan dari R_1
  (*) $A \neq \phi$
  (*) $A \subseteq R_1$
  (*) $\forall a,b \in A \Rightarrow a-b \in A$
  (*) $\forall a \in A, r \in R_1 \Rightarrow ar \in A$
- B ideal dari R_2
  Maka berlaku:

  (i) B ideal kiri dari R_2
  (*) $B \neq \phi$
  (*) $B \subseteq R_2$
  (*) $\forall a,b \in B \Rightarrow a-b \in B$
  (*) $\forall b \in B, r \in R_2 \Rightarrow rb \in B$

  (ii) B ideal kanan dari R_2
  (*) $B \neq \phi$
  (*) $B \subseteq R_2$
  (*) $\forall a,b \in B \Rightarrow a-b \in B$
  (*) $\forall b \in B, r \in R_2 \Rightarrow br \in B$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 6 November 2020

(1) Adb. $\phi(nr) = n \cdot \phi(r)$ dan $\phi(r^n) = (\phi(r))^n$

$\forall n \in \mathbb{N}, r \in R_1$

Bukti :

Ambil $n \in \mathbb{N}$ sebarang

Ambil $r \in R_1$ sebarang

Perhatikan bahwa,

Dengan menggunakan induksi diperoleh,

> Sebelumnya, diketahui bahwa $\forall n = 1$ adalah benar.

Karena $\phi(1 \cdot r) = \phi(1) \phi(r) = \phi(r)$

> Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
\phi(2 \cdot r) &= \phi(2) \cdot \phi(r) && [\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \ \forall a,b \in R_1] \\
&= \phi(1+1) \cdot \phi(r) && [\text{Jelas}] \\
&= [\phi(1) + \phi(1)] \cdot \phi(r) && [\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b) \ \forall a,b \in R_1] \\
&= [\phi(1) \cdot \phi(r)] + [\phi(1) \cdot \phi(r)] && [\text{Distributif Ring}] \\
&= [\phi(1 \cdot r)] + [\phi(1 \cdot r)] && [\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \ \forall a,b \in R_1] \\
&= \phi(r) + \phi(r) && [\text{Jelas}] \\
&= 2 \cdot \phi(r) \ \ldots\ldots\ldots (*) && [\text{Jelas}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(3 \cdot r) &= \phi(3) \cdot \phi(r) \\
&= \phi(2+1) \cdot \phi(r) \\
&= [\phi(2) + \phi(1)] \cdot \phi(r) \\
&= [\phi(2) \cdot \phi(r)] + [\phi(1) \cdot \phi(r)] \\
&= [\phi(2 \cdot r)] + [\phi(1 \cdot r)] \\
&= [2 \cdot \phi(r)] + \phi \cdot r && [(*)] \\
&= (2+1) \cdot \phi(r) \\
&= 3 \cdot \phi(r)
\end{aligned}$$

$\vdots$

$\phi(k \cdot r) = \ldots\ldots \longrightarrow$ next

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel Makassar, 6 November 2020

⋮

$\phi(k.r) = \phi(k) \cdot \phi(r) = k \cdot \phi(r)$ ..(**) [Berdasarkan looping sebelumnya]

$$
\begin{aligned}
\phi((k+1).r) &= \phi(k+1) \cdot \phi(r) \\
&= [\phi(k) + \phi(1)] \cdot \phi(r) \\
&= [\phi(k) \cdot \phi(r)] + [\phi(1) \cdot \phi(r)] \\
&= \phi(k.r) + \phi(1.r) \\
&= \phi(k.r) + \phi(r) \\
&= k \cdot \phi(r) + \phi(r) \qquad [(**)] \\
&= (k+1) \cdot \phi(r)
\end{aligned}
$$

Jadi, $\phi(n.r) = n \cdot \phi(r)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dan $r \in R_1$. ▨

Imanuel AS / 181114008 Imanuel   Makassar, 6 Nov 2020

Selanjutnya Adb. $\phi(r^n) = (\phi(r))^n \quad \forall n \in N$ dan $r \in R_1$.

Dengan menggunakan induksi diperoleh,

- Sebelumnya, diketahui bahwa $\forall n = 1$ adalah benar.
  Karena $\phi(r^1) = \phi(r) = (\phi(r))^1$

- Perhatikan bahwa,

$$\phi(r^2) = \phi(r \cdot r) \qquad [\text{ Jelas }]$$
$$= \phi(r) \cdot \phi(r) \qquad [\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \quad \forall a,b \in R_1]$$
$$= (\phi(r))^2 \qquad [\text{ Jelas}]$$

$$\phi(r^3) = \phi(r \cdot r \cdot r)$$
$$= \phi((r \cdot r) \cdot r)$$
$$= \phi(r \cdot r) \cdot \phi(r)$$
$$= \phi(r) \cdot \phi(r) \cdot \phi(r)$$
$$= (\phi(r))^3$$

$\vdots$

$$\phi(r^k) = \phi(\underbrace{r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}_{k \text{ suku}}) = (\phi(r))^k \ldots (*) \; [\text{berdasarkan looping sebelumnya}]$$

$$\phi(r^{k+1}) = \phi(r^k \cdot r) \qquad [\text{Jelas}]$$
$$= \phi(r^k) \cdot \phi(r) \qquad [\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \quad \forall a,b \in R_1]$$
$$= (\phi(r))^k \cdot \phi(r) \qquad [(*)]$$
$$= (\phi(r))^{k+1} \qquad [\text{Jelas}]$$

Jadi, $\phi(r^n) = (\phi(r))^n \quad \forall n \in N$ dan $r \in R_1$.

Imanuel AS / 181114008 ~~Imanuel~~ Makassar, 6 Nov 2020

(2) Adb. $\phi(A) = \{\phi(a) \mid a \in A\}$ subgelanggang dari R_2.

Misalkan x, y dua anggota sebarang dari $\phi(R_1)$,
maka $x = \phi(a)$ dan $y = \phi(b)$, untuk suatu $a, b \in R_1$.
$a \in R_1$, $b \in R_1$ maka $-b \in R_1 \Rightarrow \phi(a+(-b)) \in \phi(R_1)$
$\Rightarrow \phi(a) + \phi(-b) \in \phi(R_1)$
$\Rightarrow \phi(a) - \phi(b) \in \phi(R_1)$
$\Rightarrow x - y \in \phi(R_1)$

Juga, $a \in R_1$, $b \in R_1 \Rightarrow ab \in \phi(R_1)$
$\Rightarrow \phi(ab) \in \phi(R_1)$
$\Rightarrow \phi(a) \cdot \phi(b) \in \phi(R_1)$
$\Rightarrow x \cdot y \in \phi(R_1)$

Jadi untuk sebarang $x, y \in \phi(R_1) \Rightarrow x - y \in \phi(R_1)$ dan $xy \in \phi(R_1)$.
Dengan demikian, $\phi(R_1)$ subgelanggang dari R_2. ..... (*)

Selanjutnya, karena A ideal dari R_1.
Maka $A \neq \phi$ dan $A \subseteq R_1$.
Karena $\phi(A) = \{\phi(a) \mid a \in A\}$ artinya $\phi(A) \subseteq \phi(R_1)$.
Jadi, karena $\phi(A) \subseteq \phi(R_1)$ maka jelas
$\phi(A)$ subgelanggang dari R_2.

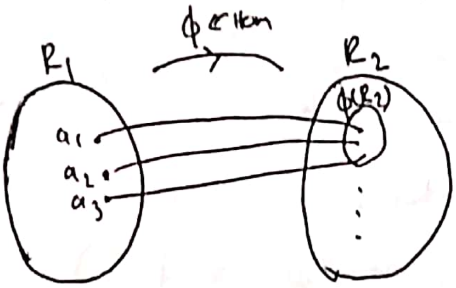
▨

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 6 Nov 2020

(3) Adb. Jika R_1 komutatif, maka :

$\phi(R_1) = \{ y \in R_2 \mid y = \phi(x) \ \forall$ suatu $x \in R_1 \}$ komutatif.



Ambil $a, b \in \phi(R_1)$ sebarang

Maka terdapat $x, y \in R_1$ sehingga

$\phi(x) = a$

$\phi(y) = b$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow a \cdot b &= \phi(x) \cdot \phi(y) \\
&= \phi(xy) \\
&= \phi(yx) \\
&= \phi(y) \cdot \phi(x) \\
&= b \cdot a
\end{aligned}
$$

Jadi $\phi(R_1) = \{ y \in R_2 \mid y = \phi(x) \ \forall$ suatu $x \in R_1 \}$ komutatif jika R_1 komutatif. ∎

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 6 November 2020

(4) Adb. Jika R_1 memiliki unsur kesatuan yaitu $1_{R_1} \in R_1$, $R_2 \neq \{0_{R_2}\}$ dan ϕ surjektif maka $\phi(1_{R_1})$ merupakan unsur kesatuan di R_2.

Bukti :

Diketahui : $1_{R_1} \in R_1$ unsur kesatuan di R_1.

Akan ditunjukkan: $\phi(1_{R_1})$ unsur kesatuan di R_2.

Ambil sebarang $a' \in R_2$.

Karena ϕ surjektif, maka ada a di R_1, sehingga $\phi(a) = a'$.

Pandang
$$\begin{aligned} \phi(1_{R_1}) \cdot a' &= \phi(1_{R_1}) \cdot \phi(a) && [\phi(a) = a'] \\ &= \phi(1_{R_1} \cdot a) && [\phi \text{ homomorfisma}] \\ &= \phi(a) && [1_{R_1} \cdot a = a] \\ &= a' \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh
$a' \cdot \phi(1_{R_1}) = \phi(a) \cdot \phi(1_{R_1}) = a'$.

Oleh karena a' diambil sebarang di R_1,

Maka $\phi(1_{R_1}) \cdot a' = a' \cdot \phi(1_{R_1}) = a'$, untuk setiap $a' \in R_2$.

Jadi $\phi(1_{R_1})$ merupakan unsur kesatuan di R_2.

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 6 November 2020

(5) Adb : Jika A ideal dari R_1 maka

$\phi(A) = \{b \in R_2 \mid b = \phi(a)$ untuk suatu $a \in A\}$

Merupakan ideal dari R_2.

Bukti :

Misalkan x, y dua anggota sebarang dari $\phi(R_1)$

Maka $x = \phi(a)$ dan $y = \phi(b)$, untuk suatu $a, b \in R_1$

$a \in R_1$, $b \in R_1$ maka $-b \in R_1 \Rightarrow \phi(a+(-b)) \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow \phi(a) + \phi(-b) \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow \phi(a) - \phi(b) \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow x - y \in \phi(R_1)$

Juga, $a \in R_1$, $b \in R_1 \Rightarrow a \cdot b \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow \phi(ab) \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow \phi(a) \cdot \phi(b) \in \phi(R_1)$

$\Rightarrow x \cdot y \in \phi(R_1)$

Jadi, untuk sebarang $x, y \in \phi(R_1) \Rightarrow x - y \in \phi R_1$ dan $xy \in \phi(R_1)$

Maka menurut Teorema 1 Subring :

Dengan demikian, $\phi(R_1)$ subring dari R_2. ......(*)

Selanjutnya, karena A ideal dari R_1

Maka $A \subseteq R_1$, sehingga $\phi(A) \subseteq \phi(R_1)$

Maka berdasarkan (*) :

$\phi(A)$ subring dari R_2.

Karena $\phi(A)$ subring dari R_2, maka menurut Teorema 1 Subring berlaku :

(1) $\forall a, b \in \phi(A) \Rightarrow a - b \in \phi(A)$
(2) $\forall a, b \in \phi(A) \Rightarrow ab \in \phi(A)$ ....(**)

Karena (**) terjadi, dan jelas $\phi(A) \neq \phi$ dan $\phi(A) \subseteq R_2$ berlaku.

Maka menurut Teorema 2.28 Buku Struktur Aljabar Prof. Suradi :

$\phi(A)$ merupakan ideal dari R_2. ∎

Karena $a, b \in \phi(A)$ sebarang dan $\phi(A) \subseteq R_2$

maka jelas untuk $c \in R_2$ sebarang berlaku

$a \cdot c \in \phi(A)$

$c \cdot a \in \phi(A)$

Imanuel AS / 1811141008 Matematika

Makassar, 30 Oktober 2020

N

Jika $\phi : R_1 \to R_2$ homomorfisma gelanggang, maka:

(1) Jika ϕ surjektif / onto maka ϕ epimorfisma.

(2) Jika ϕ injektif / satu-satu maka ϕ monomorfisma.

(3) Jika ϕ bijektif maka ϕ isomorfisma

($R_1 \cong R_2$ "R_1 isomorf R_2")

(4) Jika $R_1 = R_2$ maka ϕ endomorfisma.

(5) Jika ϕ endomorfisma dan ϕ bijektif maka ϕ Automorfisma

D_4

Berikan masing-masing 1 contoh dan buktikan dari no (1) s/d no (5).

Imanuel AS/ 1811141008 Imanuel

Makassar, 30 Oktober 2020

Catatan juga :

(1.) $\phi: R_1 \rightarrow R_2$ hom + ϕ surjektif

$\Rightarrow$ ϕ epimorfisma

(2.) $\phi: R_1 \rightarrow R_2$ hom + ϕ injektif

$\Rightarrow$ ϕ monomorfisma

(3.) $\phi: R_1 \rightarrow R_2$ hom + ϕ bijektif

$\Rightarrow$ ϕ isomorfisma

(4.) $\phi: R_1 \rightarrow R_1$ hom

$\Rightarrow$ ϕ endomorfisma

} Pemetaan ke ring yang sama

(5.) ϕ endomorfisma + ϕ bijektif

$\Rightarrow$ ϕ Automorfisma.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 6 Nov 2020

$\boxed{D_4}$ Berikan masing-masing 1 contoh dan buktikan dari no(1) s/d no(5).

Penyelesaian :

(1) Contoh Epimorfisma Ring

Diketahui : $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah Ring

$(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ adalah Ring

Misalkan $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ $[\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}]$

$\phi(a) = [a]_n = a \bmod n$

Perhatikan bahwa

$\vdots$

$\phi(-6) = \bar{6} = \bar{1}$

$\phi(-5) = \bar{5} = \bar{0}$

$\phi(-4) = \bar{4}$

$\phi(-3) = \bar{3}$

$\phi(-2) = \bar{2}$

$\phi(-1) = \bar{1}$

$\phi(0) = \bar{0}$

$\phi(1) = \bar{1}$

$\phi(2) = \bar{2}$

$\phi(3) = \bar{3}$

$\phi(4) = \bar{4}$

$\phi(5) = \bar{5} = \bar{0}$

$\phi(6) = \bar{6} = \bar{1}$

$\vdots$

Jadi, ϕ Surjektif (onto)

Selanjutnya,

- Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$

- Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \phi(a.b) = \phi(a).\phi(b)$

Jadi, ϕ Homomorfisma Ring

$\therefore$ Karena ϕ homomorfisma ring yang surjektif (onto), maka ϕ epimorfisma ring.

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 6 Nov 2020

(2) Contoh Monomorfisma Ring

Diketahui : $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Ring

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ Ring

Misalkan $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$f(n) = n$

- Adb ϕ homomorfisma ring

Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$ sebarang

Perhatikan bahwa

$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$

dan juga

$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$

- Adb ϕ injektif

Ambil sebarang $a \in \mathbb{Z}$

Maka $f(n) = n$

ϕ injektif karena $\phi(a) = \phi(a')$ berlaku $a = a'$

$\therefore$ Karena ϕ homomorfisma ring yang injektif, maka

ϕ Monomorfisma Ring

· Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 6 Nov 2020

(3) Contoh Isomorfisma

Misalkan $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Himpunan $(R, +, \cdot)$ Ring [Diketahui]

Didefinisikan pemetaan ϕ dari ring $\mathbb{C}$ ke ring R, yaitu

$$\phi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

untuk setiap $a+bi \in \mathbb{C}$.

•> Adb. ϕ merupakan homomorfisma

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$

Tulis $x = a_1 + b_1 i$

$y = a_2 + b_2 i$

Note that

$$\begin{aligned}
\phi(x \cdot y) &= \phi((a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)) \\
&= \phi(a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + (b_1 \cdot b_2) i^2) \\
&= \phi(a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + (b_1 \cdot b_2)) \quad [i^2 = -1] \\
&= \phi((a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i) \\
&= \begin{bmatrix} (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) & (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \\ -(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) & (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \phi(a_1 + b_1 i) \cdot \phi(a_2 + b_2 i) \\
&= \phi(x) \cdot \phi(y)
\end{aligned}$$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 6 Nov 2020

$$\begin{aligned}
\phi(x+y) &= \phi((a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)) \\
&= \phi((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i) \\
&= \begin{bmatrix} (a_1+a_2) & (b_1+b_2) \\ -(b_1+b_2) & (a_1+a_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \phi(a_1+b_1 i) + \phi(a_2+b_2 i) \\
&= \phi(x) + \phi(y)
\end{aligned}$$

$\therefore$ ϕ adalah homomorfisma ring.

- Adb. ϕ bijektif

Ambil sebarang $a+bi$ dan $x+yi \in \mathbb{C}$
sedemikian sehingga $\phi(a+bi) = \phi(x+yi)$
Karena $\phi(a+bi) = \phi(x+yi)$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

Akibatnya $a = x$ dan $b = y$.
Dengan demikian $a+bi = x+yi$, yang berarti ϕ injektif.

Ambil sebarang $A = \begin{bmatrix} r & s \\ -s & r \end{bmatrix} \in R$
Berarti $r, s \in \mathbb{R}$.
Dibentuk $c = r + si$, maka jelas $c \in \mathbb{C}$.
Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\phi(c) = \phi(r+si) = A$$

Oleh karena itu, ϕ bersifat surjektif.

$\therefore$ Karena ϕ injektif sekaligus surjektif, maka ϕ bijektif.

$\therefore$ Karena ϕ homomorfisma ring dan ϕ bijektif, maka ϕ Isomorfisma Ring.

Imanuel AS / 181114100 8 Imanuel

Malang, Jum 6 Nov 20..

(4) Contoh Endomorfisma Ring

$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\phi(z) = \overline{z}$

$a+bi \longmapsto a-bi$, $\phi(a+bi) = a-bi$

ϕ Endomorfisma Ring.

Bukti :

Ambil $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sebarang,

Tulis, $z_1 = a_1 + b_1 i$ u/ suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$z_2 = a_2 + b_2 i$ u/ suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

(a) Adb. ϕ pemetaan

Misal $z_1 = z_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$

Note that,

$$\begin{aligned}\phi(z_1) = \phi(a_1+b_1 i) = a_1 - b_1 i &= a_2 - b_2 i \\ &= \phi(a_2+b_2 i) \\ &= \phi(z_2)\end{aligned}$$

$\therefore$ ϕ pemetaan

(b) Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}\phi(z_1+z_2) &= \phi((a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)) \\ &= \phi((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i) \\ &= (a_1-b_1 i)+(a_2-b_2 i) \\ &= \phi(a_1+b_1 i) + \phi(a_2+b_2 i) \\ &= \phi(z_1) + \phi(z_2)\end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}\phi(z_1 \cdot z_2) &= \phi((a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)) \quad \rightarrow \boxed{i^2=-1} \\ &= \phi((a_1 a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 + a_2 b_1)i) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \\ &= (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) \\ &= \phi(a_1+b_1 i)\cdot\phi(a_2+b_2 i) \\ &= \phi(z_1)\cdot\phi(z_2)\end{aligned}$$

$\therefore$ ϕ homomorfisma ring

$\therefore$ Karena ϕ homomorfisma ring yang merupakan pemetaan ke ring yang sama, maka:

ϕ Endomorfisma Ring.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar 6 Nove 2020

(5) Contoh Automorfisma Ring.

Diperhatikan kembali contoh (4) Endomorfisma Ring sebelumnya.

Diketahui bahwa,

$$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \phi(z) = \overline{z} \quad .$$

$$a+bi \longmapsto a-bi \ , \ \phi(a+bi) = a-bi \ .$$

ϕ Endomorfisma Ring.

<u>Adb. ϕ Bijektif.</u>

Ambil sebarang a_1+b_1i dan $a_2+b_2i \in \mathbb{C}$

Sedemikian sehingga $\phi(a_1+b_1i) = \phi(a_2+b_2i)$

Karena $\phi(a_1+b_1i) = \phi(a_2+b_2i)$, diperoleh

$$a_1-b_1i = a_2-b_2i$$

Akibatnya $a_1=a_2$ dan $b_1=b_2$.

Dengan demikian $a_1+b_1i = a_2+b_2i$, yang berarti ϕ injektif.

Ambil sebarang $A = a-bi \in \mathbb{C}$

Berarti $a,b \in \mathbb{R}$.

Dibentuk $c = a+bi$, maka jelas $c \in \mathbb{C}$.

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\phi(c) = \phi(a+bi) = A \ .$$

Oleh karena itu, ϕ bersifat surjektif.

Karena ϕ injektif sekaligus surjektif, maka

ϕ bijektif.

$\therefore$ Karena ϕ endomorfisma ring dan ϕ bijektif, maka

ϕ Automorfisma Ring.

Makassar, 30 November 2020

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan XI —

(Catatan)

Imanuel AS

1811141008

Imanuel

Struktur Aljabar II/ Pertemuan ke-11/ Catatan Makassar, 13 November 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan Pertemuan ke - 11

Teorema Dasar Isomorfisma Ring

(Teorema I Isomorfisma Ring)

Sebelumnya, diperkenalkan terlebih dahulu "Kernel dari Homomorfisma Ring".

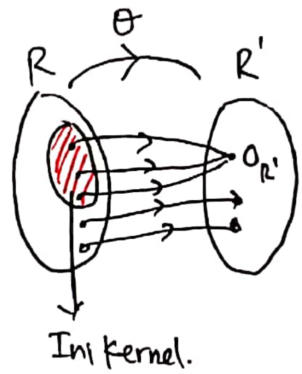
Kernel dari Homomorfisma Ring

Definisi

Misalkan $\theta : R \longrightarrow R'$ suatu homomorfisma ring, kernel / inti dari θ ditulis

$$\ker(\theta) = \text{Inti}(\theta) = \{a \in R \mid \theta(a) = 0_{R'}\}$$

$0_{R'}$ unsur nol di R'.



$\boxed{T_1}$

Jika $\theta : R \to R'$ suatu homomorfisma ring, maka $\ker(\theta)$ adalah Ideal dari R.

Bukti

(1) Adb. $\ker(\theta) \neq \phi$

Perhatikan bahwa $0_R \in R$, $0_{R'} \in R'$

dan $\theta(0_R) = 0_{R'}$. Jadi, $0_R \in \ker(\theta)$

$\therefore \ker(\theta) \neq \phi$

(2) $\ker(\theta) \subseteq R$ [Jelas dari definisi $\ker(\theta)$].

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 13 November 2020

(3) Ambil $a, b \in Ker(\theta)$, $r \in R$ sebarang

$a \in Ker(\theta) \Rightarrow \theta(a) = 0_{R'}$

$b \in Ker(\theta) \Rightarrow \theta(b) = 0_{R'}$

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
\theta(a-b) &= \theta(a+(-b)) \\
&= \theta(a) + \theta(-b) \\
&= \theta(a) - \theta(b) \\
&= 0_{R'} - 0_{R'} \\
&= 0_{R'}
\end{aligned}
$$

$\therefore a-b \in Ker(\theta)$

I Ideal

$\forall a, b \in I \Rightarrow a-b \in I$

$\forall a \in I, r \in R$

Berlaku: $ra \in I$

$ar \in I$.

$\theta(-b) = -\theta(b)$

$\forall b \in R$

dilain pihak

$$
\begin{aligned}
\theta(ra) &= \theta(r) \cdot \theta(a) \\
&= \theta(r) \cdot 0_{R'} \\
&= 0_{R'}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta(ar) &= \theta(a) \cdot \theta(r) \\
&= 0_{R'} \cdot \theta(r) \\
&= 0_{R'}
\end{aligned}
$$

$\therefore ra \in Ker(\theta)$, $\therefore ar \in Ker(\theta)$

$\therefore Ker(\theta)$ adalah Ideal di R.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 13 November 2020

$\boxed{T_2}$ $\boxed{P_1}$

Jika $\theta : R \longrightarrow R'$ suatu homomorfisma ring
Maka θ monomorfisma jika dan hanya jika

$$Ker(\theta) = \{0_R\}$$

Bukti :

$\Rightarrow$ Akan ditunjukkan : Jika θ satu-satu, maka $Ker(\theta) = \{0_R\}$

Ambil $a, b \in R$ sebarang

Karena θ satu-satu, maka jelas berlaku :

$$\theta(a) = \theta(b) \Rightarrow a = b$$

Karena $Ker(\theta) \subseteq R$, maka jelas berlaku :

$\forall\, c, d \in Ker(\theta)$ berlaku $\theta(c) = \theta(d) \Rightarrow c = d$ .....(*)

dilain pihak, menurut definisi kernel :

$$\theta(c) = 0_{R'} \text{ dan } \theta(d) = 0_{R'}$$

maka $\theta(c) = \theta(d) = 0_{R'}$.

Dan dari (*), diperoleh $c = d$, atau dengan kata lain anggota di $Ker(\theta)$ adalah tunggal.

Dan menurut Sifat-sifat Homomorfisma Gelanggang (T_1 (1)) diketahui bahwa : $\theta(0_R) = 0_{R'}$. Ini mengindikasikan bahwa $Ker(\theta) = \{0_{R'}\}$.

$\therefore$ θ satu-satu $\Rightarrow Ker(\theta) = \{0_R\}$

Imanuel AS / 1811141008 [signature] Makassar, 13 November 2020

> Akan ditunjukkan: Jika $Ker(\theta) = \{0_R\}$ maka θ satu-satu.

Ambil $a, b \in R$ sebarang, dengan $\theta(a) = \theta(b)$

Perhatikan bahwa,

$$\theta(a) = \theta(b)$$

$$\theta(a) + (-\theta(b)) = 0_{R'} \quad [\text{Kedua ruas } +(-\theta(b))]$$

$$\theta(a) + \theta(-b) = 0_{R'} \quad [T_1\ (2) \text{ Sifat-sifat Homomorfisma Gelanggang}]$$

$$\theta(a + (-b)) = 0_{R'} \quad [\theta \text{ homomorfisma ring}]$$

$$a + (-b) \in Ker(\theta) \quad [\text{Sesuai Definisi Kernel}]$$

$$a + (-b) = 0_R \quad [Ker\ \theta = \{0_R\}]$$

$$a = b \quad [\text{Kedua ruas } + b]$$

$\therefore$ Karena $\theta(a) = \theta(b) \Rightarrow a = b$, artinya θ adalah fungsi satu-satu.

$\therefore$ Karena θ satu-satu maka $Ker(\theta) = \{0_R\}$
dan $Ker(\theta) = \{0_R\}$ maka θ satu-satu,
Maka disimpulkan :

Jika $\theta : R \rightarrow R'$ homomorfisma ring
Maka θ monomorfisma jika dan hanya jika
$Ker(\theta) = \{0_R\}$. ∎

Monomorfisma = homomorfisma + injektif (satu-satu)

. Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 14 November 2020

Pemetaan Natural

$\boxed{T_3}$

Jika R ring dan I ideal dari R maka terdapat epimorfisma:

$$\theta : R \longrightarrow R/I$$
$$a \longmapsto I+a$$

Bukti

Misal R ring dan I ideal di R, didefinisikan pengaitan:

(Pengaitan bkn pemetaan) pengaitan belum tentu pemetaan.

$$\theta : R \longrightarrow R/I \quad , \theta(a) = I+a$$
$$a \longmapsto I+a$$

(1) Adb. θ pemetaan

Ambil $a,b \in R$ sebarang dengan $a=b$

$\theta(a) = I+a = I+b = \theta(b)$

$\therefore$ θ pemetaan

(2) Adb. θ homomorfisma ring

Ambil $a,b \in R$ sebarang.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \theta(a+b) &= I+(a+b) \\ &= (I+a)+(I+b) \\ &= \theta(a)+\theta(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(ab) &= I+(ab) \\ &= (I+a)(I+b) \\ &= \theta(a)\cdot\theta(b) \end{aligned}$$

$\therefore$ θ homomorfisma ring

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 14 November 2020

(3) Adb. θ Surjektif.

Ambil $\bar{a} \in R/I$ sebarang.

Tulis, $\bar{a} = I + a$ u/suatu $a \in R$.

Pilih $a \in R$, sehingga

$\theta(a) = I + a = \bar{a}$

$\therefore$ θ Surjektif

$\therefore$ θ Epimorfisma Ring

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 14 November 2020

Teorema Dasar Isomorfisma Ring

Jika R ring, I ideal dari R dan $\phi : R \to R'$ dan $\phi : R \to R'$ yang epimorfisma ring dengan $Ker(\phi) = I$ maka terdapat secara tunggal isomorfisma ring:

$$\theta : R/I \longrightarrow R'$$
$$(I+a) \longmapsto \phi(a)$$

sehingga diagram bentuk komutatif

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\tau"'] & R' \\ R/I \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

yaitu : $\phi = \theta \circ \tau$

Bukti:

Misalkan R ring, I ideal R dan $\phi : R \to R'$ epimorfisma ring dengan $Ker(\phi) = I$, Definisikan pengaitan.

$$\theta : R/I \longrightarrow R'$$
$$I+a \longmapsto \phi(a)$$

Diketahui :

$$\tau : R \longrightarrow R/I$$
$$a \longmapsto I+a$$

Merupakan epimorfisma (Pemetaan Natural).

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 14 November 2020

(1) Adb. θ pemetaan

Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in R/I$ sebarang.

Tulis, $\bar{a} = I + a$ u/suatu $a \in R$.

$\bar{b} = I + a$ u/suatu $b \in R$.

dengan $\bar{a} = \bar{b}$.

Adb. $\theta(\bar{a}) = \theta(\bar{b})$

Perhatikan bahwa:

$$\bar{a} = \bar{b}$$

$$\Rightarrow I + a = I + b$$

$$\Rightarrow a - b \in I = Ker(\phi) \quad [I + a = I + b \Leftrightarrow a - b \in I]$$

$$\Rightarrow \phi(a-b) = 0_{R'}$$

$$\Rightarrow \phi(a + (-b)) = 0_{R'}$$

$$\Rightarrow \phi(a) + \phi(-b) = 0_{R'}$$

$$\Rightarrow \phi(a) - \phi(b) = 0_{R'}$$

$$\Rightarrow \phi(a) = \phi(b)$$

$$\Rightarrow \theta(I + a) = \theta(I + b)$$

$$\Rightarrow \theta(\bar{a}) = \theta(I)$$

$\therefore$ θ Pemetaan

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 14 November 2020

(2) Adb. Diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\tau"'] & R' \\ R/I \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

komutatif, yaitu $\phi = \theta \circ \tau$

Ambil $a \in R$ sebarang.

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}(\theta \circ \tau)(a) &= \theta(\tau(a)) \\ &= \theta(I+a) \\ &= \phi(a)\end{aligned}$$

Jadi, $\phi = \theta \circ \tau$ (komutatif)

(3) Adb. θ homomorfisma

Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in R/I$ sebarang

Tulis, $\bar{a} = I + a$ u/suatu $a \in I$

$\bar{b} = I + b$ u/suatu $b \in I$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\theta(\bar{a}+\bar{b}) &= \theta((I+a)(I+b)) \\ &= \theta(I+(a+b)) \\ &= \phi(a+b) \\ &= \phi(a) + \phi(b) \\ &= \theta(I+a) + \theta(I+b) \\ &= \theta(\bar{a}) + \theta(\bar{b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta(\bar{a}\bar{b}) &= \theta((I+a)(I+b)) \\ &= \theta(I+(ab)) \\ &= \phi(ab) \\ &= \phi(a) \cdot \phi(b) \\ &= \theta(I+a) \cdot \theta(I+b) \\ &= \theta(\bar{a}) \cdot \theta(\bar{b})\end{aligned}$$

$\therefore$ θ homomorfisma ring.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 14 November

(4) Adb. θ surjektif

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\tau"'] & R' \\ R/I \arrow[ur, "\theta"] & \end{tikzcd}$$

ϕ Epimorfisma

τ Epimorfisma

$\theta \circ \tau = \phi$

Ambil $a' \in R'$ sebarang.

Karena ϕ epimorfisma, akibatnya terdapat $a \in R$ sehingga $\phi(a) = a'$ dan τ epimorfisma.

Jadi, $\tau(a) = I + a = \bar{a} \in R/I$

Jadi, terdapat $\bar{a} \in R/I$, $\bar{a} = I + a$, $a \in R$

sehingga,

$$\begin{aligned} \theta(\bar{a}) &= \theta(I + a) \\ &= \theta(\tau(a)) \\ &= (\theta \circ \tau)(a) \\ &= \phi(a) \\ &= a' \end{aligned}$$

Jadi, θ surjektif.

.Imanuel AS / 1811141008 [signature]

Makassar, 14 Nov 2020

(5) Adb. θ Injektif

Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in R/I$ sebarang

Tulis $\bar{a} = I + a$ u/suatu $a \in R$

$\bar{b} = I + b$ u/suatu $b \in R$

dengan $\theta(a) = \theta(b)$.

Adb. $\bar{a} = \bar{b}$.

Perhatikan bahwa,

$$\theta(\bar{a}) = \theta(\bar{b})$$

$$\Rightarrow \theta(I+a) = \theta(I+b)$$

$$\Rightarrow \phi(a) = \phi(b)$$

$$\Rightarrow \phi(a) + (-\phi(b)) = 0_{R'}$$

$$\Rightarrow \phi(a) + \phi(-b) = 0_{R'}$$

$$\Rightarrow \phi(a + (-b)) = 0_{R'}$$

Jadi, $a + (-b) \in \operatorname{Ker}(\phi) = I$

Akibatnya, $a - b \in I$.

$$\Rightarrow I + a = I + b$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

$\therefore$ θ Injektif.

Imanuel AS/ 1811141008 Imanuel

Makassar, 14 Novemb 2020

(6) Adb. θ tunggal

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\tau"'] & R' \\ R/I \arrow[ur, shift left, "\theta"] \arrow[ur, shift right, "\theta'"'] & \end{tikzcd}$$

Misal terdapat

$$\theta' : R/I \longrightarrow R'$$
$$I+a \longmapsto \phi(a)$$

Adb. $\theta = \theta'$

Perhatikan bahwa,

$\phi = \theta \circ \tau$ dan

$\phi = \theta' \circ \tau$

Ambil $\bar{a} \in R/I$ sebarang,

Tulis, $\bar{a} = I + a$ u/suatu $a \in R$, diperoleh

$$\begin{aligned} \theta(\bar{a}) &= \theta(I+a) \\ &= \theta(\tau(a)) \\ &= (\theta \circ \tau)(a) \\ &= \phi(a) \\ &= (\theta' \circ \tau)(a) \\ &= \theta'(I+a) \\ &= \theta'(I+a) \\ &= \theta'(\bar{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & R' \\ R/I \arrow[ur, shift left, "\theta"] \arrow[ur, shift right, "\theta'"'] & \end{tikzcd}$$

$\tau(a)$
$\downarrow$
$(I+a)$

$\downarrow$

$\phi = \theta \circ \tau$

$\phi = \theta' \circ \tau$

Jadi, $\theta = \theta'$

Q.E.D //

Makassar, 30 November 2020

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan XII —

(catatan)

Imanuel AS

1811141008

Imanuel

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke-12 / catatan Makassar, 13 November 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 181114008

Struktur Aljabar II : Catatan Pertemuan ke-12.

Teorema Isomorfisma II
dan
Teorema Isomorfisma III
dari Ring

Teorema Isomorfisma II

Jika S, T ideal dari ring R dan $S \subseteq T$, maka

$$R/T \cong \frac{R/S}{T/S}$$

(baca: isomorp)

Bukti:

(1) Adb. T/S terdefinisi

Perhatikan $S \subseteq T \subseteq R$

(a) $\forall a,b \in S \Rightarrow a-b \in S$

(b) $\forall a \in S, t \in T \Rightarrow ta \in S, at \in S$

Jadi, S ideal T

$\therefore$ T/S terdefinisi

Imanuel AS / 1811141008 ~~[illegible]~~ Imanuel

Makassar, 14 November 2020

(2) Adb. $\dfrac{R/S}{T/S}$ terdefinisi.

(a) Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in T/S$, $\bar{r} \in R/S$ sebarang.

(untuk kuliah kita, kita sepakati menggunakan koset kanan saja)

— Pak Sahlan —

Tulis, $\bar{a} = S + t_1$ u/suatu $t_1 \in T$

$\bar{b} = S + t_2$ u/suatu $t_2 \in T$

$\bar{r} = S + r$ u/suatu $r \in R$

Perhatikan bahwa,

$$\bar{a} - \bar{b} = (S + t_1) - (S + t_2)$$
$$= S + (t_1 - t_2) \in T/S$$

$$\bar{r}\,\bar{a} = (S + r)(S + t_1) = S + (r t_1) \in T/S$$

$$\bar{a}\,\bar{r} = (S + t_1)(S + r) = S + (t_1 r) \in T/S$$

Jadi, T/S ideal dari R/S

$\therefore \dfrac{R/S}{T/S}$ terdefinisi

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 14 Novas 2020

Definisikan pengaitan

$$\theta : R/S \longrightarrow R/T \qquad , \theta(S+r) = T+r$$
$$S+r \longmapsto T+r$$

(3) Adb. θ pemetaan

Ambil $\overline{r_1}, \overline{r_2} \in R/S$ sebarang.

Tulis, $\overline{r_1} = S + r_1$ u/suatu $r_1 \in R$

$\overline{r_2} = S + r_2$ u/suatu $r_2 \in R$

dengan $\overline{r_1} = \overline{r_2}$.

Adb. $\theta(\overline{r_1}) = \theta(\overline{r_2})$

Perhatikan bahwa,

$$\overline{r_1} = \overline{r_2}$$
$$\Rightarrow S+r_1 = S+r_2$$
$$\Rightarrow r_1 - r_2 \in S \subseteq T \qquad [\, S+a = S+b \Leftrightarrow a-b \in S \,]$$
$$\Rightarrow T+r_1 = T+r_2$$
$$\Rightarrow \theta(S+r_1) = \theta(S+r_2)$$
$$\Rightarrow \theta(\overline{r_1}) = \theta(\overline{r_2})$$

$\therefore$ θ pemetaan

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 14 November 2020.

(4) Adb. θ homomorfisma

Ambil $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in R/S$ sebarang.

Tulis $\bar{r}_1 = S + r_1$ u/suatu $r_1 \in R$

$\bar{r}_2 = S + r_2$ u/suatu $r_2 \in R$

$$\begin{aligned}
\theta(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) &= \theta((S+r_1) + (S+r_2)) \\
&= \theta(S + (r_1+r_2)) \\
&= T + (r_1+r_2) \\
&= (T+r_1) + (T+r_2) \\
&= \theta(S+r_1) + \theta(S+r_2) \\
&= \theta(\bar{r}_1) + \theta(\bar{r}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(\bar{r}_1 \bar{r}_2) &= \theta((S+r_1)(S+r_2)) \\
&= \theta(S + (r_1 r_2)) \\
&= T + (r_1 r_2) \\
&= (T+r_1)(T+r_2) \\
&= \theta(S+r_1) \cdot \theta(S+r_2) \\
&= \theta(\bar{r}_1) \cdot \theta(\bar{r}_2)
\end{aligned}$$

$\therefore$ θ homomorfisma ring.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel Makassar, 14 Nov 20

(5) Adb. θ Surjektif

Ambil $\bar{r} \in R/T$ sebarang.

Tulis $\bar{r} = T + r$ u/suatu $r \in R$.

Pilih $\bar{r_1} = S + r \in R/S$ sehingga

$\theta(\bar{r_1}) = \theta(S+r) = T + r = \bar{r}$

Jadi, θ Surjektif.

(6) Adb. $Ker(\theta) = T/S$

$Ker(\theta) \subseteq T/S$

$T/S \subseteq Ker(\theta)$

$$\theta : R/S \longrightarrow R/T$$
$$S+r \longmapsto T+r \qquad \theta(S+r) = T+r$$

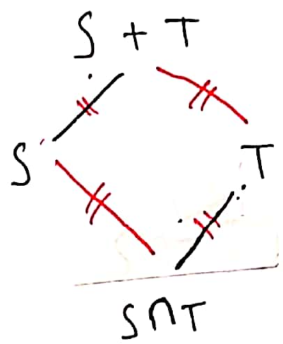
Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} Ker(\theta) &= \{\bar{r} = S+r \in R/S \mid \theta(\bar{r}) = 0_{R/T}\} \\ &= \{\bar{r} = S+r \in R/S \mid \theta(S+r) = T\} \\ &= \{\bar{r} = S+r \in R/S \mid T+r = T+0_R\} \\ &= \{\bar{r} = S+r \in R/S \mid r \in T\} \\ &= T/S \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema Dasar Isomorfisma. $R/T \cong \dfrac{R/S}{T/S}$

Imanuel AS / 1811141008   Makassar, 14 Nov 2020

Teorema Isomorfisma III
(Teorema Diamond)



$S+T=\{a+b \mid a\in S, b\in T\}$

$$\frac{S+T}{T} \cong \frac{S}{S\cap T}$$

$$\frac{S+T}{S} \cong \frac{T}{S\cap T}$$

Versi 1

Jika S ideal dari ring R dan T subring R, maka

$$\frac{S+T}{S} \cong \frac{T}{S\cap T}$$

Versi 2

Jika T ideal dari ring R dan S subring R, maka

$$\frac{S+T}{T} \cong \frac{S}{S\cap T}$$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 23 November 2020

Bukti Teorema Isomorfisma III (Teorema Diamond)

Buktikan bahwa jika S ideal dari ring R dan T subring dari R, maka

$$\frac{S+T}{S} \cong \frac{T}{S \cap T}$$

Penyelesaian :

(1.) Adb. $\frac{T}{S \cap T}$ terdefinisi

Akan ditunjukkan $S \cap T$ ideal dari T

$S \cap T \neq \phi$ karena $\exists\ 0_R \in S \cap T$.

Perhatikan bahwa $S \cap T \subseteq T \subseteq R$

Ambil $a, b \in S \cap T$, $t \in T$ sebarang

$a, b \in S \cap T \Rightarrow a, b \in S$ dan $a, b \in T$.

a) $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$ [Karena S ideal R]

$a, b \in T \Rightarrow a - b \in T$ [Karena T subring R]

Maka $a - b \in S \cap T$

b) $a \in S$, $t \in T \subseteq R \Rightarrow at \in S$ dan $ta \in S$ [Karena S ideal R]

$a \in T$, $t \in T \Rightarrow at \in T$ dan $ta \in T$ [Karena T subring R]

$at \in S$ dan $at \in T$ maka $at \in S \cap T$

$ta \in S$ dan $ta \in T$ maka $ta \in S \cap T$

Jadi, $S \cap T$ ideal T.

$\therefore \frac{T}{S \cap T}$ terdefinisi.

Imanuel AS/1811141008 Imanuel

Makassar, 23 November 2020

(2) Adb. $\frac{S+T}{S}$ terdefinisi

Akan ditunjukkan : S ideal $S+T$.

$S+T = \{a+b \mid a \in S, b \in T\} \neq \emptyset$ karena $S \neq \emptyset$ dan $T \neq \emptyset$.

Perhatikan : $S \subseteq S+T \subseteq R$; $T \subseteq R$

Ambil $m, n \in S$, $p \in S+T$ sebarang,

Tulis, $p = a+b$ untuk suatu $a \in S, b \in T$

a.) $m, n \in S \Rightarrow m-n \in S$ [Karena S ideal R]

b.) $m \in S$, $p \in S+T$

$m \cdot p = m(a+b) = ma + mb \in S$

[Karena S ideal R dan $S \subseteq R$ maka $ma \in S$.
Karena S ideal R dan $T \subseteq R$ maka $mb \in S$.
Karena S ideal ring R maka $ma+mb \in S$.]

$pm = (a+b)m = am + bm \in S$.

[Karena S ideal R dan $S \subseteq R$ maka $am \in S$.
Karena S ideal R dan $T \subseteq R$ maka $bm \in S$.
Karena S ideal ring R maka $am + bm \in S$.]

Jadi, S ideal $S+T$.

$\therefore \frac{S+T}{S}$ terdefinisi.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 23 November 2020

Definisi Pengaitan

$$\theta : T \longrightarrow \frac{S+T}{S} \qquad \theta(a) = S + a$$
$$a \longmapsto S + a$$

(3) Adb. θ pemetaan

Ambil $a_1, a_2 \in T \subseteq R$ sebarang

dengan $a_1 = a_2$

Adb. $\theta(a_1) = \theta(a_2)$

Perhatikan bahwa

$$a_1 = a_2$$
$$\Leftrightarrow S + a_1 = S + a_2 \qquad \text{[Karena S ideal R, koset kanan]}$$
$$\Leftrightarrow \theta(a_1) = \theta(a_2) \qquad \text{[Sesuai definisi } \theta\text{]}$$

$\therefore$ θ pemetaan

(4) Adb. θ homomorfisma

Ambil $a_1, a_2 \in T$ sebarang

Perhatikan

$$\begin{aligned} \theta(a_1 + a_2) &= S + (a_1 + a_2) \\ &= (S + a_1) + (S + a_2) \\ &= \theta(a_1) + \theta(a_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(a_1 a_2) &= S + (a_1 a_2) \\ &= (S + a_1) \cdot (S + a_2) \\ &= \theta(a_1) \cdot \theta(a_2) \end{aligned}$$

$\therefore$ θ homomorfisma ring

Imanuel AS / 1311141008 Makassar, 23 November

(5) Adb. θ Surjektif

Ambil $\overline{a} \in \frac{S+T}{S}$ sebarang.

Tulis, $\overline{a} = S + a$ u/ suatu $a \in T$.

Pilih $a \in T$.

Sehingga, $\theta(a) = S + a = \overline{a}$

Jadi, θ Surjektif.

$\therefore$ θ epimorfisma.

(6) Adb. $\text{Ker}(\theta) = S \cap T$

$$\theta : T \longrightarrow \frac{S+T}{S} \qquad \theta(a) = S + a$$
$$a \longmapsto S + a$$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\theta) &= \{ a \in T \mid \theta(a) = 0_{\frac{S+T}{S}} \} \\ &= \{ a \in T \mid \theta(a) = S \} \\ &= \{ a \in T \mid S + a = S + 0_T \} \\ &= \{ a \in T \mid a - 0_T = a \in S \} \\ &= S \cap T. \end{aligned}$$

$\therefore$ Berdasarkan Teorema Dasar Isomorfisma, Terbukti :

$$\frac{S+T}{S} \cong \frac{T}{S \cap T}.$$

Makassar, 30 November 20[illegible]

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan XIII —

(Catatan)

Imanuel AS

1811141008

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke-13 / Catatan Makassar, 23 Nov 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan pertemuan ke-13

Faktorisasi Daerah Integral (Bagian I)

D daerah integral $\rightarrow$
- D ring komutatif
- D punya unsur kesatuan
- D tidak ada pembagi nol

$\boxed{D}$ Misal D daerah integral dengan $a \in D \setminus \{0_R\}$ $b \in D \setminus \{0_R\}$. a disebut membagi b jika ada $c \in D \setminus \{0_R\}$ sehingga $b = ac$ $(a|b)$

$\boxed{E}$ ① $\mathbb{Q}$ daerah integral

$7|13$ karena terdapat $\frac{13}{7} \in \mathbb{Q}$

sehingga $13 = 7 \cdot \frac{13}{7}$

② $\mathbb{Z}$ daerah integral

$2|4 \Rightarrow \exists\, 2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $4 = 2 \times 2$

$2 \nmid 5 \Rightarrow \nexists\, c \in \mathbb{Z}$ sehingga $5 = 2 \cdot c$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel Makassar, 23 November 2020

$\boxed{T_1}$ Jika D daerah integral maka untuk setiap $a, b, c \in D \setminus \{0_R\}$ berlaku:

(1) $a|a \quad \forall a \in D\setminus\{0_R\}$ [Sifat refleksif] $\boxed{D_1}$

(2) Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$ [Sifat transitif]

(3.) Jika $a|b$ maka $b \nmid a$ [Tidak Simetri] $\boxed{D_2}$

(4.) Jika $a|b$ dan $a|c$ maka $\boxed{D_3}$

(a) $a|(b+c)$

(b.) $a|(b-c)$

(5.) Jika $a|b$ maka $a|bc$. $\boxed{D_4}$

Bukti:

(1) Adb $a|a \quad \forall a \in D\setminus\{0_R\}$ [Sifat refleksif]

Ambil sebarang $a \in D\setminus\{0_R\}$

Terdapat $1_R \in D$ sehingga $a = a1$,

dimana 1_R adalah unsur kesatuan dalam daerah integral D.

Hal ini berarti a membagi a atau $a|a \quad \forall a \in D\setminus\{0_R\}$.

(2) Adb Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$ [Sifat Transitif]

Misal D daerah integral

Ambil $a, b, c \in D\setminus\{0_R\}$ sebarang dengan $a|b$ dan $b|c$

Adb. $a|c$.

Perhatikan bahwa

$a|b \Rightarrow \exists\, d \in D\setminus\{0_R\} \ni b = ad$

$b|c \Rightarrow \exists\, e \in D\setminus\{0_R\} \ni c = be$

Akibatnya, $c = be = (ad)e$

$= a(de)$ [Assosiatif]

Karena $d \neq 0_R$ dan $e \neq 0_R$, D daerah integral akibatnya $de \neq 0_R$.

Pilih $f = de \in D\setminus\{0_R\}$ sehingga

$c = af \Rightarrow a|c$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 23 Nov 2016

(3) Adb. $a|b$ maka $b \nmid a$ [Tidak simetri]

Faktorisasi dalam daerah integral tidak simetri.
Sebagai contoh, pandang $(\mathbb{Z}, +, \times)$ daerah integral.
Jelas 2 membagi 6, tetapi 6 tidak membagi 2.

(4). Adb. Jika $a|b$ dan $a|c$ maka
(a) $a|(b+c)$
(b) $a|(b-c)$

Misalkan D daerah integral.
Ambil sebarang $a, b, c \in D \setminus \{0_R\}$ sehingga $b = ad$. dan $c = ae$
Sehingga $b + c = ad + ac = a(d+c)$.

Karena $d, e \in D \setminus \{0_R\}$ maka $(d+c) \in D \setminus \{0_R\}$
Jadi a membagi $(b+c)$, atau $a|(b+c)$.
Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan $a|(b-c)$.

(5) Adb. Jika $a|b \Rightarrow a|bc$

Misalkan $a, b \in D \setminus \{0_R\}$ dengan $a|b$
Ambil sebarang $c \in D \setminus \{0_R\}$
Karena $a|b \Rightarrow$ ada $d \in D \setminus \{0_R\}$ sehingga $b = ad$.
Pandang $bc = (ad)c$
$= a(dc)$ [Assosiatif]

Jelas $dc \in D \setminus \{0_R\}$ karena $d \in D \setminus \{0_R\}$ dan $c \in D \setminus \{0_R\}$
maka berlaku sifat tutup pada semigrup $(R, \times)$.
Jadi $a|bc$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 23 November 2020

D daerah Ideal Utama (P.I.D)

↳ Daerah integral yang setiap idealnya merupakan ideal utama.

Ideal utama ⟶ Ideal yang dibangun oleh satu unsur.

$\boxed{T_2}$

Jika D daerah integral dan I_1, I_2 ideal utama yang dibangun oleh $a \in D\setminus\{0_R\}$ dan $b \in D\setminus\{0_R\}$ maka $a|b$ jika dan hanya jika $I_2 \subset I_1$

Bukti

Misal $a, b \in D\setminus\{0_R\}$

$I_1 = \langle a \rangle = \{ra \mid r \in D\}$

$I_2 = \langle b \rangle = \{rb \mid r \in D\}$

$\Rightarrow$ $a|b \Rightarrow \exists\, c \in D\setminus\{0_R\} \ni b = ac$

Adb. $I_2 \subset I_1$

Ambil $x \in I_2$ sebarang,

Jadi $x = rb$ u/suatu $r \in D$

$= r(ac)$

$= r(ca)$

$= (rc)a \in I_1$

Jadi, $I_2 \subset I_1$

$\Leftarrow$ Misal $I_2 \subset I_1$

Karena $I_2 = \langle b \rangle$, Jadi $b \in I_2 \subset I_1$

Jadi $b \in I_1$

$b = ra$ u/suatu $r \in D\setminus\{0_R\}$

$= ar$

Jadi, $a|b$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 23 November 2020

Unit

$\boxed{D}$ Misal D daerah integral, $a \in D$ disebut unit jika $a | b \ \forall b \in D \setminus \{0_D\}$.

$\boxed{E}$
(1) $\mathbb{Z}$ daerah integral, 1 unit di $\mathbb{Z}$
karena $\forall b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $1 | b$
-1 unit di $\mathbb{Z}$ karena $\forall b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $-1 | b$

(2) $\mathbb{Q}$ daerah integral
$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ unit karena $\frac{2}{3} | b$ $\forall b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$\forall p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ merupakan

$\frac{2}{3} | b$
$\Rightarrow b = \frac{2}{3} c \quad c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$b = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} b\right)$

$b = b$

$\therefore$ c ada

$\boxed{D_5}$ Cari contoh Daerah Integral lain, Tentukan unsur unitnya.

Jawab :

① $\mathbb{R}$ daerah integral, 1 unit di $\mathbb{R}$
karena $\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $1 | b$.
Dan -1 juga unit di $\mathbb{R}$ karena $\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $-1 | b$.

② $(\mathbb{Z}_5, +_5, \times_5)$ daerah integral, $\bar{1}$ unit di $(\mathbb{Z}_5, +_5, \times_5)$
karena $\forall \bar{b} \in (\mathbb{Z}_5, +_5, \times_5) \setminus \{\bar{0}\}$ $\bar{1} | b$.

Makassar 30 Maret 2020

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan XIV —

(Catatan)

Imanuel AS

1811141008

Imanuel

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke - 14 / Catatan   Makassar, 23 Novem 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan pertemuan ke - 14.

Faktorisasi Daerah Integral (Bagian II)

Asosiasi / Sekawan

Misalkan D daerah integral, $a \in D \setminus \{0_R\}$ disebut berasosiasi / sekawan dengan $b \in D \setminus \{0_R\}$ jika $a|b$ dan $b|a$.

Notasi : $a \sim b \Leftrightarrow a|b$ dan $b|a$

baca : a sekawan dengan b jika dan hanya jika a membagi b dan b membagi a.

$\boxed{E}$

1. $\mathbb{Z} \rightarrow$ Daerah Integral

   $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ berasosiasi dengan $-a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

   karena $a|-a$ dan $-a|a$, jadi $a \sim -a$.

2. $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}, i^2 = \sqrt{-1}\}$

   $\hookrightarrow$ Gaussian Integer (Daerah integral)

   $a+bi \rightsquigarrow$ Berasosiasi dengan $-a-bi$, $-b+ai$, dan $b-ia$.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 23 November 20..

$\boxed{T_1}$ $\boxed{D_1}$

Jika D daerah integral maka relasi asosiasi $\sim$ pada $D \setminus \{0_R\}$ merupakan relasi yang ekuivalen.

Bukti:

Adb: Relasi $\sim$ pada $D \setminus \{0_R\}$ merupakan relasi ekuivalen.

Akan ditunjukkan: (1) Refleksif
(2) Simetri
(3) Transitif

(1) Adb. $a \sim a \quad \forall a \in D \setminus \{0_R\}$
Ambil sebarang $a \in D \setminus \{0_R\}$
Perhatikan bahwa,
$a | a$ karena D daerah integral dan $a \in D \setminus \{0_R\}$ [T_1 Faktorisasi Daerah Integral]
$\therefore a \sim a \quad \forall a \in D \setminus \{0_R\}$

(2) Adb. $a \sim b \Rightarrow b \sim a \quad \forall a, b \in D \setminus \{0_R\}$
Ambil sebarang $a, b \in D \setminus \{0_R\}$
Karena diketahui, $a \sim b$ maka berlaku $a | b$ dan $b | a$.
Atau dengan kata lain $b | a$ dan $a | b$.
Karena $b | a$ dan $a | b$ maka dikatakan $b \sim a$.

(3) Adb. $\forall a, b, c \in D \setminus \{0_R\}$.
Jika $a \sim b$ dan $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Ambil sebarang $a, b, c \in D \setminus \{0_R\}$
Dik: $a \sim b$ maka berlaku $a | b$ dan $b | a$
$b \sim c$ maka berlaku $b | c$ dan $c | a$

Akan ditunjukkan: $a | c$ dan $c | a$.
Karena $a | b$ dan $b | c$ maka $a | c$ [Sifat Transitif - T_1. F.D.I]
dan
Karena $a | c$ dan $c | a$ maka $a \sim c$.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 23 Novem 2020

$\boxed{T_2}$

Ideal utama yang dibangun oleh dua anggota dalam daerah integral sama jika dan hanya jika dua anggota tersebut berasosiasi.

<u>Bukti</u>

Misal D daerah integral, $a, b \in D$

Misal

$\langle a \rangle = \{ar \mid r \in D\}$, $\langle b \rangle = \{br \mid r \in D\}$

$(\Rightarrow)$ Misal $\langle a \rangle = \langle b \rangle$. Adb $a \sim b$

Perhatikan bahwa,

$\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle \Rightarrow a \in \langle b \rangle$

$\Rightarrow a = br$ u/suatu $r \in D$

$\Rightarrow b \mid a$

$\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle \Rightarrow b \in \langle a \rangle$

$\Rightarrow b = ar$ u/suatu $r \in D$

$\Rightarrow a \mid b$

Jadi $a \sim b$.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel Makassar, 23 November 2020

($\Leftarrow$) Misal $a \sim b$. Adb. $\langle a \rangle = \langle b \rangle$

$a \sim b \Rightarrow$ terdapat $r_1, r_2 \in D$

sehingga $a = br_1$ dan $b = ar_2$

(1) Adb. $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$

Ambil $x \in \langle a \rangle$ sebarang

Tulis $x = ar$ u/suatu $r \in D$.

Akibatnya, $x = ar = (br_1)r = b(r_1 r) \subseteq \langle b \rangle$

Jadi, $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$

(2) Adb. $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$

Ambil $y \in \langle b \rangle$ sebarang,

Tulis $y = bx$ u/suatu $x \in R$,

diperoleh $y = bx = (ar_2)x = a(r_2 x) \in \langle a \rangle$

Jadi $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$

$\therefore \langle a \rangle = \langle b \rangle$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 23 November 2016

D1

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Misal D daerah integral, $g \in D \setminus \{0_R\}$
disebut FPB dari $a, b \in D \setminus \{0_R\}$. Jika
(1) $g|a$ dan $g|b$.
(2) $\forall h \in D \setminus \{0_R\}$, $h|a$ dan $h|b \Rightarrow h|g$.

D2

Cari contoh dari FPB (selain $\mathbb{Z}$)

① Diketahui $\mathbb{R}$ daerah integral, $150 \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$
disebut FPB dari $200, 150 \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$, karena berlaku:
(1) $150 | 200$ dan $150 | 150$ [$150 | 200$ krn $200 = 150 \cdot \frac{200}{150}$; $\frac{200}{150} \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$. $150 | 150$ jelas.]
(2) $\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$, $h|200$ dan $h|150 \Rightarrow h|150$

[Jelas, karena 150 merupakan bilangan $\mathbb{R}$ terbesar yang membagi 200 dan 150
Maka berarti bahwa $h < 150$ dimana $h|150$.]

② Diketahui $\mathbb{Q}$ daerah integral, $\frac{990}{10} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$
disebut FPB dari $990, 123 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$, karena berlaku:
(1) → $\frac{990}{10} | 990$ karena $990 = \frac{990}{10} \cdot 10$; $10 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$
→ $\frac{990}{10} | 123$ karena $123 = \frac{990}{10} \frac{(123)(10)}{990}$; $\frac{(123)(10)}{990} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$
(2) Ambil sebarang $h \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$, Tulis $h = \frac{a}{b}$ u/suatu $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$
Sedemikian sehingga berlaku
→ $h | 990$ krn $990 = h \cdot \frac{990}{h}$; $\frac{990}{h} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\} \Rightarrow h \in \mathbb{Z}$ jelas.
→ $h | 123$ krn $123 = h \cdot \frac{123}{h}$; $\frac{123}{h} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\} \Rightarrow h \in \mathbb{Z}$ jelas.
Maka, $\frac{990}{\cancel{777}} = h \cdot \frac{990/10}{h}$; $\frac{990/10}{h} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$ krn $\frac{990}{10}, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$

Jadi $\forall h \in \mathbb{Q}$, $h|a$ dan $h|b \Rightarrow h|g$.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 23 November

$\boxed{D_2}$

Misal D daerah integral, $\ell \in D \setminus \{0_D\}$
disebut KPK dari $a, b \in D \setminus \{0_D\}$. Jika
(1) $a \mid \ell$ dan $b \mid \ell$
(2) $\forall\, m \in D \setminus \{0_D\}$ dengan $a \mid m$ dan $b \mid m$ maka $\ell \mid m$

$\boxed{D_3}$

Cari contoh dari KPK (selain $\mathbb{Z}$)

① Diketahui $\mathbb{R}$ daerah integral, $357 \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$
disebut KPK dari $12, 71 \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$, karena berlaku:
(1) $12 \mid 357$ dan $71 \mid 357$
(2) $\forall\, m \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ dengan $12 \mid m$ dan $71 \mid m$ maka $357 \mid m$

② Diketahui $\mathbb{Q}$ daerah integral, $8019 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$
disebut KPK dari $99, 81 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$. Karena berlaku:
(1) $99 \mid 8019$ karena $8019 = 99 \cdot 81$; $81 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$
$81 \mid 8019$ karena $8019 = 81 \cdot 99$; $99 \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$
(2) Ambil sebarang $m \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$ sedemikian sehingga berlaku
- $99 \mid m$ krn $m = 99 \cdot \frac{m}{99}$; $\frac{m}{99} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$ jelas.
- $81 \mid m$ krn $m = 81 \cdot \frac{m}{81}$; $\frac{m}{81} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$ jelas

Maka $m = 8019 \cdot \frac{m}{8019}$; $\frac{m}{8019} \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$ krn $m \in \mathbb{Z}$.

Jadi, $\forall\, m \in \mathbb{Q} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$ dengan $99 \mid m$ dan $81 \mid m$ maka $8019 \mid m$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 26 November 2020

5. (1) Buktikan bahwa setiap pasangan anggota di Daerah Ideal Utama selalu memiliki FPB

BUKTI :

Misalkan D daerah ideal utama

Ambil sebarang $a, b \in D \setminus \{0_R\}$

dan misalkan $\langle a \rangle$ dan $\langle b \rangle$ ideal utama di D yang berturut-turut dibangun oleh a dan b.

Atau dapat ditulis, ada $a \in R$

$$\langle a \rangle = \{ar \mid r \in R\}$$
$$\langle b \rangle = \{br \mid r \in R\}$$

Karena jumlah dua ideal juga merupakan ideal, maka $\langle a \rangle + \langle b \rangle$ ideal utama di D.

Selanjutnya, karena D daerah ideal utama, maka setiap idealnya merupakan ideal utama, untuk itu ada $g \in D \setminus \{0_R\}$ yang membentuk ideal utama g di D. Atau dapat ditulis, ada $a \in R$

$$\langle g \rangle = \{gr \mid r \in R\}$$

sehingga $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle g \rangle$.

Asumsikan g = FPB dari a dan b.

Karena $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle g \rangle$ maka $\langle a \rangle \subset \langle g \rangle$ dan $\langle b \rangle \subset \langle g \rangle$.

Jika $\langle a \rangle \subset \langle g \rangle$ maka $a \subset \langle g \rangle$ dan $a = x \cdot g$ untuk beberapa $x \in D$, akibatnya $g \mid a$.

Jika $\langle b \rangle \subset \langle g \rangle$ maka $b \subset \langle g \rangle$ dan $b = y \cdot g$ untuk beberapa $y \in D$, akibatnya $g \mid b$.

Karena $g \mid a$ dan $g \mid b$, maka g adalah FPB dari a dan b.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 26 November

Misalkan ada lagi FPB dari a dan b, yaitu e.

Maka $e|a$ dan $e|b$ sehingga

$a = em_1$ dan $b = em_2$ dimana $m_1, m_2 \in D$. Akibatnya:

$$x \in \langle a \rangle \Rightarrow x = ax_1 \text{ untuk beberapa } x_1 \in D$$
$$\Rightarrow x = (em_1)x_1$$
$$\Rightarrow x = e(m_1 x_1)$$
$$\Rightarrow x \subset \langle e \rangle \text{, jadi } \langle a \rangle \subset \langle e \rangle.$$

Selanjutnya,

$$y \in \langle b \rangle \Rightarrow y = by_1 \text{ untuk beberapa } y_1 \in D$$
$$\Rightarrow y = (em_2)y_1$$
$$\Rightarrow y = e(m_2 y_1)$$
$$\Rightarrow y \subset \langle e \rangle \text{, jadi } \langle b \rangle \subset \langle e \rangle.$$

Karena $e|a$ dan $e|b$, maka $\langle a \rangle \subset \langle e \rangle$ dan $\langle b \rangle \subset \langle e \rangle$,

Sehingga, $\langle g \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$ dan $\langle g \rangle \subset \langle e \rangle$.

Jelas, $g \subset \langle e \rangle$ sedemikian sehingga $g = ex$ untuk beberapa $x \in D$,

dan $e|g$

Terbukti g = FPB a dan b, karena setiap faktor persekutuan a dan b selalu merupakan pembagi (faktor) dari g.

: Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 26 November 2020

(2) Buktikan bahwa setiap pasangan anggota di Daerah Ideal Utama selalu memiliki KPK.

BUKTI :

Misalkan D daerah ideal utama

Ambil sebarang $a, b \in D \setminus \{0_R\}$

dan misalkan $\langle a \rangle$ dan $\langle b \rangle$ ideal utama di D yang berturut-turut dibangun oleh a dan b.

Atau dapat ditulis, ada $a \in R$

$$\langle a \rangle = \{ ar \mid r \in R \}$$

$$\langle b \rangle = \{ br \mid r \in R \}$$

Karena irisan dari dua ideal juga adalah ideal, maka

$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ ideal utama di D.

Sehingga, terdapat unsur e di D sedemikian sehingga

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$$

Asumsikan e = KPK dari a dan b.

Karena $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$ maka $\langle e \rangle \subset \langle a \rangle$ dan $\langle e \rangle \subset \langle b \rangle$.

Jika $\langle e \rangle \subset \langle a \rangle$ maka $e \subset \langle a \rangle$ dan $e = x \cdot a$ untuk beberapa $x \in D$ akibatnya $a \mid e$.

Jika $\langle e \rangle \subset \langle b \rangle$ maka $e \subset \langle b \rangle$ dan $e = y \cdot b$ untuk beberapa $y \in D$ akibatnya $b \mid e$.

Karena $a \mid e$ dan $b \mid e$, maka e adalah KPK dari a dan b.

Imanuel AS / 1811141008 [illegible] Makassar, 26 Novem. 2020

Misalkan ada lagi KPK dari a dan b, yaitu n.

Maka $a|n$ dan $b|n$ sehingga

$n = am_1$ dan $n = bm_2$ dimana $m_1, m_2 \in D$. Akibatnya:

$$x \in \langle n \rangle \Rightarrow x = nx_1 \text{ untuk beberapa } x_1 \in D$$
$$\Rightarrow x = (am_1)x_1$$
$$\Rightarrow x = a(m_1 x_1)$$
$$\Rightarrow x \subset \langle a \rangle \text{ , jadi } \langle n \rangle \subset \langle a \rangle.$$

Selanjutnya,

$$y \in \langle n \rangle \Rightarrow y = ny_1 \text{ untuk beberapa } y_1 \in D$$
$$\Rightarrow y = (bm_2)y_1$$
$$\Rightarrow y = b(m_2 y_1)$$
$$\Rightarrow y \subset \langle b \rangle \text{ , jadi } \langle n \rangle \subset \langle b \rangle.$$

Karena $\langle n \rangle \subset \langle a \rangle$ dan $\langle n \rangle \subset \langle b \rangle$, maka $\langle n \rangle \subset \{\langle a \rangle \cap \langle b \rangle\} = \langle e \rangle$.

Sehingga, $\langle n \rangle \subset \langle e \rangle$ dan $n \in \langle e \rangle$ sedemikian sehingga $n = ek$ untuk beberapa $k \in D$.

Jadi, $e|n$.

Terbukti e = KPK a dan b, karena setiap kelipatan persekutuan dari a dan b selalu merupakan kelipatan dari e.

Makassar, 30 November 2020

STRUKTUR ALJABAR II

— Pertemuan XV —

(Catatan)

Imanuel AS

1811141008

Struktur Aljabar II / Pertemuan ke - 15 / Catatan

Makassar, 25 Novemb 2020

Nama : Imamel AS

NIM : 1811141008

Struktur Aljabar II : Catatan Pertemuan ke - 15.

Gelanggang Polinom

Misal, R ring himpunan pasangan terurut tak hingga $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $a_i \in R$, $\forall i$ yang bernilai nol kecuali disejumlah hingga disebut polinom atas R.

Polinom ini ditulis

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + 0 x^{n+1} + 0 x^{n+2} + \dots$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$x \notin R$ disebut Indeterminate atas ring R.

Kemudian, $a_0 x^0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n, \dots$ disebut suku dari polinomial $f(x)$ dan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ disebut koefisien dari suatu polinomial $f(x)$.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 25 November 2020

Derajat dari Polinomial

Polinom $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

$a_n \neq 0$, $a_i = 0$, $i > n$ disebut

polinomial dengan derajat n, ditulis

$$der(f(x)) = n$$

disini:

$a_n x^n \longrightarrow$ disebut "leading term"

$a_n \longrightarrow$ disebut "leading coefficient"

misal

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

Jika $a_i = 0$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n \Longrightarrow f(x)$ disebut polinom nol

dan $f(x) = a_0 x^0 \Longrightarrow$ disebut polinom konstan.

Polinom $f(x)$ atas ring R disebut monic jika leading coefficient-nya adalah 1_R. (Maksudnya adalah: Ring dengan unsur kesatuan 1_R)

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 25 November 2020

Kesamaan Polinom

Polinom

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$h(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

atas R disebut sama jika

$$a_i = b_i \quad \forall i$$

himpunan semua polinomial atas R ditulis

$$R[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i, a_i \in R, a_i = 0 \text{ kecuali dijumlah hingga} \right\}.$$

Misal $f, h \in R[x]$

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$$

$$h(x) = b_0x^0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} b_ix^i$$

Penjumlahan

$$\hookrightarrow f(x) + h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_ix^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i)x^i \in R[x]$$

dimana

$$\text{der}(f(x) + h(x)) \leq \text{maks}(\text{der}(f(x)), \text{der}(h(x)))$$

Misal

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \quad a_m \neq 0$$

$$h(x) = b_0x^0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n, \quad b_n \neq 0$$

diperoleh:

$$\text{der}(f(x) + h(x)) = \begin{cases} \text{maks}(m, n) & , m \neq n \\ m & , \text{jika } m = n, a_m + b_n \neq 0 \\ < m & , \text{jika } m = n, a_m + b_n = 0 \end{cases}$$

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 25 Nov 2020

E

$\mathbb{Z}[x]$

$f(x) = 5 + 2x^2 + 3x^5 + \dots + 7x^{2020}$

$h(x) = 7x + 5x^2 + \dots + 8x^{1980}$

$der(f(x) + h(x)) = maks\left(der(f(x)), der(h(x))\right)$

$= maks(2020, 1980)$

$= 2020$

Perkalian

$f(x) \cdot h(x) = c_0 x^0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_i x^i + \dots$

dimana

$$c_i = \sum_{(j+k)=i} a_j b_k \quad , j = 0, 1, 2, \dots$$

yaitu

$$c_0 = \sum_{(j+k)=0} a_j b_k = a_0 b_0$$

$$c_1 = \sum_{(j+k)=1} a_j b_k = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = \sum_{(j+k)=2} a_j b_k = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$\vdots \qquad \vdots$

$$c_i = \sum_{(j+k)=i} a_j b_k = a_0 b_i + a_i b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \dots + a_i b_0$$

Imanuel AS / 1811141008 Tugas Makalah

Makassar, 25 April 2020

$\boxed{E}$

$\mathbb{Z}[x]$, misal $f(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$f(x) = 2x^0 + 3x + 5x^2 = 2 + 3x + 5x^2$

$h(x) = 3x^0 - 5x + 4x^2 - 9x^4 = 3 + 5x + 4x^2 - 9x^3$

Jelas $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 0$

$b_0 = 3$, $b_1 = -5$, $b_2 = 4$, $b_3 = -9$

$f(x) + h(x) = (2+3)x^0 + (3-5)x + (5+4)x^2 + (0+(-9))x^3$

$= 5x^0 - 2x + 9x^2 - 9x^3$

$= 5 - 2x + 9x^2 - 9x^3$

$f(x) \cdot g(x) = c_0x^0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5$

dimana,

$c_0 = \sum_{(j+k)=0} a_j b_k = a_0 b_0 = 2 \times 3 = 6$

$c_1 = \sum_{(j+k)=1} a_j b_k = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$= [2 \times (-5)] + (3)(3)$

$= -1$

$c_2 = \sum_{(j+k)=2} a_j b_k = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

$= (2)(4) + (3)(-5) + (5)(3) = 8$

$c_3 = \sum_{(j+k)=3} a_j b_k = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$

$= (2)(-9) + (3)(4) + (5)(-5) + (0)(3)$

$= -31$

$c_4 = \sum_{(j+k)=4} a_j b_k = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$

$= (3)(-9) + (5)(4) + (0)(-5) = -7$

$c_5 = \sum_{(j+k)=5} a_j b_k = a_2 b_3 + a_3 b_2 = 5(-9) + (0)(4) = -45$

Jadi,

$f(x) \cdot h(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5$

$= 6x^0 - x^1 + 8x^2 - 31x^3 - 7x^4 - 45x^5$

$= 6 - x + 8x^2 - 31x^3 - 7x^4 - 45x^5.$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 25 Nov 2020

$\boxed{N}$ $\boxed{P_1}$

(1) R ring

$(R[x], +, \times)$ ~> Ring (Buktikan)

(2) R daerah integral

$(R[x], +, \times)$ ~> Daerah Integral (Buktikan)

Imanuel AS / 1811141008 $\frac{Attr}{Manus}$ Makassar, 30 Novel 2020

$\boxed{N}$ $\boxed{D_1}$

(1) R ring

$(R[x], +, \times) \rightarrow$ Ring (Buktikan)

Penyelesaian:

Akan dibuktikan: $(R[x]\ ; +, \times)$ Ring

Akan ditunjukkan: $R[x]$ memenuhi syarat ring.

(1.) Akan ditunjukkan : $\forall a,b \in R[x] \Rightarrow a+b \in R[x]$

Ambil sebarang $a,b \in R[x]$

Tulis $a = a(x)$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \quad ; a_i \in R \quad , n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

dan $b = b(x)$

$= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n \quad ; b_i \in R \quad , n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa,

$a + b = a(x) + b(x)$

$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n)$

$= (a_0 + b_0) + (a_1x + b_1x) + (a_2x + b_2x) + \ldots + (a_nx^n + b_nx^n)$

$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$

Karena $a_i + b_i \in R \quad , n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Maka $a(x) + b(x) = a + b \in R[x]$

$\therefore$ Sifat Tertutup penjumlahan $R[x]$ terpenuhi.

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel A S / 1811141008

Makassar, 30 November 2020

(2) Akan ditunjukkan : $\forall a, b, c \in R[x] \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$

Ambil sebarang $a, b, c \in R[x]$

Tulis, $a = a(x)$
$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad ; a_i \in R \;, n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$b = b(x)$
$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n \quad ; b_i \in R \;, n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$c = c(x)$
$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n \quad ; c_i \in R \;, n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa,

$(a+b)+c = [a(x) + b(x)] + c(x)$
$= [(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n)] +$
$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n)$
$= [(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots + (a_n+b_n)x^n] +$
$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n)$
$= (a_0+b_0+c_0) + (a_1+b_1+c_1)x + (a_2+b_2+c_2)x^2 + \dots + (a_n+b_n+c_n)x^n$
$= [a_0+(b_0+c_0)] + [a_1+(b_1+c_1)]x + [a_2+(b_2+c_2)]x^2 + \dots + [a_n+(b_n+c_n)]x^n$
$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) +$
$[(b_0+c_0) + (b_1+c_1)x + (b_2+c_2)x^2 + \dots + (b_n c_n)x^n]$
$= a(x) + [b(x) + c(x)]$
$= a + (b+c)$

$\therefore$ Sifat Assosiatif terhadap penjumlahan di $R[x]$ terpenuhi.

Imanuel AS / 1811141008 (ICP Matematika) Makassar, 30 November 2020

(3) Akan ditunjukkan: $\exists\, 0_{R[x]} \in R[x]$, $\forall a \in R[x] \ni a + 0_{R[x]} = 0_{R[x]} + a$

Pilih $0_{R[x]} \in R[x]$

Tulis, $0_{R[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$; $0 \in R$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Ambil sebarang $a \in R[x]$

Tulis $a = a(x)$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$; $a_i \in R$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
a + 0_{R[x]} &= a(x) + 0_{R[x]} \\
&= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) + (0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n) \\
&= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + (a_2 + 0)x^2 + \dots + (a_n + 0)x^n \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \\
&= a(x) \\
&= a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0_{R[x]} + a &= 0_{R[x]} + a(x) \\
&= (0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n) + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) \\
&= (0 + a_0) + (0 + a_1)x + (0 + a_2)x^2 + \dots + (0 + a_n)x^n \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \\
&= a(x) \\
&= a
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Adanya unsur identitas ~~terhadap~~ terhadap penjumlahan di $R[x]$ terpenuhi.

Catatan: $0_{R[x]} \in R[x]$ dijamin ada karena untuk setiap $0 \in R$ adalah identitas penjumlahan dari $a_i \in R$

Imanuel AS / 1811141008 Geometri

Makassar 30 Nov 20

(4) Akan ditunjukkan : $\forall a \in R[x]\ \exists (-a) \in R[x] \ni a+(-a) = (-a)+a = 0_{R[x]}$

Ambil sebarang $a \in R[x]$

Tulis $a = a(x)$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \ ; a_i \in R \ , n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Pilih $(-a) \in R[x]$

Tulis $(-a) = -a(x)$

$= (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \dots + (-a_n)x^n \ ; -a_i \in R \ ; n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
a+(-a) &= a(x) + (-a(x)) \\
&= \left[(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)\right] + \left[(-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \dots + (-a_n)x^n\right] \\
&= (a_0 + (-a_0)) + (a_1 + (-a_1))x + (a_2 + (-a_2))x^2 + \dots + (a_n + (-a_n))x^n \\
&= 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n \\
&= 0_{R[x]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-a)+a &= (-a(x)) + a(x) \\
&= \left[(-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \dots + (-a_n)x^n\right] + \left[(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)\right] \\
&= (-a_0 + a_0) + (-a_1 + a_1)x + (-a_2 + a_2)x^2 + \dots + (-a_n + a_n)x^n \\
&= 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n \\
&= 0_{R[x]}
\end{aligned}$$

$\therefore$ Adanya unsur invers terhadap penjumlahan $R[x]$ terpenuhi.

Catatan: $(-a) \in R[x]$ dijamin ada karena untuk setiap $-a_i \in R$ adalah invers dari $a_i \in R$.

Imanuel AS (1811141008) Makassar, 30 November 2018

(5) Akan ditunjukkan: $\forall a,b \in R[x] \Rightarrow a+b = b+a.$

Ambil sebarang $a,b \in R[x]$

Tulis $a = a(x)$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad ; a_i \in R, \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$b = b(x)$

$= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n \quad ; b_i \in R, \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
a+b &= a(x) + b(x) \\
&= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) \\
&= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots + (a_n+b_n)x^n \\
&= (b_0+a_0) + (b_1+a_1)x + (b_2+a_2)x^2 + \dots + (b_n+a_n)x^n \quad [a_0, b_0 \in R \text{ ring}] \\
&= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\
&= b(x) + a(x) \\
&= b + a
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Sifat komutatif terhadap penjumlahan di $R[x]$ terpenuhi.

Immanuel AS / 1811141008

Makassar, 23 November 2020.

(6) Akan ditunjukkan : $\forall\, a, b \in R[x] \Rightarrow (ab) \in R[x]$

Ambil sebarang $a, b \in R[x]$

Tulis $a = a(x)$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$; $a_i \in R$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$b = b(x)$

$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$, $b_i \in R$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa

$$ab = a(x) \,.\, b(x)$$

$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) \,.\, (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n)$$

$$= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots +$$
$$(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0) x^n$$

Karena $(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0) \in R$ dan $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

maka $ab \in R[x]$.

Irmawati AS / 1811141008

Makassar, 30 Nov 2

(7) Akan ditunjukkan: $\forall a,b,c \in R[x] \Rightarrow a(bc) = (ab)c$

Ambil sebarang $a,b,c \in R[x]$

Tulis $a = a(x)$

$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)$; $a_i \in R$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$b = b(x)$

$= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)$; $b_i \in R$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$c = c(x)$

$= (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n)$; $c_i \in R$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa

$a(bc) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot [(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) \cdot (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n)]$

$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot [(b_0c_0) + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \dots + (b_0c_n + b_1c_{n-1} + \dots + b_nc_0)x^n]$

$= [(a_0b_0c_0)] + [a_0 \cdot (b_0c_1 + b_1c_0) + a_1 \cdot (b_0c_0)]x + \dots +$

$[a_0 \cdot (b_0c_n + b_1c_{n-1} + \dots + b_nc_0) + a_1(b_0c_{n-1} + b_1c_{n-2} + \dots + b_{n-1}c_0) \dots +$

$a_n(b_0c_0)]x^n$

$= [(a_0b_0)c_0] + [(a_0b_0)c_1 + (a_0b_1)c_0 + (a_1b_0)c_0]x + \dots +$

$[((a_0b_0)c_n + (a_0b_1)c_{n-1} + \dots + (a_0b_n)c_0) + ((a_1b_0)c_{n-1} + (a_1b_1)c_{n-2} + \dots + (a_1b_{n-1})c_0)$

$+ \dots + (a_nb_0)c_0]x^n$

$= [(a_0b_0)c_0] + [(a_0b_0)c_1 + ((a_0b_1) + (a_1b_0))c_0]x + \dots +$

$[(a_0b_0)c_n + ((a_0b_1) + (a_1b_0))c_{n-1} + \dots + ((a_0b_0) + (a_1b_{n-1}) + \dots + (a_nb_n))c_0]$

$((a_0b_0) + (a_1b_{n-1}) + \dots + (a_nb_n))c_0]x^n$ .... (*)

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 30 Novemb 2i

$$(ab)c = \left[(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)\right] \cdot (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n)$$

$$= \left[(a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0)x^n\right] \cdot (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n)$$

$$= \left[(a_0b_0)c_0\right] + \left[(a_0b_0)c_1 + (a_0b_1 + a_1b_0)c_0\right]x + \dots +$$

$$\left[(a_0b_0)c_n + (a_0b_1 + a_1b_0) \cdot c_{n-1} + \dots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0)c_0\right]x^n \quad \dots\dots (**)$$

$\therefore$ Karena $(*) = (**)$ maka $a(bc) = (ab)c$

Imanuel AS / 181114008

Mekassar, 30 Nopember 2020

(8) Akan ditunjukkan: $\forall a, b, c \in R[x] \Rightarrow a(b+c) = ab + ac$

Ambil sebarang $a, b, c \in R[x]$

Tulis, $a = a(x)$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad ; a_i \in R \quad ; n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$b = b(x)$

$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n \quad ; b_i \in R \quad , n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$c = c(x)$

$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n \quad ; c_i \in R \quad , n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa

$$a(b+c) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \left[(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) + (c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n)\right]$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \left[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1) x + \dots + (b_n + c_n) x^n\right]$$

$$= a_0(b_0 + c_0) + \left[a_0(b_1 + c_1) + a_1(b_0 + c_0)\right] x + \dots +$$

$$\left[a_0(b_n + c_n) + a_1(b_{n-1} + c_{n-1}) + \dots + a_n(b_0 + c_0)\right] x^n$$

$$= \left[a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) x^n\right]$$

$$\left[a_0 c_0 + (a_0 c_1 + a_1 c_0) x + \dots + (a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \dots + a_n c_0) x^n\right]$$

$$= \left[(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n)\right] +$$

$$\left[(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) \cdot (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n)\right]$$

$$= \left[a(x) \cdot b(x)\right] + \left[a(x) \cdot c(x)\right]$$

$$= ab + ac$$

$\therefore \; a(b+c) = ab + ac$

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 30 Nov 2020

(9) Akan ditunjukkan: $\forall a,b,c \in R[x] \Rightarrow (a+b)c = ac+bc$

Ambil sebarang $a,b,c \in R[x]$

Tulis $a = a(x)$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad ; a_i \in R \quad , n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$b = b(x)$

$= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n \quad ; b_i \in R \quad , n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$c = c(x)$

$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \quad ; c_i \in R \quad , n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa

$(a+b)c = [(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)] \cdot (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n)$

$= [(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \dots + (a_n+b_n)x^n] \cdot (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n)$

$= [(a_0+b_0)\cdot c_0] + [(a_0+b_0)\cdot c_1 + (a_1+b_1)c_0]x + \dots +$

$[(a_0+b_0)c_n + (a_1+b_1)c_{n-1} + \dots + (a_n+b_n)c_0]x^n$

$= [(a_0c_0) + (a_0c_1 + a_1c_0)x + \dots + (a_0c_n + a_1c_{n-1} + \dots + a_nc_0)x^n] +$

$[(b_0c_0) + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \dots + (b_0c_n + b_1c_{n-1} + \dots + b_nc_0)x^n]$

$= [a(x) \cdot c(x)] + [b(x) \cdot c(x)]$

$= ac + bc$

$\therefore (a+b)c = ac+bc$

$\therefore$ Karena $R[x]$ memenuhi seluruh syarat ring maka

$(R[x], +, \times)$ Ring. ▨

Imanuel AS / 1811141008 (Matematika)

Makassar, 30 Maret 2020

$\boxed{N}$ $\boxed{D_1}$

② R Daerah Integral

$(R[x];+,\times) \rightarrow$ Daerah Integral (Buktikan)

Penyelesaian:

Akan dibuktikan: $(R[x],+,\times)$ Daerah Integral

Akan ditunjukkan: (1) $R[x]$ ring abelian.

(2) $R[x]$ ring dengan unsur kesatuan.

(3) $R[x]$ tidak memuat pembagi nol.

(1). Adit. $R[x]$ ring abelian

Diketahui, karena R Daerah Integral maka R Ring Abelian,

Maka untuk setiap dua unsur sebarang $a,b \in R$ berlaku $ab = ba$.

Diketahui juga R daerah integral maka $(R,+)$ ring abel, $\forall a b \in R \Rightarrow a+b = b+a$.

Ambil sebarang $a,b \in R[x]$

Tulis $a = a(x)$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad ; a_i \in R, \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$b = b(x)$

$= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n \quad ; b_i \in R, \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
ab &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) \\
&= (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2 + b_{n-2} + \dots + a_nb_0)x^n \\
&= (b_0a_0) + (b_0a_1 + a_0b_1)x + \dots + (b_0a_n + b_1a_{n-1} + b_2 + a_{n-2} + \dots + b_na_0)x^n \\
&= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\
&= b(x) \cdot a(x) \\
&= b \cdot a
\end{aligned}$$

$\therefore$ Karena $ab = ba$ maka $R[x]$ ring abelian.

Imanuel As / 1811141008 Makassar, 30 Novemb 2020

(2) Adit. $R[x]$ ring dengan unsur kesatuan.

Diketahui, karena R suatu daerah integral, maka jelas R memiliki unsur kesatuan, yakni $1_R \in R \ni a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a; \forall a \in R$.

Jadi dapat dibentuk polinomial $e = 1_R + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n \in R[x]$ dimana $1_R \in R$.

Ambil sebarang $a \in R[x]$

Tulis $a = a(x)$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \;;\; a_i \in R,\; n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a \cdot e &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot (1_R + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n) \\ &= (a_0 \cdot 1_R) + (a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1_R)x + (a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1_R)x^2 + \dots + \\ &\quad (a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 1_R) \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \cdot a &= (1_R + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\ &= (1_R \cdot a_0) + (1_R \cdot a_1 + 0 \cdot a_0)x + (1_R \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_0)x^2 + \dots + \\ &\quad (1_R \cdot a_n + 0 \cdot a_{n-1} + 0 \cdot a_{n-2} + \dots + 0 \cdot a_0)x^n \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ &= a \end{aligned}$$

$\therefore$ karena $ae = ea = a$ maka $R[x]$ ring dengan unsur kesatuan.

Imanuel AS / 1811141008 Matematika

Makassar, 30 November 2020

(3) Adit. $R[x]$ Tidak memuat pembagi nol. ($R[x]$ adalah RTPN)

Ambil sebarang $a, b \in R[x]$ yaitu :

$a = a(x)$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$; $a_n \neq 0, a_i \in R$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

$b = b(x)$

$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m$; $b_m \neq 0$, $b_i \in R$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

Karena $a_n \neq 0$ dan $b_m \neq 0$ maka perkalian polynomial menghasilkan $a.b = a(x) \cdot b(x) \neq 0$, hal ini disebabkan oleh $a_n b_m \neq 0$.

Ini berarti bahwa $ab = a(x) . b(x) = 0$ dipenuhi hanya bila $a = a(x) = 0$ atau $b = b(x) = 0$.

Sehingga $R[x]$ disebut Tidak memuat pembagi nol. ($R[x]$ adalah RTPN)

$\therefore$ $R[x]$ tidak memuat pembagi nol. ($R[x]$ adalah RTPN)

$\therefore$ Karena $R[x]$ ring abelian dengan unsur kesatuan dan tidak memuat pembagi nol (RTPN) maka disebut

$(R[x], +, \times)$ Daerah Integral.

Imanuel AS / 1811141008 ~~4~~ Mahulu   Makassar, 25 Nov 2020

$\boxed{N}$

- Polinom nol

  $\hookrightarrow 0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^n + \dots = 0$

- Polinom konstan

  $\hookrightarrow ax^0 + 0x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^n + \dots = a$

- Perkalian polinom konstan $a, f(x) \in R[x]$ adalah

  $a \cdot f(x)$ "

Pandang

$F[x]$ ← Polinom atas lapangan

↑

Algoritma pembagian berlaku.

Fakta.

(1) $F[x]$ merupakan daerah euclid.

(2) $F[x]$ merupakan principal ideal ring.

Dipindai dengan CamScanner