Catatan pertemuan I

Imanuel AS
1811141008

Makassar, 31 Agustus 2020

Teori Model
(17A12C514)

Notasi

D : Definisi
E : Contoh
T : Teorema
N : Catatan
L : Lema
P : Proposisi

Teori Model actually adalah perumuman dari Ruang Vektor
Bedanya? Ruang Vektor skalarnya itu field sedangkan teori model skalarnya berupa ring.

Fyi : Field adalah bentuk khusus dari ring, jadi ring itu lebih umum.
Lapangan pasti ring, tapi ring belum tentu lapangan.

→ Review Ruang Vektor

Definisi hal. 35 Vektor Spaces
Misalkan F suatu lapangan dengan elemen-elemennya adalah suatu skalar, misalkan V bukan himpunan kosong, V itu disebut Ruang Vektor atas F jika memenuhi beberapa operasi berikut:
(*) Addition rule, denoted by +, assigns to each pair (u, v) of vectors in V
(*) Scalar Multiplication Rule, denoted by juxtaposition, assigns to each pair $(r, u) \in F \times V$ a vector ru in V.

Makassar, 31 Agustus 2020

Furthermore, the following properties must be satisfied:

1) (Associativity of addition)

For all vectors $u, v, w \in V$,

$$u + (v+w) = (u+v)+w$$

2.) (Commutativity of addition)

For all vectors $u, v \in V$,

$$u+v = v+u$$

3.) (Existence of a zero)

There is a vector $0 \in V$ with the property that

$$0+u = u+0 = u$$

for all vectors $u \in V$

4.) (Existence of additive invers)

For each vector $u \in V$, there is a vector in V, denoted by $-u$, with the property that

$$u + (-u) = (-u) + u = 0$$

5.) (Properties of scalar multiplication)

For all scalars $a, b \in F$ and ~~for~~ all vectors $u, v \in V$,

$$a(u+v) = au + av$$
$$(a+b)u = au + bu$$
$$(ab)u = a(bu)$$
$$1u = u$$

Note: 1-4 diatas tidak lain $(V, +)$ membentuk grup abelian

5 dengan aksinya dari suatu lapangan terhadap V

(aksi F pada V)

$\downarrow$

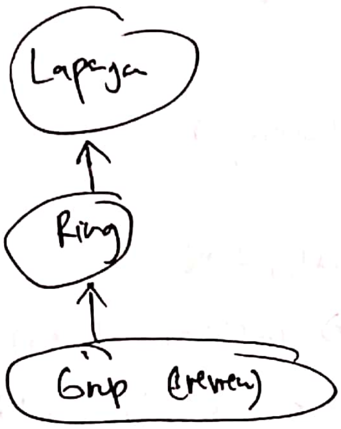
lapangan

Makassar, 31 Agustus 20

Field sebagai salah satu contoh dari Ring,
jadi Ring adalah bersifat lebih umum

? hubungannya

Apa itu Field ? $\rightarrow$ Ring



Review Grup.

$\boxed{D}$ misal G himpunan tidak kosong dengan operasi $*$
$(G,*)$ disebut grup jika:

(1) G assosiatif $[\forall a,b,c \in G \Rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c]$

(2) G memiliki unsur identitas

$$[\exists e \in G, \forall a \in G \Rightarrow a*e = e*a = a]$$

(3) Setiap unsur di G punya invers

$$[\forall a \in G, \exists a' \in G \ni a*a' = a'*a = e]$$

Grup $(G,*)$ disebut abelian / komutatif jika :

$[\forall a,b \in G \Rightarrow a*b = b*a]$

$\boxed{E}$

(1) $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(M_2(\mathbb{R}),+)$, $(M_2(\mathbb{Z}),+)$ } Grup komutatif

(2) contoh grup non komutatif (dan buktinya)

ex : $(\mathbb{N},+)$ bukan grup.

- tutup, $\forall a,b \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{N}$
- Asosiatif, $\forall a,b,c \in \mathbb{N} \Rightarrow a+(b+c) = (a+b)+c$
- $\nexists x \in \mathbb{N} \ni x+a = a+x = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$

$\boxed{L}$

(1) Unsur identitas dari grup adalah tunggal

(2) Invers dari setiap anggota di grup adalah tunggal.

$\left[\begin{array}{l} \forall a \in G, \exists!\, a' \in G \ni a*a' = a'*a = e, \\ e \text{ unsur identitas di } G \end{array}\right]$

Bukti :

(1) Ketunggalan unsur identitas

Misalkan G adalah grup,
misalkan e dan e' adalah unsur identitas di G

Akan ditunjukkan : $e = e'$

- Karena e unsur identitas di G dan $e' \in G \Rightarrow ee' = e'e = e'$
- Karena e' unsur identity di G dan $e \in G \Rightarrow e'e = ee' = e$

Diperoleh $e = e'e = ee' = e'$

$\therefore$ Maka $e = e'$, jadi unsur identitas suatu grup adalah tunggal.

(terbukti) $\boxed{//}$

Makassar, 31 Agustus 2020

(2) Ketunggalan unsur invers

Misalkan G adalah grup
e unsur identitas di G
Ambil e ∈ G sebarang
Misalkan b dan c invers dari a
Akan ditunjukkan : $b = c$
Karena b invers dari a, maka $ba = ab = e$ .... (*)
c invers dari a, maka $ca = ac = e$ .... (**)

dari (**) diperoleh $b(ac) = be = b$ [e identitas]
Jadi $b(ac) = b$ .... (***)
dari (*) diperoleh $(ba)c = ec = c$ [e identitas]
Jadi $(ba)c = c$ .... (****)

Karena grup memenuhi sifat assosiatif,
maka dari (***) dan (****) diperoleh

$$b = b(ac) = (ba)c = c$$

maka, diperoleh $b = c$ adalah invers dari a,
yang mengindikasikan bahwa invers dari a adalah tunggal.

∴ Karena a dipilih sebarang dari elemen G,
maka disimpulkan bahwa setiap anggota G mempunyai
invers tunggal di G.

(Terbukti) ∎