Makassar 2 [illegible] 2020

TUGAS II

Teori Modul

Nama : Imanuel AS
NIM : 1811141008

Teori Modul / Pertemuan ~10 / Tugas II

Makassar, 2 November 2020

Nama : Imanuel Agung Sembe

NIM : 1811141008

Latihan Soal - Soal

1. Misalkan H, K, L dan N masing-masing submodul di M (R-modul). Tunjukkan bahwa $H+K+L+N$ merupakan submodul di M.

2. Tentukan semua submodul dari :
   a) $\mathbb{Z}_{12}$, ($\mathbb{Z}$-modul)
   b.) $\mathbb{Z}_{18}$, ($\mathbb{Z}_{18}$-modul)
   c) $\mathbb{Z}_{23}$, ($\mathbb{Z}$-modul)
   d) $\mathbb{Z}_{28}$, ($\mathbb{Z}_{28}$-modul)

3. Misal $(H \sqcup K)$ dan $(L \sqcup M)$ masing-masing adalah submodul di M (R-modul). Buktikanlah bahwa $(H \sqcup K) \cap (L \sqcup M)$ adalah submodul di M.

4. Diketahui :

$$M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix} \middle| \, e, f, g \in \mathbb{R}, \, e \cdot g \neq 0 \right\}$$

$M_2(\mathbb{Z})$ adalah $\mathbb{Z}$-modul.

Selidiki apakah N merupakan submodul di $M_2(\mathbb{Z})$?

5. Diketahui

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}, \, a > 0 \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Buktikanlah bahwa N merupakan submodul dari G. ($\mathbb{Z}$-modul)

6. Selidikilah apakah modul berikut merupakan modul siklik, jika "Ya" tentukanlah pembangun dari modul tersebut.
   a.) $\mathbb{Z}_7$ ($\mathbb{Z}_7$-modul)
   b.) $\mathbb{Z}_{12}$ ($\mathbb{Z}_{12}$-modul)
   c.) $\mathbb{Z}_{23}$ ($\mathbb{Z}$-modul)
   d.) $\mathbb{Z}_{28}$ ($\mathbb{Z}_{28}$-modul)

7. Dari soal No. 6, tentukanlah semua submodul siklik dari modul yang diketahui.

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 1811141008 [signature] Makassar, 2 Nov 2020

Jawaban:

(1.) Misalkan H, K, L, dan N masing-masing submodul di M (R-modul). Tunjukkan bahwa $H+K+L+N$ merupakan submodul di M.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 4.

Diketahui : M adalah R-modul (M adalah modul atas Ring R).

Asumsikan
$$\left.\begin{aligned} N_1 &= H \\ N_2 &= K \\ N_3 &= L \\ N_4 &= N \end{aligned}\right\} H, K, L, \text{ dan } N \text{ submodul dari } M.$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} H+K+L+N &= N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \\ &= \sum_{i=1}^{4} N_i \end{aligned}$$

Karena N_1, N_2, N_3 dan N_4 adalah submodul dari M,
Maka menurut Teorema 4, disimpulkan bahwa:

$$\sum_{i=1}^{4} N_i = H+K+L+N$$

adalah submodul dari M. ▨

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS/1811141008 Makassar, 2 Nov 2020

(2) Tentukan semua submodul dari

a.) $\mathbb{Z}_{12}$, ($\mathbb{Z}$-modul) [$\mathbb{Z}_{12}$ adalah modul atas ring $\mathbb{Z}$]

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

$\Rightarrow$ Submodul dari $\mathbb{Z}_{12}$ yaitu :

$N_1 = \{\bar{0}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{12}\} = \{\bar{0}\}$

$N_2 = \{\bar{1}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{12}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

$N_3 = \{\bar{2}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{12}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$

$N_4 = \{\bar{3}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{12}\} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$

$N_5 = \{\bar{4}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{12}\} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$

$N_6 = \{\bar{6}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{12}\} = \{\bar{0}, \bar{6}\}$

b.) $\mathbb{Z}_{18}$ (*) , ($\mathbb{Z}_{18}$-modul) [$\mathbb{Z}_{18}$ adalah modul atas ring $\mathbb{Z}_{18}$]

$\Rightarrow$ Submodul dari $\mathbb{Z}_{18}$ yaitu:

$N_1 = \{\bar{0}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{18}\} = \{\bar{0}\}$

$N_2 = \{\bar{1}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{18}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}\}$

$N_3 = \{\bar{2}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{18}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$

$N_4 = \{\bar{3}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{18}\} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$

$N_5 = \{\bar{6}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{18}\} = \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}\}$

$N_6 = \{\bar{9}.k \mid k \in \mathbb{Z}_{18}\} = \{\bar{0}, \bar{9}\}$

(*) : $\mathbb{Z}_{18} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}\}$

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 181114008 Imanuel

Makassar, 2 Novem 2020

d.) $\mathbb{Z}_{23}$, ($\mathbb{Z}$ - modul)

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{23} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}\}$

$\Rightarrow$ Submodul dari $\mathbb{Z}_{23}$ yaitu :

$N_1 = \{\bar{0} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_{23}\} = \{\bar{0}\}$

$N_2 = \{\bar{1} \cdot \bar{k} \mid k \in \mathbb{Z}_{23}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}\}$

---

e.) $\mathbb{Z}_{28}$, ($\mathbb{Z}$ - modul)

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}\}$

$\Rightarrow$ Submodul dari $\mathbb{Z}_{28}$ yaitu :

$N_1 = \{\bar{0} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_{28}\} = \{\bar{0}\}$

$N_2 = \{\bar{1} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_{28}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}\}$

$N_3 = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_{28}\} = \{0, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}\}$

$N_4 = \{4 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_{28}\} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}, \overline{24}\}$

$N_5 = \{7 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}_{28}\} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}\}$

Dipindai dengan CamScanner

Immanuel AS/1811141008 Immanuel

Makassar, 2 Nov 2020

(3) Misal $(H \sqcup K)$ dan $(L \cup M)$ masing-masing adalah submodul di M (R-modul). Buktikan bahwa $(H \sqcup K) \cap (L \cup M)$ adalah submodul di M.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan Teorema 2.

Dik : $(H \cup K)$ submodul di M

dan

$(L \cup M)$ submodul di M

Maka menurut Teorema 2, $(H \cup K) \cap (L \cup M)$ submodul di M. ▨

(4.) Dik : $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$

$N = \left\{ \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & g \end{pmatrix} \middle| e,f,g \in \mathbb{R},\ e \cdot g \neq 0 \right\}$

$M_2(\mathbb{Z})$ adalah $\mathbb{Z}$-modul

Dit : Apakah N merupakan submodul di $M_2(\mathbb{Z})$?

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan : $N \nsubseteq M_2(\mathbb{Z})$

Pilih $N_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in N$

Perhatikan bahwa, entri-entri pada $N_1 \nsubseteq M_2(\mathbb{Z})$ oleh sebab $\mathbb{R} \nsubseteq \mathbb{Z}$.

Jadi, N bukan merupakan submodul di $M_2(\mathbb{Z})$.

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 181114100 8

Makassar, 2 Nov 2020

(5.) Dik : $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbb{R}, \; a > 0 \right\}$

$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; b \in \mathbb{R} \right\}$

Buktikanlah bahwa N merupakan submodul dari G. ($\mathbb{Z}$-modul)

Penyelesaian :

Dik : / G adalah ($\mathbb{Z}$-modul), dan

$N \subseteq G$ [obvius]

Akan ditunjukkan : N submodul dari G ($\mathbb{Z}$-modul)

(1.) $\exists\, 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$

(2.) Ambil sebarang $A, B \in N$

Tulis, $A = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ u/suatu $b_1 \in \mathbb{R}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ u/suatu $b_2 \in \mathbb{R}$

Note that,

$$(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-1 & b_1 - b_2 \\ 0-0 & 1-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin N.$$

Karena syarat (2) pada Teorema 1 tidak terpenuhi, maka N bukan merupakan submodul dari G ($\mathbb{Z}$-modul).

(4)

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 2 Nov 20..

(6.) Selidikilah apakah modul berikut merupakan modul siklik, jika "Ya" tentukanlah pembangun dari modul tersebut.

a.) $\mathbb{Z}_7$ ($\mathbb{Z}_7$ - modul)

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_7$ adalah $\mathbb{Z}_7$ - modul, $\exists \bar{2} \in \mathbb{Z}_7$

Akan ditunjukkan : $\mathbb{Z}_7 = \langle \bar{2} \rangle = \{ n.\bar{2} \mid n \in \mathbb{Z}_7 \}$

(Perhatikan kembali Catatan kemarin hal (4))

b) $\mathbb{Z}_{12}$ ($\mathbb{Z}_{12}$ - modul)

Penyelesaian : $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

$\mathbb{Z}_{12}$ adalah $\mathbb{Z}_{12}$ - modul, $\exists\, 1 \in \mathbb{Z}_{12}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{12} = \langle \bar{1} \rangle &= \{ n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_{12} \} \\ &= \{ (\bar{0}.\bar{1}), (\bar{1}.\bar{1}), (\bar{2}.\bar{1}), (\bar{3}.\bar{1}), (\bar{4}.\bar{1}), (\bar{5}.\bar{1}), \\ &\quad (\bar{6}.\bar{1}), (\bar{7}.\bar{1}), (\bar{8}.\bar{1}), (\bar{9}.\bar{1}), (\overline{10}.\bar{1}), (\overline{11}.\bar{1}) \} \\ &= \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11} \} \end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_{12}$ adalah modul siklik yang dapat dibangun oleh $\bar{1}$.

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS / 10114008 Makassar, 2 Nop

c.) $\mathbb{Z}_{23}$ ($\mathbb{Z}$ - modul)

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{23} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}\}$

$\mathbb{Z}_{23}$ adalah $\mathbb{Z}$-modul , $\exists\, \bar{1} \in \mathbb{Z}_{23}$

Perhatikan bahwa, $\mathbb{Z}_{23} = \langle \bar{1} \rangle$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_{23} = \{n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{(0.\bar{1}), (1.\bar{1}), (2.\bar{1}), (3.\bar{1}), (4.\bar{1}), (5.\bar{1}), (6.\bar{1}), (7.\bar{1}), (8.\bar{1}), (9.\bar{1}), (10.\bar{1}), (11.\bar{1}), (12.\bar{1}), (13.\bar{1}), (14.\bar{1}), (15.\bar{1}), (16.\bar{1}), (17.\bar{1}), (18.\bar{1}), (19.\bar{1}), (20.\bar{1}), (21.\bar{1}), (22.\bar{1})\}$$
$$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}\}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_{23}$ adalah modul siklik yang dapat dibangun oleh $\bar{1}$.

d.) $\mathbb{Z}_{28}$ ($\mathbb{Z}_{28}$-modul)

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}\}$

$\mathbb{Z}_{28}$ adalah $\mathbb{Z}_{28}$ - modul, $\exists\, \bar{1} \in \mathbb{Z}_{28}$

Perhatikan bahwa

$$\mathbb{Z}_{28} = \langle \bar{1} \rangle = \{n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_{28}\}$$
$$= \{(\bar{0}.\bar{1}), (\bar{1}.\bar{1}), (\bar{2}.\bar{1}), (\bar{3}.\bar{1}), (\bar{4}.\bar{1}), (\bar{5}.\bar{1}), (\bar{6}.\bar{1}), (\bar{7}.\bar{1}), (\bar{8}.\bar{1}), (\bar{9}.\bar{1}), (\overline{10}.\bar{1}), (\overline{11}.\bar{1}), (\overline{12}.\bar{1}), (\overline{13}.\bar{1}), (\overline{14}.\bar{1}), (\overline{15}.\bar{1}), (\overline{16}.\bar{1}), (\overline{17}.\bar{1}), (\overline{18}.\bar{1}), (\overline{19}.\bar{1}), (\overline{20}.\bar{1}), (\overline{21}.\bar{1}), (\overline{22}.\bar{1}), (\overline{23}.\bar{1}), (\overline{24}.\bar{1}), (\overline{25}.\bar{1}), (\overline{26}.\bar{1}), (\overline{27}.\bar{1})\}$$
$$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}\}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_{28}$ adalah modul siklik yang dapat dibangun oleh $\bar{1}$.

Dipindai dengan CamScanner

Inanuel AS/ 181114008 Inanuel

Makassar, 2 Nov 20

(7) Dari soal 6, Tentukanlah semua submodul siklik dari modul yang diketahui.

a.) $\mathbb{Z}_7$ ($\mathbb{Z}_7$ - Modul)

Penyelesaian:

$\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

- $N_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$
  Note that, $N_1 \subseteq \mathbb{Z}_7$ dan $N_1 = \langle \bar{1} \rangle = \{n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_7\}$ dgn $\bar{1} \in N_1$ [obvius]
  Maka sesuai Definisi 2 disimpulkan N_1 adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_7$.
- $N_2 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$
  Note that, $N_2 \subseteq \mathbb{Z}_7$ dan $N_2 = \langle \bar{1} \rangle = \{n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_7\}$ dgn $\bar{1} \in N_2$. [obvius]
  Maka sesuai Definisi 2 disimpulkan N_2 adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_7$.
- $N_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$
  Note that, $N_3 \subseteq \mathbb{Z}_7$ dan $N_3 = \langle \bar{1} \rangle = \{n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_7\}$ dgn $\bar{1} \in N_3$. [obvius]
  Maka sesuai Definisi 2 disimpulkan N_3 adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_7$.
- $N_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$
  Note that, $N_4 \subseteq \mathbb{Z}_7$ dan $N_4 = \langle \bar{1} \rangle = \{n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_7\}$ dgn $\bar{1} \in N_4$. [obvius]
  Maka sesuai Definisi 2 disimpulkan N_4 adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_7$.
- $N_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$
  Note that, $N_5 \subseteq \mathbb{Z}_7$ dan $N_5 = \langle \bar{1} \rangle = \{n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_7\}$ dgn $\bar{1} \in N_5$. [obvius]
  Maka sesuai Definisi 2 disimpulkan N_5 adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_7$.
- $N_6 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$
  Note that, $N_6 \subseteq \mathbb{Z}_7$ dan $N_6 = \langle \bar{1} \rangle = \{n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_7\}$ dgn $\bar{1} \in N_6$. [obvius]
  Maka sesuai Definisi 2 disimpulkan N_6 adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_7$.
- $N_7 = \{\bar{0}\}$
  Note that, $N_7 \subseteq \mathbb{Z}_7$ dan $N_7 = \langle \bar{0} \rangle = \{n.\bar{0} \mid n \in \mathbb{Z}_7\}$ dgn $\bar{0} \in N_7$. [obvius]
  Maka sesuai Definisi 2 disimpulkan N_7 adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_7$.

dst

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS/1811141008

Makassar, 7 Mei 2020

b.) $\mathbb{Z}_{12}$ ($\mathbb{Z}_{12}$-modul)

Penyelesaian:

$\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

∘) $N_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

Note that, $N_1 \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ dan $N_1 = \langle \bar{1} \rangle = \{n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_{12}\}$ dgn $\bar{1} \in N_1$. [obvious]

Maka sesuai Definisi 2 disimpulkan N_1 adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_{12}$.

∘) $N_2 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}\}$

∘) $N_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$

∘) $N_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$

∘) $N_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

∘) $N_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

∘) $N_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

∘) $N_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

∘) $N_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

∘) $N_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

∘) $N_{11} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

Note that,

$\left.\begin{matrix} N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \\ N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11} \end{matrix}\right\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$

dan

$N_2 = N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = N_9 = N_{10} = N_{11} = \langle \bar{1} \rangle = \{n.\bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}_{12}\}$

dengan $\bar{1} \in N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}$. [obvious]

⇒ Sesuai Definisi 2: $N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}$ adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_{12}$.

∘) $N_{12} = \{\bar{0}\}$

Note that, $N_{12} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ dan $N_{12} = \langle \bar{0} \rangle = \{n.\bar{0} \mid n \in \mathbb{Z}_{12}\}$ dengan $\bar{0} \in N_{12}$. [obvious]

Maka sesuai Definisi 2 disimpulkan N_{12} adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_{12}$.

⋮

dst

Dipindai dengan CamScanner

Inamul AS/1811141008   Makassar, 2 Nov 20..

c.) $\mathbb{Z}_{23}$ ($\mathbb{Z}$-modul)

<u>Penyelesaian :</u>

$\mathbb{Z}_{23} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21},\overline{22}\}$

- $N_1 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21},\overline{22}\}$
- $N_2 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21}\}$
- $N_3 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20}\}$
- $N_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19}\}^{20}$
- $N_5 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18}\}$
- $N_6 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17}\}$
- $N_7 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16}\}$
- $N_8 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15}\}$
- $N_9 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14}\}$
- $N_{10} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13}\}$
- $N_{11} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12}\}$
- $N_{12} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11}\}$
- $N_{13} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10}\}$
- $N_{14} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9}\}$
- $N_{15} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8}\}$
- $N_{16} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7}\}$
- $N_{17} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6}\}$
- $N_{18} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$
- $N_{19} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$
- $N_{20} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$
- $N_{21} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$
- $N_{22} = \{\overline{0},\overline{1}\}$

Note that, $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}, N_{14}, N_{15}, N_{16}, N_{17}, N_{18}, N_{19}, N_{20}, N_{21}, N_{22}$ $\subseteq \mathbb{Z}_{23}$. dan

$N_1 \neq N_2 \neq N_3 \neq N_4 \neq N_5 \neq N_6 \neq N_7 \neq N_8, N_9 \neq N_{10} \neq N_{11} \neq N_{12} \neq N_{13} \neq N_{14} \neq N_{15} \neq N_{16} \neq N_{17} \neq N_{18} \neq N_{19} \neq N_{20} \neq N_{21} \neq N_{22}$

$= \langle \overline{1} \rangle = \{n \cdot \overline{1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dgn $\overline{1} \in N_i \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots, 22$. [Obvius]

Maka sesuai Definisi 2: N_i adalah submodul siklik dari $\mathbb{Z}_{23}$ $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, 22$.

⋮

dst.

Dipindai dengan CamScanner

Imanuel AS/18111410008 Malang, 2, Mei 2020

d.) $\mathbb{Z}_{28}$ ($\mathbb{Z}_{28}$ - modul)

Penyelesaian :

$\mathbb{Z}_{28} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21},\overline{22},\overline{23},\overline{24},\overline{25},\overline{26},\overline{27}\}$

$\Rightarrow N_1 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21},\overline{22},\overline{23},\overline{24},\overline{25},\overline{26},\overline{27}\}$

$\Rightarrow N_2 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21},\overline{22},\overline{23},\overline{24},\overline{25},\overline{26}\}$

$\Rightarrow N_3 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21},\overline{22},\overline{23},\overline{24},\overline{25}\}$

$\Rightarrow N_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21},\overline{22},\overline{23},\overline{24}\}$

$\Rightarrow N_5 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21},\overline{22},\overline{23}\}$

$\Rightarrow N_6 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21},\overline{22}\}$

$\Rightarrow N_7 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20},\overline{21}\}$

$\Rightarrow N_8 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19},\overline{20}\}$

$\Rightarrow N_9 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18},\overline{19}\}$

$\Rightarrow N_{10} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17},\overline{18}\}$

$\Rightarrow N_{11} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{17}\}$

$\Rightarrow N_{12} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\overline{16}\}$

$\Rightarrow N_{13} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15}\}$

$\Rightarrow N_{14} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14}\}$

$\Rightarrow N_{15} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13}\}$

$\Rightarrow N_{16} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12}\}$

$\Rightarrow N_{17} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11}\}$

$\Rightarrow N_{18} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10}\}$

$\Rightarrow N_{19} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9}\}$

$\Rightarrow N_{20} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8}\}$

$\Rightarrow N_{21} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7}\}$

$\Rightarrow N_{22} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6}\}$

$\Rightarrow N_{23} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$

$\Rightarrow N_{24} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$

$\Rightarrow N_{25} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$

$\Rightarrow N_{26} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$

$\Rightarrow N_{27} = \{\overline{0},\overline{1}\}$

Note that, $N_i \subseteq \mathbb{Z}_{28}$ $\forall i = 1,2,3,\ldots,27$ dan $N_i = \langle \overline{1} \rangle = \{n.\overline{1} \mid n \in \mathbb{Z}_{28}\}$ $\forall i = 1,2,\ldots,27$

dengan $\overline{1} \in N_i$ $\forall i = 1,2,3,\ldots,27$. [obvius]

$\Rightarrow$ Sesuai Definisi 2 : N_i submodul siklik dari $\mathbb{Z}_{28}$.

⋮

dst

Dipindai dengan CamScanner