Makassar, 9 Desember 2020

# TUGAS VI

Teori Modul

Nama : Imanuel AS

NIM : 1811141008

Imanuel AS / 181114100 8

Makassar, 9 Desember 2020

① Diketahui $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc \neq 0 \right\}$

$M_2(\mathbb{R})$ adalah $\mathbb{Z}$-modul.

Periksa apakah $M_2(\mathbb{R})$ modul torsi atau modul bebas torsi?

Penyelesaian :

∘ Akan ditunjukkan : $M_2(\mathbb{R})$ bukan modul torsi

Misal pilih $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Perhatikan bahwa,

$$r \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hanya dipenuhi oleh $r = 0 \in \mathbb{Z}$.

Jadi, karena tidak ada $r \in \mathbb{Z}, r \neq 0$ sedemikian sehingga $r \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka ada elemen dari $M_2(\mathbb{R})$ yang bukan elemen torsi. Sehingga dikatakan, tidak semua elemen di $M_2(\mathbb{R})$ merupakan elemen torsi.

$\therefore M_2(\mathbb{R})$ bukan modul torsi.

∘ Akan ditunjukkan : $M_2(\mathbb{R})$ adalah modul bebas torsi

Ambil $A \in M_2(\mathbb{R})$ sebarang, dengan $A \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tulis, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ untuk suatu $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc \neq 0$

Perhatikan bahwa,

$$r \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hanya dipenuhi oleh $r = 0 \in \mathbb{Z}$.

Jadi, setiap elemen di $M_2(\mathbb{R})$ bukan elemen torsi.

$\therefore M_2(\mathbb{R})$ adalah modul bebas torsi.

Imanuel AS / 181141008 Imanuel		Makassar, 9 Desember 2020

(2) Misal $C = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$, terhadap $\mathbb{Z}_9$.

$\mathbb{M}_2(C) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in C \right\}$

$(M_2(C), +_9, \times_9)$ adalah $C$-modul.

Periksa apakah $\mathbb{M}_2(C)$ modul torsi atau modul bebas torsi?

Penyelesaian :

• Akan ditunjukkan : $\mathbb{M}_2(C)$ modul torsi.

Ambil sebarang $A \in \mathbb{M}_2(C)$

Tulis, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ untuk suatu $a, b, c, d \in C$

Perhatikan bahwa,

$$r \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

dipilih $r = \bar{3}$ karena
$\bar{3} \cdot \bar{0} = \bar{0}$
$\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{9} = \bar{0}$
$\bar{3} \cdot \bar{6} = \overline{18} = \bar{0}$

dapat dipilih $r = \bar{3} \in C$ sedemikian sehingga $r \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$, $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(C)$

Jadi, karena ada $r \in C$, $r \neq \bar{0}$ sedemikian sehingga $r \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(C)$ maka setiap elemen di $\mathbb{M}_2(C)$ merupakan elemen torsi

$\therefore$ $M_2(C)$ adalah modul torsi. .....(*)

• Akan ditunjukkan : $M_2(C)$ bukan modul bebas torsi.

Karena dari (*) diketahui $\mathbb{M}_2(C)$ adalah modul torsi, maka jelas bahwa $\mathbb{M}_2(C)$ bukan modul bebas torsi.

$\therefore$ $\mathbb{M}_2(C)$ bukan modul bebas torsi.

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel

Makassar, 9 Desember 2020

(3.) Misal $B = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ terhadap $\mathbb{Z}_{16}$

$M_2(B) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in B \right\}$

$(M_2(B), +_{16}, \times_{16})$ adalah $B$ - modul.

Periksa apakah $M_2(B)$ modul torsi atau modul bebas torsi?

Penyelesaian :

- Akan ditunjukkan : $M_2(B)$ adalah modul torsi.

Ambil sebarang $A \in M_2(B)$

Tulis, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ untuk suatu $a, b, c, d \in B$

Perhatikan bahwa

$$r \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

dapat dipilih $r = \bar{4} \in B$ sedemikian sehingga berlaku :

$$r \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 B \quad \dots (*)$$

Karena $\bar{4} \cdot \bar{0} = \bar{0}$ dan $\bar{4} \cdot \bar{4} = \overline{16} = \bar{0}$.

Jadi, karena ada $r = \bar{4} \in C$, $r \neq \bar{0}$ sedemikian sehingga berlaku $(*)$, maka setiap elemen di $M_2(B)$ dikatakan bahwa ia merupakan elemen torsi.

$\therefore M_2(B)$ adalah modul torsi. $\dots (**)$

- Akan ditunjukkan: $M_2(B)$ bukan modul bebas torsi.

Karena dari $(**)$ diketahui $M_2(B)$ adalah modul torsi, maka jelas bahwa $M_2(B)$ bukan modul bebas torsi.

$\therefore M_2(B)$ bukan modul bebas torsi.

Imanuel AS / 1811141008 ~~Mat~~ PMA

Makassar, 9 Desember 2020

(4) Diketahui $\mathbb{Z}_4$ adalah $\mathbb{Z}$-modul.
Periksa apakah $\mathbb{Z}_4$ modul bebas ?
Jelaskan!
Penyelesaian: $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$
Akan dibuktikan: $\mathbb{Z}_4$ bukan modul bebas.

•) Akan ditunjukkan: $\mathbb{Z}_4$ tidak bebas linear

Untuk $S = \{\bar{2}\}$, maka $k \cdot \bar{2} = \bar{0}$ dapat dipenuhi oleh $k = 0$ dan $k = 4$ dimana $k \in \mathbb{Z}$. Jadi, karena $k = 0 \in \mathbb{Z}$ bukan satu-satunya solusi, maka $S = \{\bar{2}\}$ tidak bebas linear.

Perhatikan juga bahwa,

$$k_1(\bar{0}) + k_2(\bar{1}) + k_3(\bar{2}) + k_4(\bar{3}) = \bar{0}$$

dapat dipilih $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, $k_3 = 4$, $k_4 = 4$, $k \in \mathbb{Z}$.
Karena $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0 \in \mathbb{Z}$ bukan satu-satunya solusi untuk SPL diatas, maka $\mathbb{Z}_4$ tidak bebas linear.
$\therefore$ Tidak ada $S \subseteq \mathbb{Z}_4$ yang merupakan bebas linear ....(*)

$\therefore$ Karena (*) maka disimpulkan $\mathbb{Z}_4$ bukan modul bebas.

Imanuel AS / 1811141008 4 MIF Makassar, 9 Des 2020

(5) Diketahui $M_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$

$(M_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ adalah $\mathbb{Z}$-modul.

Periksa apakah $M_2(\mathbb{Z})$ modul bebas?

Jelaskan!

Penyelesaian:

Akan dibuktikan: $M_2(\mathbb{Z})$ modul bebas

Ambil $X = \{A, B, C, D, \ldots\}$ untuk suatu $A, B, C, D, \ldots \in M_2(\mathbb{Z})$

a.) Akan ditunjukkan: $\forall X \subseteq M_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow X$ bebas linear.

Ambil sebarang $X \subseteq M_2(\mathbb{Z})$.

Tulis $X = \{A, B, C, D, \ldots\}$ untuk suatu $A, B, C, D, \ldots \in M_2(\mathbb{Z})$

Perhatikan bahwa, karena $X$ adalah himpunan suatu matriks dengan entri-entri $\mathbb{Z}$, dimana diketahui bahwa dalam perkalian matriks yang bisa menghasilkan matriks $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ hanya dipenuhi oleh Matriks $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dikali dengan sebarang matriks lain pada himpunan $X$.

Jadi diperoleh:

$M_2(\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}$-modul dan $X \subseteq M_2(\mathbb{Z})$ berlaku:

$\forall n \in \mathbb{N}$ dan $\forall r_i \in \mathbb{Z}$ dan $x_i \in X$ dengan

$1 \leq i \leq n$ maka $r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_i x_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

hanya dipenuhi oleh $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore X$ bebas linear

Imanuel AS / 1811141008 

Makassar, 9 Desember 20..

b.) Akan ditunjukkan : $X \subseteq M_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow M_2(\mathbb{Z}) = \langle X \rangle$
Ambil sebarang $X \subseteq M_2(\mathbb{Z})$, tulis :
$X = \{A, B, C, D, \ldots\}$ untuk suatu $A, B, C, D, \ldots \in M_2(\mathbb{Z})$

Ambil sebarang $x_i \in X$ $(X \subseteq M_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow X \in M_2(\mathbb{Z}))$
Jelas $x_i \in M_2(\mathbb{Z})$.

Perhatikan bahwa, karena $x_i \in X$ dapat dipilih sebarang, maka jelas $M_2(\mathbb{Z}) = \langle x_i \rangle = \{n \cdot x_i \mid n \in \mathbb{Z}\}$ berlaku, dan karena $x_i \in X$ maka dapat ditulis:

$$M_2(\mathbb{Z}) = \langle X \rangle = \{n \cdot X \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$\therefore M_2(\mathbb{Z}) = \langle X \rangle$

$\therefore$ Karena $X = \{A, B, C, D, \ldots\}$ untuk suatu $A, B, C, D, \ldots \in M_2(\mathbb{Z})$ adalah $X \subseteq M_2(\mathbb{Z})$ dan berlaku :

1.) $X$ bebas linear
2.) $M_2(\mathbb{Z}) = \langle X \rangle$

Maka disimpulkan bahwa : $X$ merupakan basis untuk $M_2(\mathbb{Z})$ maka $M_2(\mathbb{Z})$ disebut modul bebas.

Imanuel AS/ 181114008

Makassar, 9 Desember 2021

(6.) Misal $M$ adalah $R$-modul.

$M = M_1 + M_2$ adalah jumlahan dari dua submodul bebas torsi.

Apakah $M$ bebas torsi? Periksa.

<u>Penyelesaian</u>:

Karena $M_1 + M_2$ adalah jumlahan dari dua submodul bebas torsi, maka $M = M_1 + M_2$ juga adalah bebas torsi.