Makassar, 26 Oktober 2020

Nama Kelompok 1 Analisis Real II

Moh. Alfi Amal (1811142002)
Imanuel Agung Sembe (1811141008)
Nur Fadli (1811141003)
Suriyandi (1811141009)
Muhammad Nur Ilham (1811142011)
Muh. Asrul Reza Rusli (1811140007)

Section 5.3 — Continous Function On Intervals

(2) Misalkan $I := [a,b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ dan $g : I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I. Tunjukkan bahwa $E := \{x \in I : f(x) = g(x)\}$ memenuhi jika $(x_n) \subseteq E$ dan $x_n \to x_0$ maka $x_0 \in E$.

Penyelesaian:

Dik: f dan g kontinu pada I

$E \subseteq I$

Adit: $x_n \subseteq E$ dan $x_n \to x_0 \Rightarrow x_0 \in E$.

Bukti:

Misalkan $(x_n) \subseteq E$ dan $x_n \to x_0$.

Karena $(x_n) \subseteq E$ maka sesuai definisi E diperoleh

$$f(x_n) = g(x_n) \quad , \forall n \in \mathbb{N} \quad \ldots\ldots (1)$$

Perhatikan bahwa f dan g kontinu di I dan $I \supseteq E$

Sehingga untuk $(x_n) \subseteq E$ dan $x_n \to x_0$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Dari persamaan (1), (2), dan (3) diperoleh

$$f(x_n) = g(x_n)$$

$$f(x_0) = g(x_0)$$

Karena $x_0 \in I$ dan $f(x_0) = g(x_0)$ mestilah $x_0 \in E$. ▨

Imanuel AS / 1811141008 Imanuel   Makassar, 25 Oktober 2020

(4.) Tunjukkan untuk semua polinomial berderajat ganjil dengan koefisien bil. Real mempunyai minimal 1 akar real.

Penyelesaian:

Misalkan P adalah polinomial berderajat ganjil dengan koefisien bil. real

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Misalkan kasusnya terbagi menjadi 2.

Pertama untuk $a_n > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(x) = \lim_{n \to \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$$

$$= \infty \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\lim_{n \to -\infty} P(x) = \lim_{n \to \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$$

$$= -\infty \ldots\ldots\ldots (2)$$

dari (1) dan (2), maka pasti ada $x_1 \in \mathbb{R}$ sehingga $P(x_1) < 0$ dan $x_2 \in \mathbb{R}$ sehingga $P(x_2) > 0$.

Kita ketahui bahwa polinomial itu kontinu pada $\mathbb{R}$, maka menurut Teorema "Bolzono's Intermediate Value", ada $x_3 \in \mathbb{R}$ sehingga $P(x_3) = 0$. x_3 akar real dari $P(x)$.

Kasus kedua untuk $a_n < 0$.

$$\lim_{n \to \infty} P(x) = \lim_{n \to \infty} [a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0]$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{n \to -\infty} P(x) = \lim_{n \to -\infty} [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0]$$

$$= \infty$$

Kembali diperoleh, ada $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sehingga $P(x_1) < 0$ dan $P(x_2) > 0$. dan $P(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$. Menurut Teorema Bolzono's Intermediate Value ada $x_3 \in \mathbb{R}$ sehingga $P(x_3) = 0$. x_3 Akar real dari $P(x_3)$.

Imanuel AS/1811141008 Imanuel

Makassar, 25 oktober 2020

(6) Misalkan f kontinu pada interval $[0,1]$ ke $\mathbb{R}$ dan sedemikian sehingga $f(0)=f(1)$. Buktikan bahwa terdapat suatu titik c dalam $[0,\frac{1}{2}]$ sedemikian sehingga $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$.

[Petunjuk: Pandang $g(x) = f(x) - f(x+\frac{1}{2})$].

Simpulkan bahwa, sebarang waktu, terdapat titik-titik antipodal pada equator bumi yang mempunyai temperatur yang sama.

Penyelesaian :

Misalkan $g(x) := f(x) - f(x+\frac{1}{2})$

Karena f kontinu pada $[0,1]$ maka g kontinu pada $[0,1]$

Kemudian perhatikan

$$g(0) = f(0) - f(\tfrac{1}{2})$$
$$g(\tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{2}) - f(1)$$
$$= f(\tfrac{1}{2}) - f(0)$$

- Jika $f(\frac{1}{2}) = f(0)$ maka $c=0$.
- Jika $f(\frac{1}{2}) \neq f(0)$ dan $f(\frac{1}{2}) > f(0)$, maka

$$g(0) < 0 \text{ dan } g(\tfrac{1}{2}) > 0.$$

Menurut Teorema 5.3.5, ada $c \in [0,1]$ sehingga

$$g(c) = 0$$
$$\Leftrightarrow f(c) = f(c+\tfrac{1}{2})$$

- Jika $f(\frac{1}{2}) \neq f(0)$ dan $f(\frac{1}{2}) < f(0)$, maka

$$g(\tfrac{1}{2}) < 0 \text{ dan } g(0) > 0$$

Menurut Teorema 5.3.5, ada $c \in [0,1]$ sehingga

$$g(c) = 0$$
$$\Leftrightarrow f(c) = f(c+\tfrac{1}{2})$$

$\therefore \exists c \in [0,1] \ni f(c) = f(c+\frac{1}{2})$. ▨

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 26 Oktober 2020

(8.) Tunjukkan $f(x) := 2 \ln x + \sqrt{x-2}$ memiliki akar pada $[1, 2]$.
Gunakan metode bagi dua dengan galat $= 0,01$.

Penyelesaian:

Galat $\rightarrow e = \dfrac{|x_1 - x_2|}{2}$, $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Iterasi I

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_c = 1,5$

$f(x_c) = 0,035675088$ $\quad e = 0,5$

Iterasi II

$x_1 = 1$, $x_2 = 1,5$, x_c (baru) $= 1,25$

$f(x_c) = -0,435678909$ $\quad e = 0,25$

Iterasi III

$x_1 = x_c = 1,25$, $x_2 = 1,5$, x_c (baru) $= 1,375$

$f(x_c) = -0,19048598$ $\quad e = 0,125$

Iterasi IV

$x_1 = x_c = 1,375$, $x_2 = 1,5$, x_c(baru) $= 1,4375$

$f(x_c) = -0,075231132$ $\quad e = 0,0625$

Iterasi V

$x_1 = x_c = 1,4375$, $x_2 = 1,5$; x_c (baru) $= 1,46875$

$f(x_c) = -0,019256638$ $\quad e = 0,03125$

Iterasi VI

$x_1 = x_c = 1,46875$, $x_2 = 1,5$, x_c (baru) $= 1,484375$

$f(x_c) = 0,00833691$ $\quad e = 0,015625$

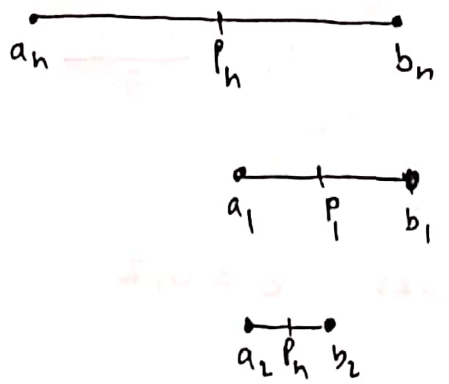
Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 26 Oktober 2020

(10.) Jika metode bagi dua digunakan pada interval yang panjangnya 1, dengan P_n titik tengah interval dan galat $|P_n - c| < 10^{-5}$.
Tentukan nilai minimal dari n untuk $|P_n - c| < 10^{-5}$.

Penyelesaian:

Misalkan ada interval $[a_n, b_n]$ dengan 1.



$|P_n - a_n| = \frac{1}{2}$

$|P_n - b_n| = \frac{1}{2}$

$|P_1 - b_1| = \frac{1}{4}$

$|P_1 - a_1| = \frac{1}{4}$

$|P_2 - a_2| = \frac{1}{8}$

$|P_2 - b_2| = \frac{1}{8}$

Seterusnya membentuk barisan $\frac{1}{2^n}$,
sehingga $|P_n - c| = \frac{1}{2^n}$, P_n titik tengah dan $c = a_n$ atau $c = b_n$.
Kemudian akan dicari n, sedemikian sehingga

$$|P_n - c| < 10^{-5}$$
$$\frac{1}{2^n} < 10^{-5}$$
$$2^n > 10^5$$
$$\log 2^n > \log 10^5$$
$$n \log 2 > 5 \log 10$$
$$n > \frac{5 \log 10}{\log 2}$$
$$n > 5 \frac{{}^{10}\log 10}{{}^{10}\log 2}$$
$$n > \frac{5}{{}^{10}\log 2}$$
$$n > 16{,}6096405$$

dapat diambil $n = 17$.

Immanuel AS / 1811141008

Makassar, 25 Oktober 2020

(12.) Misalkan $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, dan $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = \sup\{x^2, \cos x\}$ untuk $x \in I$.
Tunjukkan terdapat suatu titik minimum mutlak $x_0 \in I$ untuk f pada I.
Tunjukkan bahwa x_0 merupakan suatu solusi untuk persamaan $\cos x = x^2$.

Penyelesaian :

Misalkan $f_1(x) = x^2$

dan $f_2(x) = \cos x$

Misalkan $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ adalah titik potong $f_1(x) = x^2$ dan $f_2(x) = \cos x$,

Maka $f_1(x_0) = f_2(x_0)$

Perhatikan bahwa dari gambar diperoleh,
$f_1(x) \leq f_2(x)$ pada $[0, x_0]$ dan
$f_2(x) \leq f_1(x)$ pada $[x_0, \frac{\pi}{2}]$.

> Kasus I : $\forall x \in [0, x_0]$
Perhatikan bahwa, $\sup\{f_1(x), f_2(x)\} = f_2(x)$
Maka diperoleh $\forall x \in [0, x_0]$, $f(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x)\} = f_2(x) \geq f_2(x_0)$.
Jadi, $f(x) \geq f_2(x_0)$ $\forall x \in [0, x_0]$.

> Kasus II : $\forall x \in [x_0, \frac{\pi}{2}]$
Perhatikan bahwa, $\sup\{f_1(x), f_2(x)\} = f_1(x)$
Maka diperoleh $\forall x \in [x_0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x)\} = f_1(x) \geq f_1(x_0)$.
Jadi, $f(x) \geq f_1(x_0)$ $\forall x \in [x_0, \frac{\pi}{2}]$.

Dari kasus I dan II diperoleh,

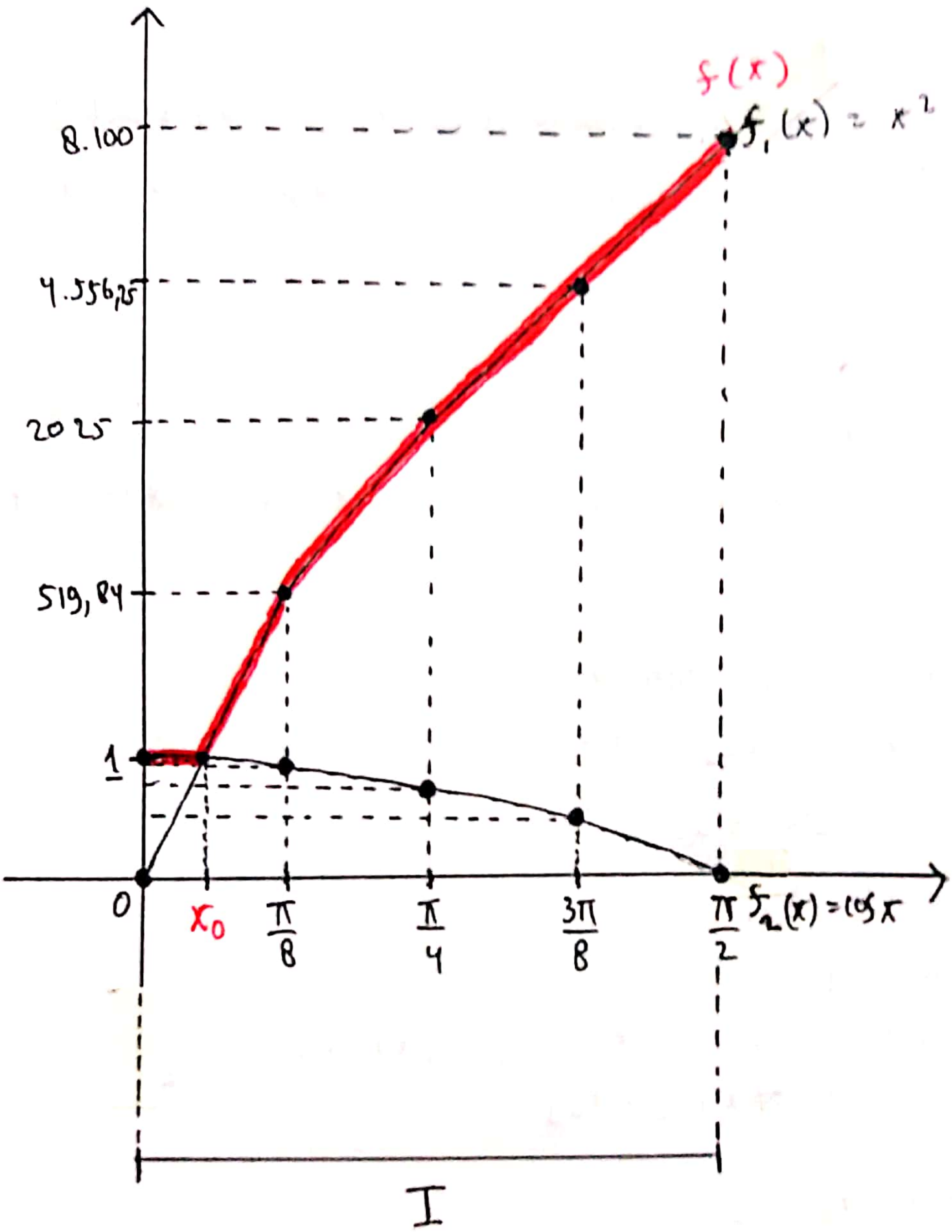
$f(x) \geq \cos(x_0)$ untuk $x \in [0, x_0]$.
$f(x) \geq (x_0)^2$ untuk $x \in [x_0, \frac{\pi}{2}]$.

Maka $\cos(x_0) = (x_0)^2 = f(x_0)$ .... (*)

$\therefore$ $f(x) \geq f(x_0)$ untuk setiap $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
atau dengan kata lain x_0 adalah minimum mutlak dari f pada $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Juga dari (*) disimpulkan bahwa x_0 merupakan suatu solusi untuk persamaan $\cos x = x^2$.

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 25 Okt 2020



Imanuel AS / 181114008 Makassar, 25 Oktober 2020

(14.) Misalkan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada $\mathbb{R}$ dan $\beta \in \mathbb{R}$.
Tunjukkan bahwa jika $x_0 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(x_0) < \beta$, maka terdapat suatu lingkungan-δ U dari x_0 sedemikian sehingga $f(x) < \beta$ untuk semua $x \in U$.

Penyelesaian:

Perhatian! Sebelum melihat penyelesaian, ada baiknya melihat gambarnya / grafiknya terlebih dahulu, pada hal berikutnya.

Sebelumnya, diingatkan kembali, kita akan menggunakan Definisi Kekontinuan Fungsi.

Definisi: Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, dan $c \in A$. Dikatakan f kontinu di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in A$, $|x - c| < \delta$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Perhatikan bahwa, karena kita ingin menunjukkan $f(x_0) < \beta$ dan seterusnya...
Maka, kita akan memilih ε sbb:

$$\varepsilon = \frac{\beta - f(x_0)}{2} > 0$$

untuk menjamin daerah ε yang dipilih tidak lewat dari nilai β (sesuai request soal).
Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi kita diatas,
Anggaplah $A = U_\delta(x_0)$, dan karena $U_\delta(x_0) \in \mathbb{R}$, juga $x_0 \in U_\delta(x_0)$.
Maka Definisi diatas, dapat menjadi:

Karena $U_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}$, $f: U_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, dan $x_0 \in U_\delta(x_0)$.
Diketahui f kontinu di x_0 [krn $x_0 \in U_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}$],
Maka untuk setiap $\varepsilon = \frac{\beta - f(x_0)}{2} > 0$ diperoleh sbb:
Untuk $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$
Kita dapat menulis kembali $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ dengan definisi nilai mutlak sbb:

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

$$f(x) - f(x_0) < \frac{\beta - f(x_0)}{2}$$

$$f(x) < \frac{\beta - f(x_0)}{2} + f(x_0)$$

$$f(x) < \frac{\beta}{2} - \frac{f(x_0)}{2} + f(x_0)$$

$$f(x) < \frac{\beta}{2} + \frac{f(x_0)}{2}$$

$$f(x) < \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} < \beta \quad [f(x_0) < \beta]$$

$\therefore$ Untuk $x \in U_\delta(x_0)$ diperoleh $f(x) < \beta$

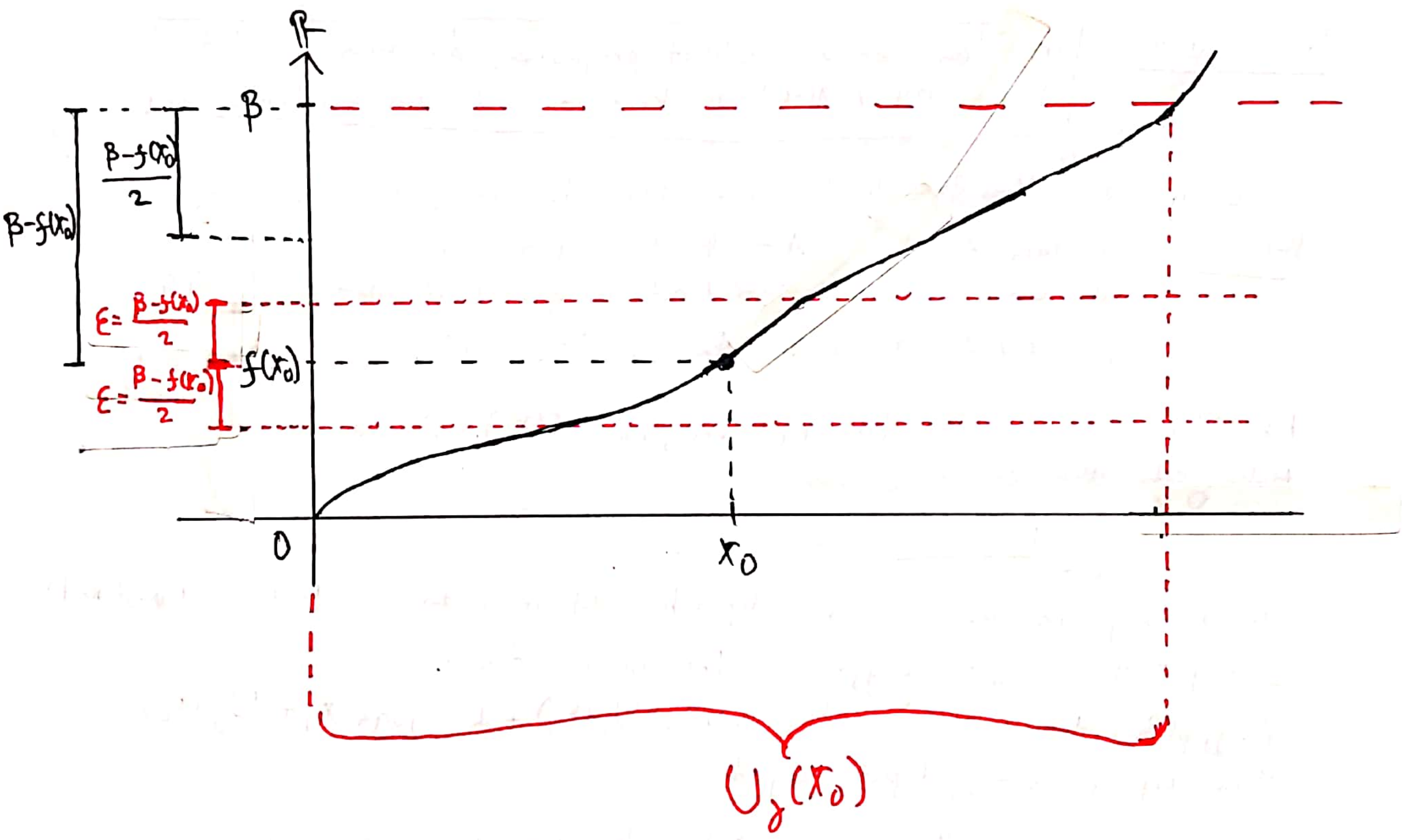
//

Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 25 okt 2020

Pilih sebarang grafik untuk $f(x)$, dengan syarat $f(x) < \beta$

Asumsikanlah grafik tsb adalah sbgai berikut:



Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 24 Oktober 2020

(16.) Ujilah peretaan dari interval - interval buka [atau, tutup] dibawah fungsi - fungsi $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ dan $h(x) = x^3$, untuk $x \in \mathbb{R}$

Penyelesaian :

Diketahui : $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ Kontinu.

Akan ditunjukkan : Uji peretaan dari interval - interval buka [atau, tutup] pada masing - masing fungsi.

Teorema 5.3.9

Misalkan $I = [a,b]$ suatu interval tutup dan terbatas.
Misalkan pula $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I.
Maka himpunan $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ adalah interval tutup dan terbatas

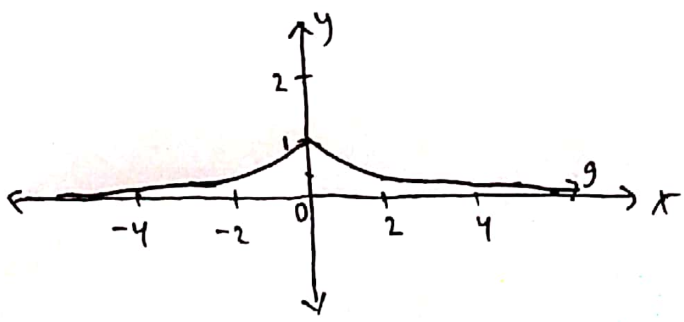
Catatan:
$\langle\ \rangle$: Interval buka
$[\ ]$: Interval tutup

Dengan menggunakan Teorema 5.3.9, diperoleh
Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
Perhatikan bahwa,

- Kasus I : u/ $0 < a < b$
  $\Rightarrow 0 < g(b) < g(a)$
  Diperoleh, $g(\langle a,b \rangle) = \left\langle \frac{1}{b^2+1}, \frac{1}{a^2+1} \right\rangle$ adalah interval buka.

- Kasus II : u/ $a < b < 0$
  $\Rightarrow g(a) < g(b) < 0$
  Diperoleh, $g(\langle a,b \rangle) = \left\langle \frac{1}{a^2+1}, \frac{1}{b^2+1} \right\rangle$ adalah interval buka.

- Kasus III : u/ $a < 0 < b$
  $\Rightarrow c = \inf \left\{ \frac{1}{a^2+1}, \frac{1}{b^2+1} \right\}$
  Diperoleh, $g(\langle a,b \rangle) = \langle c, 1]$ adalah interval buka tutup.



Imanuel AS / 181114008

Makassar, 2...

Selanjutnya,

Untuk h

$h(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ Kontinu.

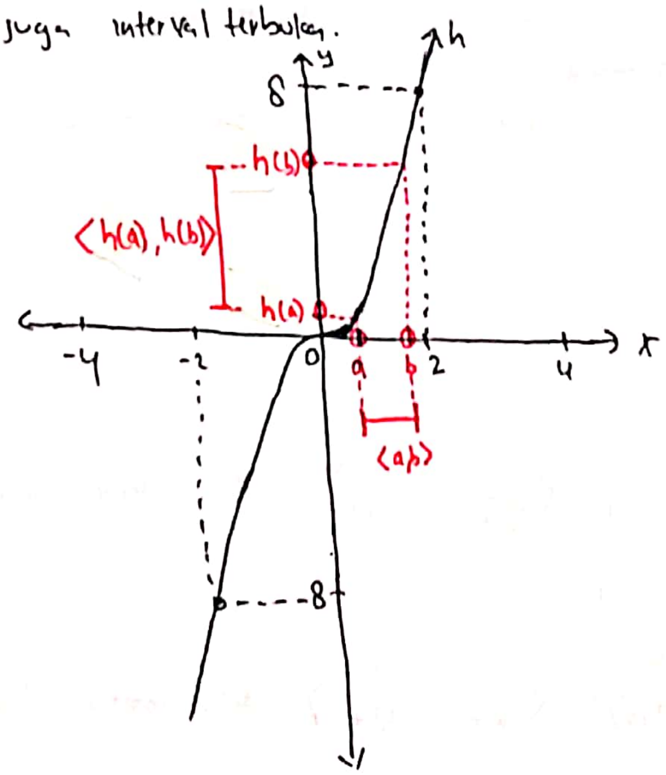
Dengan menggunakan Teorema 5.3.9

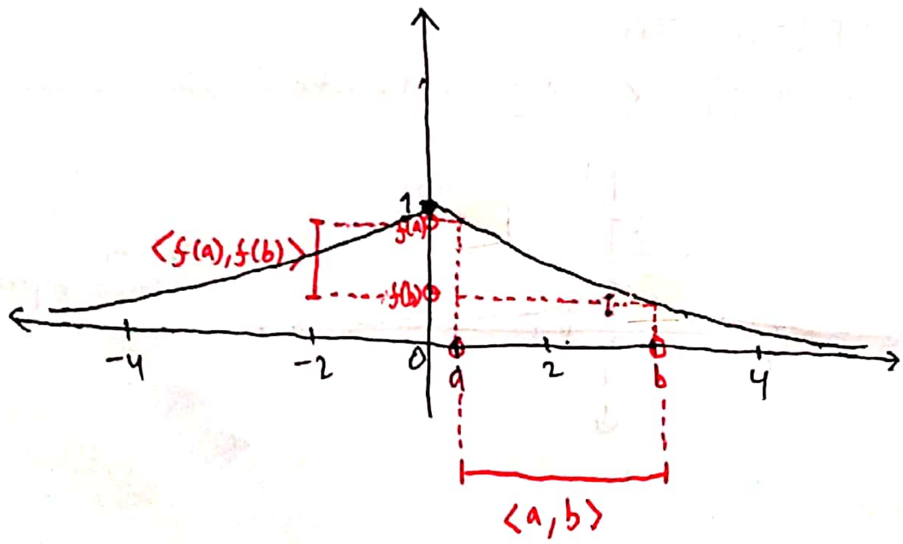
Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Perhatikan bahwa,

$$h(\langle a,b \rangle) = \langle a^3, b^3 \rangle$$

Jadi, untuk setiap interval terbuka dibawah pemetaan h adalah juga interval terbuka.





Imanuel AS / 1811141008

Makassar, 24 oktober

(18.) Misalkan $I = [a,b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ suatu fungsi (tidak perlu kontinu) dengan sifat bahwa untuk setiap $x \in I$, fungsi f terbatas pada suatu lingkungan $V_{\delta_x}(x)$ dari x (dalam pengertian pada Definisi 4.2.1). Buktikan bahwa f terbatas pada I.

Penyelesaian :

Pandang/pertimbangkan lingkungan $\{V_{\delta_x}(x) : x \in I\}$

Jelas bahwa, $I = [a,b] \subseteq \bigcup_{x \in I} V_{\delta_x}(x)$.

Oleh karena itu himpunan $A = \{V_{\delta_x}(x) : x \in I\}$ adalah bagian terbuka dari $[a,b]$ dan mempunyai sub bagian terbatas,

Maka, terdapat $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ sedemikian sehingga

$$[a,b] \subseteq V_{\delta_{x_1}}(x_1) \cup V_{\delta_{x_2}}(x_2) \cup \ldots \cup V_{\delta_{x_n}}(x_n) \quad \ldots\ldots (*)$$

Sekarang, $\exists M_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ sedemikian sehingga

$$|f(x)| < M_i \quad \forall x \in I \cap V_{\delta_{x_i}}(x_i) \qquad \text{[Definisi 5.3.1]}$$

Misalkan $M = \max_{1 \le i \le n} M_i$. Maka untuk $i = 1, \ldots, n$

$$|f(x)| < M, \forall x \in I \cap V_{\delta_{x_i}}(x_i)$$

$$|f(x)| < M, \forall x \in \bigcup_{i=1}^{n} (I \cap V_{\delta_{x_i}}(x_i))$$

$$|f(x)| < M, \forall x \in I \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{\delta_{x_i}}(x_i)\right)$$

Dan dari $(*)$ diketahui bahwa $I \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{\delta_{x_i}}(x_i)\right) = I$.

Jadi, $|f(x)| < M, \forall x \in I$ yang menunjukkan bahwa f terbatas pada I. ∎

Imanuel AS / 181114008

Makassar, 24 Oktober 2020