Makassar, 28 September 2020

Teori Modul / Pertemuan ke-4 / Catatan

Nama : Imanuel AS
NIM : 1811141008

Teori Modul : Catatan Pertemuan ke-4

Subruang

$\boxed{D}$ Misalkan V ruang vektor atas lapangan F. Himpunan $W \subseteq V$, $W \neq \phi$ disebut subruang dari V jika W membentuk ruang vektor dengan operasi yang sama dengan di V.

$\boxed{E}$.

(1) $\mathbb{R}$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$
$\{0\}$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$
$\{0\} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \{0\}$ subruang $\mathbb{R}$

(2) $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$
$M_2(\mathbb{R})$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$
$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$
P ruang vektor atas $\mathbb{R}$
$P \subseteq M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow P$ subruang $\mathbb{R}$

Imanuel AS / 181114008 Makassar, 28 September 202

$\boxed{\text{I}}$

Jika V ruang vektor atas F dan $W \subseteq V$, $W \neq \phi$

W subruang V jika dan hanya jika

(1) $\forall\ a, b \in W \Rightarrow a+b \in W$

(2) $\forall\ a \in W,\ \alpha \in F \Rightarrow \alpha a \in W$

$\boxed{\forall\ a, b \in W,\ \alpha \in F \\ \Downarrow \\ \alpha . a + b \in W}$

Bukti :

Jika W adalah subruang dari V, maka semua aksioma-aksioma terpenuhi; khususnya, Aksioma 1 dan 6 berlaku. Tetapi aksioma-aksioma ini secara tepat adalah syarat (1) dan (2).

Sebaliknya, asumsikan syarat (1) dan (2) berlaku. Karena syarat-syarat ini merupakan Aksioma 1 dan 6 dari ruang vektor, maka kita hanya perlu menunjukkan bahwa W memenuhi kedelapan aksioma lainnya. Aksioma 2, 3, 7, 8, 9 dan 10 secara otomatis terpenuhi oleh vektor-vektor pada W karena aksioma-aksioma tersebut terpenuhi oleh semua vektor pada V. Oleh karena itu, untuk melengkapi bukti, kita hanya perlu membuktikan bahwa Aksioma 4 dan 5 terpenuhi oleh vektor-vektor pada W.

Misalkan u adalah vektor sebarang pada W. Menurut syarat (2), αu berada pada W untuk setiap skalar $\alpha \in F$. Dengan mengatur $k = 0$, sesuai dengan teorema 5.1.1 Anton Rorres Aljabar Linear Elementer — diperoleh $0u = 0$ berada pada W, dan dengan mengatur $k = -1$, maka $(-1)u = -u$ berada pada W.

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 28 September

$\boxed{E}$

① $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

$M_2(\mathbb{R})$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$

$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

P ruang vektor atas $\mathbb{R}$

$P \subseteq M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow P$ subruang $\mathbb{R}$

Bukti

(1) $P \neq \phi$ karena $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P$

(2) $P \subseteq M_2(\mathbb{R})$ jelas berdasarkan definisi P

(3) Ambil $A, B \in P$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sebarang

Tulis $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa

$$\alpha A + B = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & \alpha b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in P$$

$\therefore P$ subruang $M_2(\mathbb{R})$

Imanuel AS / 1811141008 Makassar, 20 September 20

② Misal $\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$

Buktikan

$P = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ merupakan subruang $\mathbb{R}$.

Jawab :

Penyelesaian ada pada "Teori Modul / Pertemuan ke-4 / Tugas" di halaman terakhir PDF ini.

$\boxed{T}$

Jika A dan B subruang dari V ruang vektor atas lapangan F maka

(a) $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ subruang V

(b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$ subruang V

Bukti

(a) Adb. A+B subruang V

(1) Adb $A+B \neq \phi$

$0_A \in A$, $0_B \in B$, $0 = 0_A + 0_B \in A+B$

$\therefore A+B \neq \phi$

(2) Adb $A+B \subseteq V$

Ambil $x \in A+B$ sebarang, Tulis $x = a+b$ untuk suatu $a \in A \subseteq V$, $b \in B \subseteq V$

Jadi, $x = a+b \in V$

$\therefore A+B \subseteq V$

Makassar, 28 September 20

Imanuel AS / 1811141008

(3) Ambil $x, y \in A+B$, $\alpha \in F$ sebarang

Tulis

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + b_1 \\ y = a_2 + b_2 \end{array}\right\}$$ untuk suatu $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \alpha x + y &= \alpha(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ &= \alpha a_1 + (\alpha b_1 + a_2) + b_2 \\ &= \alpha a_1 + (a_2 + \alpha b_1) + b_2 \\ &= \underbrace{(\alpha a_1 + a_2)}_{\in A} + \underbrace{(\alpha b_1 + b_2)}_{\in B} \in A+B \end{aligned}$$

$\therefore$ A+B subruang V ∎

Imanuel AS/ 181114100?8

Makassar, 20 Septem 2020

(b) Adb. $A \cap B$ subruang V

(1) Adb $A \cap B \neq \phi$

Note that,

$0_V \in A$ [A subruang V]

dan

$0_V \in B$ [B subruang V]

Diperoleh, $0_V \in A \cap B$

$\therefore A \cap B \neq \phi$

(2) Adb. $A \cap B \subseteq V$

Ambil $x \in A \cap B$ sebarang

Untuk suatu $x \in A \subseteq V$ dan

$x \in B \subseteq V$

Jadi, $x \in V$

$\therefore A \cap B \subseteq V$

(3) Ambil $\alpha \in F$ sebarang

Ambil $x, y \in A \cap B \Rightarrow x, y \in A$ dan $x, y \in B$

Karena A dan B keduanya merupakan subruang V,

maka berdasarkan teorema sebelumnya diperoleh

(1) $x+y \in A$

$\alpha x \in A$

(2) $x+y \in B$

$\alpha x \in B$

Dari (1) dan (2) diperoleh $x+y \in A \cap B$ dan $\alpha x \in A \cap B$

$\therefore x+y \in A \cap B$ dan $\alpha x \in A \cap B$

$\therefore A \cap B$ subruang V $\blacksquare$

Teori Modul / Pertemuan ke -4 / Tugas

Makassar, 14 September 2020

Nama : Imanuel AS

NIM : 181141008

Misal $\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$

Buktikan $P = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ merupakan subruang $\mathbb{R}$

Penyelesaian :

$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$

Akan dibuktikan : $P = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ merupakan subruang $\mathbb{R}$

Akan ditunjukkan : (1) $P \neq \emptyset$

(2) $P \subseteq \mathbb{R}^3$

(3) $\forall a,b \in P \Rightarrow a+b \in P$

(4) $\forall a \in P, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha a \in P$

Note that,

(1) Adb. $P \neq \emptyset$

Misal $(4,3,0) \in P$. Jadi, $P \neq \emptyset$ .... $\boxtimes$

(2) Adb. $P \subseteq \mathbb{R}^3$

$P \subseteq \mathbb{R}^3$ Jelas berdasarkan definisi P, dimana $0 \in \mathbb{R}$ ...... $\boxtimes$

(3) Adb. $\forall a,b \in P \Rightarrow a+b \in P$

Ambil sebarang $a,b \in P$

Tulis, $a = (a_1, b_1, 0)$ untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$b = (a_2, b_2, 0)$ untuk suatu $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

Note that,

$$a+b = (a_1, b_1, 0) + (a_2, b_2, 0)$$

$$= (a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ 0+0) \quad \text{[Addition Rule Standard } \mathbb{R}^3]$$

$$= (a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ 0) \in P \text{ ....} \boxtimes$$

(4) Adb. $\forall a \in P, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha a \in P$

Ambil sebarang $a \in P$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Tulis $a = (a_1, b_1, 0)$ untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

Note that, $\alpha a = \alpha . (a_1, b_1, 0)$

$$= (\alpha a_1,\ \alpha b_1,\ \alpha . 0) \quad \text{[Multiplication Rule Standard } \mathbb{R}^3]$$

$$= (\alpha a_1,\ \alpha b_1,\ 0) \in P \text{ ....} \boxtimes$$

$\therefore$ $P = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ merupakan Subruang $\mathbb{R}$. (Terbukti) $\blacksquare$