




# 第2章 插值方法与曲线拟合

计算机学院 孙伟平

# 回 顾

- ◆ 基本概念：
  - 误差，误差限
  - 相对误差，相对误差限
  - 绝对误差，绝对误差限
  - 有效数字
- ◆ 有效数字位数的判定方法
- ◆ 算术运算中误差限的估计
- ◆ 近似计算中应注意的一些原则



## 第2章

2.1 插值多项式的存在性与唯一性

2.2 拉格朗日 (Lagrange) 插值

2.3 牛顿 (Newton) 插值

2.4 赫密特 (Hermite) 插值

2.5 分段插值

2.7 曲线拟合的最小二乘法



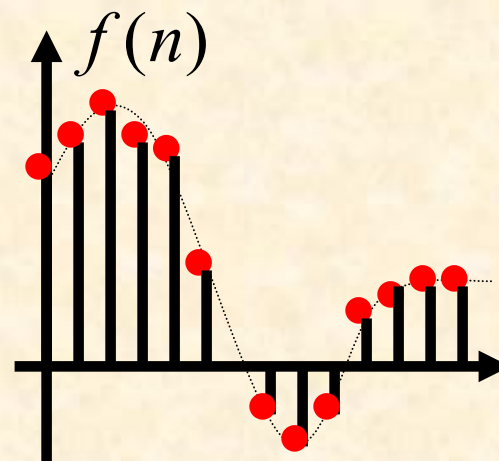
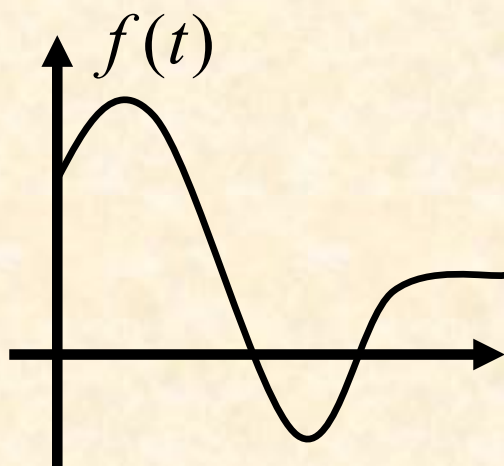
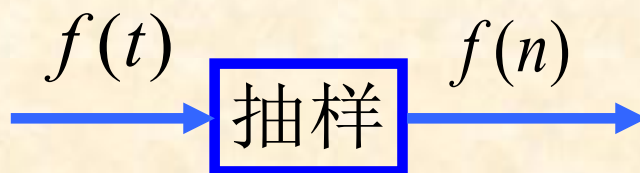


|     |     |    |
|-----|-----|----|
| 127 | 170 | 93 |
| 99  | 165 | 87 |

通过某个点周围若干个已知点的值，以及周围点和此点的位置关系，根据一定的公式，算出此点的值，就是插值。

|     |  |     |  |    |  |
|-----|--|-----|--|----|--|
| 127 |  | 170 |  | 93 |  |
|     |  |     |  |    |  |
| 99  |  | 165 |  | 87 |  |
|     |  |     |  |    |  |

计算未知点的时候，需要周围多少个点参与，公式如何。不同的方案选择，就是不同的插值算法。

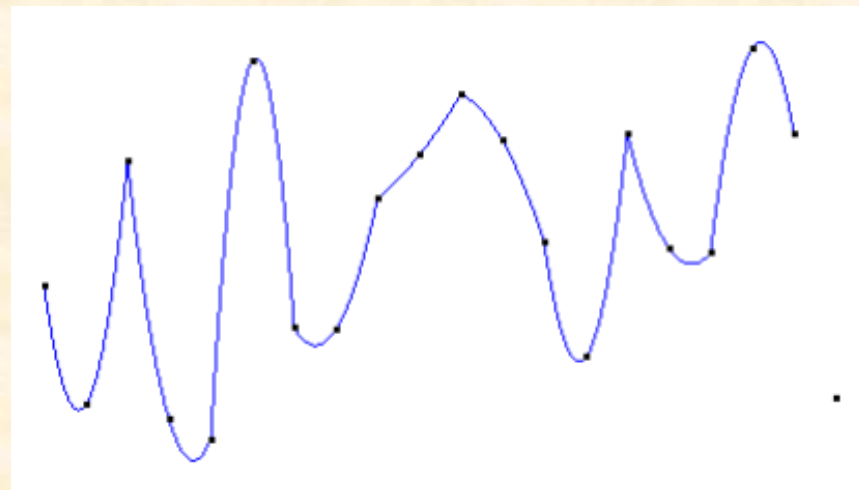


$f(n) \rightarrow f(t)?$

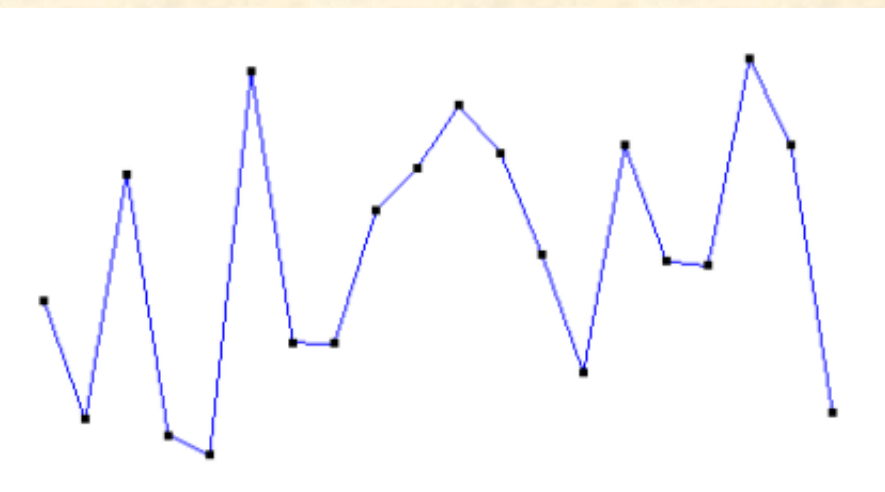
时域内插公式

$$f(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \omega_c (t - n)}{\omega_c (t - n)}$$

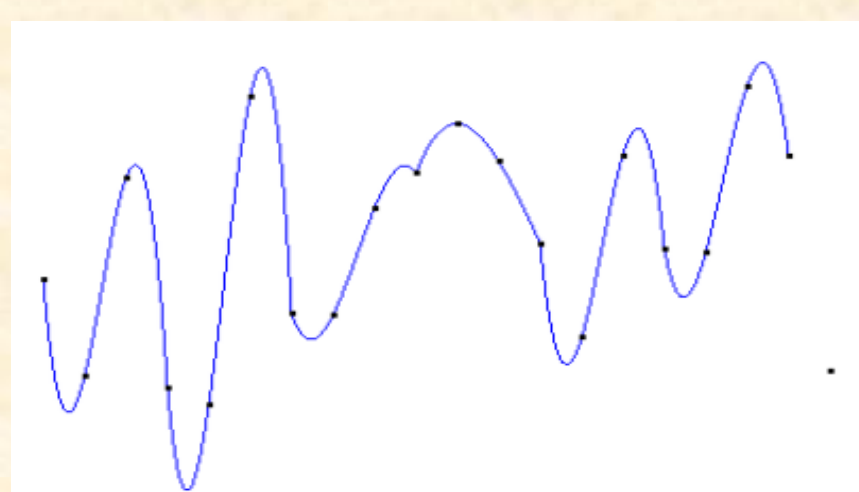




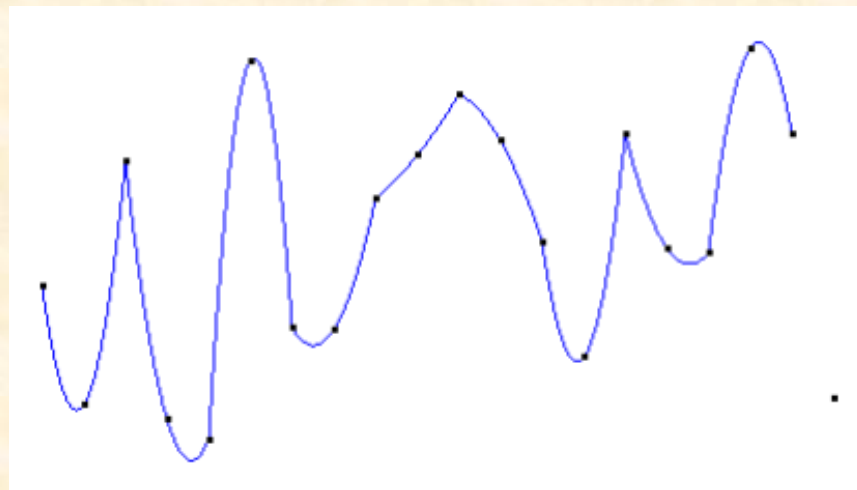
分段抛物线插值



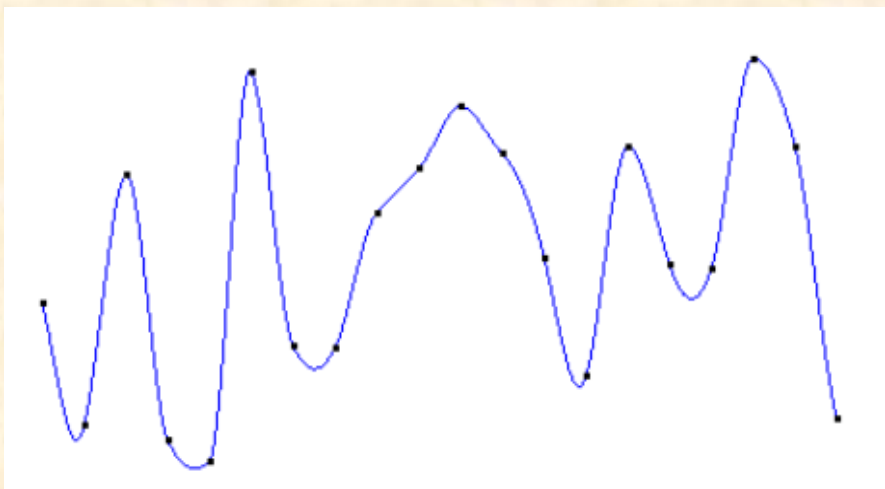
分段线性插值



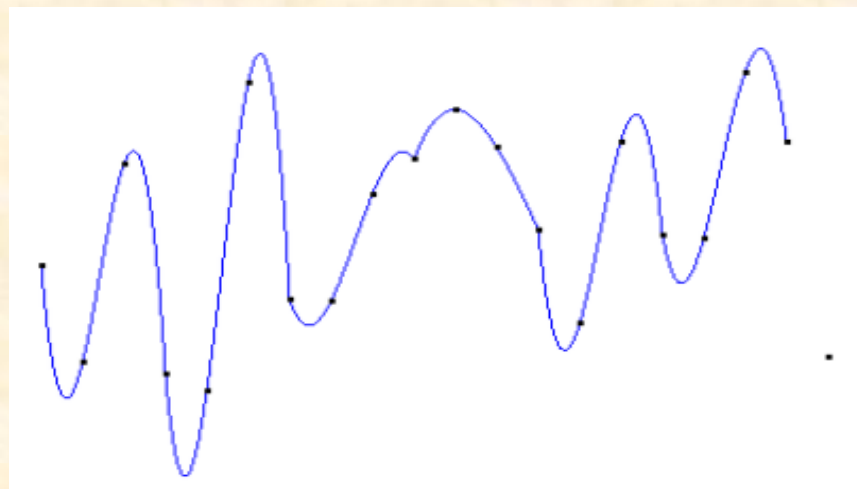
分段四次多项式插值



分段抛物线插值



光滑性更好

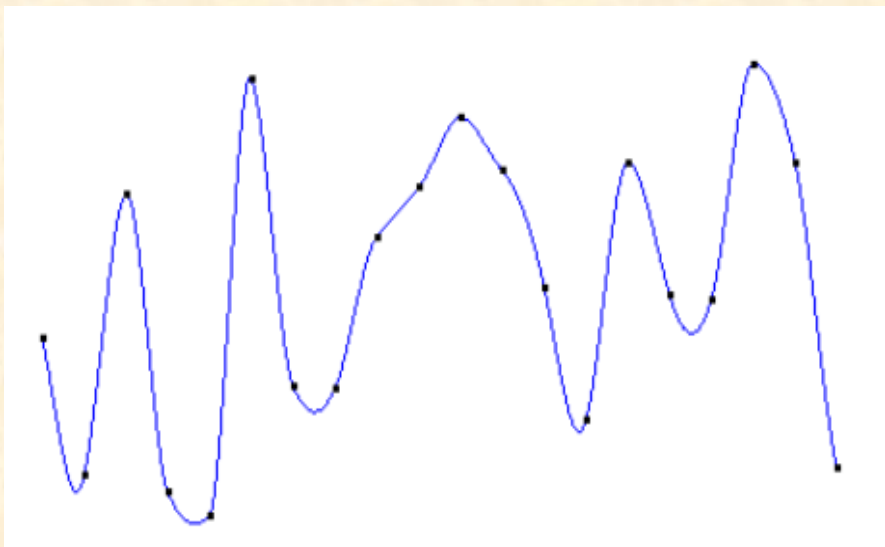
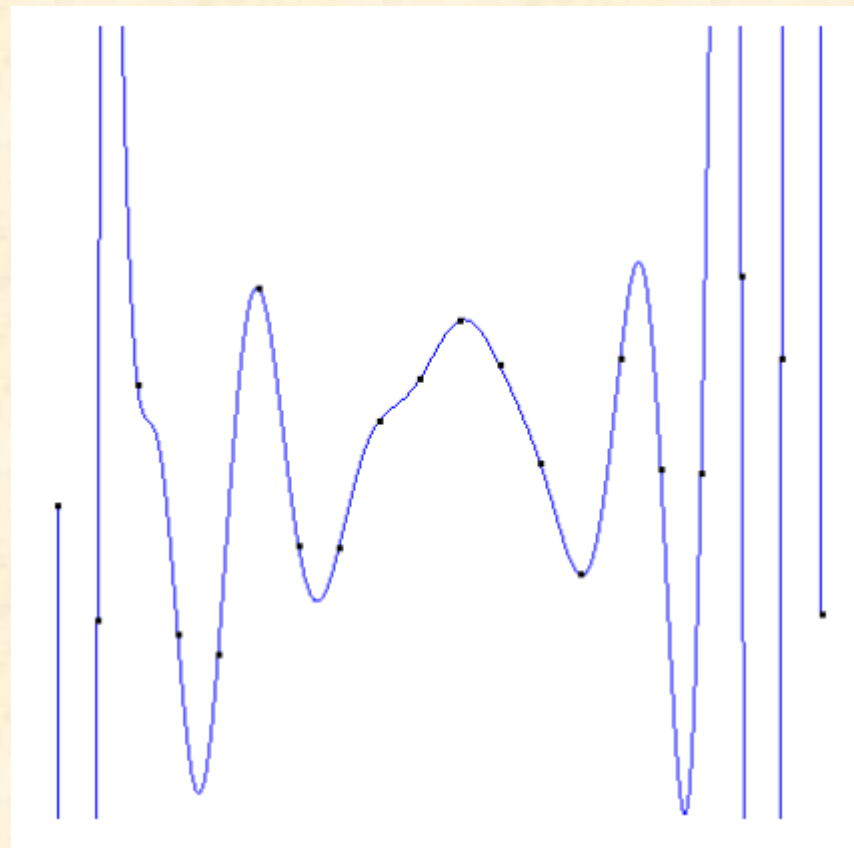


分段四次多项式插值





20次的拉格朗日插值



分段三次Hermite插值



# 概述

在实际生产和科学实验中，插值法是函数逼近的重要方法之一，有着广泛的应用。

- ◆ 函数  $y = f(x)$  的显式表达式未知， $x$  与  $y$  的取值是通过实验或观测得到的一组离散数据。
- ◆ 函数  $y = f(x)$  的表达式非常复杂，不便于进行计算和研究。



例如:

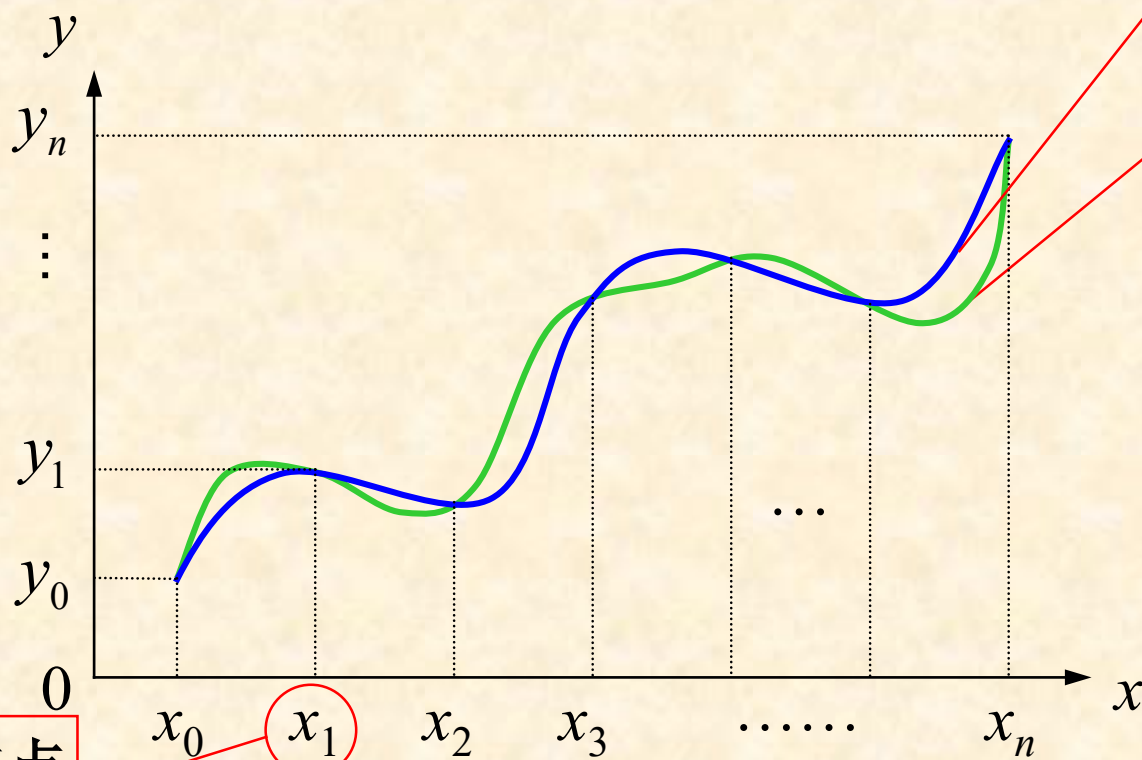
|              |         |         |         |         |       |         |
|--------------|---------|---------|---------|---------|-------|---------|
| $i$          | 0       | 1       | 2       | 3       | ..... | 10      |
| $x_i$        | 0.46    | 0.47    | 0.48    | 0.49    | ..... | 0.56    |
| $y_i=f(x_i)$ | 0.48465 | 0.49374 | 0.50298 | 0.52012 | ..... | 0.61478 |

求当  $x_i=0.4773$  时  $y=f(x)$  的函数值?

求 
$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x + \tan x) + e^{x^2 \sin x}}}{3 \arctan^2 x} \int_2^{5x} e^{-t^2} dt$$

◆ 于是人们希望建立一个简单的而便于计算的函数

$g(x)$ 使其近似的代替  $f(x)$ 。



被插值函数  $f(x)$

插值函数  $g(x)$

插值条件

$$y_i = f(x_i)$$

主要研究  $g(x)$   
为代数多项式

插值节点

插值区间

## 2.1 插值多项式的存在唯一性

- ◆ 已知某函数  $f(x)$  在  $n+1$  个互异的插值节点  $x_i$  上的函数值  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ; 确定一个次数不高于  $n$  的代数多项式:


$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

满足:

$$p_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

即共有  $n+1$  个限定条件:

$$\begin{cases} p_n(x_0) = y_0 \\ p_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ p_n(x_n) = y_n \end{cases}$$



由  $p_n(x_0) = y_0$  得:  $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0$

由  $p_n(x_1) = y_1$  得:  $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1$

$\vdots$

由  $p_n(x_n) = y_n$  得:  $a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n$

这是关于  $a_0, a_1, \dots, a_n$  的 (**n+1** 元一次) 线性方程组, 可以由克莱姆法则进行求解。





$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$


如果其系数行列式  
不等于零，则方程  
组的解存在且唯一。

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$V = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$





由于  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $n+1$  个互异的节点，即：

$$x_i \neq x_j, \quad i \neq j$$

◆ 因此范德蒙行列式  $V \neq 0$ ，上述方程组有唯一解。

◆ 结论：插值多项式存在且唯一。

◆ 已知某函数  $f(x)$  在  $n+1$  个互异的插值节点  $x_i$  上的函数值  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ；确定一个次数不高于  $n$  的代数多项式：
$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

满足： $p_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$

这样的插值多项式存在且唯一。



$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & y_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & y_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}$$

◆ 尽管采用直接求解线性方程组的方法可以确定插值多项式  $p_n(x)$ ，但是当  $n$  较大时，这种方法的计算量非常大。



# 插值问题的目标

被插值函数  $f(x)$

插值节点  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$

插值条件  $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$

插值函数  $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

◆ 由简入繁  $n=1 \quad 2 \Rightarrow n$

● 线性插值 ● 抛物线插值 ● Lagrange插值

◆ 分析已有方法的优缺点

● Newton插值

◆ 针对新的需求

● Hermite插值

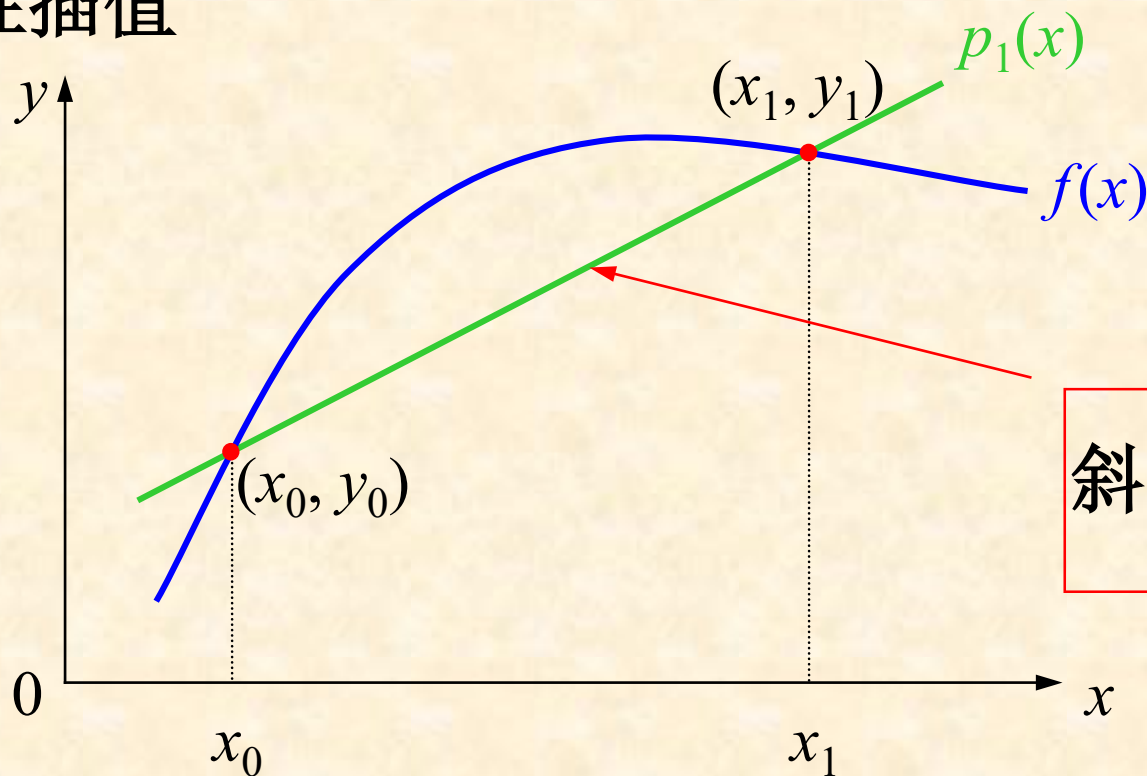
◆ 站得更高

● 分段插值

科学研究之路

## 2.2 拉格朗日 (Lagrange) 插值


### ◆ 线性插值



$$\text{斜率 } k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

点斜式:  $y = y_0 + k(x - x_0)$

$p_1(x)$


$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= \frac{x_1 - x_0 - (x - x_0)}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \end{aligned}$$

$$= \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$= \boxed{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}} y_0 + \boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}} y_1$$

线性插  
值基函数

$$l_0(x) \begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \end{cases}$$


$$l_1(x) \begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \end{cases}$$

$$p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

$p_1(x)$  可表示为插值基函数的线性组合

$l_0(x)$  和  $l_1(x)$  均为  
一次代数多项式




$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

◆ 例1 已知  $\ln 2.00 = 0.6931$ ,  $\ln 3.00 = 1.0986$ , 试用线性插值法求  $\ln 2.718$

$$\begin{cases} x_0 = 2.00 \\ y_0 = 0.6931 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3.00 \\ y_1 = 1.0986 \end{cases} \quad x = 2.718$$

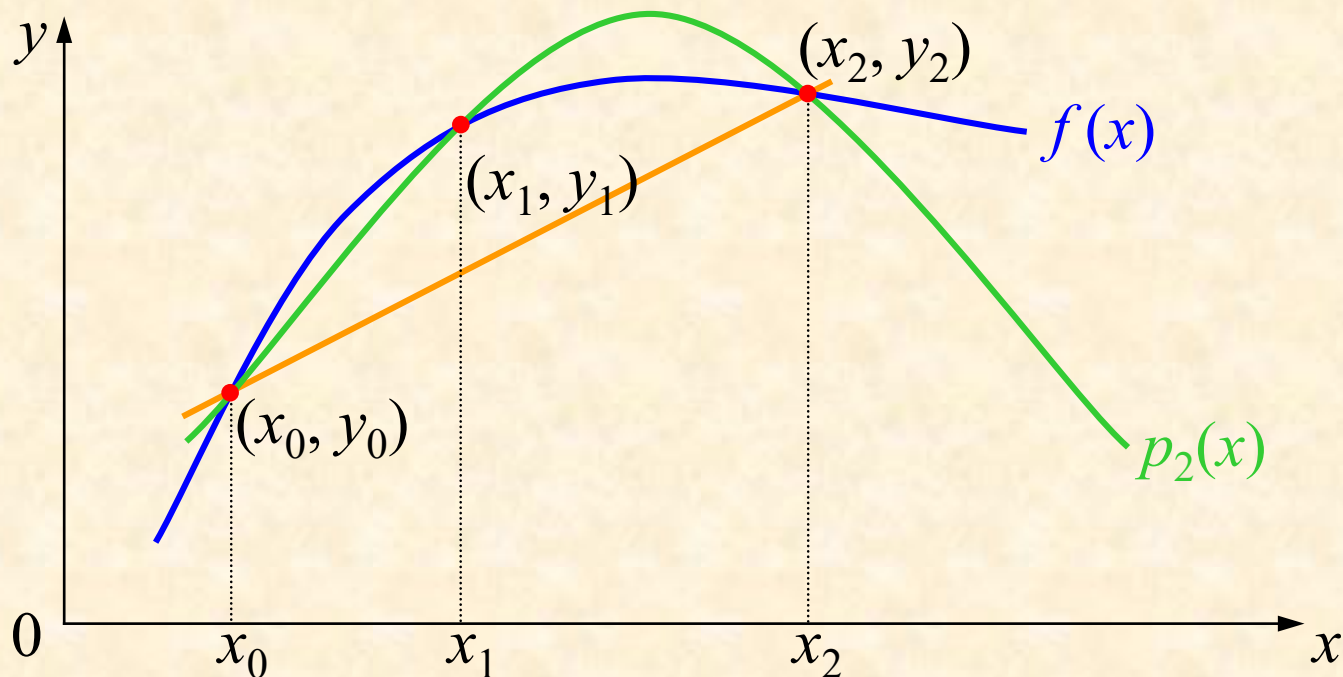
$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{x - 3.00}{2.00 - 3.00} \times 0.6931 + \frac{x - 2.00}{3.00 - 2.00} \times 1.0986 \\ &= 0.4055x - 0.1179 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln 2.718 &\approx p_1(2.718) = 0.4055 \times 2.718 - 0.1179 \\ &\approx 0.9842 \end{aligned}$$



# 抛物线插值

- ◆ 线性插值只有在小的插值区间且在该区间上  $f(x)$  变化较平稳时才较精确。
- ◆ 抛物线插值采用二次曲线替代复杂的未知曲线，可在一定程度上克服线性插值的上述缺陷。



**思考：**可否由线性插值自行推导出  
抛物线插值的公式？

$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1)$$

$$p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

线性插  
值基函数

$l_0(x)$  和  $l_1(x)$  均为一次代数多项式

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} l_0(x) & \begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \end{cases} \\ l_1(x) & \begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

## 抛物线插值基函数

$$p_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$


$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$l_0(x), l_1(x), l_2(x)$  均为  
二次代数  
多项式

$$\begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \\ l_0(x_2) = 0 \\ l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \\ l_1(x_2) = 0 \\ l_2(x_0) = 0 \\ l_2(x_1) = 0 \\ l_2(x_2) \stackrel{25}{=} 1 \end{cases}$$


$$l_1(x_0) = 0 \quad l_1(x_1) = 1 \quad l_1(x_2) = 0$$

因为  $l_1(x)$  为二次代数多项式，且  $x_0, x_2$  为它的两个零点，故可设：

$$l_1(x) = k(x - x_0)(x - x_2)$$

其中  $k$  为待定系数。

又因为  $l_1(x_1) = 1$  所以：

$$k(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = 1 \longrightarrow k = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$\text{从而： } l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

◆ 例2 已知  $\ln 2.00 = 0.6931$  ,  $\ln 2.50 = 0.9163$ ,  $\ln 3.00 = 1.0986$ , 用抛物线插值法求  $\ln 2.718$

$$\begin{cases} x_0 = 2.00 \\ y_0 = 0.6931 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2.50 \\ y_1 = 0.9136 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3.00 \\ y_2 = 1.0986 \end{cases} \quad x = 2.718$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x - 2.50)(x - 3.00)}{(2.00 - 2.50)(2.00 - 3.00)} \times 0.6931 \\ &\quad + \frac{(x - 2.00)(x - 3.00)}{(2.50 - 2.00)(2.50 - 3.00)} \times 0.9136 \\ &\quad + \frac{(x - 2.00)(x - 2.50)}{(3.00 - 2.00)(3.00 - 2.50)} \times 1.0986 \\ &= -0.071x^2 + 0.7605x - 0.5439 \end{aligned}$$




$$\ln 2.718 \approx p_2(2.718)$$

$$\approx -0.071 \times 2.718^2 + 0.7605 \times 2.718 - 0.5439$$
$$\approx 0.9986$$

比较:

$$\ln 2.718 = 0.999896 \dots\dots$$

线性插值:  $\ln 2.718 \approx 0.9842 \longrightarrow |\varepsilon_r| \approx 1.57\%$

抛物线插值:  $\ln 2.718 \approx 0.9986 \longrightarrow |\varepsilon_r| \approx 0.13\%$

# Lagrange 插值

- ◆ 已知某函数  $f(x)$  在  $n+1$  个互异的插值节点  $x_i$  上的函数值  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ; 求作一个次数不高于  $n$  的代数多项式:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

满足:

$$L_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i$$

$$i = 0, 1, \dots, n$$





$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Lagrange  
插值基函数

- ◆  $l_i(x)$  的最高次数与  $L_n(x)$  相同
- ◆  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  是  $l_i(x)$  的零点 (共有  $n$  个)
- ◆  $l_i(x)$  在  $x_i$  处取值为 1

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

因为  $l_i(x)$  为  $n$  次代数多项式, 且  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  是  $l_i(x)$  的  $n$  个零点, 故可设:

$$l_i(x) = k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$$


$$= k \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)$$

$k$  为待定系数。

又因为  $l_i(x_i) = 1$  所以:

$$1 = k \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \longrightarrow k = 1 / \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) / \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$



$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

$$= y_0 \prod_{j=0, j \neq 0}^n \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} + y_1 \prod_{j=0, j \neq 1}^n \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} + y_2 \prod_{j=0, j \neq 2}^n \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} \\ + \cdots + y_n \prod_{j=0, j \neq n}^n \frac{x - x_j}{x_n - x_j}$$

$$= \sum_{i=0}^n y_i \left( \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n)}$$



# Lagrange 插值 分析

- ◆ Lagrange插值多项式结构对称、简单、优雅。
- ◆ 只要取定节点就可写出基函数，进而得到插值多项式。
- ◆ 易于计算机实现。
- ◆ 问题： Lagrange插值的误差是多少？

# Lagrange 插值误差分析

## 插值余项

◆ 在插值节点处:

$$L_n(x) = f(x), \quad x = x_0, x_1, \dots, x_n$$

◆ 在非插值节点处, 一般有:

$$L_n(x) \neq f(x), \quad x \neq x_0, x_1, \dots, x_n$$

◆ 插值余项 (截断误差):


$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$\xi \in (a, b)$

$\omega_{n+1}(x)$

$\omega(x)$

$f(x)$  在插值区间  $[a, b]$  内有  $n+1$  阶导数



$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \omega(x)$$

证：设  $x$  为插值区间  $[a, b]$  中的任意一点，若  $x$  为插值节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ，显然：左边 = 右边 = 0

若  $x$  为非插值节点，则构造如下辅助函数 自变量为  $t$

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(x)} [f(x) - L_n(x)]$$

$$t = x_0, x_1, \dots, x_n \text{ 时 } f(t) = L_n(t), \omega(t) = 0 \longrightarrow F(t) = 0$$

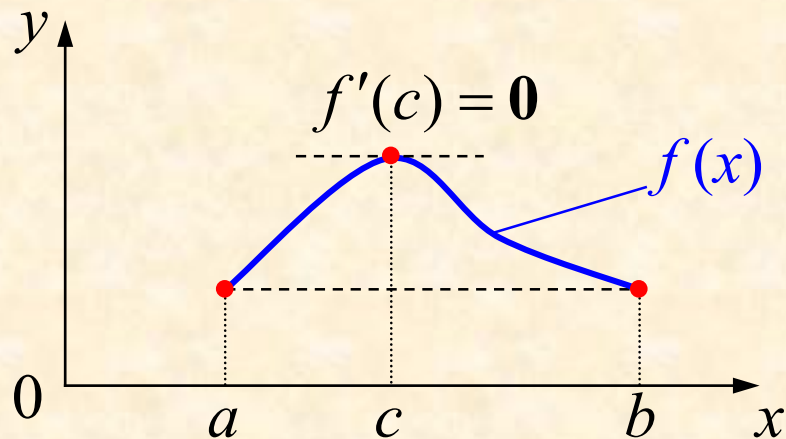
$$t = x \text{ 时 } F(x) = \left[ 1 - \frac{\omega(x)}{\omega(x)} \right] [f(x) - L_n(x)] = 0$$

所以  $F(t)$  至少有  $n + 2$  个零点：  $x, x_0, x_1, \dots, x_n$



$$F(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(x)}[f(x) - L_n(x)]$$

**罗尔定理**  $f(x)$  为在区间  $[a, b]$  上连续, 并且  $f(a) = f(b)$ , 则至少存在一点  $c \in (a, b)$  满足:  $f'(c) = 0$



$F'(t)$  在  $F(t)$  的任意两个相邻零点之间至少存在一点  $\tilde{\xi}$  满足:  $F'(\tilde{\xi}) = 0$ ,  $F'(t)$  有  $n+1$  个零点

反复运用


罗尔定理

$F''(t)$  有  $n$  个零点

.....

$F^{(n+1)}(t)$  有 1 个零点  $F^{(n+1)}(\xi) = 0$





$$F(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(x)} [f(x) - L_n(x)]$$


$L_n(t)$  为  $n$  次代数多项式  $\longrightarrow L_n^{(n+1)} = 0$

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \prod_{i=0}^n (t - x_i) = (t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n) \\ &= t^{n+1} + k_n t^n + \cdots + k_1 t + k_0\end{aligned}$$

$$\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$$

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{\omega(x)} [f(x) - L_n(x)] = 0$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}_{\omega(x)}$$



$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \omega(x)$$

- ◆ 应当指出，余项表达式只有在  $f(x)$  的高阶导数存在时才能应用。
- ◆  $\xi$  在  $(a, b)$  内的具体位置通常不可能给出。
- ◆ 如果我们可以估算出：

$$\max_{a < x < b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$$

则用  $L_n(x)$  逼近  $f(x)$  的截断误差的绝对值：

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$



**例3**  $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$

已知  $\ln 2.00 = 0.6931$ ,  $\ln 2.50 = 0.9163$ ,  $\ln 3.00 = 1.0986$ ,  
用抛物线插值法求得  $\ln 2.718 \approx 0.9986$ , 试估算其相对误差

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} \quad (\ln x)''' = \frac{2}{x^3}$$

$$\max_{2.00 < x < 3.00} |(\ln x)'''| = \frac{2}{(2.00)^3} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \longrightarrow \quad M_3$$

$$|R_2(2.718)| \leq \frac{0.25}{3!} \times$$

$$|(2.718 - 2.00)(2.718 - 2.50)(2.718 - 3.00)| \approx 0.001839$$

$$|\varepsilon_r(\ln 2.718)| \approx 0.001839 / 0.9986 \approx 0.00184 = 0.184\%$$

对比前例:  $|\varepsilon_r| \approx 0.13\%$

**例4.1** 已知  $\ln x$  的函数表如下 ( $\ln 11.25 = 2.420368$ )

| $x$     | 10       | 11       | 12       | 13       |
|---------|----------|----------|----------|----------|
| $\ln x$ | 2.302585 | 2.397895 | 2.484907 | 2.564949 |

用抛物线插值法计算  $\ln 11.25$  的近似值，并估计误差。

(1) 取节点  $x_0=10, x_1=11, x_2=12$ , 计算  $\ln 11.25$  的近似值。

得  $\ln 11.25 = 2.420426$        $|R_2(11.25)| \leq 0.000078$

实际上，根据准确值计算得  $|R_2(11.25)| = 0.000058$

(2) 取节点  $x_1=11, x_2=12, x_3=13$ , 计算  $\ln 11.25$  的近似值。

得  $\ln 11.25 = 2.420301$        $|R_2(11.25)| \leq 0.000082$

实际上，根据准确值计算得  $|R_2(11.25)| = 0.000067$

**例4.2** 已知  $\ln x$  的函数表如下 ( $\ln 11.25 = 2.420368$ )

| $x$     | 10       | 11       | 12       | 13       |
|---------|----------|----------|----------|----------|
| $\ln x$ | 2.302585 | 2.397895 | 2.484907 | 2.564949 |

用三次多项式插值法计算  $\ln 11.25$  的近似值，并估计误差。

节点  $x_0=10, x_1=11, x_2=12, x_3=13$

得  $\ln 11.25 = 2.420374$        $|R_3(11.25)| \leq 0.000010$

对比例4.1两次抛物线插值的结果：

$\ln 11.25 = 2.420426$        $|R_2(11.25)| \leq 0.000078$

$\ln 11.25 = 2.420301$        $|R_2(11.25)| \leq 0.000082$



# Lagrange 插值误差分析（补）

由于  $f(x)$  的高阶导数一般无法确定，实用的截断误差估计可以采用以下的事后误差分析方法：


$n + 1$  个插值节点：
$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

增加一个节点  $x_{n+1}$ ，用  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  这  $n + 1$  个插值节点进行插值，其截断误差为：

$$f(x) - \tilde{L}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tilde{\xi})}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)$$

如果  $f(x)$  在插值区间变化不剧烈，则  $f^{(n+1)}(\xi) \approx f^{(n+1)}(\tilde{\xi})$





$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$\frac{f(x) - L_n(x)}{f(x) - \tilde{L}_n(x)} \approx \frac{x - x_0}{x - x_{n+1}}$$

$$f(x) \approx \frac{x - x_{n+1}}{x_0 - x_{n+1}} L_n(x) + \frac{x - x_0}{x_{n+1} - x_0} \tilde{L}_n(x) \quad (*)$$

—— 新的近似式

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \approx \frac{x - x_0}{x_0 - x_{n+1}} [L_n(x) - \tilde{L}_n(x)] \quad (**)$$

—— 新的误差估计式

### 例4.3 已知 $\ln x$ 的函数表如下

| $x$     | 10       | 11       | 12       | 13       |
|---------|----------|----------|----------|----------|
| $\ln x$ | 2.302585 | 2.397895 | 2.484907 | 2.564949 |

用抛物线插值法计算  $\ln 11.25$  的近似值，并估计误差。

(1) 取节点  $x_0=10, x_1=11, x_2=12$ , 得  $\ln 11.25=2.420426$

(2) 取节点  $x_1=11, x_2=12, x_3=13$ , 得  $\ln 11.25=2.420301$

(3) 用公式 (\*) 再计算  $\ln 11.25$  的近似值，得

$\ln 11.25=2.420374$  —结果同三次多项式插值！

用公式 (\*\*) 再计算误差，得

$$R_2(11.25) \approx 0.000052 \quad (|R_2(11.25)| \leq 0.000010)$$

# 整理思路，继续赶路……

回顾拉格朗日插值：

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \quad y_i = f(x_i)$$

简单 复杂

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \dots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$n$ 次多项式  
与所有节点有关

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}_{\omega(x)}$$

## 2.3 牛顿 (Newton) 插值

### Lagrange 插值:

- ◆ 优点: 公式对称简单, 规律性强, 便于记忆和编程
- ◆ 缺点: 每增加一个节点, 原有的插值基函数  $l_i(x)$  必须重新计算, 从而不具有承袭性

### Newton 插值:

- ◆ 优点: 具有承袭性, 能够利用以前计算的结果
- ◆ 不足: 公式结构不对称, 不便于记忆

# n次牛顿插值多项式

◆ 求作  $n$  次代数多项式:

$$\begin{aligned} N_n(x) &= c_0 \times 1 && \rightarrow \varphi_0(x) \\ &+ c_1 (x - x_0) && \rightarrow \varphi_1(x) \\ &+ c_2 (x - x_0)(x - x_1) && \rightarrow \varphi_2(x) \\ &+ c_3 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) && \rightarrow \varphi_3(x) \\ &\vdots \\ &+ c_n (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) && \rightarrow \varphi_n(x) \end{aligned}$$


牛  
顿  
插  
值  
基  
函  
数

满足:  $N_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_i(x) = (x - x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

承袭性




$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = (x - x_0), \quad \varphi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1), \dots$$

$$N_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i\varphi_i(x)$$

将  $x_0, x_1, \dots, x_n$  分别代入  $N_n(x)$

利用  $N_n(x_i) = f(x_i)$  即可确定系数  $c_0, c_1, \dots, c_n$

$$x = x_0 \quad N_n(x_0) = c_0 = f(x_0)$$

$$x = x_1 \quad N_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} x = x_2 \quad N_n(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &= f(x_2) \end{aligned}$$



只跟**第一个**插值节点  
及其函数值有关

$$c_0 = f(x_0)$$

只跟**前两个**插值节点  
及其函数值有关

$$c_1 = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

只跟**前三个**插值节点  
及其函数值有关

$$c_2 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$c_i$  跟**前*i*+1**个插值节点及其函数值有关

$c_i$  可表示为  $f(x_j), j = 0, 1, \dots, i$  的**线性组合**

# 差商

- ◆ 给定区间  $[a, b]$  中两两互不相同的点  $x_0, x_1, x_2, \dots$   
及在这些点处相应的函数值  $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$

记:

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$f(x)$  在  $x_i$  处的零阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

一阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

二阶差商

$\vdots$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$k$  阶差商



| $x_i$    | $f(x_i)$ | 一阶<br>差商          | 二阶差商                       | 三阶差商                                | ... | n阶差商                      |
|----------|----------|-------------------|----------------------------|-------------------------------------|-----|---------------------------|
| $x_0$    | $f(x_0)$ |                   |                            |                                     | ... |                           |
| $x_1$    | $f(x_1)$ | $f[x_0, x_1]$     |                            |                                     | ... |                           |
| $x_2$    | $f(x_2)$ | $f[x_1, x_2]$     | $f[x_0, x_1, x_2]$         |                                     | ... |                           |
| $x_3$    | $f(x_3)$ | $f[x_2, x_3]$     | $f[x_1, x_2, x_3]$         | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$             | ... |                           |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$          | $\vdots$                   | $\vdots$                            | ... | $\vdots$                  |
| $x_n$    | $f(x_n)$ | $f[x_{n-1}, x_n]$ | $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$ | $f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$ | ... | $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ |

差商表



◆ 例:

|          |     |     |      |      |      |
|----------|-----|-----|------|------|------|
| $x_i$    | 5   | 7   | 11   | 13   | 21   |
| $f(x_i)$ | 150 | 392 | 1452 | 2366 | 9702 |

◆ 差商表为:

| $x_i$ | 零阶差商 | 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 | 四阶差商 |
|-------|------|------|------|------|------|
| 5     | 150  |      |      |      |      |
| 7     | 392  | 121  |      |      |      |
| 11    | 1452 | 265  | 24   |      |      |
| 13    | 2366 | 457  | 32   | 1    |      |
| 21    | 9702 | 917  | 46   | 1    | 0    |

# 差商的性质

◆ 差商与函数值的关系为

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$$= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)}$$

$k$  阶差商是其各节点处函数值的线性组合

证明：  $k = 1$  时：

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{-f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$$= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)}$$


假设  $k = n - 1$  时也成立，即：

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})}$$

考查  $k = n$  时：

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \\ &= \frac{1}{x_n - x_0} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})} \right] \end{aligned}$$






$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{x_n - x_0} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})} \right]$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0} \left[ \frac{f(x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})} \right. \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})(x_j - x_n)} \\ - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{n-1})} \\ \left. - \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_{n-1})} \right]$$

$$= \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} \\ + \frac{1}{x_n - x_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j) [(x_j - x_0) - (x_j - x_n)]}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$



$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} \\ + \frac{1}{x_n - x_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j) [(x_j - x_0) - (x_j - x_n)]}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

$$= \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\ = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

可见  $k = n$  时也成立。由数学归纳法可知：

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$$= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)}$$

◆ 差商的值与节点的排列顺序无关

$$f[x_0, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n]$$

◆ 若  $f[x, x_0, x_1, \dots, x_k]$  是  $x$  的  $n$  次多项式, 则

$f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k+1}]$  是  $x$  的  $n-1$  次多项式

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x, x_0, x_1, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x}$$

$x = x_{k+1}$  时  $f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x_{k+1}, x_0, x_1, \dots, x_k] = 0$

$n$  次代数多项式含有因子  $x - x_{k+1}$

所以:  $f[x, x_0, x_1, \dots, x_{k+1}]$  是  $x$  的  $n-1$  次多项式。

◆ 若  $f(x)$  是  $x$  的  $m$  次代数多项式, 且  $n \geq m$ , 则:

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$$

$f[x] = f(x)$  是  $x$  的  $m$  次代数多项式

$f[x, x_0]$  是  $x$  的  $m-1$  次代数多项式

$f[x, x_0, x_1]$  是  $x$  的  $m-2$  次代数多项式

⋮

$f[x, x_0, \dots, x_{m-1}]$  是  $x$  的 0 次代数多项式

$$f[x, x_0, \dots, x_{m-1}] = c \longrightarrow \begin{aligned} & f[x_m, x_0, \dots, x_{m-1}] \\ & = f[x_0, \dots, x_{m-1}, x_m] = c \end{aligned}$$

$$f[x, x_0, \dots, x_m] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_m] - f[x, x_0, \dots, x_{m-1}]}{x_m - x} = 0$$

从  $f[x, x_0, \dots, x_m]$  起所有的高阶差商均为 0, 故:

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$$

$$f[x, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x, x_0]}{x_1 - x}$$

$$f[x, x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x, x_0, x_1]}{x_2 - x}$$

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)$$

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)$$

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$



# 牛顿插值公式

$$\begin{aligned} c_0 \leftarrow f(x) &= f(x_0) \\ &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ c_1 \leftarrow &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ c_2 \leftarrow &+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ c_3 \leftarrow &+ f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &\vdots \\ c_n \leftarrow &+ f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &+ f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \end{aligned}$$

$N_n(x)$

$R_n(x)$

一般的:  $c_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i] \quad i = 0, 1, \dots, n$



- 由插值多项式的唯一性可知： $N_n(x) = L_n(x)$ ，因此二者的余项也应相等。

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}$$


$$= \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

对  $f(x)$  没有限制，但...

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!}$$

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \frac{f^{(n)}(\tilde{\xi})}{n!}$$

$$f[x_n, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$



例1 给定数据表  $f(x) = \ln x$

|          |           |           |           |           |           |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x_i$    | 2.20      | 2.40      | 2.60      | 2.80      | 3.00      |
| $f(x_i)$ | 0.7884574 | 0.8754687 | 0.9555114 | 1.0296194 | 1.0986123 |

- ◆ 构造差商表
- ◆ 用二次 Newton 插值多项式, 近似计算  $f(2.718)$  的值
- ◆ 写出四次 Newton 插值多项式  $N_4(x)$



解：由已知可构造如下差商表

| $x_i$ | $f[x_i]$  | 一阶<br>差商  | 二阶<br>差商   | 三阶<br>差商  | 四阶<br>差商   |
|-------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|
| 2.20  | 0.7884574 |           |            |           |            |
| 2.40  | 0.8754687 | 0.4350565 |            |           |            |
| 2.60  | 0.9555114 | 0.4002135 | -0.0871075 |           |            |
| 2.80  | 1.0296194 | 0.3705400 | -0.0741838 | 0.0215395 |            |
| 3.00  | 1.0986123 | 0.3449645 | -0.0639388 | 0.0170750 | -0.0055806 |

2.718 →

| $x_i$    | 2.20      | 2.40      | 2.60      | 2.80      | 3.00      |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $f(x_i)$ | 0.7884574 | 0.8754687 | 0.9555114 | 1.0296194 | 1.0986123 |

$N_2(x)$ 有多种形式，如果取 $x_0=2.4$ ,  $x_1=2.6$ ,  $x_2=2.8$  :

| $x_i$ | $f[x_i]$  | 一阶差商      | 二阶差商       | 三阶差商      | 四阶差商       |
|-------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|
| 2.20  | 0.7884574 |           |            |           |            |
| 2.40  | 0.8754687 | 0.4350565 |            |           |            |
| 2.60  | 0.9555114 | 0.4002135 | -0.0871075 |           |            |
| 2.80  | 1.0296194 | 0.3705400 | -0.0741838 | 0.0215395 |            |
| 3.00  | 1.0986123 | 0.3449645 | -0.0639388 | 0.0170750 | -0.0055806 |

$$N_2(x) = 0.8754687 + 0.4002135(x - 2.40) \\ - 0.0741838(x - 2.40)(x - 2.60)$$

$$f(2.718) \approx N_2(2.718) \approx 0.9999529$$

$$\ln 2.718 = 0.9998963 \dots$$

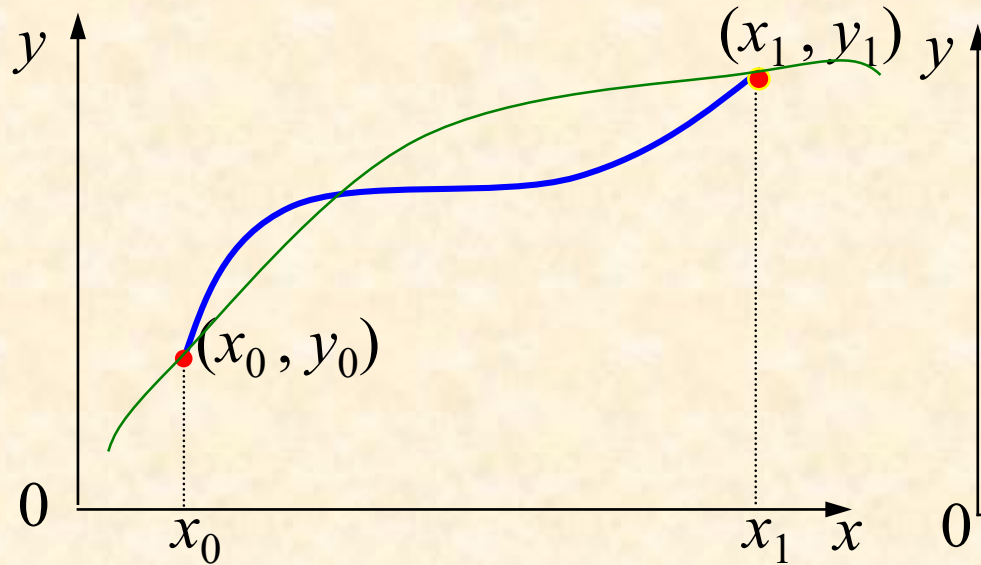
$$\varepsilon_r \approx 0.037\%$$



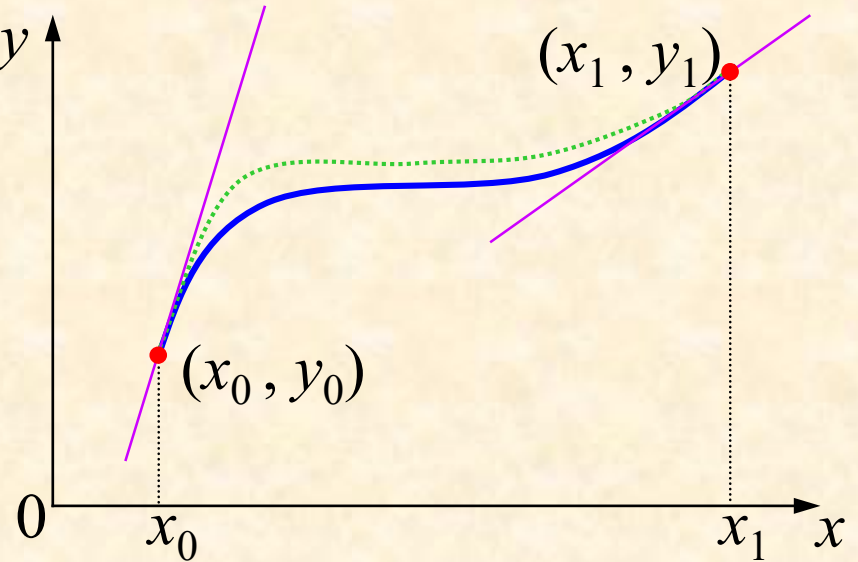
| $x_i$ | $f[x_i]$  | 一阶差商      | 二阶差商       | 三阶差商      | 四阶差商       |
|-------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|
| 2.20  | 0.7884574 |           |            |           |            |
| 2.40  | 0.8754687 | 0.4350565 |            |           |            |
| 2.60  | 0.9555114 | 0.4002135 | -0.0871075 |           |            |
| 2.80  | 1.0296194 | 0.3705400 | -0.0741838 | 0.0215395 |            |
| 3.00  | 1.0986123 | 0.3449645 | -0.0639388 | 0.0170750 | -0.0055806 |

$$\begin{aligned}N_4(x) = & 0.7884574 \\& + 0.4350565(x - 2.20) \\& - 0.0871075(x - 2.20)(x - 2.40) \\& + 0.0215395(x - 2.20)(x - 2.40)(x - 2.60) \\& - 0.0055806(x - 2.20)(x - 2.40)(x - 2.60)(x - 2.80)\end{aligned}$$

# 插值条件



**Lagrange插值**  
**Newton插值**



**Hermite插值**



## 2.4 赫密特 (Hermite) 插值

- 已知  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上  $n+1$  个互异节点  $a \leq x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \leq b$  上的函数值及一阶导数值:

$$f(x_i) = y_i \quad f'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

求作一个次数不高于  $2n+1$  次的插值多项式  $H(x)$ , 满足以下  $2n+2$  条件:

$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

- 称  $H(x)$  为函数  $f(x)$  的 Hermite 插值多项式, 因其最高次数不超过  $2n+1$ , 常记为  $H_{2n+1}(x)$
  - $H_{2n+1}(x)$  不仅在节点处与  $f(x)$  有相同的函数值, 且在
- 这些节点处与  $f(x)$  相切。

# 基函数

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n [y_i \alpha_i(x) + y'_i \beta_i(x)]$$

$$\alpha_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$
$$\alpha'_i(x_j) = 0$$

$$\beta_i(x_j) = 0$$
$$\beta'_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$

$\alpha_i(x), \beta_i(x)$  均为  $2n+1$  次代数多项式

$\alpha_i(x), \beta_i(x)$  均含因子  $(x - x_j)^2$

$$j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$$

赫密特插  
值基函数



$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

设  $\begin{cases} \alpha_i(x) = (a_1x + b_1)l_i^2(x) \\ \beta_i(x) = (a_2x + b_2)l_i^2(x) \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n$  待定系数法


$$\alpha_i(x_i) = 1, \quad \alpha_i'(x_i) = 0$$

$$\beta_i(x_i) = 0, \quad \beta_i'(x_i) = 1$$

$$\begin{cases} \alpha_i(x_i) = (a_1x_i + b_1)l_i^2(x_i) = 1 \\ \alpha_i'(x_i) = a_1l_i^2(x_i) + (a_1x_i + b_1) \cdot 2l_i(x_i) \cdot l_i'(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x_i + b_1 = 1 \\ a_1 + 2l_i'(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$l_i(x_i) = 1$$



$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

$$\ln l_i(x) =$$

$$\ln(x - x_0) + \cdots + \ln(x - x_{i-1}) + \ln(x - x_{i+1}) + \cdots + \ln(x - x_n) \\ - \ln(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$$

$$\frac{l'_i(x)}{l_i(x)} = \frac{1}{x - x_0} + \cdots + \frac{1}{x - x_{i-1}} + \frac{1}{x - x_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}$$

$$l'_i(x) = l_i(x) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x - x_j}$$

$$l'_i(x_i) = l_i(x_i) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} = \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$\begin{cases} a_1 x_i + b_1 = 1 \\ a_1 + 2l'_i(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$l'_i(x_i) = \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$a_1 = -2 \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$a_1 x_i + b_1 + a_1 x = 1 + a_1 x$$

$$a_1 x + b_1 = 1 + a_1 (x - x_i) = 1 - 2(x - x_i) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$\alpha_i(x) = (a_1 x + b_1) l_i^2(x)$$

$$= \left[ 1 - 2(x - x_i) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} \right] l_i^2(x)$$


$$\beta_i(x_i) = 0, \quad \beta'_i(x_i) = 1$$

$$\beta_i(x) = (a_2x + b_2)l_i^2(x) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{cases} \beta_i(x_i) = (a_2x_i + b_2)l_i^2(x_i) = 0 \\ \beta'_i(x_i) = a_2l_i^2(x_i) + (a_2x_i + b_2) \cdot 2l_i(x_i) \cdot l'_i(x_i) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2x_i + b_2 = 0 \\ a_2 + 0 \times 2l'_i(x_i) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{red arrow}} \begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = -x_i \end{cases}$$

所以:  $\beta_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$



$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$H_{2n+1}(x) =$$

$$\sum_{i=0}^n \left\{ y_i \underbrace{\left[ 1 - 2(x - x_i) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} \right] l_i^2(x)}_{\alpha_i(x)} + y'_i \underbrace{(x - x_i) l_i^2(x)}_{\beta_i(x)} \right\}$$

回顾：赫密特插值

基函数法  $\Rightarrow$  待定系数法

$\hookrightarrow$  借用了拉格朗日基函数



## 插值余项（定理2.4）

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(x) &= f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \left[ \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right]^2 \\ &= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x) \quad \xi \in (a, b) \end{aligned}$$

## 赫密特插值的唯一性（定理2.5）

# 例 题

设  $f(x) \in C^4[0, 2]$ , 满足

|      |   |   |   |
|------|---|---|---|
| $x$  | 0 | 1 | 2 |
| $f$  | 1 | 0 | 3 |
| $f'$ |   | 0 |   |

求  $f(x)$  的三次插值多项式  $H_3(x)$ , 并给出余项。

记  $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 3, y_3 = 0$



|      |   |   |   |
|------|---|---|---|
| $x$  | 0 | 1 | 2 |
| $f$  | 1 | 0 | 3 |
| $f'$ |   | 0 |   |

$$y_0 = 1, y_1 = 0,$$

$$y_2 = 3, y_3 = 0$$

◆ 方法一（基函数+待定系数法）

$$\begin{aligned}\text{设 } H_3(x) &= y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x) + y_3\varphi_3(x) \\ &= \varphi_0(x) + 3\varphi_2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= c(x-1)^2(x-2) \\ &= -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)\end{aligned}$$

$$\varphi_2(x) = dx(x-1)^2 = \frac{1}{2}x(x-1)^2$$

| $x=0$ | $x=1$ | $x=2$ | $x=1$ |             |
|-------|-------|-------|-------|-------------|
| 1     | 0     | 0     | 0     | $\varphi_0$ |
| 0     | 1     | 0     | 0     | $\varphi_1$ |
| 0     | 0     | 1     | 0     | $\varphi_2$ |
| 0     | 0     | 0     | 1     | $\varphi_3$ |

$$\text{故 } H_3(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2) + \frac{3}{2}x(x-1)^2 = (x-1)^2(x+1)$$

|      |   |   |   |
|------|---|---|---|
| $x$  | 0 | 1 | 2 |
| $f$  | 1 | 0 | 3 |
| $f'$ |   | 0 |   |

## ◆ 方法二（待定系数法）

设  $H_3(x) = (x-1)^2(ax+b)$

$$\begin{matrix} H_3(0)=1 \\ H_3(2)=3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

故  $H_3(x) = (x-1)^2(x+1)$

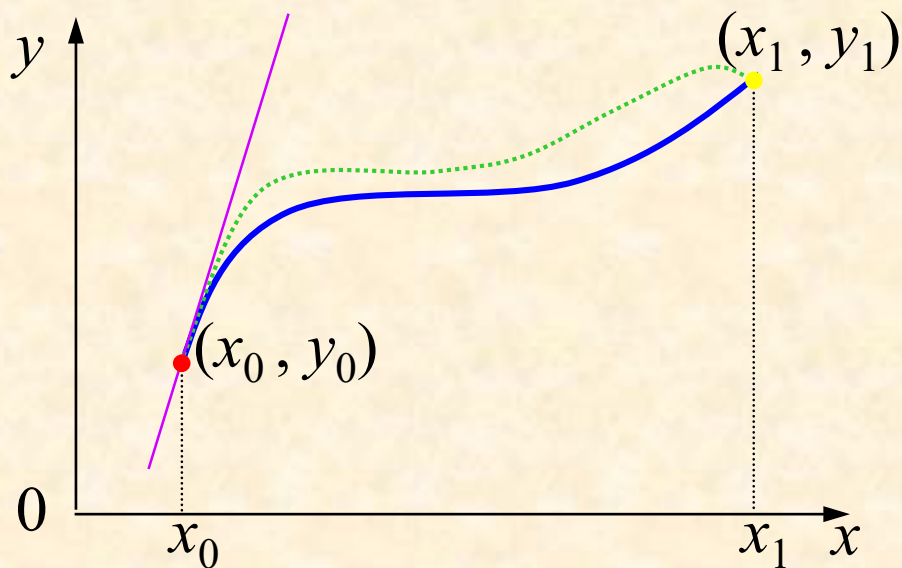
余项

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x(x-1)^2(x-2)$$

## 教材例题2.6, 2.8

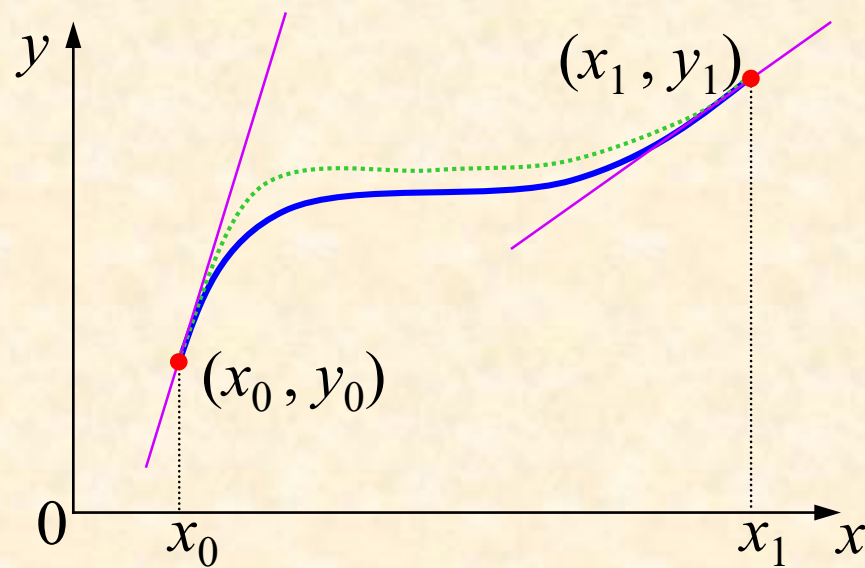
求作 Hermite 插值多项式  $H_2(x)$  满足:

$$\begin{cases} H_2(x_0) = y_0 \\ H_2(x_1) = y_1 \\ H'_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$$




求作 Hermite 插值多项式  $H_3(x)$  满足:

$$\begin{cases} H_3(x_0) = y_0 \\ H_3(x_1) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} H'_3(x_0) = y'_0 \\ H'_3(x_1) = y'_1 \end{cases}$$







1. 首先讨论  $x_0 = 0, x_1 = 1$  这种特殊情况。设


$$H_2(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y'_0\beta_0(x)$$

$\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x)$  为基函数，它们均为二次代数多项式，满足：

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha'_0(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha'_1(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta'_0(0) = 1 \end{cases}$$

显然满足插值条件：

$$H_2(0) = y_0, \quad H_2(1) = y_1, \quad H'_2(0) = y'_0$$



$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha'_0(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha'_1(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta'_0(0) = 1 \end{cases}$$

设  $\alpha_0(x) = (x-1)(ax+b)$


$$\begin{aligned} \alpha_0(0) &= -b = 1 \quad \longrightarrow b = -1 \\ \alpha'_0(x) &= (ax+b) + a(x-1) \\ \alpha'_0(0) &= b - a = 0 \quad \longrightarrow a = b = -1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha_0(0) &= -b = 1 \\ \alpha'_0(0) &= b - a = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} \alpha_0(x) &= (x-1)(-x-1) \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

设  $\alpha_1(x) = x(ax+b)$

$$\begin{aligned} \alpha_1(1) &= a + b = 1 \\ \alpha'_1(x) &= (ax+b) + ax \\ \alpha'_1(0) &= b = 0 \quad \longrightarrow a = 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha_1(1) &= a + b = 1 \\ \alpha'_1(0) &= b = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} \alpha_1(x) &= x(x+0) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

设  $\beta_0(x) = ax(x-1)$

$$\begin{aligned} \beta'_0(x) &= a[(x-1) + x] = a(2x-1) \\ \beta'_0(0) &= -a = 1 \quad \longrightarrow a = -1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \beta'_0(x) &= a(2x-1) \\ \beta'_0(0) &= -a = 1 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} \beta_0(x) &= -x(x-1) \\ &= x(1-x) \end{aligned}$$


$$\alpha_0(x) = 1 - x^2, \quad \alpha_1(x) = x^2, \quad \beta_0(x) = x(1 - x)$$

$$H_2(x) = y_0(1 - x^2) + y_1x^2 + y'_0x(1 - x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

◆ 若  $x_0, x_1$  为任意两个插值节点

$$x_0 \leq x \leq x_1 \longrightarrow 0 \leq x - x_0 \leq x_1 - x_0 \longrightarrow 0 \leq \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \leq 1$$


$$\text{记: } h = x_1 - x_0, \quad X = \frac{x - x_0}{h} \quad \text{则: } x = x_0 + hX, \quad dx = h dX$$

显然:  $x = x_0$  时  $X = 0$ ,  $x = x_1$  时,  $X = 1$

$$f(x) = f(x_0 + hX) \triangleq F(X) \quad F'(X) = \frac{dF(X)}{dX} \cdot \frac{dx}{dX} = hf'(x)$$

$$x = x_0: \quad F(0) = f(x_0) = y_0 \quad F'(0) = hf'(x_0) = hy'_0$$

$$x = x_1: \quad F(1) = f(x_1) = y_1$$


$$\alpha_0(x) = 1 - x^2$$

$$\alpha_1(x) = x^2$$

$$\beta_0(x) = x(1 - x)$$

$$X = \frac{x - x_0}{h}$$

$$p_2(X) = y_0(1 - X^2) + y_1X^2 + \textcolor{red}{h}y'_0X(1 - X), \quad 0 \leq X \leq 1$$

$$\boxed{p_2\left(\frac{x - x_0}{h}\right)} = y_0 \left[ 1 - \left( \frac{x - x_0}{h} \right)^2 \right] + y_1 \left( \frac{x - x_0}{h} \right)^2$$

$\textcolor{red}{H_2(x)}$

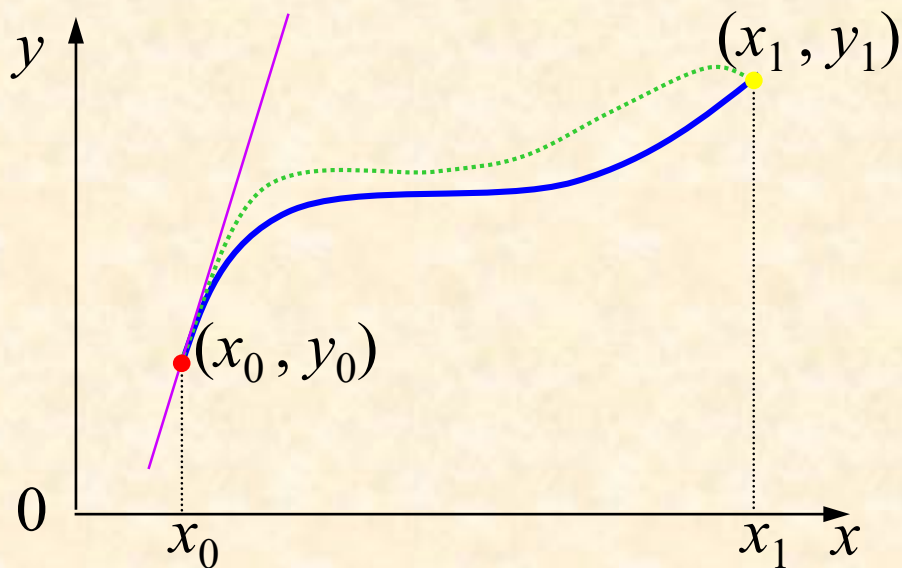
$$+ \textcolor{red}{h}y'_0 \left( \frac{x - x_0}{h} \right) \left[ 1 - \left( \frac{x - x_0}{h} \right) \right]$$

$$\boxed{H_2(x) = y_0\alpha_0\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + y_1\alpha_1\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + hy'_0\beta_0\left(\frac{x - x_0}{h}\right)}$$

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

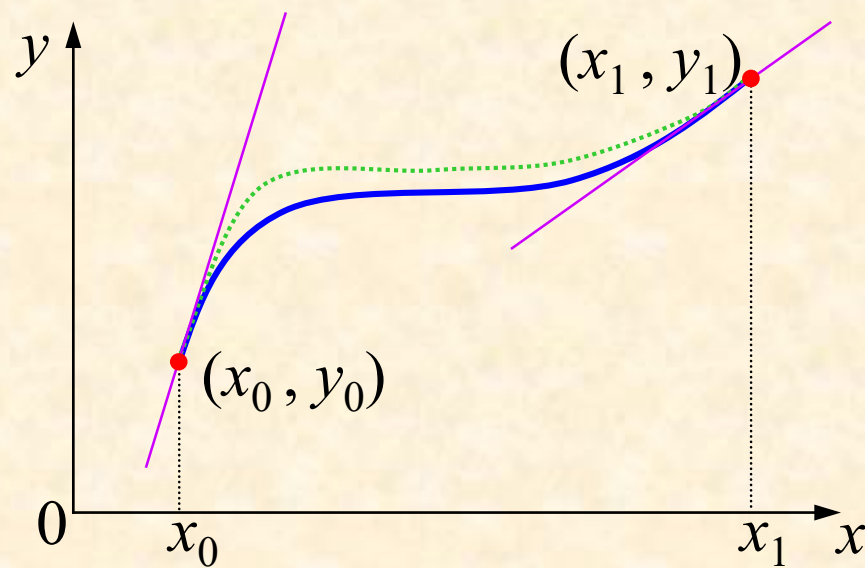
求作 Hermite 插值多项式  $H_2(x)$  满足:

$$\begin{cases} H_2(x_0) = y_0 \\ H_2(x_1) = y_1 \\ H'_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$$



求作 Hermite 插值多项式  $H_3(x)$  满足:

$$\begin{cases} H_3(x_0) = y_0 \\ H_3(x_1) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} H'_3(x_0) = y'_0 \\ H'_3(x_1) = y'_1 \end{cases}$$







2. 先讨论  $x_0 = 0, x_1 = 1$  这种特殊情况。设：

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y'_0\beta_0(x) + y'_1\beta_1(x)$$

$\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$  为基函数，它们均为三次代数多项式，满足：

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha'_0(0) = 0 \\ \alpha'_0(1) = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha'_1(0) = 0 \\ \alpha'_1(1) = 0 \end{cases} \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta'_0(0) = 1 \\ \beta'_0(1) = 0 \end{cases} \begin{cases} \beta_1(0) = 0 \\ \beta_1(1) = 0 \\ \beta'_1(0) = 0 \\ \beta'_1(1) = 1 \end{cases}$$

显然满足插值条件：

$$H_3(0) = y_0, H_3(1) = y_1, H'_3(0) = y'_0, H'_3(1) = y'_1$$



$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha'_0(0) = 0 \\ \alpha'_0(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha'_1(0) = 0 \\ \alpha'_1(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta'_0(0) = 1 \\ \beta'_0(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1(0) = 0 \\ \beta_1(1) = 0 \\ \beta'_1(0) = 0 \\ \beta'_1(1) = 1 \end{cases}$$

设  $\alpha_0(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

$$\alpha_0(0) = -c = 1 \longrightarrow c = -1$$

$$\alpha'_0(x) = (ax^2 + bx + c) + (x-1)(2ax + b)$$

$$\alpha'_0(0) = c - b = 0 \longrightarrow b = c = -1$$

$$\alpha'_0(1) = a + b + c = 0 \longrightarrow a = -(b + c) = 2$$

$$\alpha_0(x) = (x-1)(2x^2 - x - 1) = (x-1)^2(2x+1)$$

设  $\alpha_1(x) = x(ax^2 + bx + c)$


$$\alpha_1(1) = a + b + c = 1 \longrightarrow a + b = 1 \longrightarrow b = 3$$

$$\alpha'_1(x) = (ax^2 + bx + c) + x(2ax + b)$$

$$\alpha'_1(0) = c = 0 \longrightarrow c = 0$$

$$\alpha'_1(1) = (a + b + c) + (2a + b) = 0 \longrightarrow a = -(a + b) - 1 = -2$$

$$\alpha_1(x) = x(-2x^2 + 3x) = x^2(-2x + 3)$$



$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha'_0(0) = 0 \\ \alpha'_0(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha'_1(0) = 0 \\ \alpha'_1(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta'_0(0) = 1 \\ \beta'_0(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1(0) = 0 \\ \beta_1(1) = 0 \\ \beta'_1(0) = 0 \\ \beta'_1(1) = 1 \end{cases}$$

设  $\beta_0(x) = x(x-1)(ax+b)$

$$\beta'_0(x) = (2x-1)(ax+b) + (x^2-x)a$$

$$\beta'_0(0) = -b = 1 \quad \longrightarrow \quad b = -1$$

$$\beta'_0(1) = a + b = 0 \quad \longrightarrow \quad a = -b = 1$$

$$\beta_0(x) = x(x-1)(x-1) = \mathbf{x(x-1)^2}$$


设  $\beta_1(x) = x(x-1)(ax+b)$

$$\beta'_1(x) = (2x-1)(ax+b) + (x^2-x)a$$

$$\beta'_1(0) = -b = 0 \quad \longrightarrow \quad b = 0$$

$$\beta'_1(1) = a + b = 1 \quad \longrightarrow \quad a = 1$$

$$\beta_1(x) = x(x-1)x = \mathbf{x^2(x-1)}$$


$$\begin{cases} \alpha_0(x) = (x-1)^2(2x+1) \\ \alpha_1(x) = x^2(-2x+3) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(x) = x(x-1)^2 \\ \beta_1(x) = x^2(x-1) \end{cases}$$

$$H_3(x) = y_0(x-1)^2(2x+1) + y_1x^2(-2x+3) \\ + y'_0x(x-1)^2 + y'_1x^2(x-1)$$


$$0 \leq x \leq 1$$

◆ 若  $x_0, x_1$  为任意两个插值节点

记:  $h = x_1 - x_0$

$$H_3(x) = y_0\alpha_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + y_1\alpha_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \\ + hy'_0\beta_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + hy'_1\beta_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$x_0 \leq x \leq x_1$$



$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \left[ \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right]^2$$

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} [(x - x_0)(x - x_1)]^2 \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

$$g(x) = [(x - x_0)(x - x_1)]^2$$


$$g'(x) = 2(x - x_0)(x - x_1)[(x - x_1) + (x - x_0)]$$

$$= 4(x - x_0)(x - x_1) \left( x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right) = 0$$

$$x = x_0, x_1 \text{ 时, } g(x) = 0$$

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} \text{ 时, } g(x) = \left[ \left( \frac{x_0 + x_1}{2} - x_0 \right) \left( \frac{x_0 + x_1}{2} - x_1 \right) \right]^2$$

$$= \left[ \left( \frac{x_1 - x_0}{2} \right) \left( -\frac{x_1 - x_0}{2} \right) \right]^2 = \frac{h^4}{16} \quad \text{最大值}$$


$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} [(x - x_0)(x - x_1)]^2$$

$$|R_3(x)| = |f(x) - H_3(x)|$$

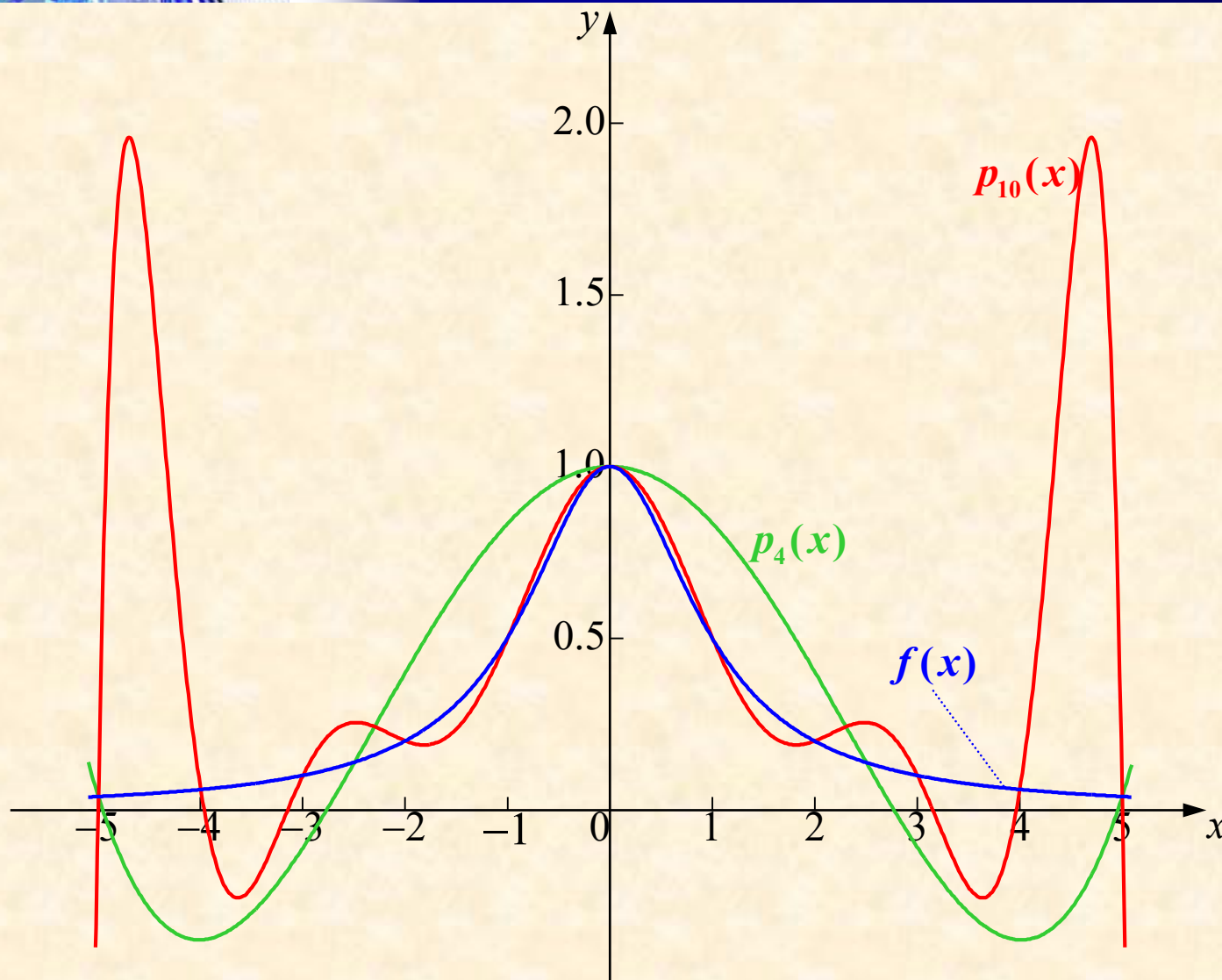
$$\leq \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \right| \cdot \frac{h^4}{16}$$

$$\leq \frac{h^4}{\mathbf{384}} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f^{(4)}(x)|$$

$$h = x_1 - x_0$$



# 高次插值的 Runge 现象



$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

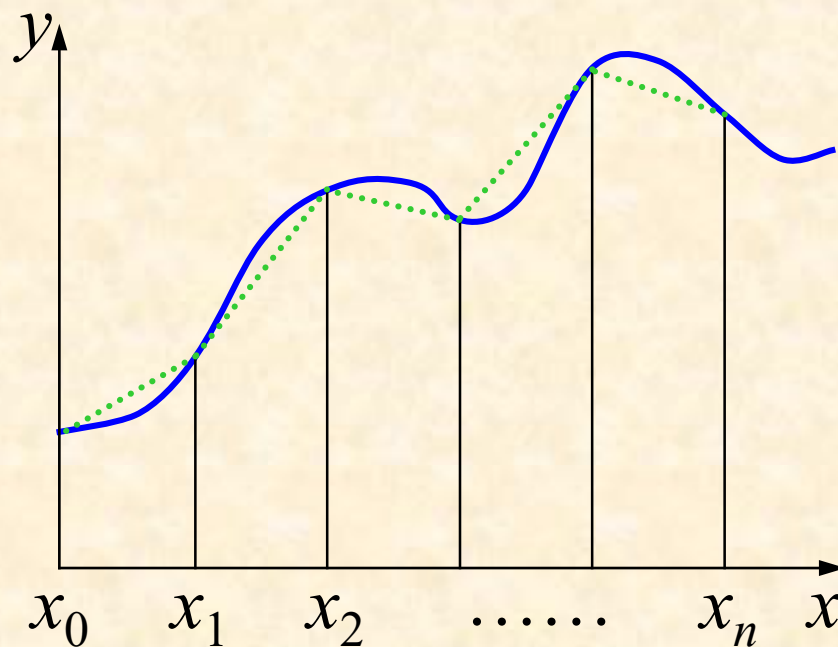
$$-5 \leq x \leq 5$$

当插值节点数达到一定程度后，随着节点个数的增加，逼近精度越来越差



## 2.5 分段插值

- ◆ 将插值区间  $[a, b]$  作一划分  
 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
- ◆ 在每个小区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上构造次数较低的插值多项式  $p_i(x)$
- ◆ 将每个小区间上的插值多项式拼接在一起作为  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的插值函数  $g(x) = p_i(x), x \in [x_i, x_{i+1}]$





# 本节内容

- ◆ 分段线性插值
- ◆ 分段三次Hermite插值

分段插值的公式：在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上同前面所学的线性插值、三次Hermite插值；

难点：分段插值的误差。

# 分段线性插值

- ◆ 已知划分  $\Delta$  的每个节点  $x_i$  处对应的  $y_i$ ，求作具有划分  $\Delta$  的分段一次代数多项式  $S_1(x)$ ，满足：

$$S_1(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$S_1(x)$  在每个小区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上是一个一次插值多项式，则插值基函数  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  均为一次式，且：

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_{i+1} \end{cases} \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & x = x_i \\ 1 & x = x_{i+1} \end{cases}$$

$$S_1^{[i]}(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$
$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

# 分段线性插值的误差

$n$ 次Lagrange插值的余项为

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

令 $n=1$ , 考虑分段线性插值。当  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  时

$$f(x) - S_1^{[i]}(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad \xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$[(x - x_i)(x - x_{i+1})]' = (x - x_i) + (x - x_{i+1}) = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

# 分段线性插值的误差

$$f(x) - S_1^{[i]}(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad \xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$|f(x) - S_1^{[i]}(x)|$$

$$\leq \frac{\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)|}{2!} \cdot \left| \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_i \right) \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_{i+1} \right) \right|$$

$$= \frac{\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)|}{2} \cdot \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot \frac{x_i - x_{i+1}}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{8} h_i^2 \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)| \quad (h_i = |x_{i+1} - x_i|) \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

## 定理 2.6

分段线性插值的误差:

$$|f(x) - S_1(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad h = \max h_i$$

- ◆ 上式表明插值余项与  $h$  相关
- ◆  $h$  越小, 则分段线性插值的插值余项越小, 因此用分段线性插值法是一个较好的提高逼近精度的方法




# 分段三次Hermite插值

- ◆ 已知划分  $\Delta$  的每个节点  $x_i$  处对应的  $y_i$  和  $y'_i$ ，求作具有划分  $\Delta$  的分段三次代数多项式  $S_3(x)$ ，满足：

$$S_3(x_i) = y_i, \quad S'_3(x_i) = y'_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$S_3(x)$  在每个小区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上是一个三次 Hermite 插值多项式，且

$$\begin{cases} S_3^{[i]}(x_i) = y_i \\ S_3'^{[i]}(x_i) = y'_i \end{cases} \quad \begin{cases} S_3^{[i]}(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ S_3'^{[i]}(x_{i+1}) = y'_{i+1} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \alpha_0(x) = (x-1)^2(2x+1) & \begin{cases} \beta_0(x) = x(x-1)^2 \\ \beta_1(x) = x^2(x-1) \end{cases} \\ \alpha_1(x) = x^2(-2x+3) \end{cases}$$

$$H_3(x) = y_0 \alpha_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + y_1 \alpha_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \quad \text{例题2.8}$$

$$+ h y'_0 \beta_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + h y'_1 \beta_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \quad h = x_1 - x_0$$

$$S_3^{[i]}(x) = y_i \alpha_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_{i+1} \alpha_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) \quad \begin{aligned} x &\in [x_i, x_{i+1}] \\ h_i &= x_{i+1} - x_i \end{aligned}$$

$$+ h_i y'_i \beta_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + h_i y'_{i+1} \beta_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

## 定理 2.7

分段三次 Hermite 插值的误差:

$$\left| f(x) - S_3(x) \right| \leq \frac{1}{384} h^4 \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(4)}(x) \right| \quad h = \max h_i$$

- ◆  $h$  足够小（例如小于 1）时，分段三次 Hermite 插值的误差远小于分段线性插值的误差，因此前者的插值精度更高
- ◆ 分段三次 Hermite 插值的插值曲线比分段线性插值的插值曲线更光滑

# 分段插值法

- ◆ 简单
- ◆ 只要插值节点的间距充分小，分段插值收敛性有保证，不会出现Runge现象。
- ◆ 局部性
- ◆ 分段低次lagrange插值在插值节点处曲线不光滑。
- ◆ 三次Hermite插值要求给出插值节点处的导数值。其光滑性也不高。

# 例 题

例1 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，将区间 $[-5, 5]$  分为10等分。


用分段线性插值法求  $f(3.5)$  的近似值，并估计误差。

解：取  $x_i = 3, x_{i+1} = 4$ ，则  $y_i = \frac{1}{10}, y_{i+1} = \frac{1}{17}$

$$s_1(3.5) = \frac{1}{10} \times \frac{3.5-4}{3-4} + \frac{1}{17} \times \frac{3.5-3}{4-3} = \frac{27}{340}$$

本题中  $h = 1$ 。当  $x \in [3, 4]$  时

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{3 \leq x \leq 4} |f''(x)|$$


$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

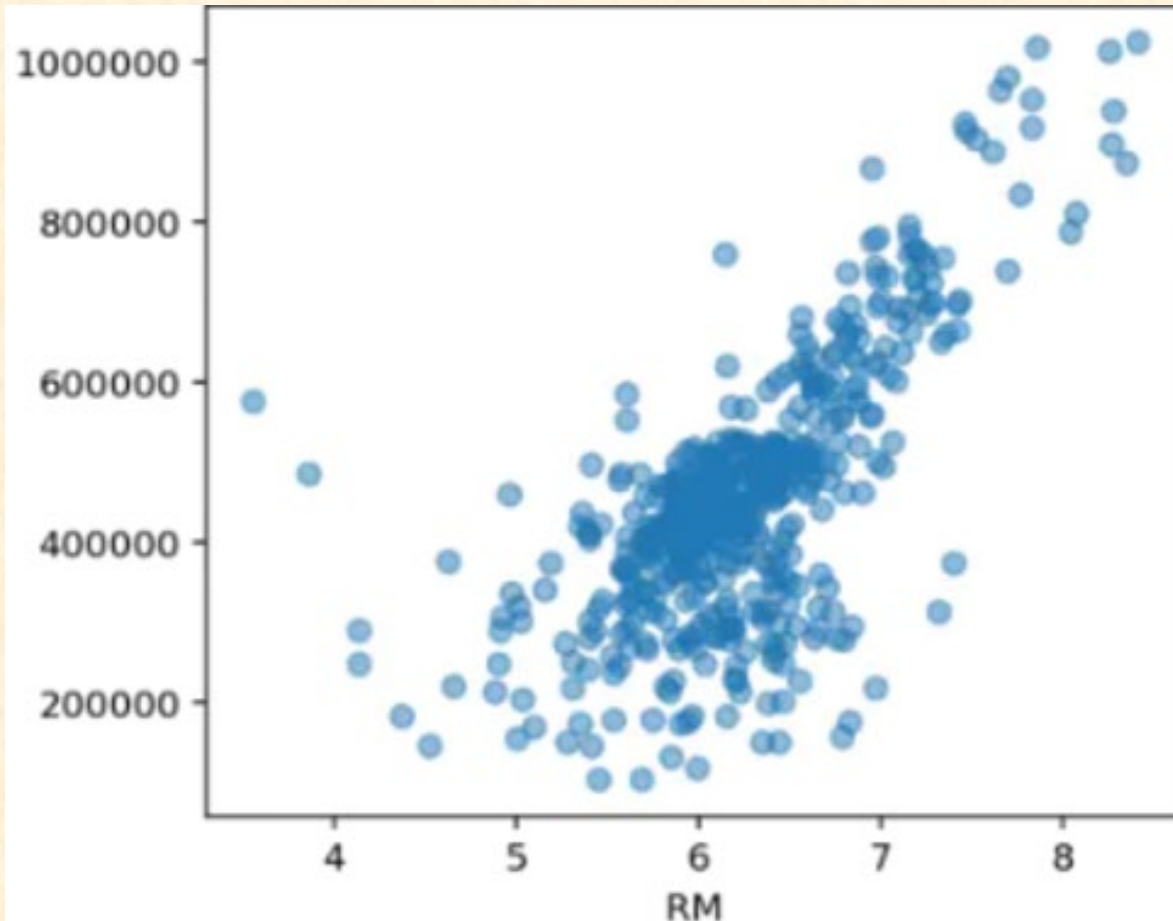
$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}, \quad f'''(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

当  $x \in [3, 4]$  时  $f'''(x) \leq 0$  , 且  $f''(x) > 0$

$$|f(3.5) - s_1(3.5)| \leq \frac{1}{8} \max_{3 \leq x \leq 4} |f''(x)| = \frac{1}{8} f''(3) = 0.0065$$



## 2.7 曲线拟合的最小二乘法



波士顿房价预测项目：此项目的数据于1978年开始统计，共506个数据点，涵盖了麻省波士顿不同郊区房屋14种特征的信息。



## ◆ 函数的逼近方式

- 插值 —— 满足给定的插值条件
- 拟合 —— 反映给定数据的分布

◆ 曲线拟合：给定函数类 $H$ ，按照某种准则，找到一条曲线，既能反映给定数据的总体分布形式，又不致于出现局部较大的波动。

# 最小二乘法

- ◆ 给定数据点  $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \dots, N)$ ，记

$$\varepsilon_i = y_i - g(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

称为残差。

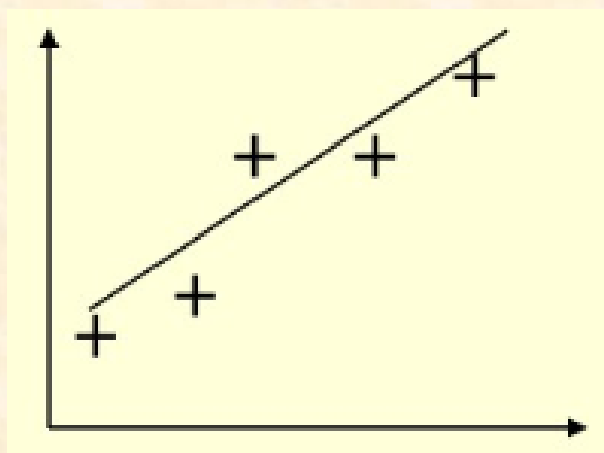
- ◆ 曲线拟合的最小二乘法：函数类 $H$ 中找一个函数  $g(x)$  使得残差的平方和最小，即

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - g(x_i))^2 = \min_{h(x) \in H} \sum_{i=1}^N (y_i - h(x_i))^2$$

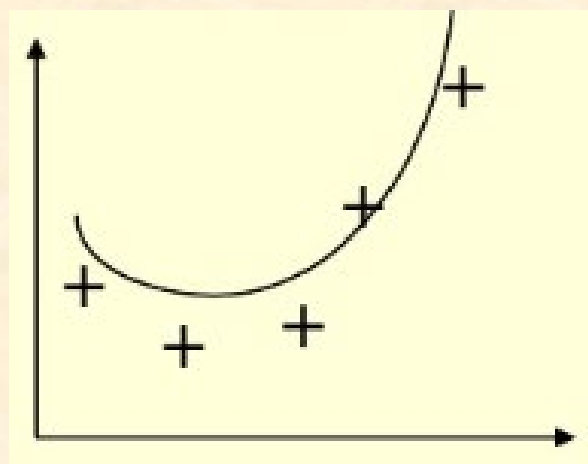
—— 最小二乘条件

# 最小二乘法

- ◆ 函数类 $H \Rightarrow g(x)$ 的形式
- ◆ 通常对给定的数据描图，通过图来寻找数据的分布规律，进而确定  $g(x)$  的形式。



$$g(x) = ax + b$$



$$g(x) = a + bx + cx^2$$

## 2.7.1 直线拟合

- ◆ 给定数据点  $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \dots, N)$ ，求作一次式

$$g(x) = ax + b$$

使得如下的残差最小：


$$\sum_{i=1}^N (y_i - g(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)]^2$$

- ◆ 记 
$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)]^2$$

- ◆ 上述问题可归结为求二元函数  $Q(a, b)$  的极值。

即 
$$\frac{\partial Q(a, b)}{\partial a} = 0, \frac{\partial Q(a, b)}{\partial b} = 0$$




$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)]^2$$

$$\frac{\partial Q(a, b)}{\partial a} = 0 \quad \sum_{i=1}^N 2[y_i - (a + bx_i)] \times (-1) = 0$$

$$a \sum_{i=1}^N 1 + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$Na + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q(a, b)}{\partial b} = 0 \quad \sum_{i=1}^N 2[y_i - (a + bx_i)] \times (-x_i) = 0$$

$$a \sum_{i=1}^N x_i + b \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i \quad (2)$$



## 2.7.2 多项式拟合


- ◆ 给定数据点  $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \dots, N)$ ，求作m次多项式

$$g(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$

使得如下的残差最小：

$$Q = \sum_{i=1}^N (y_i - g(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N \left[ y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right]^2$$

- ◆  $Q$  是  $m+1$ 元函数,  $Q = Q(a_0, a_1, \dots, a_m)$
- ◆ 上述问题可归结为求  $m+1$ 元函数  $Q$  的极值。



$$Q = \sum_{i=1}^N [y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j]^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^m = \sum_{i=1}^N y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^{2m} = \sum_{i=1}^N x_i^m y_i \end{array} \right. \quad (3)$$

# 多项式拟合

- ◆ 给定数据  $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \dots, N)$  , 求作m次多项式

$$g(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$


- ◆ 记  $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_m(x) = x^m$

$$g(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_m \varphi_m(x)$$

- ◆ 记  $\varphi_i = (\varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_N)), \quad 0 \leq i \leq m$

$$f = (y_1, \dots, y_N)$$

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{l=1}^N \varphi_i(x_l) \varphi_j(x_l), \quad (f, \varphi_i) = \sum_{l=1}^N y_l \varphi_i(x_l)$$



$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_m(x) = x^m$$

$$\varphi_i = (\varphi_i(x_0), \varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_N)), \quad 0 \leq i \leq m$$

$$f = (y_0, y_1, \dots, y_N)$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^N 1 \times 1 = N$$


$$(\varphi_m, \varphi_0) = \sum_{i=1}^N x_i^m \times 1 = \sum_{i=1}^N x_i^m$$

(3)的第一个  
方程

$$a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \dots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^m = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$(\varphi_1, \varphi_0) = \sum_{i=1}^N x_i \times 1 = \sum_{i=1}^N x_i$$

$$(f, \varphi_0) = \sum_{i=1}^N y_i \times 1 = \sum_{i=1}^N y_i$$



$$a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^m = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) a_0 + (\varphi_1, \varphi_0) a_1 + \cdots + (\varphi_m, \varphi_0) a_m = (f, \varphi_0)$$

$$\sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_0) a_j = (f, \varphi_0)$$

$$((\varphi_0, \varphi_0), (\varphi_1, \varphi_0), \cdots, (\varphi_m, \varphi_0)) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (f, \varphi_0)$$

类似地，可以表示**(3)**中其他方程。



$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^m = \sum_{i=1}^N y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} + \cdots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^{2m} = \sum_{i=1}^N x_i^m y_i \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_0) a_j = (f, \varphi_0) \\ \sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_1) a_j = (f, \varphi_1) \\ \dots \\ \sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_m) a_j = (f, \varphi_m) \end{array} \right.$$

$$\sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_k) a_j = (f, \varphi_k)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m$$

正规方程组



# 多项式拟合

$$\sum_{j=0}^m (\varphi_j, \varphi_k) a_j = (f, \varphi_k) \quad (4)$$
$$k = 0, 1, 2, \dots, m$$

- ◆ 正规方程组(4)是否有解？
- ◆ 该解是否是残差函数Q的最小值点？

**定理2.8** 正规方程组(4)的解存在且唯一，而且其解就是使  $Q(a_0, a_1, \dots, a_m)$  达到最小值的极值点。

# 例 题

例1 给定如下离散数据，试求拟合曲线。

|       |      |      |      |     |     |     |     |   |
|-------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|---|
| $x_i$ | -3   | -2   | -1   | 0   | 1   | 2   | 3   | 4 |
| $y_i$ | -3.2 | -2.1 | -1.2 | 0.1 | 0.9 | 2.1 | 3.3 | 4 |

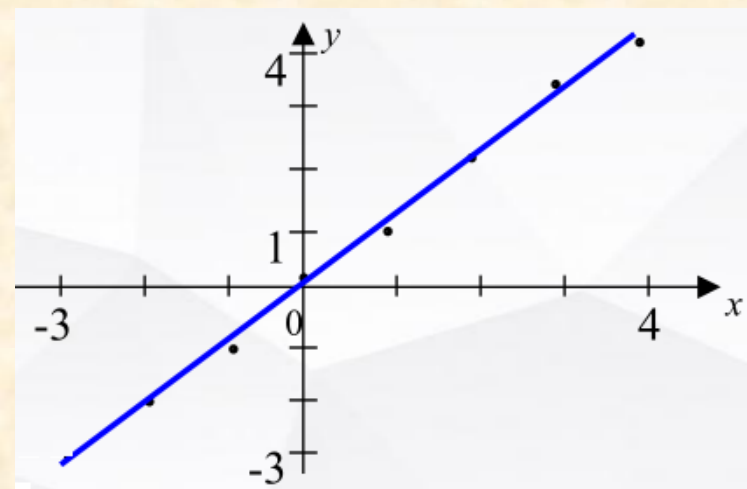
解：绘草图，确定拟合曲线类型。

从草图可判定拟合曲线为直线，因此设

$$g(x) = a + bx$$

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^8 [y_i - (a + bx_i)]^2$$

按最小二乘条件，令其偏导数为零得到二元一次方程组，得到 $a, b$ 的值。



# 例 题

例1 给定如下离散数据，试求拟合曲线。

|       |      |      |      |     |     |     |     |   |
|-------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|---|
| $x_i$ | -3   | -2   | -1   | 0   | 1   | 2   | 3   | 4 |
| $y_i$ | -3.2 | -2.1 | -1.2 | 0.1 | 0.9 | 2.1 | 3.3 | 4 |

解：绘草图，确定拟合曲线类型。

从草图可判定拟合曲线为直线，可设

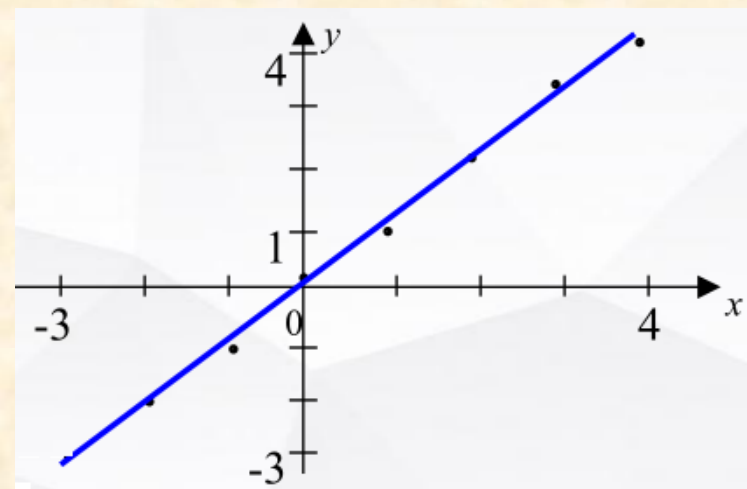
$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x$$

$$g(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$$

$$\varphi_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\varphi_1 = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$$

$$f = (-3.2, -2.1, -1.2, 0.1, 0.9, 2.1, 3.3, 4)$$



## 例1 (续)

$$\varphi_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \quad \varphi_1 = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$$

$$f = (-3.2, -2.1, -1.2, 0.1, 0.9, 2.1, 3.3, 4)$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = 8 \quad (\varphi_1, \varphi_0) = 4 \quad (f, \varphi_0) = 3.9$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = 4 \quad (\varphi_1, \varphi_1) = 44 \quad (f, \varphi_1) = 46$$

$$\begin{cases} 8a_0 + 4a_1 = 3.9 \\ 4a_0 + 44a_1 = 46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -0.0369 \\ a_1 = 1.0488 \end{cases}$$

从而拟合直线为:  $g(x) = a_0 + a_1x = -0.0369 + 1.0488x$

# 例 题 (提高)

例2 对下列数据求形如 $y=ae^{bx}$ 的拟合曲线

|       |         |         |         |         |         |         |         |         |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x_i$ | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       |
| $y_i$ | 15.3    | 20.5    | 27.4    | 36.6    | 49.1    | 65.6    | 87.8    | 117.6   |
| $z_i$ | 2.72785 | 3.02042 | 3.31054 | 3.60005 | 3.89386 | 4.18358 | 4.47506 | 4.76729 |

设 $z=\ln y$ , 则  $z=A+bx$ , 其中 $A=\ln a$ , 由 $z_i=\ln y_i$  得

对 $z(x)$ 作线性拟合曲线, 取  $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x$ .

$$\varphi_0=(1,1,1,1,1,1,1,1)^T, \quad \varphi_1=(1,2,3,4,5,6,7,8)^T,$$

$$z=(2.72785, 3.02042, 3.31054, 3.60005, 3.89386, 4.18358, 4.47506, 4.76729)^T,$$

$$\begin{cases} 8A + 36b = 29.97865 \\ 36A + 204b = 147.13503 \end{cases}$$

解得  $A^*=2.43686, b^*=0.29122$ , 于是有  $a^*=e^{A^*}=11.43707$



# 第2章 小结

- Lagrange插值
  - Newton插值
  - Hermite插值
  - 分段插值
  - 直线拟合
  - 多项式拟合
- ◆ 插值基函数
  - ◆ 差商
  - ◆ 插值余项-误差估计
  - ◆ 不同插值方法的异同
  - ◆ 拟合与插值的不同
  - ◆ 典型例题