



# 数值分析

主讲：孙伟平

华中科技大学计算机学院 数据存储研究所



# 本节内容

**1.1 课程介绍**

**1.2 误差的基本概念**

**1.3 在近似计算中应注意的一些原则**



# 1.1 课程介绍

- (1) 背景介绍
- (2) 近似计算的基本方法
- (3) 应用举例
- (4) 课程内容
- (5) 课程成绩构成




# (1) 背景介绍

- ◆ 21世纪信息社会的两个主要特征：
  - “计算机无处不在”
  - “数学无处不在”
  
- ◆ 21世纪信息社会对科技人才的要求：
  - 会用数学解决实际问题
  - 会用计算机进行科学计算




- ◆ 诺贝尔奖获得者，计算物理学家威尔逊提出现代科学研究的三大方法：理论研究、科学实验、科学计算。
- ◆ 科学计算在生命科学、医学、系统科学、经济学等现代科学中起的作用日益凸显，已经成为气象、石油勘探、核能技术、航空航天、交通运输、机械制造、水利建筑等重要工程领域中不可缺少的工具。
- ◆ 随着科技的发展，出现了大量复杂的数值计算问题，在解决这些计算问题的长期过程中，形成了数值分析这门科学。





## 机器学习：

- 以计算机为工具和平台，以数据为研究对象，以学习方法为中心。
- 是概率论、线性代数、数值分析、信息论、最优化理论和计算机学科等多个领域的交叉学科。

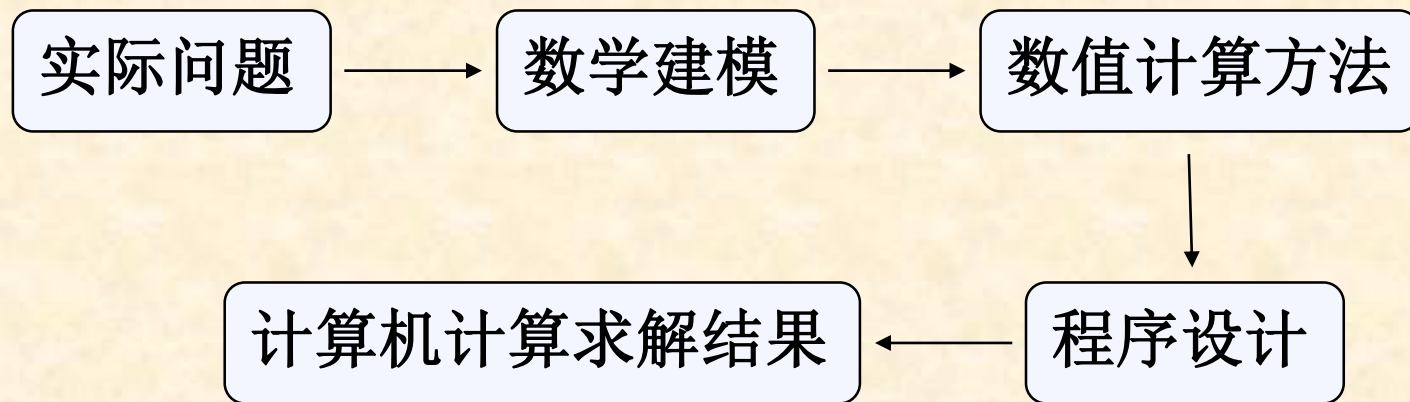


## 机器学习中的问题：

- ◆ 有一部分可以通过数学推导的方式直接得到用公式表示的**解析解**，但是对于绝大多数的问题来说，解析解是不存在的，需要使用迭代更新的方法求**数值解**。
- ◆ 实数的**精度**是无限的，计算机能够表达的**精度**是有限的。
- ◆ 只有**局部**，不见**全貌**。



## ◆ 用计算机进行科学计算解决实际问题的过程



- ◆ 数值计算方法主要研究使用计算机求解各种科学与工程计算问题的数值方法（近似方法）。





◆ 一个好的数值计算方法：

- ① 面向计算机，易于用计算机实现
- ② 理论上要保证方法的收敛性和稳定性
- ③ 计算效率高：计算速度快，节省存储空间
- ④ 经过数值实验检验，证明行之有效

◆ 数值分析最基本的立足点是容许误差。



## (2) 近似计算的基本方法

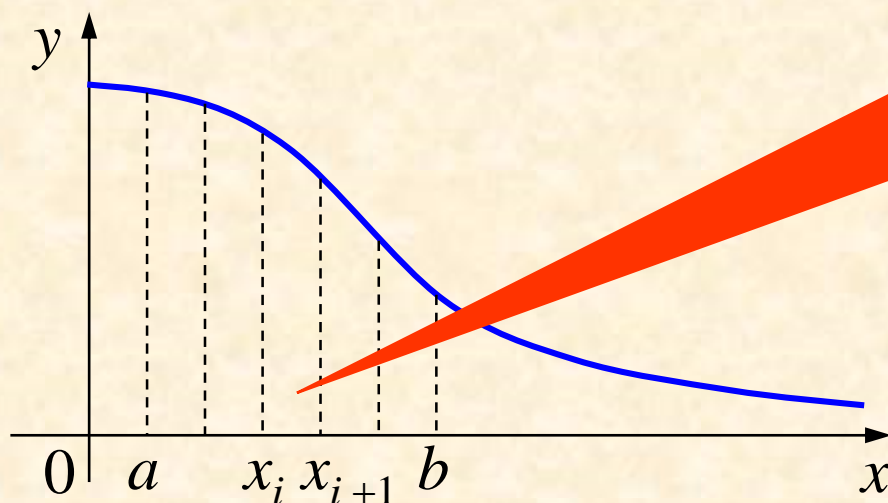
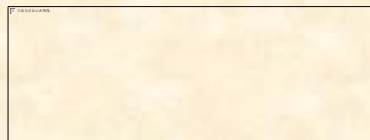
- ◆ 离散化
- ◆ 递推法
- ◆ 近似替代

# 近似计算的基本方法

## ◆ 离散化


将求连续变量的问题转化为求离散变量的问题。

例如：求解



第*i*个小区间的面积  
约等于：

$$\frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta x$$



## ◆ 递推法

将一个复杂的计算过程转化为简单过程的多次重复。

例如：计算多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

采用递推公式

$$\begin{cases} u_0 = a_n \\ u_k = u_{k-1}x + a_{n-k} \end{cases}$$

递推至  $k = n$

即可求出  $p_n(x)$



## ◆ 近似替代法

将无限过程的数学问题用计算机的有限次计算近似替代。

例如：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$



### (3) 应用举例

- ◆ 例 供水计划与生产调度 （单位：万吨/日）  
某城市1月份的用水量

年份	2014	2015	2016	2017
用水量	5032.41	5186.0254	5296.9866	5474.852
年份	2018	2019	2020	2021
用水量	5535.2344	5505.4274	5617.6993	5701.01

预测该城市2022年1月份的用水量。

插值和数据拟合 -第2章

## ◆ 例 水流量估计

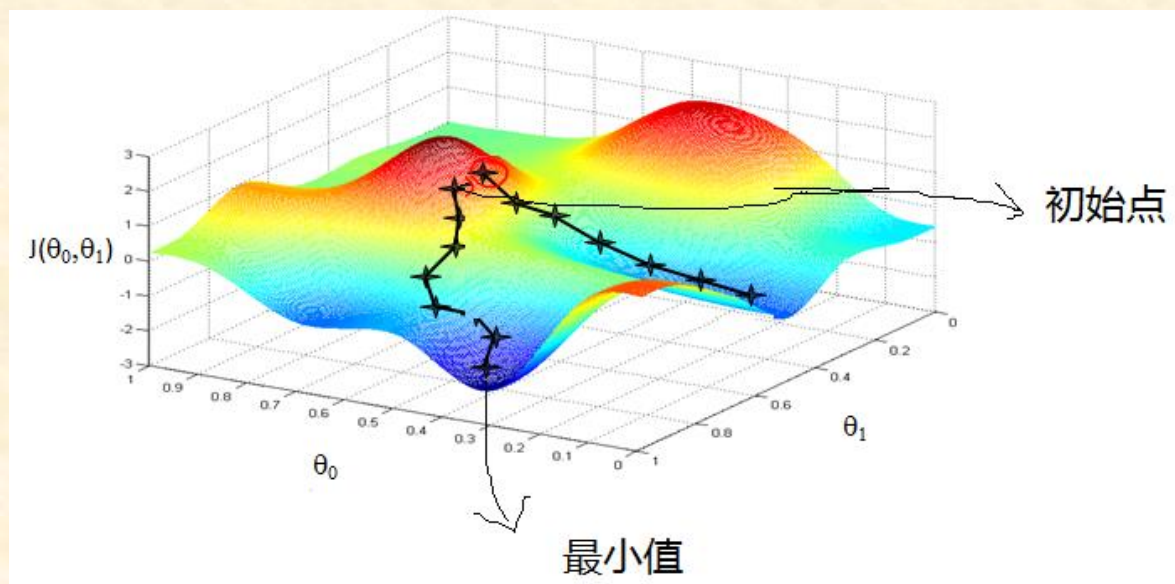
现根据实际测量得到某河流某处的河宽700m，其横截面不同位置某一时刻的水深如下表所示。若此刻水流速度为0.5m/s，试估计此刻的水流量。

x	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
h(x)	4.2	5.9	5.8	5.2	4.5	5.7	5	5.5	4.8	5.9	4.1	5.1	4.6	5.7	4.7

要计算水流量就要知道其横截面积。如果知道此处的水深曲线函数  $h(x)$ ，则其横截面积为  $\int_a^b h(x)dx$ 。但是在实际中  $h(x)$  不能精确得到，那么怎么求出足够高精度的横截面积的近似值呢？

◆ 例 机器学习

$$\min J(\theta_0, \theta_1)$$



梯度下降

-第5章

## (4) 课程内容

### ◆ 课程内容

第1章 引论-误差理论

第2章 插值方法与曲线拟合

第3章 数值积分与数值微分

第4章 常微分方程数值解法

第5章 方程求根





章标题	内容	重点
第1章 引论 (4')	1.1 课程介绍 1.2 误差的概念 1.3 一些原则	误差 有效数字
第2章 插值方法与 曲线拟合 (8')	2.1 存在唯一性 2.2 Lagrange插值 2.3 Newton插值 2.4 Hermit插值 2.5 分段插值 2.7 曲线拟合的最小二乘法	几种插值方法的原理、异同、 优缺点  插值余项/误差分析  线性拟合 (2.7.1)
第3章 数值积分与 数值微分 (6')	3.1.1 代数精度 3.1.2 求积公式的构造 3.1.3 Newton-Cotes求积公式 3.1.4 复化求积法 3.1.5 Romberg求积公式 3.2.1 差商型数值微分 3.2.2 插值型数值微分	求积公式的构造方法  余项  数值稳定性





章标题	内容	重点
第4章 常微分方程 数值解法 (6')	4.1 欧拉法 4.2 改进的欧拉法 4.3 龙格-库塔法 4.4 收敛性和稳定性	局部截断误差 收敛性分析 稳定性条件
第5章 方程求根 (6')	5.1 二分法 5.2 迭代法及其收敛性 5.3 收敛速度 5.4 Newton法	收敛性判定定理 收敛速度

◆ 本课程介绍最常用的数学模型的最基本的数值计算方法。



◆ 在学习的过程中

- 要注意掌握数值方法的**基本**原理和思想；
- 要注意方法处理的**技巧**及其与**计算机**的结合；
- 要重视**误差**分析，**收敛性**和**稳定性**的基本理论。

## (5) 课程成绩构成

平时成绩: 30%

期末闭卷考试: 70% (带计算器)

共计: 100分

请大家注册登录加入课堂:

EduCoder平台

<https://www.educoder.net/classrooms>

邀请码: 4MTANJ

作业手写拍照后提交, 注意截止日期, 勿抄袭



# 1.2 误差的基本概念

## 1.2.1 误差的来源

## 1.2.2 误差和误差限

- 绝对误差、绝对误差限
- 相对误差、相对误差限

## 1.2.3 有效数字

- 有效数字的定义
- 有效数字与误差限的关系

## 1.2.4 算术运算的误差与误差限

## 1.2.1 误差的来源

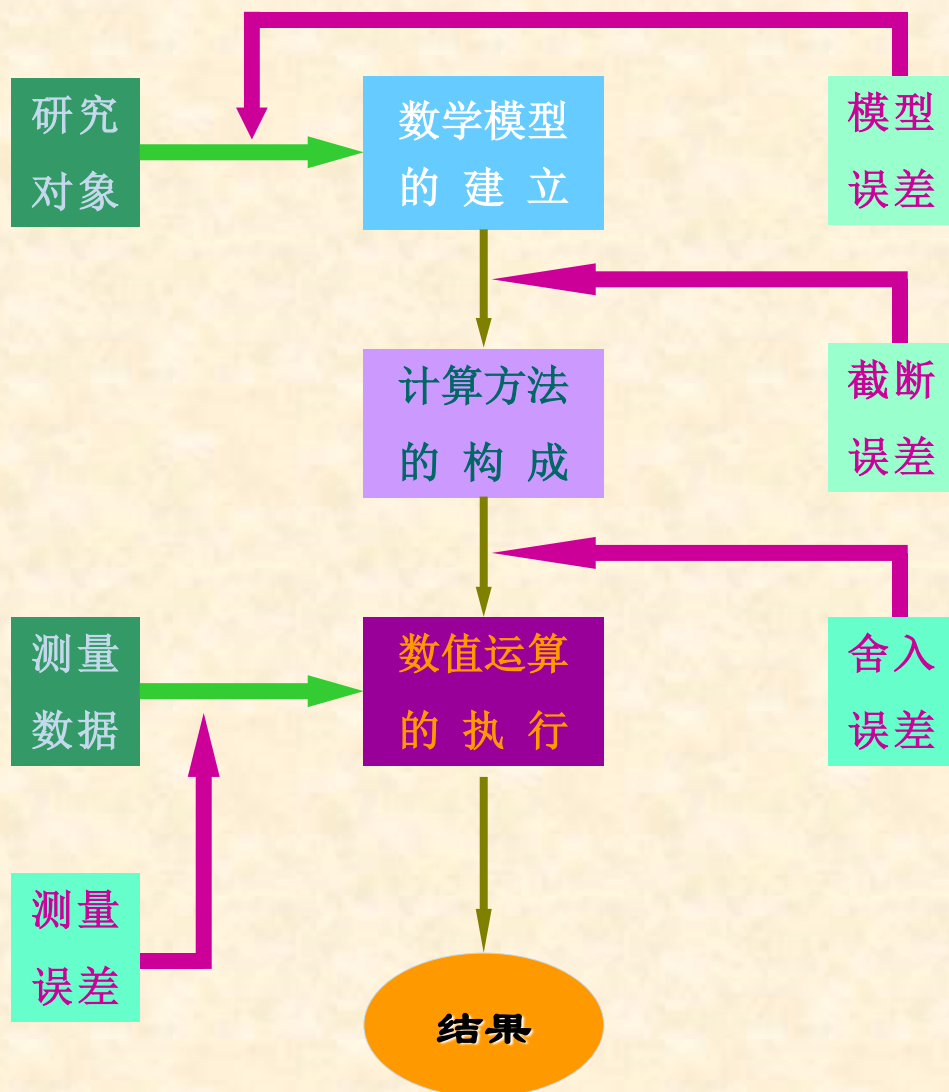
数值计算方法的立足点是允许有误差，关键在于能否将误差控制在许可的范围内。

- ◆ 模型误差 （忽略次要因素，简化问题）  $G=mg$
- ◆ 观测误差 （测量器具的精度和观测手段有限）  $0.1\text{mm}$
- ◆ 截断误差 （计算机只能进行有限次运算）
- ◆ 舍入误差 （计算机对数据表示的限制）  $1/3=0.3333\dots$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

余项:  $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$  ( $\xi$ 是 $(x, x_0)$ 之间的某一点)





本课程主要讨论截断误差和舍入误差：

- 讨论它们在计算过程中的传播和对计算结果的影响；
- 研究控制其影响以保证最终计算结果有足够的精度。



## 1.2.2 误差和误差限

- 绝对误差、绝对误差限
- 相对误差、相对误差限

**注意：** 本节概念多、符号多，  
一定要记清楚、分清楚。

# (1) 绝对误差

将某个研究量的准确值记为  $x$ ，其近似值记为  $x^*$ 。称  $x^*$  与  $x$  的差：

$$\varepsilon(x^*) = x^* - x$$

为近似值  $x^*$  的**绝对误差**，简称**误差**。

- ◆ 绝对误差是有量纲的
- ◆ 绝对误差可为正，也可为负。 $\varepsilon(x^*) > 0$ ，称  $x^*$  是  $x$  的**强**近似值，反之为**弱**近似值。
- ◆  $|\varepsilon(x^*)|$  的大小标志着  $x^*$  的精确度。一般地，在同一量纲的不同近似值中， $|\varepsilon(x^*)|$  越小则  $x^*$  的精确度越高。

## (2) 绝对误差限

由于准确值  $x$  一般无法确切知道，因此绝对误差的准确值也不能求出。但根据实际的测量、计算的情况可事先估计出绝对误差绝对值的上界。即事先指定某个正数  $\eta$ ，使得：

$$|\varepsilon(x^*)| = |x^* - x| \leq \eta$$

绝对误差限  
是不唯一的


我们称  $\eta$  为  $x^*$  的**绝对误差限**。

显然：  $\eta > 0$

且：  $x^* - \eta \leq x \leq x^* + \eta$

或：  $x = x^* \pm \eta$

$x$  所在的范围



绝对误差限并不能完全反映出两个不同近似值的近似程度。

例如：

$$x = 10 \pm 1\text{m}$$

$$y = 10000 \pm 5\text{m}$$

这里  $x^*$  的绝对误差限小于  $y^*$  的绝对误差限，但  $10000\text{m}$  作为  $y$  的近似值比  $10\text{m}$  作为  $x$  的近似值的近似程度更好。



### (3) 相对误差

相对误差:

$$\varepsilon_r(x^*) = \frac{\varepsilon(x^*)}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

相对误差  
可正可负

由于准确值  $x$  一般无法知道, 在实际计算中可以取:

$$\varepsilon_r(x^*) = \frac{x^* - x}{x^*}$$

前提:  $|\varepsilon_r(x^*)|$  很小

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(x^*)}{x} - \frac{\varepsilon(x^*)}{x^*} &= \varepsilon(x^*) \left( \frac{x^* - x}{xx^*} \right) = \varepsilon^2(x^*) \frac{1}{xx^*} \\ &= \left[ \varepsilon(x^*)/x^* \right]^2 \frac{1}{(x/x^*)} = \left[ \varepsilon(x^*)/x^* \right]^2 \frac{1}{[x^* - \varepsilon(x^*)]/x^*} \\ &= \left[ \varepsilon(x^*)/x^* \right]^2 \frac{1}{[1 - \varepsilon(x^*)/x^*]} \approx \left[ \varepsilon(x^*)/x^* \right]^2 \end{aligned}$$

## (4) 相对误差限

**相对误差限：** 相对误差的绝对值的上界

相对误差限  
是不唯一的

$$|\varepsilon_r(x^*)| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{\eta}{|x^*|} = \eta_r$$

- ◆ 相对误差、相对误差限是无量纲的量。
- ◆ 相对误差限比绝对误差限能更好地刻画近值数的近似程度。

小结：准确值  $x$       近似值  $x^*$

◆ 绝对误差  $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}(x^*) = x^* - x$$

◆ 相对误差  $\mathcal{E}_r$

$$\mathcal{E}_r(x^*) = \frac{\mathcal{E}(x^*)}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

$$\mathcal{E}_r(x^*) = \frac{x^* - x}{x^*}$$

◆ 绝对误差限  $\eta$

$$|\mathcal{E}(x^*)| = |x^* - x| \leq \eta$$

◆ 相对误差限  $\eta_r$

$$|\mathcal{E}_r(x^*)| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \eta_r$$

## 1.2.3 有效数字

- 计算结果精确到小数点后第2位
- 保留3位有效数字

四舍五入：

$$x^* = 3.14$$

$$3.135 \leq x < 3.145$$

$$x = x^* \pm 0.005$$

$$\eta = 0.005 = 0.5 \times 10^{-2}$$

$x^*$  的绝对误差限等于近似值 末位 的半个单位

# (1) 有效数字的定义

定义：如果近似数  $x^*$  的绝对误差限不大于  $0.5 \times 10^{-j}$  则称近似数  $x^*$  准确到小数点后第  $j$  位，从这个小数点后第  $j$  位数字直到最左边非 0 数字之间的所有数字都称为  $x^*$  的有效数字。

$x^*$  的绝对误差限不超过  $x_{k+j}$  这一位的半个单位

$$x^* = \pm x_1 x_2 \cdots x_k . x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_{k+j} \cdots x_{k+n}$$

$\uparrow$   
 $\neq 0$

$$\eta \leq \underbrace{0.0000000 \cdots 05}_{j \text{ 个}}$$

$j$  个

$x^*$  的有效  
数字位数  
为  $k + j$  位



# 有效数字的等效定义

一般地，将  $x^*$  转化成为计算机浮点数的形式：

$$x^* = \pm 0.x_1x_2\cdots x_n \times 10^m$$

规格化  
指数

$\neq 0$

如果

$$|\varepsilon(x^*)| = |x^* - x| \leq 0.5 \times 10^{m-l}$$

(其中  $1 \leq l \leq n$ )

则  $x^*$  具有  $l$  位有效数字。



# 例子 有效数字

例：  $x = 3.141592653\dots$  ， 分析下列近似值  
3, 3.14, 3.1416, 3.1415 各有多少位有效数字。

$$x_1^* = 3 \quad |\varepsilon(x_1^*)| = 0.14159\dots < 0.5 \times 10^0 \quad 1\text{位}$$

$$x_2^* = 3.14 \quad |\varepsilon(x_2^*)| = 0.00159\dots < 0.5 \times 10^{-2} \quad 3\text{位}$$

$$x_3^* = 3.1416 \quad |\varepsilon(x_3^*)| = 0.0000073\dots < 0.5 \times 10^{-4} \quad 5\text{位}$$

$$x_4^* = 3.1415 \quad |\varepsilon(x_4^*)| = 0.0000926\dots < 0.5 \times 10^{-3} \quad 4\text{位}$$

还可以用等效定义。先将 $x^*$ 用规格化数表示，得到  $m=1$



- ◆ 通常用四舍五入法得到的近似数从末位向前算起至第一个非 0 数字均是有效数字。
- ◆ 有效数字越多，绝对误差的绝对值就越小，计算结果也越精确。

35.185	5 位有效数字	精确到 0.001
35.1850	6 位有效数字	精确到 0.0001

—— 近似值后面的零不能随便省去。

## (2) 绝对误差限与有效数字的关系

- ◆ 根据绝对误差限可计算近似数的有效数字位数。

例如：

$$\text{已知 } |\varepsilon(x^*)| \leq \eta = \frac{1}{2} \times 10^{-6}$$

$$\text{如果 } x^* = 13.5*** = 0.135*** \times 10^2$$

则  $x^*$  有 8 位有效数字

- ◆ 根据有效数字位数可计算绝对误差限。

如果  $x^* = 3587.64$  是  $x$  具有六位有效数字的近似值，  
其绝对误差限为：

$$|\varepsilon(x^*)| = |x^* - x| \leq 0.5 \times 10^{-2}$$

### (3) 相对误差限与有效数字的关系

**定理1.1** 假设近似数  $x^* = \pm 0.x_1x_2\cdots x_n \times 10^m$ ，其中  $x_1 \neq 0$ ， $x^*$  的有效数字的位数为  $n$ ，则  $x^*$  的相对误差限为：

$$\eta_r = \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n}$$

**证明：** 因为  $x^*$  有  $n$  位有效数字，则  $|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$

$$\begin{aligned} |x^*| &= 0.x_1x_2\cdots x_n \times 10^m = x_1.x_2\cdots x_n \times 10^{m-1} \\ &\geq x_1.\underbrace{0\cdots 0}_{n-1\text{个}} \times 10^{m-1} = x_1 \times 10^{m-1} \end{aligned}$$

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{x_1 \times 10^{m-1}} = \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n}$$

# 相对误差限与有效数字的关系（续）

**定理1.2** 假设近似数  $x^* = \pm 0.x_1x_2 \cdots x_n \times 10^m$ ，其中  $x_1 \neq 0$ ， $x^*$  的相对误差限为：

$$\eta_r = \frac{1}{2(x_1 + 1)} \times 10^{1-n}$$

则  $x^*$  具有  $n$  位有效数字。

**证明：** 因为  $|x^*| = 0.x_1x_2 \cdots x_n \times 10^m = x_1.x_2 \cdots x_n \times 10^{m-1}$   
 $\leq \underbrace{x_1}_{n-1\uparrow}.\underbrace{9 \cdots 9}_{n-1\uparrow} \times 10^{m-1} \leq (x_1 + 0.\underbrace{9 \cdots 9}_{n-1\uparrow}) \times 10^{m-1} < (x_1 + 1) \times 10^{m-1}$

$$|x^* - x| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \cdot |x^*| \leq \eta_r \times |x^*|$$

$$\leq \frac{1}{2(x_1 + 1)} \times 10^{1-n} \times (x_1 + 1) \times 10^{m-1} = \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$



# 例子

例：要使  $\sqrt{20}$  的相对误差不超过 0.1%，应取几位有效数字？

解： $\sqrt{20}$  的首位数是  $x_1 = 4$ ，设它的近似值的有效数字位数为  $n$ ，则它的相对误差应满足：

$$|\varepsilon_r| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{1}{2 \times x_1} \times 10^{1-n} \leq 0.1\%$$

$$\frac{1}{2 \times 4} \times 10^{1-n} \leq 0.001 \quad n \geq 3.097$$

即应取 4 位有效数字。





## 1.2.4 算术运算的误差和误差限

- ◆ 如果多个近似值进行算术运算，绝对误差限、相对误差限如何估计呢？
- ◆ 例如已知 $x^*$ ,  $y^*$ 的误差限，要求 $x^*-y^*$ ,  $x^*y^*$ 的误差限。

# (1) 加减法的误差限

$$\varepsilon(x^* \pm y^*) = \varepsilon(x^*) \pm \varepsilon(y^*)$$

$$\eta(x^* \pm y^*) = \eta(x^*) + \eta(y^*)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(x^* + y^*) &= (x^* + y^*) - (x + y) = (x^* - x) + (y^* - y) \\ &= \varepsilon(x^*) + \varepsilon(y^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\varepsilon(x^* + y^*)| &= |\varepsilon(x^*) + \varepsilon(y^*)| \leq |\varepsilon(x^*)| + |\varepsilon(y^*)| \\ &\leq \eta(x^*) + \eta(y^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(x^* - y^*) &= (x^* - y^*) - (x - y) = (x^* - x) - (y^* - y) \\ &= \varepsilon(x^*) - \varepsilon(y^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\varepsilon(x^* - y^*)| &= |\varepsilon(x^*) - \varepsilon(y^*)| \leq |\varepsilon(x^*)| + |\varepsilon(y^*)| \\ &\leq \eta(x^*) + \eta(y^*)\end{aligned}$$

# 加减法的误差限（续）

$$\begin{aligned}\frac{|\varepsilon(x^* + y^*)|}{|x^* + y^*|} &\leq \frac{|\eta(x^*)| + |\eta(y^*)|}{|x^* + y^*|} \\&= \frac{|x^*|}{|x^* + y^*|} \cdot \frac{|\eta(x^*)|}{|x^*|} + \frac{|y^*|}{|x^* + y^*|} \cdot \frac{|\eta(y^*)|}{|y^*|} \\&= \frac{|x^*|}{|x^* + y^*|} \cdot \eta_r(x^*) + \frac{|y^*|}{|x^* + y^*|} \cdot \eta_r(y^*) \\&\leq \frac{|x^*| + |y^*|}{|x^* + y^*|} \cdot \max[\eta_r(x^*), \eta_r(y^*)]\end{aligned}$$



$$\frac{|\varepsilon(x^* + y^*)|}{|x^* + y^*|} \leq \frac{|x^*| + |y^*|}{|x^* + y^*|} \cdot \max[\eta_r(x^*), \eta_r(y^*)]$$

$$\frac{|\varepsilon(x^* + y^*)|}{|x^* + y^*|} \leq \begin{cases} \max[\eta_r(x^*), \eta_r(y^*)] & x^*, y^* \text{ 同号} \\ \frac{|x^* - y^*|}{|x^* + y^*|} \cdot \max[\eta_r(x^*), \eta_r(y^*)] & x^*, y^* \text{ 异号} \end{cases}$$

$x^*, y^*$  异号, 且两者的绝对值非常接近时 **非常大**

## (2) 乘法的误差限

$$\eta(x^* y^*) = |x^*| \eta(y^*) + |y^*| \eta(x^*)$$

$$\eta_r(x^* y^*) = \eta_r(x^*) + \eta_r(y^*)$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon(x^* y^*)| &= |x^* y^* - (x^* + x - x^*)(y^* + y - y^*)| \\ &= |x^* y^* - (x^* - \varepsilon(x^*))(y^* - \varepsilon(y^*))| \\ &= |x^* y^* - x^* y^* + x^* \varepsilon(y^*) + y^* \varepsilon(x^*) - \varepsilon(x^*) \varepsilon(y^*)| \\ &\leq |x^*| \eta(y^*) + |y^*| \eta(x^*) + \eta(x^*) \eta(y^*) \end{aligned}$$

若  $\eta(x^*), \eta(y^*)$  足够小, 则

$$|\varepsilon(x^* y^*)| \leq |x^*| \eta(y^*) + |y^*| \eta(x^*)$$

## (2) 乘法的误差限

$$\eta(x^* y^*) = |x^*| \eta(y^*) + |y^*| \eta(x^*)$$

$$\eta_r(x^* y^*) = \eta_r(x^*) + \eta_r(y^*)$$

$$\begin{aligned} \frac{|\varepsilon(x^* y^*)|}{|x^* y^*|} &\leq \frac{|x^*| \cdot \eta(y^*) + |y^*| \eta(x^*)}{|x^* y^*|} = \frac{\eta(y^*)}{|y^*|} + \frac{\eta(x^*)}{|x^*|} \\ &= \eta_r(y^*) + \eta_r(x^*) \end{aligned}$$



### (3) 除法的误差限

$$\eta\left(\frac{x^*}{y^*}\right) = \frac{|x^*| \eta(y^*) + |y^*| \eta(x^*)}{|y^*|^2}$$

$$\eta_r\left(\frac{x^*}{y^*}\right) = \eta_r(x^*) + \eta_r(y^*) \quad y, y^* \neq 0$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$


$$\varepsilon\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \approx \frac{y^* dx - x^* dy}{(y^*)^2} \approx \frac{y^* \varepsilon(x^*) - x^* \varepsilon(y^*)}{(y^*)^2}$$

# 除法的误差限（续）

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon\left(\frac{x^*}{y^*}\right)\right| &= \left|\frac{y^* \varepsilon(x^*) - x^* \varepsilon(y^*)}{(y^*)^2}\right| = \frac{|y^* \varepsilon(x^*) - x^* \varepsilon(y^*)|}{|y^*|^2} \\ &\leq \frac{|x^*| \cdot |\varepsilon(y^*)| + |y^*| \cdot |\varepsilon(x^*)|}{|y^*|^2} \\ &\leq \frac{|x^*| \cdot \eta(y^*) + |y^*| \cdot \eta(x^*)}{|y^*|^2}\end{aligned}$$

当除数绝对值较小时，商的绝对误差的绝对值将非常大

$$\frac{|x^*| \cdot \eta(y^*)}{|y^*|^2} + \frac{\eta(x^*)}{|y^*|}$$



$$\left| \varepsilon \left( \frac{x^*}{y^*} \right) \right| \leq \frac{|x^*| \cdot \eta(y^*) + |y^*| \cdot \eta(x^*)}{|y^*|^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left| \varepsilon \left( \frac{x^*}{y^*} \right) \right|}{\left| \frac{x^*}{y^*} \right|} &\leq \frac{|x^*| \cdot \eta(y^*) + |y^*| \cdot \eta(x^*)}{|y^*|^2} \\ &= \frac{|x^*| \cdot \eta(y^*) + |y^*| \cdot \eta(x^*)}{|x^* y^*|} \\ &= \frac{\eta(y^*)}{|y^*|} + \frac{\eta(x^*)}{|x^*|} \\ &= \eta_r(x^*) + \eta_r(y^*) \end{aligned}$$

## 拓展：幂、对数的误差限

$$\eta\left[(x^*)^n\right]=|n|\cdot|x^*|^{n-1}\eta(x^*)$$

$$\eta_r\left[(x^*)^n\right]=|n|\eta_r(x^*)$$

$$\eta(\ln x^*)=?$$

$$\eta_r(\ln x^*)=?$$

请同学们自己推导

# 1.3 近似计算应遵循的原则

## 加减法

- ◆ 小数位数多的数四舍五入，并且比小数位数少的数多一位
- ◆ 运算结果保留的小数位数与原近似数中小数位数少者相同

$$\begin{array}{l} x^* = 3.14159 \text{ 小数点后有 5 位} \longrightarrow 3.1416 \\ y^* = 2.718 \text{ 小数点后有 3 位} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x^* \\ y^* \end{array}} \right\} + = 5.8596$$

结果:  $x^* + y^* \approx 5.860$



# 近似计算应遵循的原则（续）

## 乘除法

- ◆ 各因子保留的位数比有效数字位数最少的因子的位数多一位
- ◆ 运算结果的有效数字位数与有效数字位数最少的因子的位数相同

$$\begin{array}{ll} x^* = 7.342 & 4 \text{ 位有效数字} \\ y^* = 0.018 & 2 \text{ 位有效数字} \end{array} \longrightarrow 7.34 \left. \vphantom{\begin{array}{l} x^* \\ y^* \end{array}} \right\} \times = 0.13212$$

结果:  $x^* \times y^* \approx 0.13$

# 近似计算应遵循的原则（续）

## 幂运算

- 运算结果保留的有效数字位数与原近似数的有效数字位数相同

$$x^* = 0.251$$

3 位有效数字

结果：

$$(x^*)^2 = 0.063001 \approx 0.0630$$
$$\sqrt{x^*} = 0.50999001 \dots \approx 0.510$$

## 对数运算

- 运算结果保留的有效数字位数与原近似数中真数的有效数字位数相同

$$x^* = 3.456$$

4 位有效数字

结果：

$$\ln x^* = 1.24011 \dots \approx 1.240$$



# 近似计算应遵循的原则（续）

## 中间运算结果

- ◆ 中间结果所保留的位数应比上述原则中提及的位数多取一位
- ◆ 最后一次计算时，对这多取的一位进行四舍五入

# 若干值得注意的问题

## ◆ 防止两个相近的数相减

两个相近的数相减,会使有效数字的位数严重损失,在算法设计中,若可能出现两个相近数相减,则改变计算公式,如使用三角变换、有理化等恒等变换

如:  $86.034 - 85.997 = 0.037$

只有 2 位有效数字了

$$1 - \cos x = 2 \sin \left( \frac{x}{2} \right)^2$$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

# 若干值得注意的问题（续）

- ◆ 避免除数的绝对值  $\ll$  被除数的绝对值

除数稍有一点误差，则计算结果会出现较大变化

$$\frac{2.7182}{0.001} = 2718.2$$

$$\frac{2.7182}{0.0011} = 2471.1$$



# 若干值得注意的问题（续）

## ◆ 防止大数“吃掉”小数

例：  $x^2 - (10^9 + 1)x + 10^9 = 0$  方程的精确解为

$$x_1 = 10^9, \quad x_2 = 1$$

在字长为8，基底为10的计算机上利用求根公式

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \text{sqrt}(b^2 - 4ac)}{2a}$$

机器吃了

$$-b = 10^9 + 1 = 0.1 \times 10^{10} + 0.000000000001 \times 10^{10}$$

$$\approx 0.1 \times 10^{10} = 10^9$$

同理：  $b^2 - 4ac \approx b^2$

因此计算机求解的结果为：

$$\sqrt{b^2 - 4ac} \approx |b|$$

$$x_1 = 10^9, \quad x_2 = 0$$

# 若干值得注意的问题（续）

- ◆ 实际编程应采用以下的公式：

$$x_1 = \frac{-b - \text{sgn}(b) \times \text{sqrt}(b^2 - 4ac)}{2a}$$

$$x_2 = \frac{c}{ax_1}$$

符号函数

$$\text{sgn}(b) = \begin{cases} 1 & b > 0 \\ 0 & b = 0 \\ -1 & b < 0 \end{cases}$$

# 若干值得注意的问题（续）

## ◆ 简化计算步骤，减少运算次数

如秦九韶、高斯法、FFT 等

$$x^{255} = x \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot x^8 \cdot x^{16} \cdot x^{32} \cdot x^{64} \cdot x^{128}$$

只需要 14 次乘法，而不是 254 次乘法

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=1}^n a_i x^i$$

直接计算需要  $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  次乘法  
和  $n$  次加法

采用递推公式 
$$\begin{cases} u_0 = a_n \\ u_k = u_{k-1}x + a_{n-k} \end{cases}$$

只需要  $n$  次乘法  
和  $n$  次加法

# 若干值得注意的问题（续）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} & (1) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} & (2) \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & b_{nn} \end{vmatrix} & (3) \end{cases}$$

## 若干值得注意的问题（续）

	乘法	$n=20$	加法	$n=20$
(1)	$n!(n-1)$	$4.62 \times 10^{19}$	$n!-1$	$2.43 \times 10^{18}$
(2)	$n!(e-1)$	$4.18 \times 10^{18}$	$n!-1$	$2.43 \times 10^{18}$
(3)	$(n-1)(n^2+n+3)/3$	$2.68 \times 10^3$	$n(n-1)(2n-1)/6$	$2.47 \times 10^3$

- ◆ 假设用主频为 2.8G 的计算机进行计算，并假设该计算机每秒执行  $2.8 \times 10^9$  次乘法，则：
- ◆ 方法 (1) 需要：523.2年
- ◆ 方法 (2) 需要：47.3年
- ◆ 方法 (3) 需要：0.96微秒



# 小 结

- ◆ 基本概念：
  - 误差，误差限
  - 有效数字
- ◆ 有效数字位数的多种判定方法
- ◆ 算术运算中误差限的估计公式
- ◆ 近似计算中应注意的一些原则