



第六章 线性方程组的解法

Methods for Solving Linear Systems



引论

Chapter 6 Methods for
solving linear systems

Ø 这一章介绍求解线性方程组(如下)的解法。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (*)$$

Ø 工程科学中的许多领域，如热传导，震动，气象学及数量经济学等中的问题解决必须求解下列数值计算问题：

微分方程组的差分方法， 有限元法。
最小二乘拟合（最小二乘法）

} 求解线性方程组

Ø 解线性方程组的方法在计算数学与科学计算中尤为重要。

Ø 线性方程组表示为 $AX=b$

Ø 当 $D=|A| \neq 0$ 时. 由Gramer法则, 方程组有唯一解.

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Ø 注: 用Gramer求解时, 要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 共做 $N=n!(n^2-1)+n$ 次乘除法。

Ø $n=20$ 时, 用高性能计算机要计算几万年。

有效的解法:

Ø 直接法: 有限步运算求精确解(由于舍入误差的影响, 其解是近似的。)——Gauss消元法及其变形

Ø 迭代法: 不是用有限步运算求精确解, 而是通过迭代产生近似解序列逐步逼近精确解。

——Jacobi迭代, Gauss-Seidel迭代

6.1 向量和矩阵的范数/* Norms of Vectors and Matrices */

Chapter 6 Methods for solving linear systems

数值分析中,经常要用向量和矩阵,为了应用的需要(误差分析),引入衡量向量和矩阵大小的度量—范数.

对于实数 $x \in \mathbb{R}$,我们定义了绝对值

$$\text{其满足 } |x| \geq 0 \text{ 非负性. } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$|ax| = |a| \cdot |x| \text{ 齐次性}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \text{ 三角不等式}$$

类似,定义向量范数

Chapter 6 Methods for solving linear systems

Def 6.1 在实 n 维线性空间 \mathbb{R}^n 中定义一个映射,它使任意 $X \in \mathbb{R}^n$ 有一个非负实数与之对应,记为 $\|X\|$,且该映射满足:

- (1) **正定性** 任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq 0$, iff $X=0$ 时, $\|X\| = 0$
- (2) **齐次性** 任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 有 $\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$
- (3) **三角不等式** 任意 $X, Y \in \mathbb{R}^n$, 有 $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

则称该映射在 \mathbb{R}^n 中定义了一个**向量范数**.

注: \mathbb{R}^n 中的范数不唯一.

常用的范数有三种: 设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 则

$$\text{1—范数: } \|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\text{2—范数: } \|X\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\infty\text{—范数: } \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

P-范数
$$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

注: (1) 根据范数的定义可验证上述皆为向量范数

(2) $p=1,2$, $\|X\|_p$ 即为 $\|X\|_1, \|X\|_2$.

(3) 任意 $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|X\|_p = \|X\|_\infty$$

例: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\|X\|_1 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\|X\|_\infty = 3$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

向量范数的性质

(1) 任意 $X, Y \in \mathbb{R}^n$, 则 $|\|X\| - \|Y\|| \leq \|X - Y\|$

证: $\because \|X\| = \|X - Y + Y\| \leq \|X - Y\| + \|Y\|$

$$\|Y\| = \|Y - X + X\| \leq \|Y - X\| + \|X\| = \|X - Y\| + \|X\|$$

$$\therefore -\|X - Y\| \leq \|X\| - \|Y\| \leq \|X - Y\|$$

(2) \mathbb{R}^n 上向量范数的等价性:

即若 $\|X\|_a$ 与 $\|X\|_b$ 为 \mathbb{R}^n 上两种范数, 则存在正数 M 与 m ($M > m$) 对任意 $X \in \mathbb{R}^n$, 有

$$m\|X\|_b \leq \|X\|_a \leq M\|X\|_b$$

$$\frac{1}{n}\|X\|_1 \leq \|X\|_\infty \leq \|X\|_1$$

例: $\|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty$

$$\|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty$$

注: \mathbb{R}^n 范数的等价性表明, 虽不同向量范数其值不同, 但考虑到向量序列收敛性时, 却有明显的一致性。

Def 6.2 R^n 中的向量序列 $\{X_k\}$, 即 $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots$

其中 $X_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$, 若对任意 i ($i=1, 2, \dots, n$) 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^*$$

则向量 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ 称为 $\{X_k\}$ 的极限。

记做 $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X^*$

注: 向量序列收敛实际上是按分量收敛 (数列收敛)
利用向量范数, 也可以说明向量序列收敛的概念。

Th. 向量序列 $\{X_k\}$ 依分量收敛于 X^* 的充要条件是:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|X_k - X^*\| = 0$$

注: (1) 数列 $\|X_k - X^*\|$ 收敛于0

(2) 依范数收敛等价于依分量 (坐标) 收敛。

类似于向量范数, 给出矩阵范数的定义。

Def. 在线性空间 $R^{n \times n}$ 中定义一个映射, 使任意 $A \in R^{n \times n}$ 对应一个非负实数, 记做 $\|A\|$, 如果该映射满足:

1. 正定性: $\forall A \in R^{n \times n}, \|A\| \geq 0$, 且 $\|A\| = 0$ iff $A = 0$

2. 齐次性: $\forall \lambda \in R, A \in R^{n \times n}, \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

3. 三角不等式: $\forall A, B \in R^{n \times n}, \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

4. 相容性: $\forall A, B \in R^{n \times n}, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

(相容性是矩阵乘法的需要, 而1. 2. 3.为向量范数的推广)

在 $R^{n \times n}$ 中可定义多种范数。

例 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n}$, 则 $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ 称为A的Frobenius范数。

例2. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|\dots\|$ 为 \mathbb{R}^n 中的向量范数, 则定义 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的范数为

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \|Ax\|$$

易验证这样由向量范数导出的映射为矩阵范数, 称之为
诱导范数 (或算子范数)。

诱导范数具有如下性质:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n$$

证: (1) 当 $x=0$ 时, 显然成立

$$(2) \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, } \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|A\|$$

Def. 对于 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的矩阵范数 $\|\dots\|_a$ 与 \mathbb{R}^n 中的向量范数 $\|\dots\|_b$, 若任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 都有 $\|Ax\|_b \leq \|A\|_a \cdot \|x\|_b$, 则称矩阵范数 $\|\dots\|_a$ 和向量范数 $\|\dots\|_b$ 相容 (协调)。

注: (1) 任何向量范数与其诱导范数是相容的。

(2) 给出一种向量范数 $\|x\|_p$, 就有对应的诱导范数 $\|A\|_p$ 。

(3) 向量范数 $\|\dots\|_1, \|\dots\|_2, \|\dots\|_\infty$ 的诱导矩阵范数仍记为 $\|\dots\|_1, \|\dots\|_2, \|\dots\|_\infty$ 。

定理: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 则 A 的诱导范数

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{列和范数})$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1} \quad \text{其中 } \lambda_1 \text{ 为 } A^T A \text{ 的最大特征值} \quad (\text{谱范数})$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{行和范数})$$

证：对谱范数 $\|A\|_2$ 来证明。 $\|AX\|_2^2 = (AX, AX) = X^T A^T A X \geq 0$

$A^T A$ 为对称半正定阵。

设 $A^T A$ 的特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$,

相应的特征向量为 e_1, e_2, \dots, e_n 且 $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

设 $X \in G = \{X \mid \|X\|_2 = 1, X \in \mathbb{R}^n\}$

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

$$\text{则 } AX = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2 + \dots + \lambda_n x_n e_n.$$

$$\text{从而, } \|AX\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_1$$

$$\therefore \|AX\|_2 \leq \sqrt{\lambda_1}$$

当 $X = e_1$ 时, 上式等号成立, 故 $\|A\|_2 = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$

例 求 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 的 $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F, \|A\|_2$.

$$\|A\|_1 = \max\{4, 5, 5\} = 5, \quad \|A\|_\infty = \max\{5, 4, 5\} = 5,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{4+1+4+1+4+1+1+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad A^T A \text{ 的特征值为:}$$

$$\lambda_1 = 13.0902, \quad \lambda_2 = 9.0000, \quad \lambda_3 = 1.9098$$

$$\therefore \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{13.092} \approx 3.6180$$

对于线性方程组 $Ax=b$, 当 $|A| \neq 0$ 时, 可用消去法求数值解.
一般, A, b 都是由观测数据而得, 都存在误差, 那么原始数据的误差, 对解的结果有什么影响呢? —— **稳定性分析**

(1) 若 A 精确, b 有微小误差 δb , 所得解的误差为 δX ,

而精确解 X 满足 $Ax=b$

即 $A(X+\delta X)=b+\delta b$.

$$\therefore A\delta X=\delta b$$

$$\delta X=A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta X\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

$$\therefore \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|X\|} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|A\|\|X\|}$$

$$\text{Q } \|A\|\|X\| \geq \|AX\| = \|b\|$$

X 的相对误差为 b 的相对误差的

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$\|A\| \|A^{-1}\|$ 倍.

(2) 若 b 精确, A 有微小误差 δA , 所得解的误差为 δX

即 $(A+\delta A)(X+\delta X)=b$

$$\therefore AX+A\delta X+(\delta A)X+\delta A\delta X=b$$

$$\therefore A\delta X+(\delta A)X+\delta A\delta X=0$$

假设 A 可逆, 且 $A+\delta A$ 非奇异 (当 $\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$) , 则

$$\delta X = -A^{-1}(\delta A)X - A^{-1}\delta A\delta X$$

$$\therefore \|\delta X\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|X\| + \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|\delta X\|$$

$$(1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|) \|\delta X\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|X\|$$

$$\therefore \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} = \frac{\|A^{-1}\| \|A\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \|A^{-1}\| \|A\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

解的相对误差近似等于原始数据相对误差的 $\|A\| \|A^{-1}\|$ 倍,
若 $\|A\| \|A^{-1}\|$ 较大, 解会对舍入误差很敏感。

Def 6.4 设A为非奇异矩阵，称 $\|A\| \|A^{-1}\|$ 为矩阵A的条件数，记为 $\text{cond}(A)$ 。

条件数的性质：

- Ø $\text{cond}(A) \geq 1$
- Ø $\text{cond}(kA) = \text{cond}(A)$, $k \neq 0$
- Ø 若 $\|A\| = 1$ ，则 $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\|$

若 $\text{cond}(A)$ 很大，称方程组 $AX=b$ 是**病态的**(不稳定)；
否则，是**良态的**。

例 $\begin{pmatrix} 1.000 & 0.25 \\ 0.25 & 0.06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.501 \\ 0.375 \end{pmatrix}$ **精确解** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

原始数据微小变化

$\begin{pmatrix} 1.000 & 0.25 \\ 0.25 & 0.06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.37 \end{pmatrix}$ **其解为** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$

原始数据的绝对误差限 $\leq 0.5 \times 10^{-2}$ ，而解的误差很大。

$$A = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.25 \\ 0.25 & 0.06 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1000 & 4000 \\ -4000 & 16016 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = 1.251, \|A^{-1}\|_{\infty} = 20016$$

$$\therefore \text{cond}(A) = 25040$$

$\therefore AX=b$ 是病态方程组。

6.2 迭代法

Chapter 6 Methods for solving linear systems

思想:由某初始近似解向量 X_0 ,按一迭代格式产生向量序列 $\{X_k\}$,
 X_k 为准确解 X^* 的近似值,但其逐步逼近 X^* ,即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X^*$$

Ø 怎样建立迭代格式 Ø 迭代格式的收敛性 Ø $\|X^* - X_k\| = ?$

将 $AX=b$, A 非奇异,变换为一个等价的方程组:

$$x=Bx+f \quad (B \text{ 为 } n \text{ 阶方阵, } f \text{ 为 } n \text{ 维向量}).$$

$$\text{有迭代格式} \quad \begin{cases} X_0 \\ X_{k+1} = BX_k + f \quad k=0,1,\dots \end{cases}$$

从而产生向量序列 $\{X_k\}$: $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots$ 称为**简单迭代法**,
 B 为**迭代矩阵**, $\{X_k\}$ 为**迭代序列**.

若 $\{X_k\}$ 收敛: $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X^*$

则有 $X^* = BX^* + f$, 即 X^* 为 $AX=b$ 的解.

Chapter 6 Methods for solving linear systems

若 $B=(b_{ij})_{n \times n}$, $f=(f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, 则上式可用分量形式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \dots + b_{1n}x_n^{(k)} + f_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + \dots + b_{2n}x_n^{(k)} + f_2 \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + \dots + b_{nn}x_n^{(k)} + f_n \end{cases} \quad k=0,1,2,\dots, \quad X_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\text{或} \quad x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j^{(k)} + f_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad k=0,1,2,\dots$$

那么,如何由 $AX=b$ 等价变形为 $x=Bx+f$?

例: $A=M-N$. (M 非奇异)

例: $A=L+D+U$.

则有 $(M-N)x=b$.

$$\therefore MX = NX + b$$

$$\therefore X = M^{-1}NX + M^{-1}b$$

从而,迭代矩阵 $B = M^{-1}N$, $f = M^{-1}b$.

对某一迭代过程: $X_{k+1} = BX_k + f$. 其产生的序列 $\{X_k\}$ 是否收敛呢? 它和迭代矩阵 B 相关.

Def 6.5 已知 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的全体特征值, A 的谱半径为:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

Th. 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则 A 的谱半径不超过 A 的任何一种范数:

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

证明: 设 λ 是 A 的任意特征值, x 为对应的特征向量 ($x \neq 0$), 则

$$Ax = \lambda x$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall \|x\| > 0 \quad \therefore |\lambda| \leq \|A\|$$

$$\therefore \rho(A) \leq \|A\|$$

引理 设 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则 $B^k \rightarrow O_{n \times n} (k \rightarrow \infty)$ 的充要条件是 $\rho(B) < 1$.

证明: (参考 Th6.13, 引理 6.3, Jordan 标准型)

Th6.14 对于任意的初始向量 X_0 , 迭代过程 $X_{k+1} = BX_k + f$ 收敛于 $AX=b$ 的解 X^* 的充要条件是 $\rho(B) < 1$, 此时 $AX=b$ 有唯一解 X^* .

证: (1) $\because X^* = BX^* + f$

$$X_{k+1} = BX_k + f$$

$$\therefore X_{k+1} - X^* = B(X_k - X^*)$$

$$\therefore X_{k+1} - X^* = B^{k+1}(X_0 - X^*), \text{ 从而:}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X^* \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} B^k(X_0 - X^*) = 0_n \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} B^k = O_{n \times n} \Leftrightarrow \rho(B) < 1$$

(2) $X = BX + f$, 即为 $(I - B)X = f$

$$\rho(B) < 1 \text{ 则 } |I - B| \neq 0,$$

从而 $X = BX + f$ 有唯一解.

Th 6.15 当 $\|B\| < 1$ 时, 迭代过程 $X_{k+1} = BX_k + f$ 收敛于 $X = BX + f$ 的解 X^* , 且 $\|X_k - X^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|X_k - X_{k-1}\|$ (6.59)

$$\|X_k - X^*\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|X_1 - X_0\| \quad (6.60)$$

证明: (1) $\because \rho(B) \leq \|B\| < 1$
 \therefore 迭代过程收敛

$$\begin{aligned} (2) \quad & \because X_k - X^* = B(X_{k-1} - X^*) \quad \therefore \|X_k - X^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|X_k - X_{k-1}\| \\ & \therefore \|X_k - X^*\| \leq \|B\| \|X_{k-1} - X^*\| \\ & = \|B\| \|X_{k-1} - X_k + X_k - X^*\| \\ & \leq \|B\| (\|X_{k-1} - X_k\| + \|X_k - X^*\|) \end{aligned}$$

$$\therefore (1 - \|B\|) \|X_k - X^*\| \leq \|B\| \|X_{k-1} - X_k\|$$

$$(3) \quad \because X_k - X_{k-1} = B(X_{k-1} - X_{k-2}) = \dots = B^{k-1}(X_1 - X_0)$$

$$\therefore \|X_k - X_{k-1}\| \leq \|B\|^{k-1} \|X_1 - X_0\|; \text{ 将其代入 (6.59) 即得 (6.60)}$$

停机准则: 用户精度要求 $\|X_k - X^*\| < \varepsilon$.

I. 先验估计法: $\frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|X_1 - X_0\| < \varepsilon$

则迭代次数 $k > \frac{\ln \frac{\varepsilon(1 - \|B\|)}{\|X_1 - X_0\|}}{\ln \|B\|}$

取 k 为满足上式的最小正整数(保守估计)

II. 后验估计法:

$$\|X_k - X_{k-1}\| < \varepsilon$$

6.3 简单迭代法

Chapter 6 Methods for
solving linear systems

对 $AX=b$ 的 A 作如下分解:

若 A 的主对角线元素都不为0,即 $a_{ii} \neq 0, i=1 \sim n$.

记 $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

若 $A = D - N$.

则 $(D - N)X = b$, 即 $X = D^{-1}NX + D^{-1}b$

则迭代格式为:

$$X_{k+1} = D^{-1}NX_k + D^{-1}b$$

此迭代称为Jacobi迭代,迭代矩阵 $B = D^{-1}N$,其主对角线元素全为0.

下面讨论: Jacobi迭代的收敛性

充要条件—— $\rho(D^{-1}N) < 1$, 充分条件—— $\|D^{-1}N\| < 1$

Chapter 6 Methods for
solving linear systems

Def 6.6 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的各行元素满足 $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \dots, n$
则称 A 是**对角占优阵**,
若上各式严格不等号成立,则称 A 为**严格对角占优阵**.

Th 6.17 严格对角占优阵是可逆的。

Th 6.18 若 A 严格对角占优阵, 则其Jacobi迭代收敛.

分析: $A = D - N$

迭代矩阵 $B = D^{-1}N$

只需证: $\|B\|_{\infty} = \|D^{-1}N\|_{\infty} < 1$

例6.7 用Jacobi迭代法解下列方程组(精确到 10^{-3})

$$\begin{pmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0.06 & -0.02 \\ 0.03 & 1 & -0.05 \\ 0.01 & -0.02 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解: 原方程组可变形为右上形式, 记为 $AX=b$

$\because A$ 为严格对角占优阵, \therefore 其Jacobi迭代收敛.

令 $A=D-N$, $D=I$, 则

$$B=D^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix} \quad D^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

\therefore Jacobi迭代格式为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

取 $X_0=(2,3,5)^T$ 迭代得:

$$X_1=(1.92, 3.19, 5.04)^T$$

$$X_2=(1.909, 3.194, 5.045)^T \quad \text{又} \|X_3 - X_2\|_{\infty} < 10^{-3}$$

$$\because \|X_2 - X_1\|_{\infty} > 10^{-3}$$

取 $X^* \approx X_3$

\therefore 进一步迭代

$$X_3=(1.909, 3.194, 5.045)^T$$

Algorithm: (Jacobi迭代法)

Step 1 取 X_0 ,置精度要求和最大迭代次数 $N, k=0$

Step 2 计算 $X_{k+1}=BX_k+f$

Step 3 if ($\max_{i=1}^n |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$) stop ($X^* \approx X_{k+1}$)

else if ($k=N$) stop (不收敛)

else $k=k+1$;

goto Step 2