

## 第2章 图论

1. 图的定义：图  $G = \langle V, E \rangle$ ；非空的节点集合  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ；边集合  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ；每条边  $e_k = (v_i, v_j)$  ( $k=1, 2, \dots, m$ )。  
注：图与几何形状无关。
2. 节点的度：与节点相关联的边
3. 关键节点：若  $X$  存在于  $Y$  和  $Z$  之间的所有最短路径，则  $X$  为  $Y$  和  $Z$  的关键节点
4. 连通性
  - 1) 连通图：任意两节点间都存在通路的图。
  - 2) 连通分量：子自身连通；该子集不是其他任意连通子集的一部分。
  - 3) 超大连通分量：包含其中大部分节点的连通分量。
5. 图的遍历：宽度优先搜索

## 第3章 强联系和弱联系

1. 三元闭包
  - 1) 定义：如果两个互不相识的人有了一个共同的朋友，则他们俩将来成为朋友的可能性提高。
  - 2) 拓展
    - a) 两个人的共同朋友越多，则他们成为朋友的可能性越高（量）
    - b) 两个人与共同朋友的关系越密切，则他们成为朋友的可能性越高（质）
  - 3) 节点  $A$  的聚集系数= $A$  的任意两个朋友之间也是朋友的概率=即邻居间朋友对的个数/总对数
2. 强三元闭包原理
  - 1) 强关系&弱关系
  - 2) 若  $A-B$  和  $A-C$  之间的关系为强关系；则  $B-C$  之间形成边的可能性很高
  - 3) 若  $A-B$  和  $A-C$  为强关系，但  $B-C$  无任何关系（s/w），则称  $A$  违背了强三元闭包原理
3. 捷径&弱关系
  - 1) 桥：去掉  $AB$  会使  $A$ 、 $B$  属于不同连通分量，则  $AB$  为桥（ $A$ 、 $B$  间的唯一途径）  
捷径：边  $AB$  的端点  $A$ 、 $B$  无共同好友，则  $AB$  为捷径（去掉后  $A$ 、 $B$  的距离大于 2）  
捷径的跨度： $A$ 、 $B$  在没有边  $A-B$  时的距离
  - 2) 断言：若  $A$  符合强三元闭包，且至少有两个强关系邻居，则与  $A$  相连的任何捷径必定是弱关系。
4. 边的邻里重叠度
  - 1) 边  $AB$  的邻里重叠度=与  $A$  和  $B$  相邻的节点数/与  $A$  或  $B$  相邻的节点数（不算  $A$  和  $B$  本身）
  - 2) 捷径=邻里重叠度为 0 的边
  - 3) 邻里重叠度&边的关系强度：正相关
5. 图划分
  - 1) 定义：将一个网络分成一组关系紧密的区域以及区域间稀疏的互连。
  - 2) 分割法：逐步去掉“跨接边”（高介数边）
  - 3) 聚集法：逐步把节点合到区域中
6. 介数
  - 1) 定义：一条边承载的流量。一个单位流量从  $A$  到  $B$ ，均分它们间所有最短路径； $k$  条路径则每条分得  $1/k$ ；一条边被  $m$  条路径共用，则流过  $m/k$ ；对所有节点都考虑过后，介数=边累计流量。
  - 2) 介数计算方法 1
    - a) 从一个节点（ $A$ ）开始，做宽度优先搜索，将节点分层
    - b) 确定从  $A$  到其他每个节点的最短路径的条数（自顶向下，下面的条数=上面的之和）
    - c) 确定当从节点  $A$  沿最短路径向其他所有节点发送 1 个单位流量时，经过每条边的流量。  
（自底向上，流入节点流量=留在节点的 1+流出节点的，按最短路径数的比例分配给上面的边）
    - d) 对每一个节点重复上述过程，累计，除以 2

### 3) 介数计算方法 2

- a) 计算点 A、B 两侧各有多少节点（含 A、B，不含公共节点），相乘

## 第 4 章 网络及其存在的环境

### 1. 同质性

- 1) 同质性是社会网络结构形成的基本外部原因

- 2) 同质性判别基准

- a) ●：占比为  $p$ ；○：占比为  $q$ ；●●：  $p^2$ ；○○：  $q^2$ ；●○：  $2pq$
- b)  $r$  = 不同颜色边数 / 边的总数
- c)  $r$  明显小于  $2pq$ ：同质性明显

### 2. 归属

- 1) 归属网络：表明个体（左）对社团（右）的归属关系

- 2) 二部图：所有节点被分为 2 组，每条边连接的两个结点分别在不同的组

- 3) 社会网络 & 归属网络的协同演化

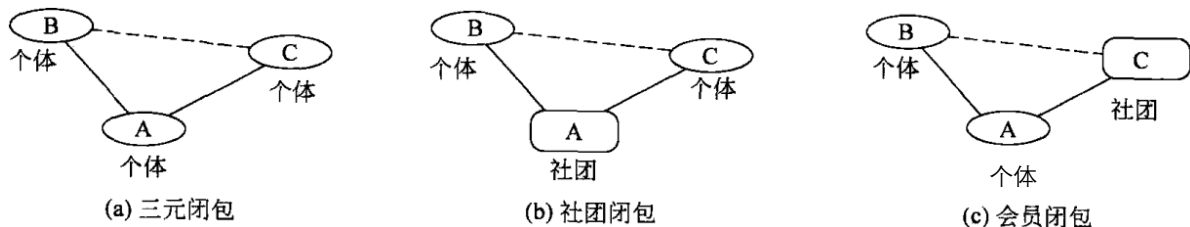


图 4.6 三种潜在机制示意图

- a) 社团闭包：2 个个体因参加同一社团而有建立连接的倾向；选择机制

- b) 会员闭包：个体 B 与个体 A 的行为取向一致；社会影响

### 3. 从在线数据看连接的形成

- 1) 社会归属网络：人、社团；人和人、人和社团的关系

- 2) 选择与社会影响共同作用

- a) 相似性 = A、B 编辑过的文章与 / 或

- b) 联系前：相似主要因为选择；达到足够相似度则容易发生联系；社会影响开始对相似性提高起作用

### 4. 隔离

- 1) 隔离：同质影响下发生的过程

- 2) 谢林模型：解释隔离现象并不一定是个人刻意选择的结果

## 第 5 章 正关系与负关系

### 1. 结构平衡

- 1) 平衡关系 & 不平衡关系

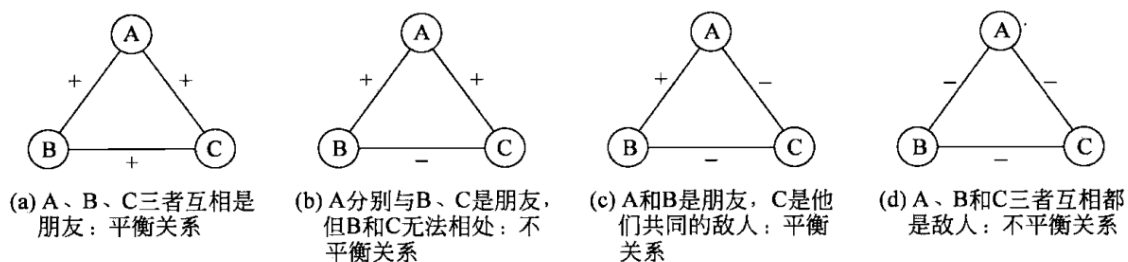
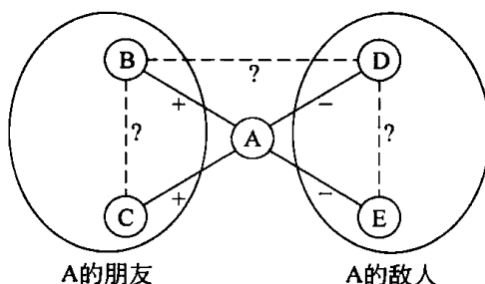


图 5.1 结构平衡：每个三角形都有一个或三个正关系的边

- 2) 结构平衡性质：每个三角形中，只有 1 个或 3 个边为“+”

- 3) 网络结构平衡：每个三角形都是平衡的，则完全图平衡

- 4) 平衡定理：完全图是平衡的，要么①所有节点两两都是“+” ②要么它的节点可以被分为两组，X和Y组内的节点两两都是“+”，组间都是“-”。
- 5) 平衡定理的证明：①证明满足划分性质的图都符合平衡定义 ②符合平衡定义的图一定满足上述性质（X内的节点都为“+”；Y内节点都为“-”；X、Y组间节点都为“-”）



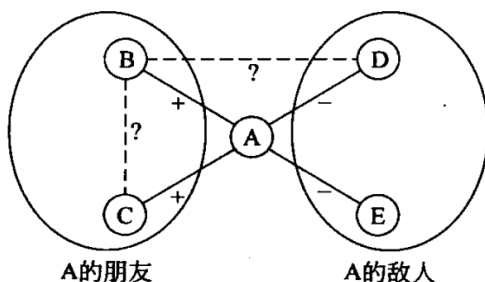
## 2. 弱平衡网络

### 1) 弱平衡网络的特性

- 完全图中，任3个节点不存在“+、+、-”
- 若一个节点是完全图，则可以分成不同的组，组内节点为“+”，组间为“-”

### 2) 弱平衡性质的证明

逐步找出一组并去除，直至分组完毕（BC一定为“+”，BD一定为“-”）



## 3. 非完全网络中的结构平衡

- 推广：允许有些边的缺失（关系不存在/不清楚）
- 结构平衡的定义：可以通过补充缺失的边（带符号），成一个平衡网络；节点可以分成两组（组内边为+，跨组为-）
- 判别方法 1：如果图中存在一个含有奇数负边的圈，则图不是平衡的（无法将其节点安排到两个敌对阵营）
- 判别方法 2：原图中有奇数个“-”的圈=超节点图中有奇数个“-”的圈  
超节点/团点：只有“+”的节点合为一个整体
- 原图中有奇数个“-”的圈=广度优先搜索结果中存在同层的边

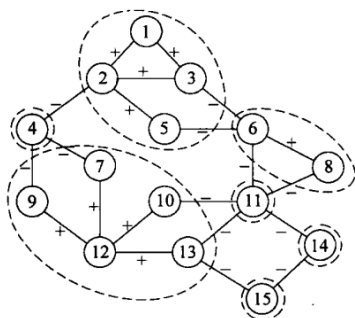


图 5.11 标注图中的超节点

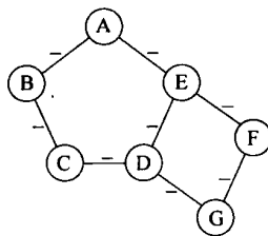


图 5.14 一个更为标准的简约图。该图可以明显看出一个负关系的圈

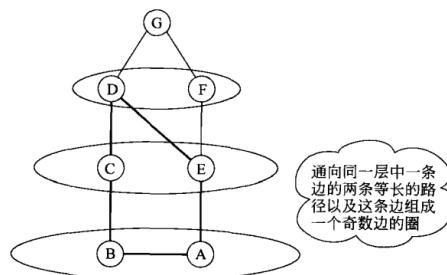


图 5.16 先宽搜索过程简化图

## 第6章 博弈

### 1. 基础概念

#### 1) 收益矩阵

		你的拍档	
		报告	考试
你	报告	90, 90	86, 92
	考试	92, 86	88, 88

图 6.1 决定复习考试还是准备  
报告的博弈示例

- 2) 博弈的基本要素：参与者（至少 2 个）、策略集、收益  $P(S, T)$
- 3) 博弈的基本假设：每个参与人对博弈结构有充分了解；参与人都是理性的（追求自己的收益最大化）；决策的独立性
- 4) 严格占优策略：对 A 来说，若存在一个策略，无论 B 选择哪个策略，该策略都是最佳选择
- 5) 囚徒困境

		嫌疑犯2	
		抵赖(NC)	坦白(C)
嫌疑犯1	抵赖(NC)	-1, -1	-10, 0
	坦白(C)	0, -10	-4, -4

图 6.2 囚徒困境

## 6) 兴奋剂博弈

		运动员2	
		没服用兴奋剂	服用兴奋剂
运动员1	没服用兴奋剂	3, 3	1, 4
	服用兴奋剂	4, 1	2, 2

图 6.3 兴奋剂博弈

## 2. 最佳应对&占优策略

### 1) “营销战略”博弈

		公司2	
		廉价	高档次
公司1	廉价	0.48, 0.12	0.60, 0.40
	高档次	0.40, 0.60	0.32, 0.80

图 6.5 营销战略

并不是每人总有严格占优策略。公司 1 有严格占优策略：廉价，公司 2 没有。

### 2) 最佳应对

甲策略  $S$ ，乙策略  $T$ ，对应  $(S, T)$ ，甲收益  $P_1(S, T)$ ，乙收益  $P_2(S, T)$ 。

$P_1(S, T) \geq P_1(S', T)$ ，则甲的策略  $S$  是乙的策略  $T$  的最佳应对。（ $S'$ ：甲除  $S$  外的任何其他策略）

### 3) 严格最佳应对（唯一）： $P_1(S, T) > P_1(S', T)$

### 4) 占优策略：该策略对于对方的每一策略都是最佳应对。

### 5) 严格占优策略：该策略对于对方的每一策略都是严格最佳应对。

## 3. 纳什均衡

### 1) 三客户博弈

		公司2		
		A	B	C
公司1	A	4, 4	0, 2	0, 2
	B	0, 0	1, 1	0, 2
	C	0, 0	0, 2	1, 1

图 6.6 三客户博弈

双方都没有严格占优策略

2) 纳什均衡:

甲选 S, 乙选 T, S 是 T 的最佳应对, T 是 S 的最佳应对, 则 (S, T) 是纳什均衡。

在均衡状态, 任何人没有动机换策略。

3) 寻找纳什均衡的 2 个途径

a) 检查每个策略组, 看是否彼此为最佳应对

b) 找出每人对另一人的最佳应对策略

4. 多重均衡: 协调博弈

1) 多重均衡: 存在多个纳什均衡

2) 协调博弈

从博弈结构本身不能预测参与者行为, 需要外部因素, 如社会习俗

		你的拍档	
		PPT	Keynote
你	PPT	1, 1	0, 0
	Keynote	0, 0	1, 1

图 6.7 协调博弈

		你的拍档	
		PPT	Keynote
你	PPT	1, 1	0, 0
	Keynote	0, 0	2, 2

图 6.8 不平衡协调博弈

		你的拍档	
		PPT	Keynote
你	PPT	1, 2	0, 0
	Keynote	0, 0	2, 1

图 6.9 性别战

3) 不对等协调

谢林的聚点理论, 参与人倾向 (2, 2)

4) 两人喜好不同

仅从博弈结构很难预测, 可通过他们的冲突时解决的惯例预测

5) 猎鹿博弈

		猎人2	
		猎鹿	猎兔
猎人1	猎鹿	4, 4	0, 3
	猎兔	3, 0	3, 3

图 6.10 猎鹿博弈

要在高收益和由另一方不合作而造成的损失间权衡

5. 多重均衡: 鹰鸽博弈

		动物2	
		D	H
动物1	D	3, 3	1, 5
	H	5, 1	0, 0

图 6.12 鹰鸽博弈

很难预测参与者的行为

纳什均衡能有助于缩小预测范围, 但不一定能给出唯一的预测

6. 简单博弈的行为推理

1) 如果两个人都有严格占优策略, 则可以预计他们均会采取严格占优策略;

2) 如果只有一个人有严格占优策略, 则这个人会采取严格占优策略, 而另一方会采取此策略的最佳应对

- 3) 无占优策略，则找纳什均衡
  - a) 存在 1 个纳什均衡：得出结果
  - b) 存在多个纳什均衡，需要额外信息辅助推断
  - c) 均衡有助于缩小范围，但不保证有效预测
- 4) 看是否存在混合策略均衡
 

利用无差异原理求出混合策略  $p$ 、 $q$ ，若  $0 < p, q < 1$ ，得到混合策略纳什均衡（最多 1 个）

## 7. 混合策略

### 1) 硬币配对

		参与人2	
		H	T
参与人1	H	-1, +1	+1, -1
	T	+1, -1	-1, +1

图 6.14 硬币配对博弈

- a) 零和博弈：总收益都为 0
  - b) 预测对方采用不同策略的概率，据此确定自己的概率
  - c) 不要让对方了解自己采用不同策略的概率
- ### 2) 混合策略
- a) 定义：考虑参与人以一定概率分布在不同策略间选择，一种分布对应一个策略；收益体现在两种纯策略上的平均（期望）
  - b) 甲的策略是概率  $p$ ：以概率  $p$  执行 H，以概率  $1-p$  执行 T  
乙的策略是概率  $q$ ：以概率  $q$  执行 H，以概率  $1-q$  执行 T

		乙	
		L( $q$ )	R( $1-q$ )
甲	U( $p$ )	4, 4	0, 3
	D( $1-p$ )	3, 0	3, 3

$$P1(p, q) = p \cdot P1(U, q) + (1-p) \cdot P1(D, q)$$

$$P2(p, q) = q \cdot P2(p, L) + (1-q) \cdot P2(p, R)$$

$$P1(U, q) = q \cdot P1(U, L) + (1-q) \cdot P1(U, R)$$

$$P1(D, q) = q \cdot P1(D, L) + (1-q) \cdot P1(D, R)$$

### c) 考虑硬币问题

甲选 H，期望收益： $(-1)(q) + (1)(1-q) = 1-2q$

甲选 T，期望收益： $(1)(q) + (-1)(1-q) = 2q-1$

### 3) 混合策略的均衡：互为最佳应对

- a) 定义：在各自概率策略的选择下，双方的收益期望互为最大。  
使对方在两个纯策略的选择上得到的回报无差异
- b) 无差异原理：设一方的混合策略概率为  $p$ ，写出另一方在两个纯策略上分别的收益期望，令他们相等，方程的解即为均衡策略。  
使对方不知道用哪个纯策略更好
- c) 甲用概率  $p$  执行 H， $1-p$  执行 T  
乙用 H： $P2(p, H) = p \cdot P2(H, H) + (1-p) \cdot P2(T, H)$   
乙用 T： $P2(p, T) = p \cdot P2(H, T) + (1-p) \cdot P2(T, T)$   
令  $P2(p, H) = P2(p, T)$ ，求得甲的均衡策略  $p$
- d) 抛球持球博弈

		防守方	
		防守抛球	拦断持球
进攻方	抛球	0, 0	10, -10
	持球	5, -5	0, 0

图 6.15 持球—抛球博弈

混合策略均衡：(1/3, 2/3)

## 8. 社会最优

社会最优的策略：使参与者回报之和最大

均衡与社会最优一致的系统是理想系统

## 9. 情景描述（参与者、策略、收益）→收益矩阵→博弈求解

# 第 7 章 进化博弈论

用博弈论语言讨论生物进化现象

## 1. 进化稳定策略

1) 大甲虫&小甲虫，收益：生物适应性

		甲虫2	
		小的	大的
甲虫1	小的	5, 5	1, 8
	大的	8, 1	3, 8

图 7.1 体态大小博弈

## 2) 进化稳定策略

- 定义：一个策略是进化稳定的，若当整个群体都采用这个策略时，其他采用不同策略的小规模全体经过多代遗传后会消亡
- 生物体的适应性：它与一个随机遇到的生物体互动得到的收益期望
- 策略 T 以  $x$  水平入侵策略 S：总体中有  $x$  占比的生物体采用策略 T， $1-x$  的占比采用策略 S，其中  $0 < x < 1$
- 存在一个小整数  $y$ ，当其他策略 T 以任何  $x < y$  水平入侵策略 S 时，采用 S 的个体适应性严格高于采用 T 的，则 S 是进化稳定的

3) 小甲虫收益： $5 \cdot (1-x) + 1 \cdot x = 5-4x$

大甲虫收益： $8 \cdot (1-x) + 3 \cdot x = 8-5x$

不存在  $y$  使  $x < y$  时，小甲虫的期望收益超过大甲虫，因此小体态不稳定

## 4) 进化博弈中的军备竞赛

- 囚徒困境：果树高矮、植物根系
- 病毒进化博弈

		病毒2	
		Φ6	ΦH2
病毒1	Φ6	1.00, 1.00	0.65, 1.99
	ΦH2	1.99, 0.65	0.83, 0.83

图 7.2 病毒博弈

Φ6 收益期望： $1 \cdot (1-x) + 0.65 \cdot x = 1-0.35x$

ΦH2 收益期望： $1.99 \cdot (1-x) + 0.65 \cdot x = 1.99-1.34x$

Φ6 不是一个进化稳定策略，ΦH2 是

## 2. 进化稳定策略的一般描述

S 收益： $a(1-x) + bx$

T 收益： $c(1-x) + dx$

若① $a > c$  或 ② $a = c, b > d$ ，则 S 进化稳定

		有机体2	
		S	T
有机体1	S	$a, a$	$b, c$
	T	$c, b$	$d, d$

图 7.3 对称博弈的通用收益矩阵

收益要求：用 S 应对 S  $\geq$  用 T 应对 S，用 S 应对 T  $>$  用 T 应对 T

### 3. 进化稳定策略&纳什均衡

- 1) 博弈  $\rightarrow$  纳什均衡；进化博弈  $\rightarrow$  进化稳定策略
- 2) (S, S) 是纳什均衡的条件： $a \geq c$
- 3) 若 S 是进化稳定的，则 (S, S) 一定是纳什均衡，反之不一定成立。

## 第 8 章 网络流量的博弈论模型

### 1. 运输网络模型

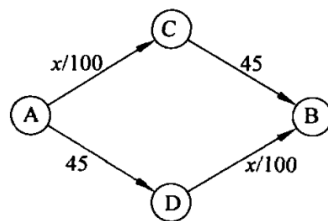


图 8.1 一个高速公路网络

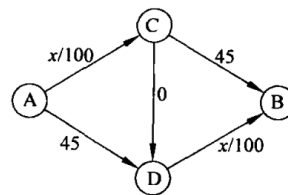


图 8.2 图 8.1 中增加一个从 C 到 D 的高速路网络

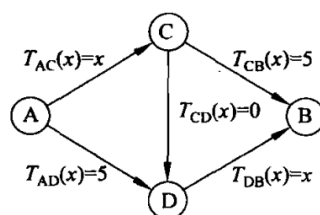
- 1) 参与人：4000 位司机；策略：走上面/走下面；回报：行驶时间的负数
- 2) 纳什均衡： $X=2000$ ，每辆车的回报是 -65，没有人想要改变策略

### 2. 布雷斯悖论

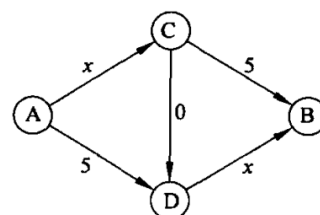
- 1) 新增一条路 CD，均衡变为：ACDB，行驶时间为 80
- 2) 布雷斯悖论：给博弈新增一个策略反而使均衡的性能更差。均衡状态下的网络流量可能不是社会最优的。

### 3. 均衡态流量的社会成本

#### 1) 基本定义

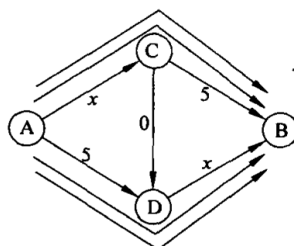


(a) 行程时间是 x 的函数

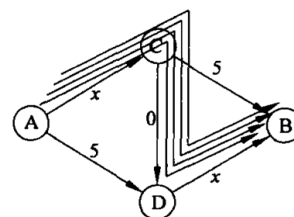


(b) 行程时间标注在每条边上

图 8.3 网络中每条边上标有行程时间函数



(a) 社会成本为 28



(b) 存在唯一的纳什均衡，社会成本为 32

图 8.4 社会最优流量模式中的布雷斯悖论

- a) 假设一条边的行程时间是交通流量的线性函数  $T_e(x) = a_e x + b_e$ ；系统总时间是  $T(e)$
- b) 一个流量模式：每个司机作出的路线选择



c) 一种流量模式的社会成本：所有司机使用这个流量模式时产生的行程时间的总和

d) 社会最优流量模式：社会成本最小的流量模式

## 2) 寻找均衡状态的流量模式

a) 最佳应对过程：若流量模式已形成均衡，则证明完成；否则选择一个司机，使其转换到一条更快的路线

b) 最佳应对过程最终将终止于一种均衡状态

c) 潜能

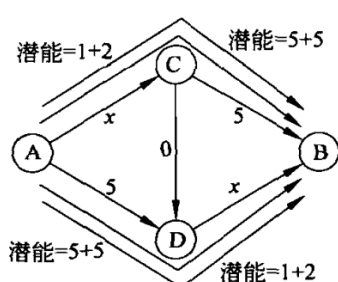
a) 一个边的潜能  $\text{Energy}(e) = T_e(1) + T_e(2) + \dots + T_e(x)$ ，其中边  $e$  上有  $x$  辆车

b) 一个流量模式的潜能：所有边的潜能总和

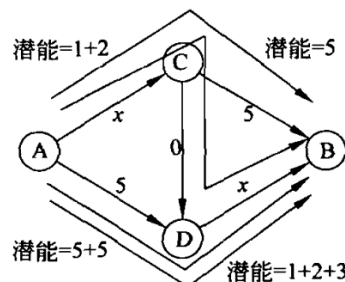
c) 每条边的潜能并不是所有车辆穿越此边的总行驶时间（总时间是  $xT_e(x)$ 。）

d) 当一个司机进入一条路线，整个系统  $\text{Energy}$  的增加值是他经过此路线所花费的时间；  
当一个司机放弃原来路线，整个系统的  $\text{Energy}$  的变化就是这个司机的行程时间变化。

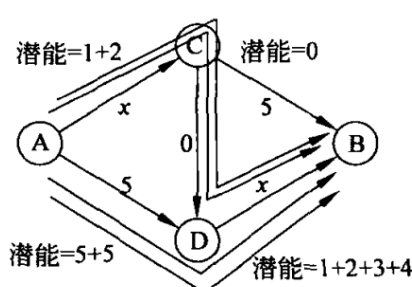
e) 系统的  $\text{Energy}$  在最佳应对中是单调递减的，存在最小值。因此整个最佳应对过程一定会终止，即纳什均衡交通模式一定存在。



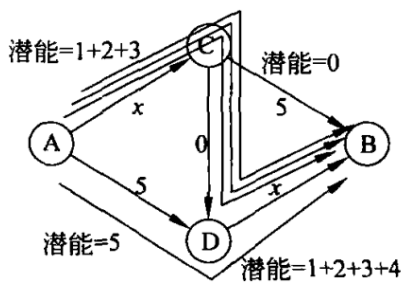
(a) 最初的流量模式(潜能为26)



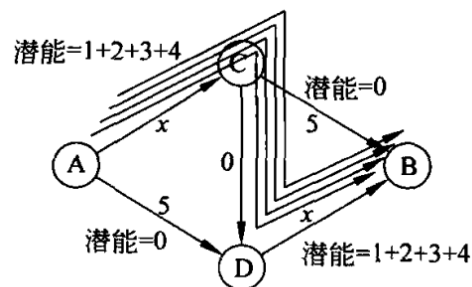
(b) 最佳应对过程1步后(潜能为24)



(c) 2步后(潜能为23)



(d) 3步后(潜能为21)



(e) 4步后达到均衡状态(潜能为20)

## 3) 均衡流量与社会最优流量对比

a) 课本给出： $\frac{1}{2} T(e) \leq \text{Energy}(e) \leq T(e)$ ， $T(e) = \text{Social-Cost}$

（根据画柱状图/不等式按  $T_e(x)$  定义展开证明）

b) 最佳应对过程中，社会成本可能增加，但潜能只可能减少；社会成本的增加限定在两倍内

c) 均衡状态的行驶时间和与社会最优的严格上界为  $4/3$ ；

d) 纯策略的纳什均衡状态稳定存在；纳什均衡状态的通信开销不会超过社会最优的 1.5 倍

# 第9章 拍卖

## 1. 将拍卖看成一种博弈

1) 参与人：参加拍卖的人

2) 策略：出价

3) 回报：对买方：对物品的估值-支付价格/0（不成交）；对卖方：得到的支付价格/0

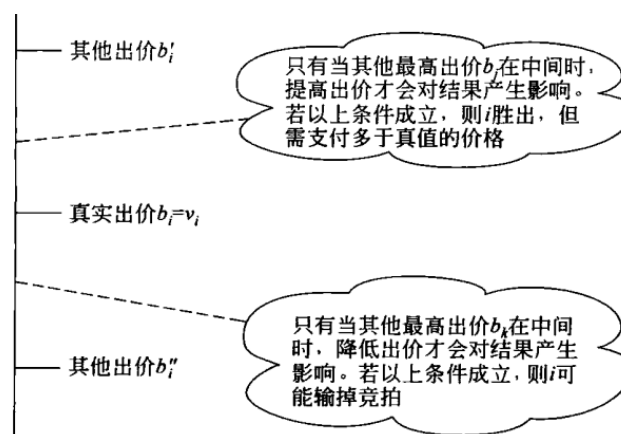
4) 假设：每个买方对被拍卖的商品都有一个固定估值

## 2. 拍卖类型

	拍卖方式	成交规则	支付价格	是否知道他人出价	应用场景
增价拍卖/英式拍卖	竞买者逐步加价，直到最后只剩一个投标人	出价最高者得到拍卖品	最高的报价	是	古董和艺术品的拍卖
降价拍卖/荷兰式拍卖	出售者从一个较高价格逐步降价，知道有人愿意购买	出价最高者得到拍卖品	最高的出价	是	农产品的交易，如鲜花
首价密封拍卖	在一个约定的时间同时公开所有投标人的报价	最高（竞买时）；最低（竞卖时）	最高或最低的报价	不	政府公共工程的建设招标
次价密封拍卖	在一个约定的时间同时公开所有投标人的报价	最高（竞买时）；最低（竞卖时）	次高或次低的报价	不	互联网门户和搜索引擎公司用于出售网页上的广告位

### 3. 次价拍卖

- 1) 买方的估价： $v_1, v_2, \dots, v_k$ ；每个人提出的竞拍价： $b_1 > b_2 > \dots > b_k$ ；
- 2) 出价最高的参与人的收益： $v_1 - b_2$
- 3) 结论：按照自己的估值出价最优。因为他不可能通过改变策略获得更大的回报，无论别人出价策略如何。



### 4. 首价拍卖

- 1) 按估值出价，回报总是为 0
- 2) 首价拍卖中，最好的出价方式是稍微降低出价。（仍能赢得交易，并获得较大回报）

## 第 10 章 匹配市场

### 1. 二部图&完美匹配

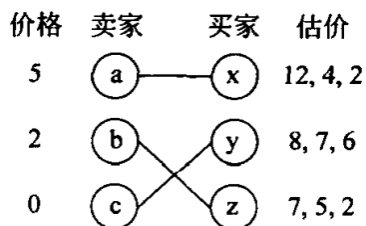
- 1) 二部图：节点被分为 2 组，每条边连接的是不同组别中的节点
- 2) 完美匹配：二部图中每个节点恰好是一条边的端点
- 3) 受限组：二部图右边的一组节点  $S$ ，所有  $S$  邻居的集合为  $N(S)$ ， $S$  比  $N(S)$  的数量大
- 4) 匹配定理：如果一个两边节点相等的二部图无法完美匹配，则一定包含一个受限组（受限组是完美匹配的唯一阻碍）
- 5) 最优分配：估价之和最高

### 2. 价格和市场清仓性质

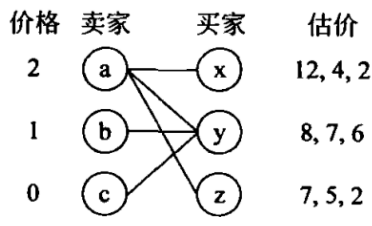
- 1) 价格和回报：
  - a) 卖家  $i$  的商品售价为  $p_i$ ，买家  $j$  对卖家  $i$  的商品估价为  $v_{ij}$ ，则买家的回报为  $v_{ij} - p_i$
  - b) 偏好卖家：能给买家提供最大化回报的一个/多个卖家

## 2) 市场清仓价格

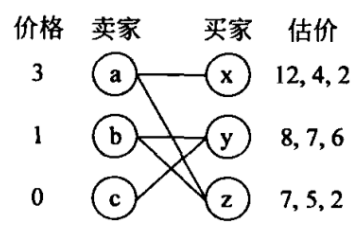
- 市场清仓价格：使偏好卖家图有完美匹配的一组价格
- 市场是高效的：总是可以通过调整价格，得到具有完美匹配的偏好卖家图
- 存在性：对任何买家估值的组合，总存在一组市场清仓价格
- 最优性：一组市场清仓价格和完美匹配，能使买家、卖家回报总和最大



(b) 市场清仓价格



(c) 不能清仓的价格

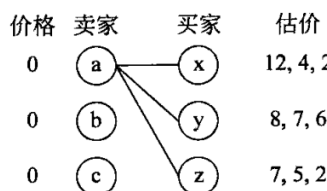


(d) 市场清仓价格(需要协调)

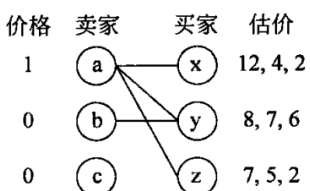
## 3. 构造一组清仓价格

### 1) 构造过程

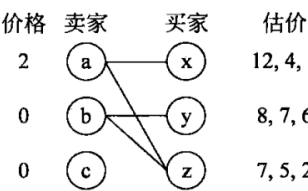
- 每轮开始，会有一组既定价格，最小值为 0
- 构造偏好卖家图，检查是否有完美匹配。如果有，过程结束，目前价格即为市场清仓价；没有，则找到一组受限买家  $S$  和邻居  $N(S)$ 。 $N(S)$  中的每个卖家同时提价 1 个单位
- 每个卖家同时减少相同数额使最低价为 0，开始下一轮拍卖



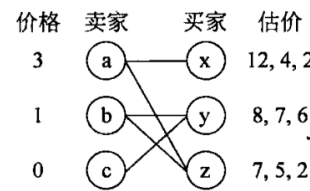
(a) 第一轮开始



(b) 第二轮开始

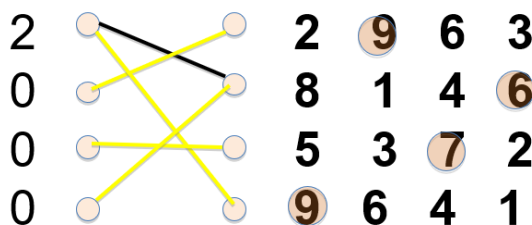


(c) 第三轮开始



(d) 第四轮开始

- 用来求其他测试：给定一个  $N \times N$  矩阵  $(A)$ ，从中选择  $N$  个不同行不同列元素， $a_{ij}$ ，使得和最大。



### 3) 证明构造一定会结束

- 买家势能：她当前获得的最大回报；卖家势能：他给出的价格。系统的势能为买家、卖家势能之和  $P_0$ ， $P_0 \geq 0$ 。
- 价格约减不改变系统势能：每个卖家的势能下降  $p$ ，但每个买家的增加  $p$ ，抵消
- $N(S)$  中每个卖家势能上升 1 个单位， $S$  中每个买家下降 1 个单位，但  $N(S) < S$ ，因此每轮势能至少下降 1 个单位
- 由①总势能  $P_0 \geq 0$  ②每轮势能至少下降 1 个单位，可得构造一定会在  $P_0$  轮内结束。

- 清仓价格不唯一，但都是社会最优

## 第 11 章 具有中介的市场网络模型

### 1. 一种交易网络模型

- 中间商：处于买卖双方之间，通过较低价收购，较高价出售，从差价中获利。中间商隔离买卖双方。
- 卖方节点  $S$ ，买方  $B$ ，中介  $T$ ，边相关的两个对象可以直接交易
- 交易规则：中间商分别给出“出价”和“要价”；买卖双方给出反馈（选择一个中间商）
- 条件

- 一旦价格公布，买方与卖方只能选一个中间商进行交易，或者不交易；但不能议价。
- 卖方只有一件物品，买方也只要一件物品。
- 中间商的定价不能造成“入不敷出”或“囤积居奇”现象

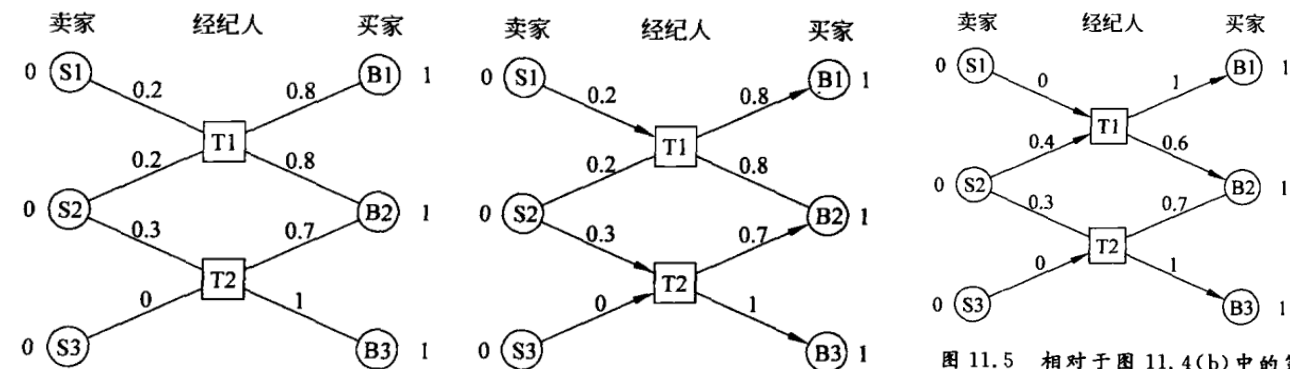


图 11.5 相对于图 11.4(b) 中的策略选择, 经纪人 T1 通过调整价格改善其回报的示意图

- 经纪人向所连接的卖家提出一个出价, 向连接的买家提出一个要价
- 随着卖家和买家选择最有利的价格, 从而形成一个商品流

5) T1 可能做的更好

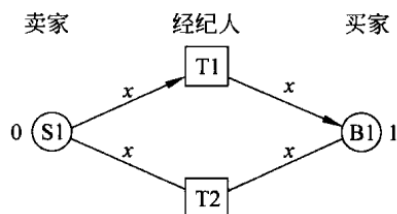
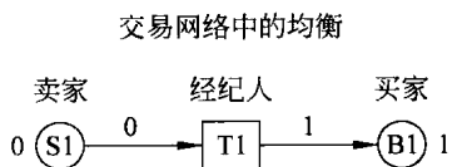
- 竞争的存在, 会促使中间商调整价格, 要在不亏损的前提下赢得生意, 争取较大回报
- 垄断的存在, 也会使中间商调价, 争取获得最大回报

## 2. 交易网络中的均衡

1) 中介交易问题→博弈

- 参与人: 卖方, 中间商, 买方; 都可能多个
- 策略: ①中间商给出价格  $b$ ,  $a$  (即策略) ②卖方, 买方在有接触的中间商中选择对自己最有利的
- 回报: ①卖方: 0 或  $b_{ti}$  ②买方: 0 或  $v_j - a_{tj}$  ③中介: 0 或  $a_{tj} - b_{ti}$

2) 垄断: 买方和卖方只能接触一个经纪人。(唯一的均衡:  $b_{ti}=0, a_{tj}=1$ )



3) 理想竞争

如果 T1 的出价和要价不相同 ( $a > b$ ), T2 就有机会切入生意, 改进自己回报为 0 的状态。 $x$  在 0-1 之间都是均衡, 在 S2 和 B2 之间, T1 和 T2 的回报都是 0。(理想竞争条件下, 中间商获利可能性为 0)

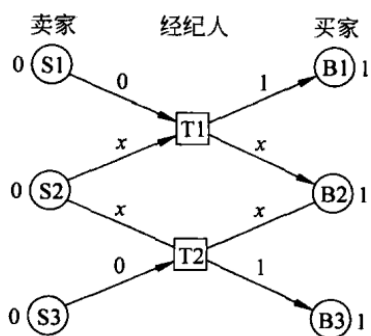


图 11.8 11.2 节中商业网络的均衡示意图, 可通过代表垄断和理想竞争的简单网络进行分析

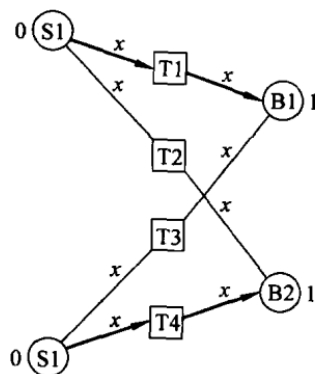


图 11.9 隐含的理想竞争: 在均衡态所有价格都相等, 尽管不存在经纪人之间的直接竞争

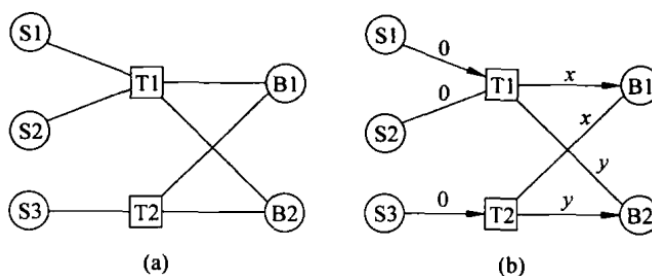
- 波及效应: T1 驱使  $y$  向 2 靠近, T2 跟; T2 压制 T1 对 S2 的报价直到  $z=2$ 。也就是说, 最终,  $y=2$ , 而  $z$  在 0 和 2 之间都有可能

#### 4. 社会福利及最优问题

- 1) 如果一件商品实现了销售，设买家估值  $v_j$ ，卖家价格  $v_i$ ，中间商给的出价和要价分别为  $b_{ti}$  和  $a_{tj}$ ，则三方的收益之和为： $(b_{ti} - v_i) + (a_{tj} - b_{ti}) + (v_j - a_{tj}) = v_j - v_i$
- 2) 社会福利：所有商品流对应的收益之和  $\sum (v_j - v_i)$ （报价因素在中间抵消了）
- 3) 每一个中间商交易网络都至少存在一个均衡，且每一个均衡所产生的商品流都达到社会最优
- 4) 较丰富的网络结构有利于社会福利的提高

#### 5. 中间商在交易中的获利问题

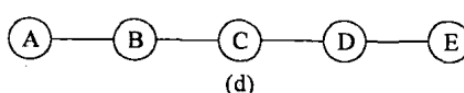
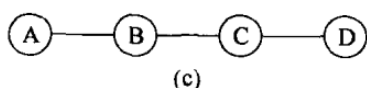
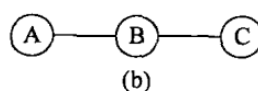
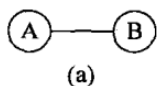
在垄断条件下，中间商的获利也可能是 0



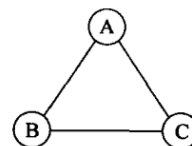
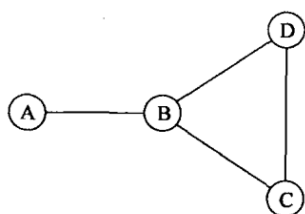
## 第 12 章 网络中的议价与权力

### 1. 网络交换实验

- 1) 通过一种有经济象征意义的操作，考察社会网络结构对权力的影响
- 2) 依赖性、排他性、饱和性、中心性、介数
- 3) 网络交换实验的结果
  - a) 2-节点：体现在关系权力上的一种完全对称性
  - b) 3-节点：在关系权力上的一种极端不平衡
  - c) 4-节点：关系权力上的一种弱不平衡
  - d) 5-节点：“中心不一定有强权”



- e) 柄图：B 具有较强、但不极端的权力
- f) 三角图：不稳定



### 2. 网络交换模型：稳定结果

- 1) 结果：给定一个图，“结果”是其中的一个匹配。每个节点在  $[0, 1]$  区间的一个赋值，满足：①如果节点  $u$  和  $v$  对应匹配中的一条边，则它们赋值之和为 1 ②如果节点  $u$  不涉及到匹配中任何边，则它的赋值为 0
- 2) 不稳定因素：不在结果中的一条边，其两端节点的价值之和小于 1（如 a 中的 C）
- 3) 稳定结果：不存在不稳定因素的结果  
a 和 c 不稳定；b, d, e 稳定

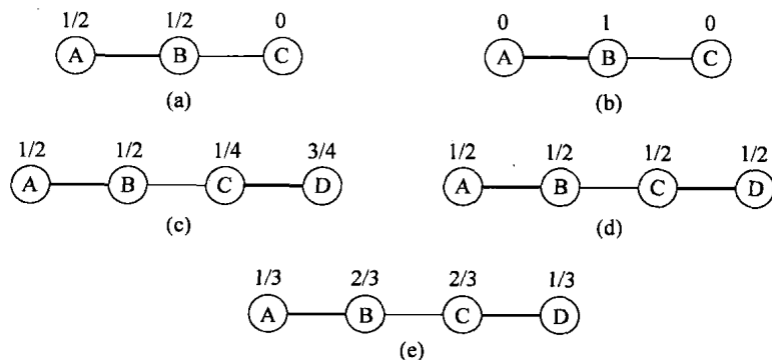
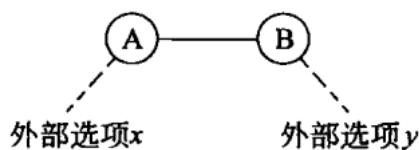


图 12.7 在 3-节点和 4-节点路径图上若干网络交换的示例,解释结果的稳定性

3. 纳什议价方案: A 和 B 分 1 元, A 有外部选项  $x$ , B 有外部选项  $y$ ,  $x+y \leq 1$ , 则纳什议价结果为
- 1)  $A = x + (1-x-y)/2 = (1+x-y)/2$
  - 2)  $B = y + (1-x-y)/2 = (1+y-x)/2$



4. 终极博弈: 安排在权力严重失衡情形下的实验对象会偏离简单理论模型的极端预测结果
5. 网络交换模型: 平衡结果
- 1) 给定一个结果, 我们可得到每一个节点的外部选项, 进而可以根据结果中节点的赋值算得匹配中每条边上的交换是否满足纳什议价解
  - 2) 平衡结果: 结果中匹配的每条边上的价值划分都满足纳什议价解
  - 3) 外部选项: 放弃当前的匹配关系后所能得到的最大好处 (网络其他部分的影响)
  - 4) 示例
    - a) B: 按照纳什议价解, 在目前的外部选项情形下, 他会希望能得到  $1/2 + 1/4 = 3/4$
    - b) C: 按照纳什议价解, 在目前的外部选项情形下, 他会希望能得到  $1/3 + 1/3 = 2/3$
    - c) A: 按照纳什议价解, 在目前的外部选项情形下, 她会希望能得到  $0 + 3/8 = 3/8$

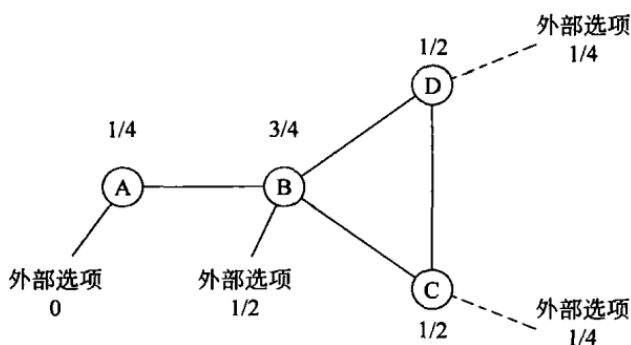
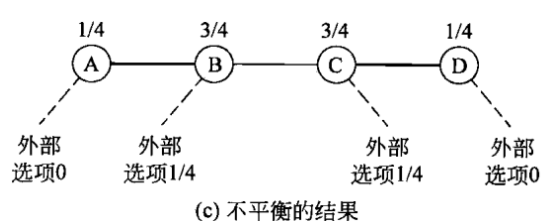
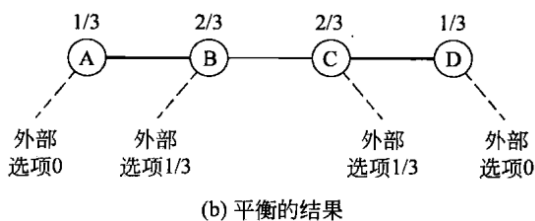
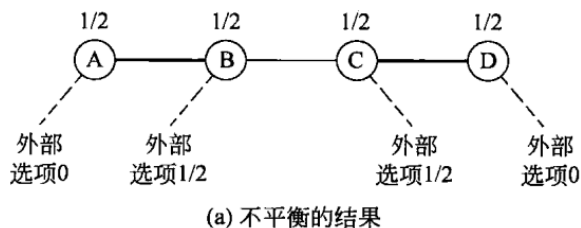


图 12.9 柄图上的一种平衡结果

## 第 13 章 万维网结构

1. 将万维网看成有向图
  - 1) 节点：网页（可能用网址标识）
  - 2) 有向边：表示从一个节点到另一个节点的直接链接关系；节点的出向边与入向边
  - 3) 有向路径：两节点之间边的方向一致的路径
  - 4) 节点 A 到 B 的距离：从 A 到 B 最短有向路径的长度（从 A 到 B 的距离不一定等于从 B 到 A 的距离）
  - 5) 强连通有向图：任何两节点之间都存在两个方向的有向路径（不一定经过相同节点）
  - 6) 强连通分量：尽可能大的节点子集，其中每个节点都有到其中任何另一节点的有向路径
2. 万维网的领结结构
  - 1) 万维网包含一个超大强连通分量 SCC
  - 2) 领结结构
    - a) 链入：能够链接到超大 SCC，但不能通过超大 SCC 链接访问的节点；“上游”
    - b) 链出：能从超大 SCC 链接访问，但不能链接到超大 SCC 的节点；“下游”
    - c) 领结：超大 SCC
    - d) 卷须：能够从链入集合链接访问但不能链接到超大 SCC 的节点；能够链接到链出集合但不能从超大 SCC 链接访问的节点
    - e) 游离：其他节点

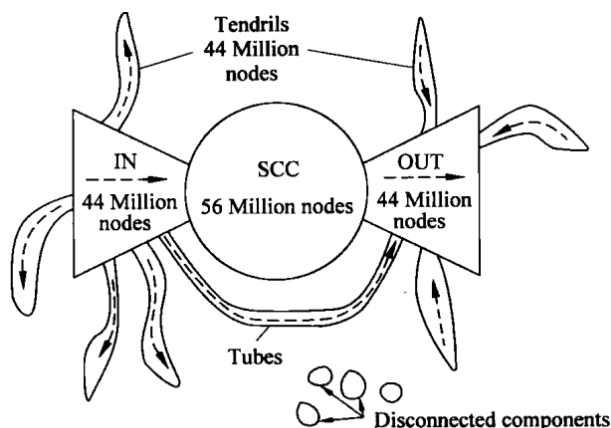


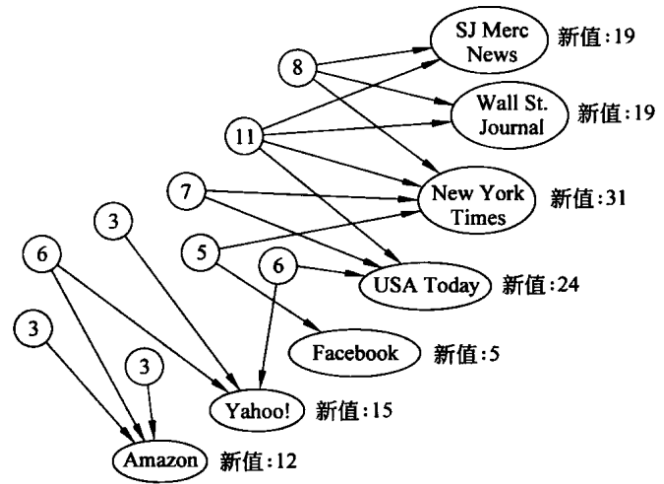
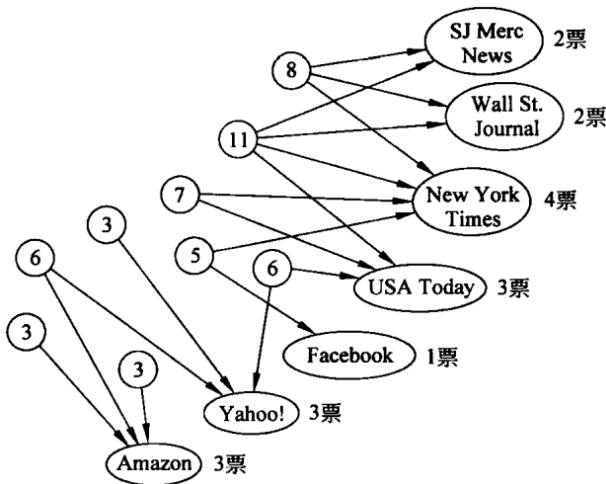
图 13.7 万维网领结结构示意图(摘自 Broder et al. [80])

3. 求强连通分量
  - 1) 给定一个节点求包含它的强连通分量：广度优先搜索
  - 2) 类比链入、链出、卷须、游离
4. 计算领结结构的方法
  - 1) 输入有向图，生成图 G 的“反向图” G'
  - 2) 选择一个在最大强连通子图中的节点 A
  - 3) 以 A 为出发节点，在图 G 中宽度优先搜索直到没有新的节点发现，得节点集合 FS
  - 4) 以 A 为出发节点，在图 G' 中宽度优先搜索直到没有新的节点发现，得节点集合 BS
  - 5) 结果：SCC=FS 和 BS 的交集，即共同元素；IN（链入）=BS-SCC；OUT（链出）=FS-SCC
  - 6) 基于 G 和 G'，FS 和 BS，进一步集合运算可得到卷须和游离

## 第 14 章 链接分析和网络搜索

1. 利用中枢和权威进行链接分析
  - 1) 有效利用链接关系蕴含的信息，是搜索引擎超越传统信息检索系统、技术进步的最重要标志
  - 2) 反复改进原理

- 左边是与“newspaper”字面上相关的网页。右边是它们所指向的网页，得到的“票数”表示一定的认可度
- 也可以反过来评估“推荐者”的分量；然后可以在考虑推荐者分量的情况下重新评估网站相对于“newspaper”的重要性（相当于加权评分）
- 这个过程可以反复进行下去



### 3) 中枢性&权威性

- 被很多网页指向：权威性高，认可度高。网页权威值  $auth(p)$
- 指向很多网页：中枢性强。网页中枢值  $hub(p)$

### 4) 中枢性&权威性计算方法：HITS 算法

- 输入：一个有向图
- 初始化：对于每一个节点  $p$ ,  $auth(p)=1$ ,  $hub(p)=1$
- 利用中枢值更新权威值：对于每一个节点  $p$ ,  $auth(p)=\sum \text{指向 } p \text{ 的所有节点 } q \text{ 的 } hub(q)$  之和
- 利用权威值更新中枢值：对于每一个节点  $p$ , 让  $hub(p)=\sum p \text{ 指向的所有节点 } q \text{ 的 } auth(q)$  之和
- 重复上述两步若干 ( $k$ ) 次

### 5) 归一化&极限

- 在每一轮结束后做归一化：值 / 总和
- 归一化结果随迭代次数趋向于一个极限，相继两次迭代的值不变则存在均衡

## 2. PageRank

### 1) PageRank 算法基本描述

- 输入：一个有  $n$  个节点的网络（有向图），设所有节点的 PageRank 初始值为  $1/n$ 。
- 选择操作的步骤数  $k$
- 对 PageRank 做  $k$  次更新操作，每次使用以下规则：①每个节点将自己当前的 PageRank 值通过出向链接均分传递给所指向的节点。若没有出向链接，则认为传递给自己（或者说保留）②每个节点以从入向链接获得的（包括可能自传的）所有值之和更新它的 PageRank。

### 2) PageRank 算法在某些结构上表现很不好。（共谋制造垃圾网页的原理）

### 3) 同比缩减&统一补偿

- 同比缩减：在每次运行基本 PageRank 更新规则后，将每一节点的 PageRank 值都乘以一个小于 1 的比例因子  $s$ ,  $0 < s < 1$ , 经验值在 0.8-0.9 之间。
- 统一补偿：在每一节点的 PageRank 值上统一加上  $(1-s)/n$ 。
- 既维持了“ $\sum PR=1$ ”的性质，也防止了 PR 值不恰当地集中到个别节点。






## 第 15 章 商业支持的搜索市场

### 1. 广告业作为匹配市场

#### 1) 构造匹配市场



- 没有一个买方购买 2 种不同商品，同一商品只能卖给一个买方
- 买方估价  $v_{ij}=r_i \cdot v_j$ （估价=点击率·每次点击收入）
- 对于同一个广告主，不同的广告位点击率不同，价值不同。不同的广告主的点击估值不同，对同一个广告位的估值不同
- 互联网公司可先算出每个广告位的价格，通过点击率转换成点击价格，向广告主收取。

点击率	广告位	广告主	点击估值	广告位估值
5			15	75 45 15
3			8	40 24 8
1			5	25 15 5

## 2) 几个基本概念

- 广告位：结果页面上可供安排广告的空间
- 点击率：广告位平均每小时的点击次数
- 广告主点击收入：从每个点击得到的平均预期收入（估值）
- 广告主对广告位的（单位时间）估值：点击率 \* 点击收入
- 广告主的回报：预期收入减去支付的价格（对广告位的估值 - 支付的价格，点击估值 - 点击价格）

## 3) 形成市场清仓价格（前提：搜索引擎知道广告主对每个广告位的估值）

## 2. GSP

### 1) 基本思路

- $n$  个广告位，按点击率  $r_1, r_2, \dots, r_n$ ，递减排列； $n$  个广告主，对每个点击有不同的出价，递减排列， $b_1, b_2, \dots, b_n$
- 沿着“次价拍卖”的自然思路：将  $r_1$  分给第一个广告主，按  $b_2$  收取点击费；将  $r_2$  分给第二个广告主，按  $b_3$  收取点击费...将  $r_n$  分给第  $n$  个广告主，收取某个门槛点击价格（可以是 0）

## 2) 若 A 的价值比 B 高，但 A 的价格也比 B 高，一个人也许会选择买 B，觉得“更加值”。即有，

$$V_A > V_B, P_A > P_B; \text{ 但, } V_B - P_B > V_A - P_A$$

## 3) 在多个商品同时拍卖的情形，次价拍卖规则（GSP）没有单品次价拍卖（鼓励真实报价）的优良性质

## 3. VCG

### 1) 让每个人支付的价格等于他的出现对其他人造成的价值损失总和。

### 2) 基本思路

- 按照出价高低，将广告位按点击率递减顺序分给广告主。（形成最优完美匹配）
- 对于广告主  $X$ ，他的支付价格如下确定：① 设在该匹配中，其他人的出价总和为  $\Sigma 1$  ② 从广告主集合中去掉  $X$ ，其他人按照出价形成新的最优匹配（对应一个新的出价总和  $\Sigma 2$ ）  
③  $\Sigma 2 - \Sigma 1$  就是  $x$  要支付的价格（VCG 价格）

### 3) 按照真实估值出价是每个竞拍者的占优策略

### 4) 社会最优：买方估值总和最大。（当大家都讲真话时）

## 第 18 章 幂律与富者更富现象

- 流行性：同一类事物的不同实例被关注、认知、或偏爱的程度
- 幂律函数

$$f(k) = \frac{a}{k^c} = a \cdot k^{-c}; \quad \log(f(k)) = \log(a) - c \cdot \log(k)$$

- 1) 判断  $f(k)$  是否是幂律：取对数，看是否为直线
- 2) 平均行为不反映典型行为
  - a) 典型行为：经常遇到的
  - b) 平均行为：总和/个数（正态分布的平均行为反映典型行为）
  - c) 幂律分布比较容易看到“个大的”
3. 富者更富模型
  - 1) 网页按照顺序创建：1, 2, 3, ..., j, ... 当创建网页 j 时，以概率 p 或 1-p 选择如下(a)或(b)执行：
    - a) 以概率 p，均匀地、随机地选择一个早先创建的网页 i，建立一个从 j 到 i 的链接
    - b) 以 1-p 的概率，均匀地、随机地选择一个早先创建的网页 i，建立一个从 j 到 i 所指向的网页的链接。
  - 2) 此模型产生幂律，其中的指数 c 取决于概率 p
4. “长尾”现象
  - 1) 一类产品各个品种的销售量（流行度）常符合幂律。（发现销量为 x 的品种的概率）
  - 2) 如果一类商品的品种流行性分布为幂律，且品种足够多，经营利基产品也能获得很大利益。（前提：降低库存成本；让顾客容易发现那些产品）
  - 3) 排行版：推动富者更富
  - 4) 搜索/相关推荐：两面性，富者更富/推动利基产品

## 第 20 章 小世界现象

1. 六度分割
  - 1) 参与者只能将信件直接发给能直呼其名的熟人，并请他继续转发。约三分之一的信件经过平均六次转发到达了目标。
  - 2) 发现
    - a) 社会网络中两节点间包含丰富的短路径
    - b) 通过“有意识的转发”能够“自动地”找到这些短路径
2. 结构与随机性
  - 1) 形成社会网络的两种基本力量
    - a) 同质性（选择，社会影响），三元闭包
    - b) 弱联系
  - 2) Watts-Strogatz 模型：
    - a) 想象大量节点排布成均匀网格状，每两点之间有一个“网格距离”。连接近邻：确定性，连接远程：随机性
    - b) 体现以上 2 种力量：存在许多“三角形”和少数随机的“远程边”
    - c) 证明了：在这样的网络中，任意两点之间存在短路径的概率很高。（弱连接的随机性使其形成闭包的概率很小）
    - d) 不足：体现弱关系的边太过于随机，不支持现实中人们会有意识向比较接近目标的朋友转发信件的行为的体现
3. 扩展的 Watts-Strogatz 网络模型
  - 1) 既反映任何节点对之间短路径的存在性，也反映这种转发方式通过短路径达到目的的可能性
  - 2) 扩展内容：
    - a) 对随机远程弱连接加以一定的控制：让两个节点之间存在连接的概率与它们的网格距离的幂次成反比关系（离得越远概率越小）。
    - b) 记  $d(v, w)$  为 v 到 w 的距离（网格步数），则产生一条从 v 到 w 的随机边的概率与  $d(v, w)^{-q}$  成正比。
    - c) 理论上可以证明，对于适当的 q，在如此形成的网络中的分散搜索有很高的效率（平均步数短）
4. 社团与距离

- 1) 两人的亲近程度（距离）与社团的规模有关，越小越近
  - 2) 社会距离：两人同属最小社团的规模。
5. 研究范式：实验现象→理论模型+完善+提炼→实际验证与推广

## 第 21 章 传染病的网络传播模型

1. 疾病传播模型基本要素：接触网络、传染概率、疾病特征
2. 流行病传播特点：随机模型
  - 1) 传播原因：传染
  - 2) 传播途径：接触关系网络结构
  - 3) 传播方式：具有随机特性总体模型（总体占比效应）/网络模型（社会关系网络）：决策模型
3. 分支过程
  - 1) 最初一个人携带病菌进入人群，以一个独立的概率  $p$  传染给遇到的每个人。假设疾病感染期间每个人遇到  $k$  个其他人
  - 2) 停止条件：某一层无人感染
  - 3) 基本再生数
    - a) 定义：由单一个体引起的新发病例数期望值，记为  $R_0$ ， $R_0=p*k$
    - b) 如果  $R_0<1$ ，则疾病将以概率 1 在有限的过程后消失。如果  $R_0>1$ ，则疾病持续在每一波以一定的概率至少感染一个人
    - c) 当阈值  $R_0=1$  附近，社会应该付出努力减小基本再生数