



Modelo matemático de sostenibilidad urbana

Luis Camilo Gómez Rodríguez

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2025

Modelo matemático de sostenibilidad urbana

Luis Camilo Gómez Rodríguez

Tesis presentada como requisito parcial para optar por el título de:
Matemático

Director(a):

Juan Carlos Galvis Arrieta
Profesor Titular - Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

- Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

Línea de investigación:
Matemáticas Aplicadas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
2025

Cita 01.

“*Soy inmenso, contengo multitudes.*”

Walt Whitman, *Canto a mí mismo* (1855)

Declaración

Me permito afirmar que he realizado ésta tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados el presente texto. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Bogotá., Fecha entrega

Luis Camilo Gómez Rodríguez

Agradecimientos

Listado de símbolos y abreviaturas

Símbolo / Abreviatura	Significado
$P(t)$	Población de la ciudad en el tiempo t
$C(t)$	Consumo de agua por persona
$U(t)$	Agua disponible para reutilización
$R(t)$	Precipitaciones promedio
K	Capacidad de carga urbana
C_0	Consumo de referencia por habitante
α	Tasa de crecimiento poblacional
β	Ritmo de ajuste del consumo de agua
γ	Eficiencia de reutilización de agua
δ	Factor de acumulación de agua por precipitaciones
ϵ	Pérdidas de agua reutilizable
ζ	Consumo total de agua ($P \cdot C$)
\dot{X}	Derivada temporal de la variable X (dX/dt)
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
SD	Dinámica de Sistemas (System Dynamics)
WSUD	Water Sensitive Urban Design
ODE Solver	Algoritmo de resolución de EDOs (ej. Runge-Kutta)

Resumen

Modelo matemático de sostenibilidad urbana

Texto del resumen.

Palabras clave: Use palabras clave que estén en Theasaurus

Abstract

Mathematical model of urban sustainability

Abstract text.

Keywords: Use keywords available in Theasaurus

Zusammenfassung

Zusammenfassung Texte.

Schlüsselwörter:

Lista de figuras

Lista de tablas

Contenido

Agradecimientos	II
Listado de símbolos y abreviaturas	III
Resumen	IV
Abstract	V
Zusammenfassung	VI
Lista de figuras	VII
Lista de tablas	VIII
Contenido	IX
1 Cómo utilizar esta plantilla?	1
1.1 Algunos comandos útiles	1
1.1.1 Insertar comentarios	1
1.1.2 Dar formato a los capítulos y secciones	2
1.2 Entornos comunes	2
1.2.1 Insertar imágenes	2
1.2.2 Insertar tablas	3
1.2.3 Insertar listados	4
1.3 Información Adicional	4
2 Estado del Arte	5
3 Objetivos	7
4 Introducción	8
5 Marco teórico	9
6 Materiales y métodos	10
7 Resultados	11

Modelo matemático de sostenibilidad urbana

8	Discusión de resultados	12
9	Conclusiones	13
10	Recomendaciones	14
A	Apéndice 1	15
	Referencias Bibliográficas	16

1 Cómo utilizar esta plantilla?

Para escribir en L^AT_EX se hace exactamente lo mismo que en cualquier procesador de texto, como Microsoft Word, solo se necesita escribir. La diferencia es, que las funcionalidades adicionales que puedan requerirse, se invocan en el código mediante unas extensiones del programa denominadas **paquetes**.

Estas extensiones se invocan en la sección inicial del documento, en nuestro caso en el archivo llamado **0000.tex**. En este archivo ya están precargadas muchas funcionalidades que dan formato y facilitan el uso de esta plantilla. Sin embargo, es posible adicionar más funciones usando el comando:

```
\usepackage[Atributos del paquete]{Nombre del paquete}
```

Cada paquete disponible para L^AT_EX dispone de información detallada de libre acceso, que puede ser consultada en CTAN, buscando en internet por el nombre del paquete.

1.1 Algunos comandos útiles

Durante la escritura se pueden requerir algunas cosas sencillas que facilitan la tarea y que pueden constituir trucos de uso:

1.1.1 Insertar comentarios

Insertar comentarios en L^AT_EX es muy sencillo, para comentar código se usa el signo de porcentaje %.

```
% Esta linea no se compila en el documento, está comentada
```

Los comentarios pueden servir para hacer anotaciones, anular segmentos de código que no se desean borrar del documento; pero que tampoco deben aparecer en el texto terminado, etc.

1.1.2 Dar formato a los capítulos y secciones

Para dar formato a los capítulos se sigue esta estructura:

```
\chapter{Nombre del Capítulo}
% Capítulo, división de primer orden en el texto
\chapter*[Nombre]
% Capítulo requerido en el texto pero que no debe aparecer en la Tabla de Contenido
\section{Nombre}
% Sección del capítulo, división de segundo orden
\section*[Nombre]
% Sección requerida en el texto pero que no debe aparecer en la Tabla de Contenido
\subsection{Nombre}
% Subsección de una sección de un capítulo, división de tercer orden
\subsubsection{Nombre}
% Subsección de una subsección, división de cuarto orden
\paragraph{Nombre}
% Puede tomarse como división de quinto orden o para resaltar información importante
```

La ventaja de L^AT_EX respecto a otros procesadores de texto como Word, es que el proceso de numeración se realiza de **forma automática** mientras se compila el documento, por lo tanto, el usuario no debe preocuparse de que se altere de forma impredecible la numeración asignada. Esto aplica a capítulos, figuras, tablas, ecuaciones, etc.

Para escribir los párrafos se escribe normalmente el texto, pero se puede generar el espaciado automático usando el comando `\par`

```
\par
% Se debe colocar antes de la primera palabra del parrafo y separada con un espacio sencillo
```

Este comando ya genera el espaciado entre los párrafos, acorde con lo establecido en el documento **0000.tex**

1.2 Entornos comunes

Para la inserción de tablas, figuras, gráficas, listados, entre otras, L^AT_EX usa un conjunto de códigos que se denominan **entornos**. Estos entornos tienen como característica básica que poseen una etiqueta de inicio y una etiqueta de cierre que suelen llevar la sintaxis: `\begin{}` ... `\end{}`.

Mientras que las imágenes y las tablas pueden ir dentro o fuera de entornos según se requiera, otros elementos como listados, cambios de orientación o de alineación, necesariamente deben tener las etiquetas de apertura o de cierre.

1.2.1 Insertar imágenes

Para insertar imágenes en el texto se tienen dos alternativas, la primera es la inserción de solo la imagen, esto se hace con el comando `\includegraphics[]{}`.

```
% Opción 1 - Inserción simple de una imagen
\includegraphics[Parámetros de la imagen]{Fuente o lugar de la imagen}
% Algunos parámetros útiles que se usan en el recuadro [Parámetros] son:
% scale=Valor entre 0 y 1, la imagen se proporciona basada en el archivo original
% \textwidth, la imagen queda con un ancho máximo igual al que tiene el texto
% Esta imagen no va a quedar registrada en el listado de figuras de la plantilla
```

Para insertar una Figura que si deba aparecer en el listado de figuras de esta plantilla se debe invocar el entorno **figure**. (`\begin{figure} ... \end{figure}`)

```
% Opción 2 - Inserción de una Figura que SI debe estar en la Tabla de Contenido
\begin{figure}[ht]
    % Usar [ht] (here, top) esto coloca la tabla en la ubicación donde se solicita
    % o en su defecto en la parte superior de la siguiente página (top)
    \centering
    \includegraphics{} % Mismo comando del caso anterior
    \caption[Título de la figura abreviado]{Título extendido de la figura}
    % El nombre abreviado de la tabla se ve en la Lista de Figuras
    % El nombre extendido de la tabla se ve en el texto del documento
    \label{fig:Etiqueta}
    % Etiqueta de la figura, permite citarla en el texto usando \ref{fig:Etiqueta}
    % La etiqueta es definida por el usuario y DEBE ser única
\end{figure}
```

Se sugiere usar la carpeta **00Figuras** para almacenar las imágenes

1.2.2 Insertar tablas

Al igual que para las imágenes, las tablas se pueden insertar solas usando el entorno **tabular**, o también insertarlas de forma que se registren en el Listado de Tablas del documento, en ese caso se usa el entorno **table** (`\begin{table} ... \end{table}`), que a su vez contiene al entorno `\begin{tabular} ... \end{tabular}`

```
% Opción 1: Insertar una tabla sencilla con tabular
\begin{tabular}{c|c} %Tabla de 2 x 2 con texto centrado
    Celda 1-1 & Celda 1-2 \\
    Celda 2-1 & Celda 2-2
\end{tabular}
% Opción 2: Insertar una Tabla que quede en la Lista de Tablas del documento
\begin{table}[ht]
    % Usar [ht] (here, top) esto coloca la tabla en la ubicación donde se solicita
    % o en su defecto en la parte superior de la siguiente página (top)
    \centering % Formato centrado
    \begin{tabular}{l|r}
        % Tabla 2 x 2 Texto a la Izquierda Columna 1, Derecha Columna 2
        & \\
        &
    \end{tabular}
    \caption[Nombre abreviado de la Tabla]{Nombre extendido de la tabla}
    % El nombre abreviado de la tabla se ve en la Lista de Tablas
```

```
% El nombre extendido de la tabla se ve en el texto del documento
\label{tab:Etiqueta}
% Etiqueta de la tabla, permite citarla en el texto usando \ref{tab:Etiqueta}
% La etiqueta es definida por el usuario y DEBE ser única
\end{table}
```

Se sugiere usar la carpeta **00Tablas** para almacenar las tablas, en especial aquellas que sean muy grandes o tengan códigos complicados.

Para generar las tablas se puede usar herramientas como Table Generator, que permiten copiar directamente desde Word o Excel.

1.2.3 Insertar listados

Una opción muy útil en cualquier texto es insertar listados, esto se hace con dos entornos. **enumerate** para listas numeradas e **itemize** para listados de categorías (sin numerar)

Una lista sin números usando el entorno `\begin{itemize} ... \end{itemize}`

```
\begin{itemize}
    \item Primer elemento de la lista
    \item Segundo elemento de la lista
\end{itemize}
```

Una lista sin números usando el entorno `\begin{enumerate} ... \end{enumerate}`

```
\begin{enumerate}
    \item Primer elemento de la lista
    \item Segundo elemento de la lista
    \item Agregar tantos elementos como se requiera
\end{enumerate}
```

1.3 Información Adicional

Si buscas conocer más información de como esta estructurado L^AT_EX se recomienda ver los siguientes recursos:

- *De Castro Korgi [2010]* - El Universo L^AT_EX- Facultad de Ciencias - Universidad Nacional de Colombia
- Estructura y Texto en L^AT_EX
- Cómo crear un documento en Overleaf

2 Estado del Arte

El uso de **sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)** para modelar ciudades sostenibles ha demostrado ser eficaz al capturar interdependencias entre población, recursos, infraestructura y calidad ambiental. La resolución de estas EDOs puede requerir del uso de *técnicas de análisis numérico*, y de optimización, permitiendo simular con precisión escenarios de evolución de sistemas urbanos complejos. Asimismo, la calibración de los parámetros del modelo se fundamenta en *algoritmos de optimización lineal y no lineal*, que ajustan las ecuaciones a los datos empíricos locales para garantizar que las trayectorias simuladas reproduzcan fielmente la dinámica observada *Nocedal & Wright* [2006]; *Boyd & Vandenberghe* [2004].

Un antecedente fundacional es el modelo **Urban Dynamics**, desarrollado por *Forrester* (1970), que representó la ciudad como un conjunto de *stocks y flujos interconectados*: población, empleo, vivienda e inversión pública. Este enfoque inauguró la tradición de modelar la ciudad como un *sistema dinámico con retroalimentaciones positivas y negativas*, capaz de explicar fases de crecimiento, madurez y declive urbano. La metodología de Urban Dynamics constituye una base sólida y justifica el uso de *variables agregadas*, la formulación de *ecuaciones diferenciales acopladas*, y el análisis de escenarios para apoyar decisiones de política urbana.

En la misma línea, un caso emblemático es el modelo **Wonderland**, ideado por *Sanderson* (1994), que emplea cuatro variables continuas (población, producción per cápita, capital natural y contaminación) para explorar futuros extremos: el “Sueño” (crecimiento sostenible indefinido) y el “Horror” (colapso ecológico y extinción). Este apelativo enfatiza la dualidad de escenarios deseables y catastróficos. Su interés radica en identificar regiones paramétricas que generan sostenibilidad o colapso y en exhibir comportamientos caóticos, lo cual refuerza los objetivos de realizar *análisis de sensibilidad*, *evaluación de estabilidad* y el uso de *software matemático para simulación* *Strogatz* [2014]; *Saltelli et al.* [2008].

En vista de la crisis climática e inminente escasez de agua en todo el mundo causado por el cambio climático, muchas ciudades e instituciones han comenzado a crear prácticas ciudadanas junto con modelos matemáticos del **ciclo urbano del agua**, estos modelos han adoptado técnicas basadas en EDOs para formular balances continuos de *infiltración, almacenamiento y drenaje pluvial*. En el marco de *Water Sensitive Urban Design (WSUD)* o “ciudades esponja”, se han aplicado ecuaciones diferenciales para representar procesos hídricos urbanos y evaluar cómo la infraestructura verde-azul contribuye a la resiliencia frente a inundaciones y al uso eficiente del recurso hídrico *Wong* [2006], también se han realizado modelos de EDOs en el marco latinoamericano diseñados por *Gutiérrez Corona* (2023) , donde se justifica la importancia de mantener suministros de agua en cantidad y calidad suficientes para garantizar sostenibilidad del agua a pesar de los diversos efectos causados por el cambio climático.

En conjunto, estos antecedentes muestran que la combinación de enfoques clásicos como **Urban Dynamics** y **Wonderland**, junto con aplicaciones sectoriales como WSUD y el uso de *técnicas de matemáticas aplicadas, análisis numérico y optimización*, conforman una base metodológica robusta para desarrollar un **modelo matemático de sostenibilidad urbana en Bogotá** *Elsawah et al.* (2017). Este proyecto se apoyará

2. Estado del Arte

en estos aportes junto con un sólido uso de EDOs, lo que permitirá articular *variables clave* (población, agua, residuos y servicios, entre otros), calibrarlas con datos locales y explorar escenarios de *sostenibilidad y colapso* en el horizonte de los próximos diez años.

3 Objetivos

4 Introducción

5 Marco teórico

6 Materiales y métodos

7 Resultados

8 Discusión de resultados

9 Conclusiones

10 Recomendaciones

A Apéndice 1

Referencias Bibliográficas

- Boyce, W. E. & DiPrima, R. C.:** , 2004; *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*; John Wiley & Sons; 8^a edición.
- Boyd, S. & Vandenberghe, L.:** , 2004; *Convex Optimization*; Cambridge University Press.
- De Castro Korgi, R.:** , 2010; *El Universo LaTeX*; Universidad Nacional de Colombia, Bogota DC; 2^a edición; ISBN 958701060-4.
- Elsawah, S.; Pierce, S. A.; Hamilton, S. H.; Van Delden, H.; Haase, D.; Elmahdi, A. & Jakeman, A. J.:** , 2017; An overview of the system dynamics process for integrated modelling of socio-ecological systems: Lessons on good modelling practice from five case studies; *Environmental Modelling & Software*; **93**: 127–145.
- Forrester, J. W.:** , 1970; Urban dynamics; *IMR; Industrial Management Review (pre-1986)*; **11** (3): 67.
- Gutiérrez Corona, J. N.:** , 2023; Modelo de suministro de agua para la región de pachuca de soto, hidalgo.
- Kincaid, D. R. & Cheney, E. W.:** , 2003; *Numerical Mathematics and Computing*; Brooks/Cole; 4^a edición.
- Nocedal, J. & Wright, S.:** , 2006; *Numerical Optimization*; Springer; 2^a edición.
- Saltelli, A.; Chan, K. & Scott, E. M.:** , 2008; *Global Sensitivity Analysis: The Primer*; Wiley.
- Sanderson, W. C.:** , 1994; Simulation models of demographic, economic, and environmental interactions; en *Population—Development—Environment: Understanding their Interactions in Mauritius*; Springer; págs. 33–71.
- Strogatz, S. H.:** , 2014; *Nonlinear Dynamics and Chaos*; Westview Press; 2^a edición.
- Wong, T. H. F.:** , 2006; An overview of water sensitive urban design practices in australia; *Water Practice & Technology*; **1** (1).