

Modelo Integrado de Sistemas Urbanos Aconplados

Contexto y Objetivo

Las ciudades son sistemas complejos con retroalimentaciones entre Población (P), Desigualdad (F), Bienestar (W), Huella Urbana (U) e Infraestructura Ecológica (E).

Objetivo: Calibrar y validar un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas P–F–W para explicar la dinámica histórica y proyectar escenarios futuros en Bogotá.

Sistema de Ecuaciones Diferenciales

Versión calibrada con U, E tratadas como variables exógenas suavizadas:

$$\dot{P} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma_F F$$

$$\dot{F} = -\alpha_F F + \beta_F W$$

$$\dot{W} = \alpha_W P + \beta_W (U + E) + \gamma_W W - \delta_W F + c_0$$

VARIABLES: P (población), F (desigualdad Gini), W (índice bienestar)

Parámetros: 10 coeficientes libres estimados por optimización

Metodología

- Datos: Series anuales 2012–2024 (DANE, SDP Bogotá)
- Preprocesamiento: Normalización z-score, suavizado polinomial (U grado 2, E grado 3)
- Función de pérdida: MSE ponderado por varianza inversa, factor 2× en F
- Optimización: Híbrida Differential Evolution (global) + L-BFGS-B (local)
- Validación: RMSE, MAE, R² por variable

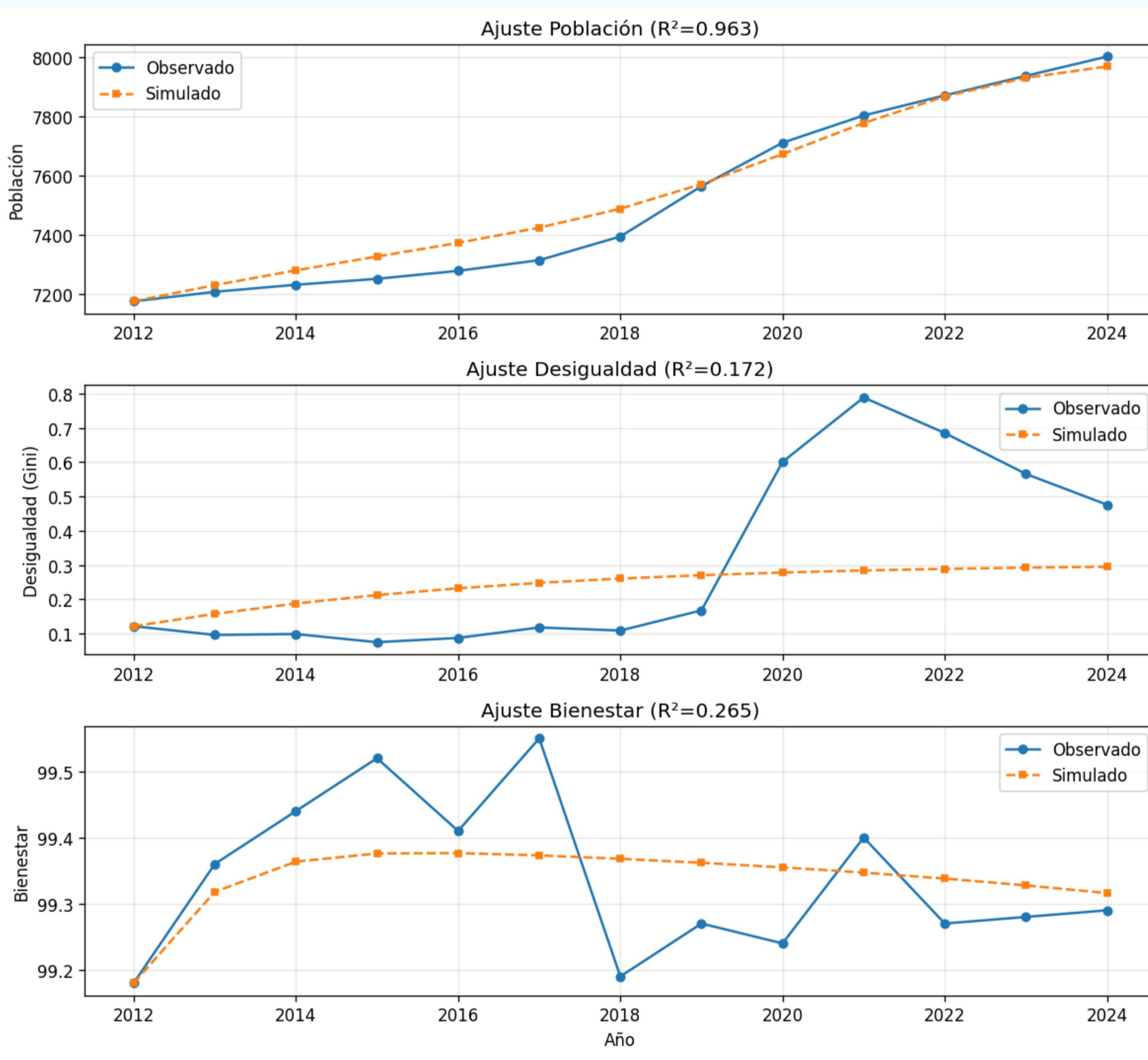
Parámetros Estimados (escala normalizada)

Parámetro	Valor	Interpretación
r	0.500	Tasa máxima crecimiento poblacional
K	1.557	Capacidad de carga (saturación)
γ_F	-1.686	Desigualdad reduce población
α_F	0.225	Relajación de desigualdad
β_F	0.010	Bienestar → Desigualdad (débil)
α_W	-0.010	Población → Bienestar (negativo leve)
β_W	-0.080	Efecto U+E en W (contraintuitivo)
γ_W	-1.000	Amortiguamiento de bienestar
δ_W	1.000	Desigualdad penaliza bienestar

Validación: Ajuste Histórico

Coefficientes de determinación R²:

P = 0.96 (excelente) | F 0.17 | W 0.27



Modelo captura bien la tendencia poblacional; desigualdad y bienestar muestran alta volatilidad intrínseca.

Análisis de Estabilidad

Jacobiano evaluado en puntos fijos:

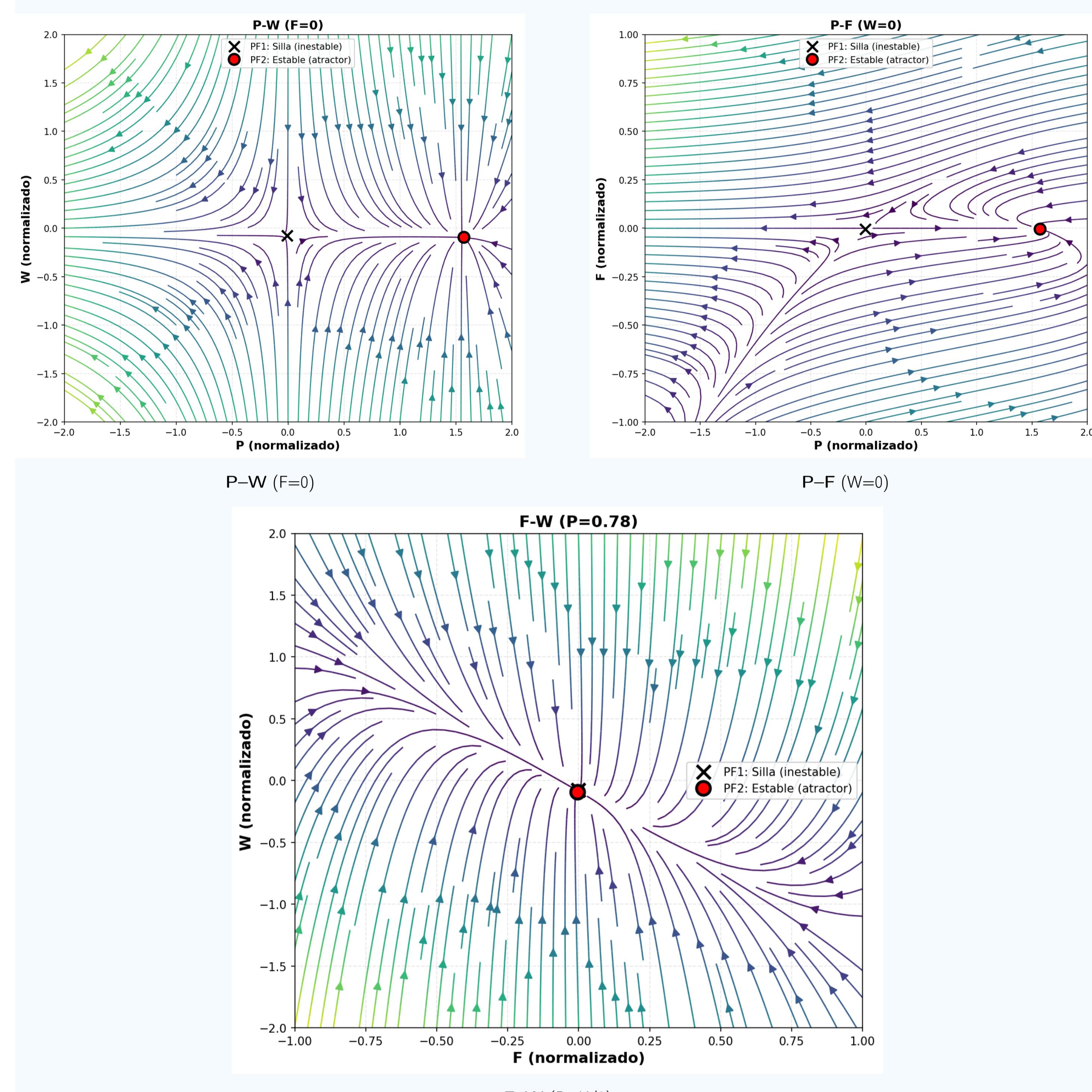
$$J = \begin{bmatrix} r(1 - 2P/K) & \gamma_F & 0 \\ 0 & -\alpha_F & \beta_F \\ \alpha_W & -\delta_W & \gamma_W \end{bmatrix}$$

Puntos fijos identificados:

- PF1 (-0.01, -0.003, -0.07): Silla (inestable)
- PF2 (1.57, -0.004, -0.09): Atractor estable

Eigenvalores de PF2: $\lambda_1 = -1.00, \lambda_2 = -1.00, \lambda_3 = -0.22$ (todos negativos → convergencia asintótica)

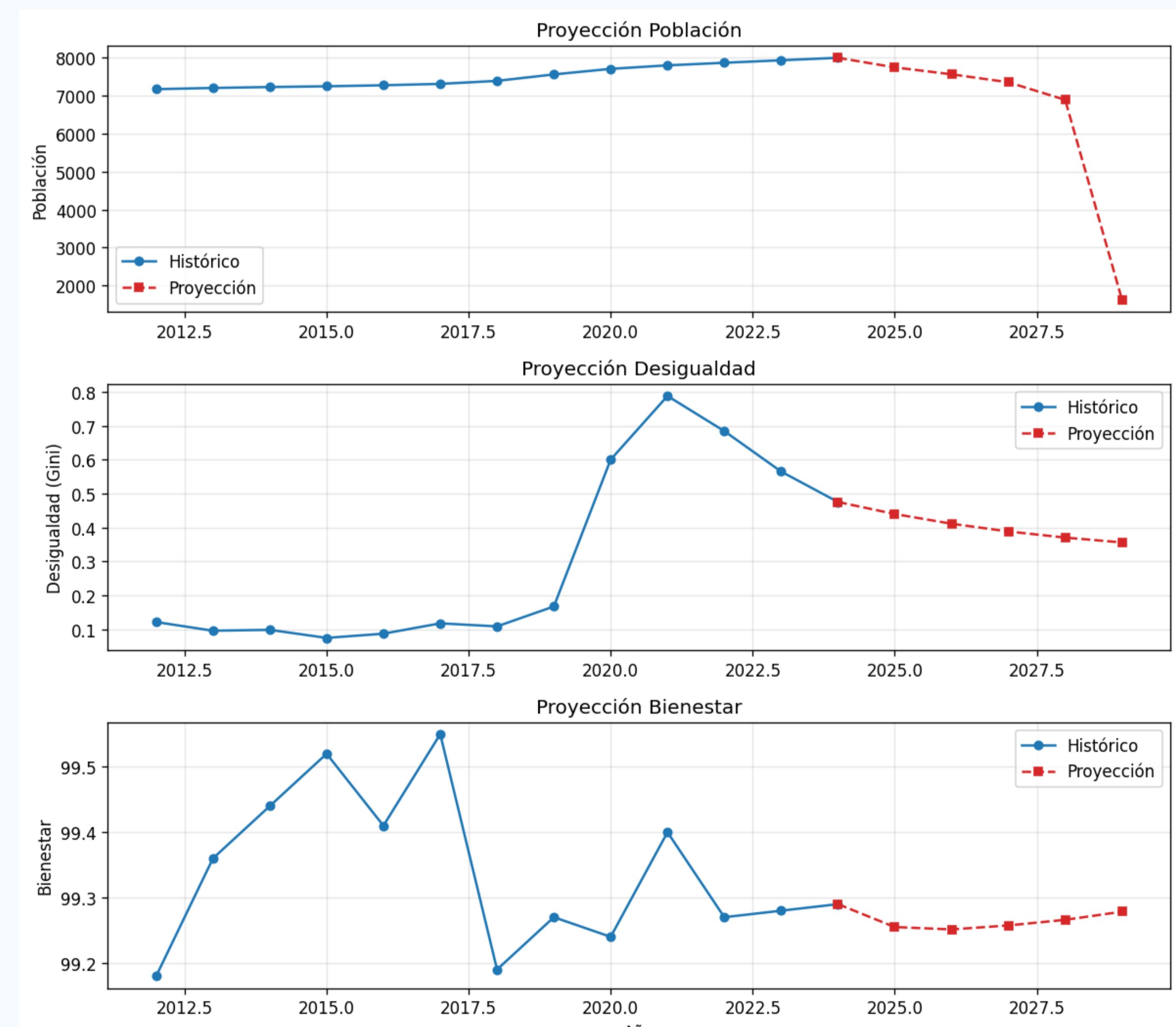
Diagramas de Fase (2D)



Flujos convergen hacia PF2 (rojo); sistema globalmente estable.

Proyección a 5 Años

Escenario: U, E constantes; condición inicial = último año histórico (2024)



Población converge a saturación (~8M hab.); desigualdad se relaja; bienestar estabiliza ligeramente bajo.

Conclusiones

- Sistema presenta **atractor único estable** → dinámica predecible a largo plazo
- Población tiende a saturación ($P \rightarrow K$) → necesidad de expandir capacidad de carga
- Desigualdad se autorreduce ($\alpha_F > 0$) pero **penaliza fuertemente bienestar** ($\delta_W = 1$)
- Palancas de política:** aumentar K (infraestructura), fortalecer W→F (β_F), reducir impacto F→W (δ_W)