

Modelo Integrado de Sistemas Urbanos Aconplados

Contexto y Objetivo

Las ciudades son sistemas complejos con retroalimentaciones entre **Población (P)**, **Desigualdad (F)**, **Bienestar (W)**, **Huella Urbana (U)** e **Infraestructura Ecológica (E)**.

Objetivo: Calibrar y validar un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas P–F–W para explicar la dinámica histórica y proyectar escenarios futuros en Bogotá.

Sistema de Ecuaciones Diferenciales

Versión calibrada con U, E tratadas como variables exógenas suavizadas:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) + \gamma_F F \\ \dot{F} &= -\alpha_F F + \beta_F W \\ \dot{W} &= \alpha_W P + \beta_W (U + E) + \gamma_W W - \delta_W F + c_0\end{aligned}$$

Variables: P (población), F (desigualdad Gini), W (índice bienestar)

Parámetros: 10 coeficientes libres estimados por optimización

Metodología

- Datos:** Series anuales 2012–2024 (DANE, SDP Bogotá)
- Preprocesamiento:** Normalización z-score, suavizado polinomial (U grado 2, E grado 3)
- Función de pérdida:** MSE ponderado por varianza inversa, factor $2\times$ en F
- Optimización:** Híbrida Differential Evolution (global) + L-BFGS-B (local)
- Validación:** RMSE, MAE, R^2 por variable

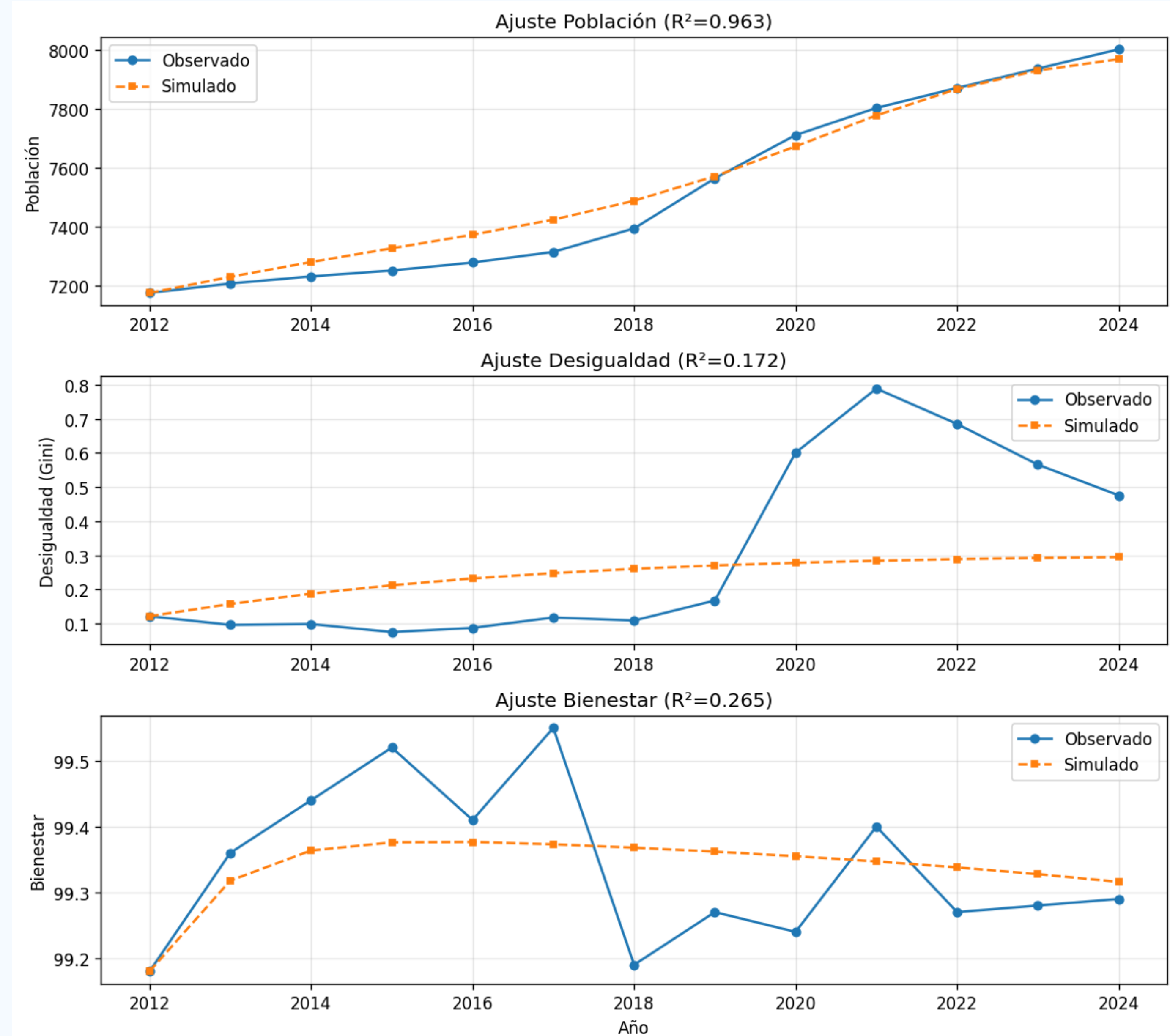
Parámetros Estimados (escala normalizada)

Parámetro	Valor	Interpretación
r	0.500	Tasa máx. crecimiento poblacional
K	1.557	Capacidad de carga (saturación)
γ_F	-1.686	Desigualdad reduce población
α_F	0.225	Relajación de desigualdad
β_F	0.010	Bienestar \rightarrow Desigualdad (débil)
α_W	-0.010	Población \rightarrow Bienestar (negativo leve)
β_W	-0.080	Efecto U+E en W (contraintuitivo)
γ_W	-1.000	Amortiguamiento de bienestar
δ_W	1.000	Desigualdad penaliza bienestar

Validación: Ajuste Histórico

Coefficientes de determinación R^2 :

P = 0.96 (excelente) | F = 0.17 | W = 0.27



Modelo captura bien la tendencia poblacional; desigualdad y bienestar muestran alta volatilidad intrínseca.

Análisis de Estabilidad

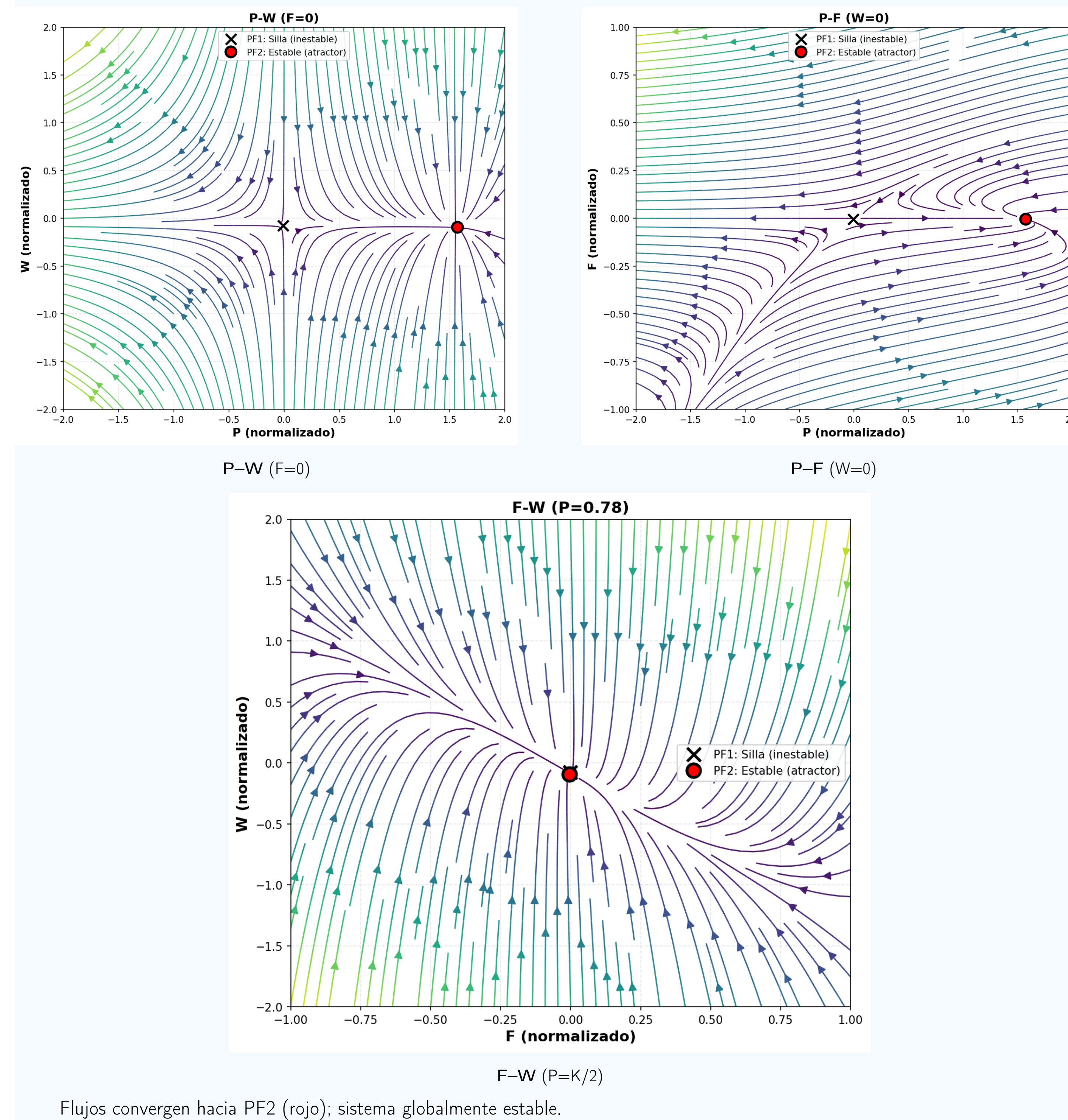
Jacobiano evaluado en puntos fijos:

$$J = \begin{bmatrix} r(1 - 2P/K) & \gamma_F & 0 \\ 0 & -\alpha_F & \beta_F \\ \alpha_W & -\delta_W & \gamma_W \end{bmatrix}$$

Puntos fijos identificados:

- PF1 (-0.01, -0.003, -0.07): Silla (inestable)
 - PF2 (1.57, -0.004, -0.09): **Atractor estable**
- Eigenvalores de PF2:** $\lambda_1 = -1.00$, $\lambda_2 = -1.00$, $\lambda_3 = -0.22$ (todos negativos \rightarrow convergencia asintótica)

Diagramas de Fase (2D)



Proyección a 5 Años

Escenario: U, E constantes; condición inicial = último año histórico (2024)



Población converge a saturación (8M hab.); desigualdad se relaja; bienestar estabiliza ligeramente bajo.

Conclusiones

- Sistema presenta **atractor único estable** \rightarrow dinámica predecible a largo plazo
- Población tiende a saturación ($P \rightarrow K$) \rightarrow necesidad de expandir capacidad de carga
- Desigualdad se autorreduce ($\alpha_F > 0$) pero **penaliza fuertemente bienestar** ($\delta_W = 1$)
- Palancas de política:** aumentar K (infraestructura), fortalecer $W \rightarrow F$ (β_F), reducir impacto $F \rightarrow W$ (δ_W)