



Modelo matemático de sostenibilidad urbana

Luis Camilo Gómez Rodríguez

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2025

Modelo matemático de sostenibilidad urbana

Luis Camilo Gómez Rodríguez

Tesis presentada como requisito parcial para optar por el título de:
Matemático

Director(a):

Juan Carlos Galvis Arrieta
Profesor Titular - Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

- Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

Línea de investigación:

Matemáticas Aplicadas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
2025

Cita 01.

“Soy inmenso, contengo multitudes.”

Walt Whitman, *Canto a mí mismo* (1855)

Agradecimientos

Listado de símbolos y abreviaturas

Símbolo / Abreviatura	Significado
$P(t)$	Población de la ciudad en el tiempo t
$C(t)$	Consumo de agua por persona
$U(t)$	Agua disponible para reutilización
$R(t)$	Precipitaciones promedio
K	Capacidad de carga urbana
C_0	Consumo de referencia por habitante
α	Tasa de crecimiento poblacional
β	Ritmo de ajuste del consumo de agua
γ	Eficiencia de reutilización de agua
δ	Factor de acumulación de agua por precipitaciones
ϵ	Pérdidas de agua reutilizable
ζ	Consumo total de agua ($P \cdot C$)
\dot{X}	Derivada temporal de la variable X (dX/dt)
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
SD	Dinámica de Sistemas (System Dynamics)
WSUD	Water Sensitive Urban Design
ODE Solver	Algoritmo de resolución de EDOs (ej. Runge-Kutta)

Resumen

Modelo matemático de sostenibilidad urbana

Este trabajo de grado propone un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) para analizar la sostenibilidad urbana de Bogotá, integrando variables clave como la población, la infraestructura urbana, los servicios públicos y los factores ecológicos que afectan la calidad ambiental y el bienestar social. Siguiendo las bases teóricas del modelo **Urban Dynamics** de Forrester (1970) y el modelo **Wonderland** de Sanderson (1994), se utiliza un enfoque de **modelado dinámico** para capturar la interacción de estos componentes y simular escenarios de evolución urbana y posibles transiciones hacia regímenes de sostenibilidad o colapso.

El modelo comienza con la representación de población, empleo, vivienda e inversión pública, tomando en cuenta las retroalimentaciones positivas y negativas en el sistema urbano. A través de ecuaciones acopladas, se simulan las dinámicas de crecimiento y declive urbano, permitiendo evaluar políticas de gestión urbana en función de los umbrales de estabilidad del sistema.

Una vez abordada la dinámica básica urbana, el modelo se enfoca en el análisis de la gestión de residuos sólidos. Se representa la acumulación de basura en los rellenos sanitarios, modelando los flujos de residuos a lo largo de su ciclo de vida, desde la generación hasta la disposición final. El modelo analiza los impactos ecológicos de los rellenos, evaluando cómo las tasas de reciclaje y disposición final afectan la calidad ambiental y la salud urbana, considerando la capacidad de los rellenos y su relación con el entorno circundante. Este análisis es clave para prever posibles colapsos ecológicos y determinar políticas eficientes para la gestión de residuos.

Finalmente, el modelo incorpora la gestión del agua como fase final del desarrollo del modelo de sostenibilidad. Basado en el enfoque de **Water Sensitive Urban Design (WSUD)**, se utilizan EDOs para simular procesos clave del ciclo urbano del agua, tales como infiltración, almacenamiento y drenaje pluvial. Este submodelo evalúa el impacto de las políticas de infraestructura verde y azul, como espacios verdes urbanos, jardines de lluvia y sistemas de recogida de agua de lluvia, en la resiliencia hídrica de la ciudad frente a inundaciones y sequías. Se exploran diferentes escenarios climáticos y de crecimiento urbano para identificar soluciones sostenibles que garanticen el uso eficiente del recurso hídrico.

El modelo se implementa en Python, utilizando herramientas de optimización numérica para calibrar los parámetros con datos locales y generar gráficos y diagramas de fase que permiten visualizar las interacciones entre las variables del sistema. A través de simulaciones de escenarios de políticas urbanas, como la gestión de residuos, la infraestructura verde y el uso eficiente del agua, se evalúan las trayectorias futuras del sistema urbano de Bogotá y su capacidad de adaptación frente a los desafíos ambientales.

Palabras clave: Use palabras clave que estén en Theasaurus

Abstract

Mathematical model of urban sustainability

This thesis proposes a mathematical model based on ordinary differential equations (ODEs) to analyze the urban sustainability of Bogotá, integrating key variables such as population, urban infrastructure, public services, and ecological factors affecting environmental quality and social well-being. Based on the theoretical foundations of Forrester's **Urban Dynamics model (1970)** and Sanderson's **Wonderland model (1994)**, a dynamic modeling approach is used to capture the interaction of these components and simulate urban evolution scenarios, including potential transitions to sustainability or collapse regimes.

The model begins by representing population, employment, housing, and public investment, accounting for positive and negative feedbacks in the urban system. Through coupled equations, it simulates growth and decline dynamics, allowing the evaluation of urban management policies based on the system's stability thresholds.

Once the basic urban dynamics are addressed, the model focuses on solid waste management. It represents the accumulation of waste in landfills, modeling waste flows from generation to final disposal. The ecological impacts of landfills are assessed, examining how recycling rates and disposal practices affect environmental quality and urban health, while considering landfill capacity and its relationship with surrounding environments. This analysis is crucial for predicting potential ecological collapse and determining efficient waste management policies.

Finally, the model integrates water management as the final phase in the urban sustainability model. Based on **Water Sensitive Urban Design (WSUD)** principles, ODEs are used to simulate key processes of the urban water cycle, such as infiltration, storage, and stormwater drainage. This submodel assesses the impact of green and blue infrastructure policies, such as urban green spaces, rain gardens, and rainwater harvesting systems, on the city's water resilience to floods and droughts. Different climatic and urban growth scenarios are explored to identify sustainable solutions that ensure efficient water use.

The model is implemented in Python, using numerical optimization tools to calibrate parameters with local data and generate graphs and phase diagrams that visualize the interactions between system variables. Through simulations of urban policy scenarios, such as waste management, green infrastructure, and water use efficiency, the model evaluates the future trajectories of Bogotá's urban system and its adaptation capacity to environmental challenges.

Keywords: Use keywords available in Theasaurus

Lista de figuras

Lista de tablas

Contenido

Agradecimientos	I
Listado de símbolos y abreviaturas	II
Resumen	III
Abstract	IV
Lista de figuras	V
Lista de tablas	VI
Contenido	VII
1 Estado del Arte	1
2 Objetivos	3
3 Introducción	4
4 Marco teórico	5
5 Modelo Matemático	6
6 Metodología y métodos de análisis	7

1 Estado del Arte

El uso de **sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)** para modelar ciudades sostenibles ha demostrado ser eficaz al capturar interdependencias entre población, recursos, infraestructura y calidad ambiental. La resolución de estas EDOs puede requerir del uso de *técnicas de análisis numérico*, y de optimización, permitiendo simular con precisión escenarios de evolución de sistemas urbanos complejos. Asimismo, la calibración de los parámetros del modelo se fundamenta en *algoritmos de optimización lineal y no lineal*, que ajustan las ecuaciones a los datos empíricos locales para garantizar que las trayectorias simuladas reproduzcan fielmente la dinámica observada ??.

Un antecedente fundacional es el modelo **Urban Dynamics**, desarrollado por ? (?), que representó la ciudad como un conjunto de *stocks y flujos interconectados*: población, empleo, vivienda e inversión pública. Este enfoque inauguró la tradición de modelar la ciudad como un *sistema dinámico con retroalimentaciones positivas y negativas*, capaz de explicar fases de crecimiento, madurez y declive urbano. La metodología de Urban Dynamics constituye una base sólida y justifica el uso de *variables agregadas*, la formulación de *ecuaciones diferenciales acopladas*, y el análisis de escenarios para apoyar decisiones de política urbana.

En la misma línea, un caso emblemático es el modelo **Wonderland**, ideado por ? (?), que emplea cuatro variables continuas (población, producción per cápita, capital natural y contaminación) para explorar futuros extremos: el “Sueño” (crecimiento sostenible indefinido) y el “Horror” (colapso ecológico y extinción). Este apelativo enfatiza la dualidad de escenarios deseables y catastróficos. Su interés radica en identificar regiones paramétricas que generan sostenibilidad o colapso y en exhibir comportamientos caóticos, lo cual refuerza los objetivos de realizar *análisis de sensibilidad*, *evaluación de estabilidad* y el uso de *software matemático para simulación* ??.

En vista de la crisis climática e inminente escasez de agua en todo el mundo causado por el cambio climático, muchas ciudades e instituciones han comenzado a crear prácticas ciudadanas junto con modelos matemáticos del **ciclo urbano del agua**, estos modelos han adoptado técnicas basadas en EDOs para formular balances continuos de *infiltración, almacenamiento y drenaje pluvial*. En el marco de *Water Sensitive Urban Design (WSUD)* o “ciudades esponja”, se han aplicado ecuaciones diferenciales para representar procesos hídricos urbanos y evaluar cómo la infraestructura verde-azul contribuye a la resiliencia frente a inundaciones y al uso eficiente del recurso hídrico ?, también se han realizado modelos de EDOs en el marco latinoamericano diseñados por ? (?) , donde se justifica la importancia de mantener suministros de agua en cantidad y calidad suficientes para garantizar sostenibilidad del agua a pesar de los diversos efectos causados por el cambio climático.

En conjunto, estos antecedentes muestran que la combinación de enfoques clásicos como **Urban Dynamics** y **Wonderland**, junto con aplicaciones sectoriales como WSUD y el uso de *técnicas de matemáticas aplicadas, análisis numérico y optimización*, conforman una base metodológica robusta para desarrollar un **modelo matemático de sostenibilidad urbana en Bogotá** ? (?). Este proyecto se apoyará en estos aportes junto con un sólido uso de EDOs, lo que permitirá articular *variables clave* (población, agua, residuos y servicios, entre otros), calibrarlas con datos locales y explorar escenarios de *sostenibilidad y colapso* en el

horizonte de los próximos diez años.

2 Objetivos

3 Introducción

4 Marco teórico

5 Modelo Matemático

6 Metodología y métodos de análisis

7 Datos y preprocesamiento

Análisis de Variables para el Modelo Matemático

A continuación, se presenta un análisis de las variables necesarias para el modelo matemático, evaluando la factibilidad de conseguir los datos.

Variable	Frecuencia de Actualización	Descripción	Fuente de Datos
Población (P)	Anual/Intercensal	Número de habitantes en Bogotá.	DANE, censos nacionales, proyecciones gubernamentales
Huella Urbana (H)	Anual o periódica	Extensión territorial ocupada por la ciudad (área construida y ocupada).	Planes de ordenamiento territorial, imágenes satelitales, mapas urbanos.
Calidad del Aire (A)	Mensual	Niveles de contaminación atmosférica (PM2.5, PM10, NOx, CO2).	Secretaría de Ambiente, estaciones de monitoreo de calidad del aire.
Estructura Ecológica (E)	Anual	Zonas verdes, áreas protegidas, corredores ecológicos.	Instituto Distrital de Medio Ambiente (IDRD), estudios ecológicos.
Infraestructura (I)	Anual	Servicios básicos (agua, electricidad, alcantarillado, transporte) y su distribución en la ciudad.	Empresas de servicios públicos, censos de infraestructura urbana.
Bienestar Social (B)	Anual	Índices de acceso a servicios básicos (salud, educación, vivienda) y calidad de vida.	Encuestas sociales, estadísticas de salud, educación y vivienda.
Consumo de Recursos (C)	Anual	Consumo de agua, energía, alimentos, entre otros.	Empresas de servicios, estudios de consumo energético.

Tabla 7-1: Análisis de Variables: Frecuencia, Descripción y Fuente de Datos