TD 03 Module ALG 3

Exercice 01 8!

1- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

$\Rightarrow \text{rg}\, A = 3$

$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice principale.

• Les equations principales :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

(x, y, z) : sont les inconnus principales

2-

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \end{vmatrix}$$

S_β compatible $\Leftrightarrow \Delta_4 = 0$ & $\beta = -3$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & \beta-10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & \beta-10 \end{vmatrix} = (\beta-10+15-30) - (-5+15+6\beta-6)$$

$$= \beta - 25 + 65 - 15 + 6\beta = 25 - 5\beta = 5(3-\beta)$$

$\Delta_4 = 0 \Leftrightarrow -5(3+\beta) = 0$

$-5 \neq 0 \Rightarrow \{\beta = -3\}$

3- Résoudre (S_β) :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5 \times \cancel{+5}}{-\cancel{5}} = -5$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = 4$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}}{-5} = 3$$

D'où l'unique solution (S_{-3}) est $(x, y, z) = (-5, 4, 3)$

4- Retrouver le même résultat par echelonnement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \\ \beta-10 \end{pmatrix}$$

TD 03 Module ALG III

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \\ \beta+10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -15 \\ \beta-15 \end{pmatrix}$$

D'ou :

$$(S_B) \iff \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ y - 3z = -5 \\ -5z = -15 \\ -6z = \beta - 15 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{z = 3}$ $\boxed{y = 4}$ $\boxed{x = -5}$

$\boxed{\beta = -3}$.

Exercice 028

1- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$ la matrice associées au système.

$\leadsto$ rg S_α :

méthode 1 :

$$\det_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & \alpha-1 \end{vmatrix}$$

$$\det_A = (7\alpha - 6 + 4) - (7 - 6 + 4\alpha)$$

$$= 7\alpha - 2 - 1 - 4\alpha$$

$$= 3\alpha - 3 = 3(\alpha - 1)$$

$\leadsto \alpha \neq 1$; rg $S_\alpha = 3 \iff \det_A \neq 0$

$\leadsto \alpha = 1 \iff$ ... rg $A \leq 2$.

$$\det_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 4 = 3$$

$\Rightarrow$ rg $A = 2$.

méthode 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

- $\alpha \neq 1 \Rightarrow$ rg $A = 3$
- $\alpha = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ rg $A = 2$.

2- Etude de l'existence & l'unicité :

$\leadsto \alpha \neq 1$; on a $\det_A \neq 0$

le système est un système de Cramer

$\Rightarrow$ il admet une seul solution

$(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$\leadsto \alpha = 1$; le système est Homogène $\Rightarrow$ il admet une infinité de solution

3- $\alpha = 1$ déterminer une base SEV :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; la matrice principale

TD 03 Module ALG 3

Equation principales :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$$

(x, y) les incon.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

une solution Homogenie

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = z \\ 2x + 7y = 2z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -2z \\ 2x + 7y = 2z \end{cases}$$

$\Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow \{ y = 0 \}$

$\Rightarrow 2x = 2z \Rightarrow \{ x = z \}$

$\{ (x, 0, x) x \in \mathbb{R}^3 \} = \{ x(1, 0, 1) ; x \in \mathbb{R} \}$

$= \langle (1, 0, 1) \rangle = \langle V_s \rangle$

V_s est une base du SEV engendré par S_1.

Exercice 03 :

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ \alpha x - 3y + z + t = 2 \\ 5x - 5y + z + 4t = b \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \alpha & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$rg(S) \leq 3$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \alpha & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-3 + 5\alpha + 5) - (15 - 5 + \alpha)$$

$= 2 + 5\alpha - 10 - \alpha$

$= 4\alpha - 8$

$= 4(\alpha - 2)$

$\leadsto \alpha \neq 2.$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \alpha & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$ est la matrice perincipale

- Les equations principale

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ \alpha x - 3y + z + t = 2 \\ 5x - 5y + z + 4t = b \end{cases}$$

- Les inconnus sont (x, y, z)
- On resout le systeme suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 - 2t \\ \alpha x - 3y + z = 2 - t \\ 5x - 5y + z = b - 4t \end{cases}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1-2t & 1 & -1 \\ 2-t & -3 & 1 \\ b-4t & -5 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta'}$$

TD 03 Module ALG 3

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2t & -1 \\ \alpha & 2-t & 1 \\ 5 & b-4t & 1 \end{vmatrix}}{\Delta'}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-2t \\ \alpha & -3 & 2-t \\ 5 & -5 & b-4t \end{vmatrix}}{\Delta'}$$

$S = \{ (x, y, z) \}$ t tq $t \in \mathbb{R}$.

$\leadsto \alpha = 2.$

$$S : \begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ 2x - 3y + z + t = 2 \\ 5x - 5y + z + 4t = b \end{cases}$$

$$rg(S) = 2.$$

Recherche du rg(S) = ?

méthode 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \alpha & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -3-\alpha & 1+\alpha & 1-2\alpha \\ 5 & -10 & 6 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & V_1 & V_2' = V_2 + V_3 & V_3' = V_3 - 2V_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -3-\alpha & -2 & 7 \\ 5 & -10 & -4 & 14 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & V_3'' = V_3 + 3{,}5\, V_2' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -3-\alpha & -2 & 0 \\ 5 & -10 & -4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_0 & V_1 & V_2' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -3-\alpha & -2 \\ 5 & -10 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_0 & V_2' & V_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & -3-\alpha \\ 5 & -4 & -10 \end{pmatrix} \end{array}$$

$V_3^m = (-3-\alpha) \ldots$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 4\alpha - 8 \end{pmatrix}$$

$$rg\, \alpha = \begin{cases} 2 & \text{si } \alpha = 2 \\ 3 & \text{si } \alpha \neq 2 \end{cases}$$

methode "2" pour rechercher le rg :

(Determinant)

$\leadsto \alpha = 2.$

Les equations principales :

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ 2x - 3y + z + t = 2. \end{cases}$$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ Matrice principales

$$\det A' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (3) = -2 \neq 0$$

Les inconnus principales sont : (y, z)

$n - r = 3 - 2 = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & b \end{vmatrix} = (b + 10 - 3) - (-5 + 2 + 3b)$$

$$= b + 7 + 3 - 3b$$

$$= 10 - 2b$$

Le Système est compatible

ssi : $10 - 2b = 0$

$\Rightarrow \boxed{b = 5}$

TD 03 Module ALG3

si $b = 5$ $\alpha = 2$ on a une infinité de Solution
si $b \neq 5$ $\alpha = 2$ on a pas de solution
→ On résout le système :

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ 2x - 3y + z + t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - z = 1 - 2t - x \\ -3y + z = 2 - t - 2x \end{cases}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1-2t-x & -1 \\ 2-t-2x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-2t-x+2-t-2x}{-2} \quad y = \frac{-3x-3t+3}{-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2t-x \\ -3 & 2-t-2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-t-2x+3-6t-3x}{-2}$$

$$z = \frac{-7t-5x+5}{-2} = \frac{7t}{2} + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$$

$$\left\{ \left(x, \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}, \frac{7t+5x-5}{2}, t\right) / x, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 04 :

1_ Une condition nécessaire :

(S) : sous formes matricielle.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4a \\ 4 \\ -2b \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4a-2 \\ 6 \\ -2b-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 2y + z = 4a - 2 \\ 3z = 6 \\ (-2-\alpha)z = -2(b+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 2y + z = 2(2a-1) \\ z = 2 \\ (2+\alpha)z = 2(b+2) \end{cases}$$

Le système est compatibles ssi :

$$(\cancel{2} + \alpha)\cancel{2} = \cancel{2}(b + \cancel{2})$$

$$\alpha = b$$

2_ Resoudre le système

$$\begin{cases} -x + y + 4 = 2 \\ \cancel{2}y + \cancel{1} = \cancel{2}(2a-1) \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 2a - \cancel{2} + 4 - 2 \Rightarrow \boxed{x = 2a}$

$\Rightarrow y = 2a - 1 - 1$

$\boxed{y = 2(a-1)}$ $\boxed{z = 2}$

La solution du Système :

$(x, y, z) = (2a, 2a-2, 2)$

TD 03 Module ALG3

Exercice 05: (Supp)

1- $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2 \\ \alpha & 2\beta-1 & 3 \\ \alpha & \beta & \beta+3 \end{pmatrix}$

$$det_A = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 2 \\ \alpha & 2\beta-1 & 3 \\ \alpha & \beta & \beta+3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & \beta & 2 \\ 1 & 2\beta-1 & 3 \\ 1 & \beta & \beta+3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} 1 & \beta & 2 \\ 0 & \beta-1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta+1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta-1 & 1 \\ 0 & \beta+1 \end{vmatrix}$$

$$det_A = \alpha(\beta^2-1) = \alpha\beta^2 - \alpha$$

2- 'A' Système de Cramer:

$det_A \neq 0$

$-\alpha + \alpha\beta^2 \neq 0 \Longrightarrow \alpha \neq 0,\ \beta \neq 1,\ \beta \neq -1$

'A' Système de Cramer SSi

$$\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq 1 \\ \beta \neq -1 \end{cases}$$

- Résoudre $(S_{\alpha\beta})$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \beta & 2 \\ 1 & 2\beta-1 & 3 \\ 1 & \beta & \beta+3 \end{vmatrix}}{det_A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \beta & 2 \\ 0 & \beta-1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta+1 \end{vmatrix}}{det_A}$$

$$x = \frac{\cancel{(\beta^2-1)}}{\alpha\cancel{(\beta^2-1)}} = \frac{1}{\alpha}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ \alpha & 1 & 3 \\ \alpha & 1 & \beta+3 \end{vmatrix}}{det_A} = \frac{\alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \beta+3 \end{vmatrix}}{\alpha(\beta^2-1)}$$

$$= \frac{\alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta+1 \end{vmatrix}}{\alpha(\beta^2-1)} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha & 2\beta-1 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix}}{det_A} = \frac{\alpha \begin{vmatrix} 1 & \beta & 1 \\ 1 & 2\beta-1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix}}{\alpha(\beta^2-1)} = 0$$

La solution de S est $(\alpha^{-1}, 0, 0)$

3- Dans le cas où il n'est pas de Cramer:

- $\alpha = 0$

i- $\beta = 1$

$$\begin{cases} y + 2z = 1 & \text{①} \\ y + 3z = 1 & \text{②} \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x, 1, 0)$ est la solution de (S)

i- $\beta = -1$

$$\begin{cases} -y + 2z = 1 \\ -3y + 3z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(x, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

ALG 3.

$\alpha \neq 0$

i- $\beta = 1$

$$\begin{cases} \alpha x + y + 2z = 1 & (1) \\ \alpha x + y + 3z = 1 & (2) \\ \alpha x + y + 4z = 1 & (3) \end{cases}$$

$(2) - (1) \Rightarrow \quad z = 0$

$y = 1 - 3z - \alpha x$

$\boxed{y = 1 - \alpha x}$

$(x, 1 - \alpha x, 0)$ est une solution,

i- $\beta = -1$

$$\begin{cases} \alpha x - y + 2z = 1 \\ \alpha x - 3y + 3z = 1 \\ \alpha x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

il admet une infinité de solution.

$$\begin{cases} \alpha x - y + 2z = 1 \\ \alpha x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$-2y + z = 0$

$z = 2y \Rightarrow$

$y = \alpha x + 2z - 1 = \alpha x + 4y - 1$

$(x, y, 2y)$