მანდელბროტის ნაკრები: ფრაქტალური სამყაროს საოცრება

შესავალი

მანდელბროტის ნაკრები (**Mandelbrot Set**) ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი და თვალწარმტაცი ფრაქტალია მათემატიკაში. მისი სტრუქტურა განისაზღვრება განმეორებითი ფუნქციის საშუალებით, რომელიც ქმნის თვითმსგავს ფიგურებს უსასრულო დეტალიზაციის დონეზე. ამ ნაკრების ვიზუალური წარმომადგენლობა არა მხოლოდ თეორიული კვლევების საფუძველია, არამედ მნიშვნელოვანი ინსპირაციაა როგორც მეცნიერებისთვის, ასევე ხელოვანებისთვის.

მანდელბროტის ნაკრების მათემატიკური საფუძვლები

მანდელბროტის ნაკრები მოიცავს იმ წერტილების სიმრავლეს კომპლექსურ სიბრტყეში, რომელთა გენერირებაც ხდება განმეორებითი განტოლებით: $\mathbf{z_{n+1} = z_n^2 + c}$ სადაც $\mathbf{z_0 = 0}$ განსაზღვრავს შემოზღუდულ თანმიმდევრობას. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეს არის **c**-ს სიმრავლე, რომლისთვისაც არსებობს რეალური **R** ისეთი, რომ უტოლობა $|\mathbf{z}| < \mathbf{R}$ აკმაყოფილებს ყველა **n**-ს. განმარტება და სახელი მიეკუთვნება ფრანგ მათემატიკოსს **ადრიენ დუადის** პატივსაცემად.

თუ მოცემული მნიშვნელობისთვის თანმიმდევრობის მნიშვნელობები რჩება შეზღუდული, მაშინ მიეკუთვნება მანდელბროტის ნაკრებს. წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ განმეორებითი პროცესი იწვევს მნიშვნელობების უსასრულობამდე ზრდას, ეს წერტილი ნაკრებს არ ეკუთვნის.

გაფართოებული განმარტება

ზემოაღნიშნული თანმიმდევრობა შეიძლება გაფართოვდეს კომპლექსური სიბრტყის თითოეული **c** წერტილისთვის შემდეგნაირად:

$\mathbf{c = x + i * y,}$

$\mathbf{z_0 = 0}$

$z_1 = z_0^2 + c = 0 + x + i * y = x + i * y$,

$z_2 = z_1^2 + c = (x + i * y)^2 + x + i * y = x^2 + 2 i x y + y^2 + x + i y = x^2 + y^2 + x + (2xy + y) i$,

$z_3 = z_2^2 + c = \ldots\ldots$

და ასე შემდეგ.

თუ ამ გამონათქვამებს გადავაფორმებთ, ანუ თუ მოხდება ჩანაცვლება **z_n**-ს - **$(x_n + i * y_n)$**-ით, ხოლო **c**-ს - **$(x_0 + i * y_0)$**-ით, ჩვენ მივიღებთ:

$$x_{n+1} = {x_n}^2 - {y_n}^2 + x_0,$$
$$y_{n+1} = 2x_n y_n + y_0.$$

ვიზუალური მახასიათებლები და ფრაქტალურობა

მანდელბროტის ნაკრების გრაფიკული წარმოდგენა გამოირჩევა განსაცვიფრებელი თვითმსგავსობით. ცენტრალური ნაწილი ფორმით კარდიოიდას ჰგავს, რომელიც უკავშირდება სხვადასხვა ზომის წრიულ ფიგურებს. ამ "**ტოტებს**" თუ შევხედავთ ახლოდან, აღმოვაჩენთ, რომ მათი სტრუქტურა მსგავსია მთლიანი ნაკრების ფორმისა, რაც ფრაქტალებისთვის დამახასიათებელი თვისებაა.

ამ ნაკრების ფართობი ზუსტად განსაზღვრული არ არის, თუმცა **2012** წელს ჩატარებული გამოთვლებით მისი სავარაუდო მნიშვნელობა შეადგენს: **$1{,}5065918849 \pm 2{,}8 \times 10^{-9}$**

ისტორია და კვლევები

მანდელბროტის ნაკრების ისტორია იწყება **1905** წლიდან, როდესაც ფრანგმა მათემატიკოსმა **პიერ ფატუმ** შეისწავლა მსგავსი ფორმების რეკურსიული პროცესები. მიუხედავად იმისა, რომ მან მოახდინა მათი ზოგადი აღწერა, კომპიუტერული გამოთვლების არარსებობის გამო, ნაკრების სრული ვიზუალიზაცია შეუძლებელი იყო.

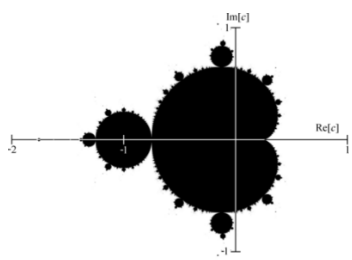
1980 წელს **ბენუა მანდელბროტმა**, რომელიც ფრაქტალების კვლევით იყო დაკავებული, კომპიუტერის გამოყენებით პირველად შეძლო ამ ნაკრების ვიზუალიზაცია. **1980**-იანი წლებიდან მოყოლებული, მანდელბროტის

ნაკრები გახდა ფრაქტალური გეომეტრიის ერთ-ერთი ყველაზე ცნობადი მაგალითი, რომელიც გამოიყენება როგორც მათემატიკურ, ასევე კომპიუტერულ მეცნიერებებში.

მანდელბროტის ნაკრების გენერაცია

ამ ნაკრების გამოსახულების შესაქმნელად გამოიყენება შემდეგი ალგორითმი:

1. ვირჩევთ კომპლექსურ სიბრტყეში წერტილს .
2. ვითვლით განმეორებით თანმიმდევრობას , სადაც $\mathbf{c = x + i * y}$ და $\mathbf{z_1 = x + i * y}$, $\mathbf{z_2 = z_2 = x^2 + y^2 + x + (2xy + y)\, i}$, $\mathbf{z_3 = z_2^2 + c = \ldots\ldots}$ და ასე შემდეგ
3. თუ ნიშანი გარკვეულ ზღვარს (მაგალითად, **2**-ს) აღემატება, მაშინ წერტილი არ მიეკუთვნება ნაკრებს.
4. წერტილები, რომლებიც ნაკრების შიგნით რჩებიან, განისაზღვრება შავი ფერით, ხოლო დანარჩენების შეფერილობა დამოკიდებულია იმაზე, რამდენ გამეორებაში მოხდა მათი გასვლა მოცემული ზღვრის მიღმა.



ფერის პარამეტრები

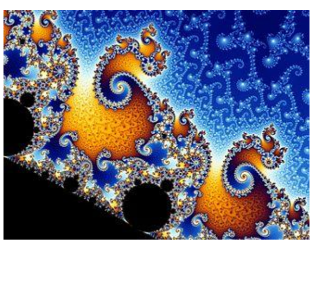
მათემატიკურად, მანდელბროტის ნაკრები **შავ-თეთრი** უნდა იყოს: წერტილი ან ეკუთვნის ნაკრებს, ან არა. თუმცა, ვიზუალური ეფექტის

გასაუმჯობესებლად, ხშირად იყენებენ ფერთა გრადიენტებს, რაც დამოკიდებულია იმ გამეორებების რაოდენობაზე, რომლების შემდეგაც წერტილი ნაკრებს ტოვებს.

პუნქტის კუთვნილების დადგენის პროცედურა z_0 კომპლექტი (**ტრადიციულად შეღებილი შავი**) ან არა (**ფერში შეღებილი "მოხსნის სიჩქარის" მიხედვით**) არის შემდეგი: **ყოველი გამეორების დროს გამოითვლება მიმდინარე მანძილი - მოდულის მნიშვნელობა** $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, რომელიც შემდეგ შედარებულია „**უსასრულობის კრიტერიუმთან**“ (ჩვეულებრივ, **2**-ის მნიშვნელობა იღება). გამოთვლების რაოდენობა შეიძლება მნიშვნელოვნად შემცირდეს კვადრატული ფესვის გაანგარიშების გამორიცხვით - არ არის საჭირო შემოწმება $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} > 2$, a $x_n^2 + y_n^2 > 4$.

ასე რომ, თუ $|z_n|^2 \geqslant 4$, ეს არის აზრი z_0 შეღებილია იმ ფერში, რომელიც ადრე იყო შერჩეული **n** - განმეორებით, რომლითაც დაკმაყოფილდა კრიტერიუმი (შეიძლება იყოს ინდექსი ფერთა ცხრილში ან გამოყენებული იყოს პარამეტრად უფრო რთულ ალგორითმში). თუ კრიტერიუმი არ არის მიღწეული მოცემული კონსტრუქციისთვის გამეორებების მაქსიმალური რაოდენობით, მაშინ წერტილი ჩაითვლება ნაკრების კუთვნილებად და მისი ფერი შავია.

ნაკრების საზღვრებთან ახლოს მდებარე წერტილები ჩვეულებრივ საჭიროებენ მეტ გამეორებას, რათა მივაღწიოთ არაწევრობის კრიტერიუმს. ამიტომ, ასეთი ტერიტორიების დამუშავებას მნიშვნელოვნად მეტი დრო სჭირდება.



დასკვნა

მანდელბროტის ნაკრები არა მხოლოდ მათემატიკური კვლევებისთვისაა მნიშვნელოვანი, არამედ იგი აღიარებულია როგორც ერთ-ერთი ყველაზე შთამბეჭდავი მაგალითი იმასთან დაკავშირებით, თუ როგორ შეიძლება მარტივი ფორმულიდან აღმოცენდეს უსასრულოდ რთული და მომხიბვლელი სტრუქტურა. მისი კვლევა დღესაც გრძელდება, რაც კიდევ ერთხელ აჩვენებს ფრაქტალური გეომეტრიის საოცარ შესაძლებლობებს როგორც თეორიაში, ასევე პრაქტიკაში.

დამატებითი ინფორმაციისათვის გთხოვთ დაგვიკავშირდეთ, ქვემოთ მითითებულ კოორდინატებზე.

ნუ დაგეზარებათ, ყოველი თქვენთაგანის აზრი ჩვენთვის მნიშვნელოვანია.

ჩვენი კოორდინატები:

ელ. ფოსტა: isheriphadze@gmail.com

მობ:, ვოცაპი: +995(555)45-92-70

პატივისცემით იმედა შერიფაძე

ინფორმაციული ტექნოლოგიებისა და პროგრამული უზრუნველყოფის დარგის სპეციალისტი, ასევე ნეირონული ქსელების დიზაინისა და თანამედროვე ცხოვრებაში მათი გამოყენების სპეციალისტი