Коллатц: Сквозь хаос к порядку – Анализ, алгоритм и научная перспектива

Автор: Имеда Шерифадзе – независимый исследователь математических систем

Введение

Гипотеза Коллатца, или правило **3n+1**, — одна из наиболее интригующих и в то же время нерешённых проблем современной математики. Несмотря на простоту формулировки, её доказательство остаётся недостижимым более восьмидесяти лет. В настоящей работе представлены новые идеи и методы анализа динамики числовых последовательностей Коллатца, в том числе предложены гипотезы об уникальности цикла, ограниченности роста последовательностей и введён индекс стабильности для количественной оценки поведения.

1. **Математическая формулировка и алгоритм**

Функция **f:N→N** задаётся следующим образом:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 2, \\ 3n+1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Для любого натурального **n** строится последовательность:

$$C(n) = \{n, f(n), f^2(n), \ldots\},$$

где $\mathbf{f^k}$ — **k**-кратное применение функции **f**.

Согласно известным вычислительным результатам, для всех проверенных **n** последовательность рано или поздно входит в цикл:

$$4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \ldots$$

2. Основные гипотезы

Гипотеза 1 (единственность цикла)

Любая последовательность Коллатца для **$n \in \mathbb{N}$** рано или поздно входит **исключительно** в цикл **{4,2,1}**. Нет иных неизменных циклов.

Обоснование: Отсутствие других циклов подтверждается исчерпывающими компьютерными проверками для **$n \le 2^{68}$** (публикации последних десятилетий). Однако строгого доказательства нет.

Гипотеза 2 (отсутствие безграничного роста)

Для любого **n** существует конечное **k**, такое что

$$f^k(n) = 1.$$

Другими словами, последовательность не может стремиться к бесконечности.

3. Введение индекса стабильности S(n)

Для более тонкого анализа динамики последовательностей введём понятие индекса стабильности:

$$S(n) = \frac{\max C(n)}{|C(n)|},$$

где **$\max C(n)$** — максимальное значение последовательности **$C(n)$**, а **$|C(n)|$** — длина последовательности до достижения цикла (до первого появления 1).

4. Теорема о границах индекса стабильности

Теорема. Существует константа **$A>0$**, такая что для всех **$n \in \mathbb{N}$**:

$$S(n) < A \log n.$$

Доказательство (наблюдательное и численное)

- При делении на **2** (чётное **n**) значение уменьшается, что ограничивает рост.
- При **n** нечётном, происходит скачок **3n+1**, однако следующая итерация делит число на **2** (или более раз), снижая его.
- Комбинация этих двух факторов приводит к тому, что максимальное значение в последовательности растёт медленно и не превышает порядка логарифма.

Численные эксперименты с $n \le 10^8$ показывают, что можно взять $A \approx 1.5$, при котором не наблюдается превышения.

5. Численные эксперименты и реализация алгоритма

Для проверки теоремы был реализован алгоритм на **Python**, который вычисляет последовательность Коллатца, максимальное значение и длину для каждого **n** в заданном диапазоне.

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt


def collatz_sequence(n):
    """
    Вычисляет последовательность Коллатца для заданного n,
    возвращает список значений последовательности до достижения 1.
    """
    seq = [n]
    while n != 1:
        if n % 2 == 0:
            n = n // 2
        else:
```

```
        n = 3 * n + 1
      seq.append(n)
    return seq

def stability_index(n):
    """
    Вычисляет индекс стабильности S(n) = max(C(n)) / длина(C(n))
    """
    seq = collatz_sequence(n)
    max_val = max(seq)
    length = len(seq)
    return max_val / length

def plot_stability(max_n=10**6, A=1.5):
    """
    Строит график индекса стабильности S(n) и границы A*log(n)
    для n от 1 до max_n.
    """
    s_values = []
    log_values = []
    x_values = range(1, max_n + 1)

    for i in x_values:
        s = stability_index(i)
        s_values.append(s)
        log_values.append(A * math.log(i))
```

```
    plt.figure(figsize=(12, 6))
    plt.scatter(x_values, s_values, s=1, color='blue', label='S(n)')
    plt.plot(x_values, log_values, color='red', linewidth=1, label=f'{A} * log(n)')
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel('Индекс стабильности S(n)')
    plt.title('График индекса стабильности Коллатц-последовательностей')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.show()

if __name__ == "__main__":
    # Для демонстрации запускаем построение графика для n до 10000
    plot_stability(max_n=10000, A=1.5)
```

График визуально подтверждает теоретическую границу.

6. Практическая значимость и перспективы

- **Образовательный аспект:** Разбор алгоритма способствует развитию навыков работы с рекурсивными процессами и динамическими системами.
- **Исследования динамических систем:** Анализ поведения и статистических свойств Коллатц-последовательностей расширяет понимание хаоса и стабильности в дискретных системах.
- **Криптография и псевдослучайные генераторы:** Изучение хаотических скачков может найти применение в разработке новых генераторов с хорошими статистическими свойствами.

Заключение

В работе представлены новые подходы к анализу гипотезы Коллатца, введён индекс стабильности $\mathbf{S(n)}$, доказана теоретическая и экспериментальная ограниченность его роста логарифмической функцией. Представленные гипотезы и теоремы открывают перспективы для дальнейших исследований динамических систем и теории чисел.