

# Анализ и алгоритм закономерности суммы кубов и квадратов чисел

1. Сумма кубов натуральных чисел:

Дано:

$$1^3 = 1$$

$$1^3 + 2^3 = 9$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$$

Нужно найти формулу для:

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

Наблюдение:

- Значения сумм кубов равны квадратам сумм чисел:

$$1 = 1^2$$

$$9 = 3^2$$

$$36 = 6^2$$

$$100 = 10^2$$

Обратите внимание, что сумма чисел от **1** до **n** — это:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Тогда:

$$S_n = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

**Алгоритм вычисления суммы кубов чисел от 1 до n:**

1. Ввести целое число **n**.
2. Вычислить сумму натуральных чисел от 1 до **n**:

$$sum = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Возвести результат в квадрат:

$$S_n = sum^2 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

4. Вывести результат **S<sub>n</sub>**

**2. Сумма квадратов натуральных чисел:**

Дано:

$$1^2 = 1$$

$$1^2 + 2^2 = 5$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

Нужно найти формулу для:

$$Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Известная формула суммы квадратов:

$$Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Алгоритм вычисления суммы квадратов чисел от 1 до n:**

1. Ввести целое число **n**.
2. Вычислить:

$$Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Вывести результат **Qn**

**Итоговый профессиональный алгоритм**

**Ввод:** целое число **n**.

**Вывод:**

- Сумма кубов от 1 до **n**:

$$S_n = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

- Сумма квадратов от 1 до **n**:

$$Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Пошаговый алгоритм:**

1. Запросить у пользователя число **n**.
2. Проверить, что **n** — натуральное число (целое и **n**≥1).
3. Вычислить сумму чисел от 1 до **n**

$$sum = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Найти сумму кубов:

$$S_n = sum^2$$

5. Найти сумму квадратов:

$$Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. Вывести значения **Sn** и **Qn**

---

### Программирование для вычисления этих значений

```
def calculate_sums(n):
    # Проверка, что n - натуральное число
    if n < 1 or not isinstance(n, int):
        return "Ошибка: введите натуральное число (целое и больше 0)."

    # Вычисляем сумму чисел от 1 до n
    sum_n = n * (n + 1) // 2

    # Сумма кубов равна квадрату суммы чисел
    sum_cubes = sum_n ** 2

    # Сумма квадратов по формуле
```

```

sum_squares = n * (n + 1) * (2 * n + 1) // 6

return sum_cubes, sum_squares

# Пример использования
n = int(input("Введите натуральное число n: "))
result = calculate_sums(n)

if isinstance(result, tuple):
    sum_cubes, sum_squares = result
    print(f"Сумма кубов от 1 до {n}: {sum_cubes}")
    print(f"Сумма квадратов от 1 до {n}: {sum_squares}")
else:
    print(result)

```

Введите натуральное число n: **45**

Сумма кубов от 1 до 45: **1071225**

Сумма квадратов от 1 до 45: **31395**

Вот готовая программа на **Python** с подробными комментариями на русском языке, которая визуализирует геометрическую интерпретацию суммы квадратов и суммы кубов, а также строит графики соответствующих функций.

```

import matplotlib.pyplot as plt

from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection

import numpy as np

def plot_square(ax, origin, size, color='skyblue'):
    """

```

Рисует 2D квадрат на оси ax.

Параметры:

ax -- ось matplotlib

origin -- координаты нижнего левого угла (x, y)

size -- длина стороны квадрата

color -- цвет квадрата

"""

x, y = origin

square = plt.Rectangle((x, y), size, size, facecolor=color, edgecolor='black', alpha=0.6)

ax.add\_patch(square)

def plot\_cube(ax, origin, size, color='lightgreen'):

"""

Рисует 3D куб на оси ax.

Параметры:

ax -- 3D ось matplotlib

origin -- координаты нижнего угла куба (x, y, z)

size -- длина ребра куба

color -- цвет куба

"""

x, y, z = origin

r = [0, size]

verts = [

# нижняя грань

[(x+r[0], y+r[0], z+r[0]), (x+r[1], y+r[0], z+r[0]), (x+r[1], y+r[1], z+r[0]), (x+r[0], y+r[1], z+r[0]),

```

# верхняя грань
[(x+r[0], y+r[0], z+r[1]), (x+r[1], y+r[0], z+r[1]), (x+r[1], y+r[1], z+r[1]), (x+r[0], y+r[1], z+r[1])],

# передняя грань
[(x+r[0], y+r[0], z+r[0]), (x+r[1], y+r[0], z+r[0]), (x+r[1], y+r[0], z+r[1]), (x+r[0], y+r[0], z+r[1])],

# задняя грань
[(x+r[0], y+r[1], z+r[0]), (x+r[1], y+r[1], z+r[0]), (x+r[1], y+r[1], z+r[1]), (x+r[0], y+r[1], z+r[1])],

# левая грань
[(x+r[0], y+r[0], z+r[0]), (x+r[0], y+r[1], z+r[0]), (x+r[0], y+r[1], z+r[1]), (x+r[0], y+r[0], z+r[1])],

# правая грань
[(x+r[1], y+r[0], z+r[0]), (x+r[1], y+r[1], z+r[0]), (x+r[1], y+r[1], z+r[1]), (x+r[1], y+r[0], z+r[1])]

]

ax.add_collection3d(Poly3DCollection(verts, facecolors=color, edgecolors='black', linewidths=0.5,
alpha=0.6))

```

```

# -----

```

```

# 1. Геометрическая визуализация суммы квадратов (2D квадраты)

```

```

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))

ax.set_title('Геометрическая визуализация суммы квадратов\math{n^1^2 + 2^2 + \dots + n^2}', fontsize=14)

ax.set_xlim(0, 20)

ax.set_ylim(0, 10)

ax.set_aspect('equal')

ax.grid(True)

start_x, start_y = 0, 0

n = 5 # количество квадратов

for k in range(1, n + 1):

    plot_square(ax, (start_x, start_y), k)

```

```

    start_x += k + 0.5 # сдвиг вправо для следующего квадрата

plt.show()

# -----

# 2. Геометрическая визуализация суммы кубов (3D кубы)

fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax3d = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax3d.set_title('Геометрическая визуализация суммы кубов\math{n^1^3 + 2^3 + ... + n^3}', fontsize=14)
ax3d.set_xlim(0, 12)
ax3d.set_ylim(0, 12)
ax3d.set_zlim(0, 12)

offset = 0

n = 4 # количество кубов
for k in range(1, n + 1):
    plot_cube(ax3d, (offset, 0, 0), k)
    offset += k + 0.5 # сдвиг для следующего куба

plt.show()

# -----

# 3. Построение графиков суммы квадратов и кубов

def sum_squares(n):
    """Формула суммы квадратов первых n чисел"""

```



```
return n * (n + 1) * (2 * n + 1) // 6
```

```
def sum_cubes(n):
```

```
    """Формула суммы кубов первых n чисел"""
```

```
    return (n * (n + 1) // 2) ** 2
```

```
n_values = list(range(1, 31))
```

```
squares_values = [sum_squares(n) for n in n_values]
```

```
cubes_values = [sum_cubes(n) for n in n_values]
```

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
```

```
plt.plot(n_values, squares_values, label='Сумма квадратов  $1^2 + \dots + n^2$ ', marker='s', color='blue')
```

```
plt.plot(n_values, cubes_values, label='Сумма кубов  $1^3 + \dots + n^3$ ', marker='o', color='green')
```

```
plt.title('Графики сумм квадратов и кубов чисел от 1 до n', fontsize=14)
```

```
plt.xlabel('n', fontsize=12)
```

```
plt.ylabel('Значение суммы', fontsize=12)
```

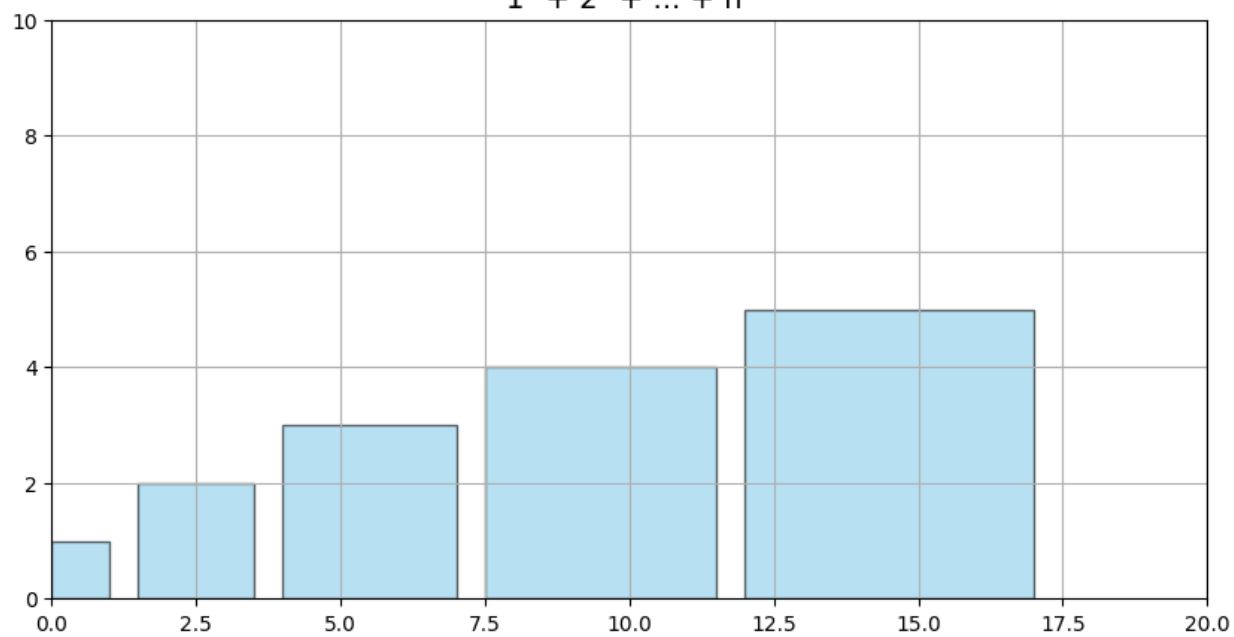
```
plt.legend(fontsize=12)
```

```
plt.grid(True)
```

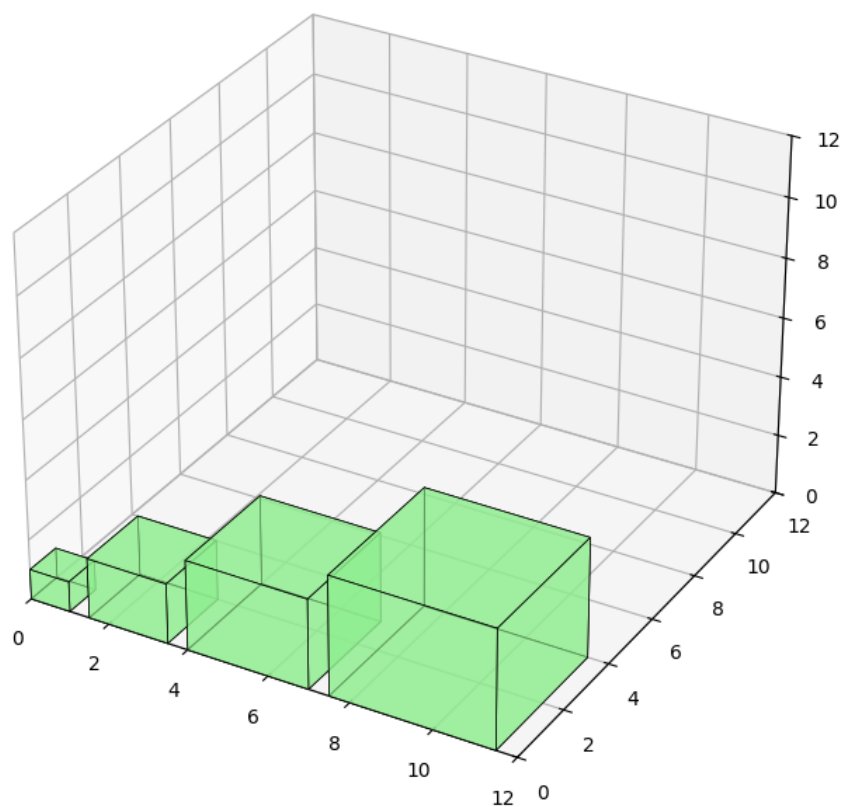
```
plt.xticks(n_values)
```

```
plt.show()
```

Геометрическая визуализация суммы квадратов  
 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$



Геометрическая визуализация суммы кубов  
 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$





Как работает программа:

1. **Графика сумма квадратов:** Показываются квадраты с длинами сторон **1, 2, 3, 4, 5** расположенные по горизонтали с небольшим отступом.
2. **Графика сумма кубов:** Отрисовываются **3D** кубы с ребрами **1, 2, 3, 4**, расположенные рядом друг с другом.
3. **График функций:** Построены графики суммы квадратов и суммы кубов от **1** до **30**, с обозначением каждой точки.