**V201**

# Wärmeleitung von Metallen


David Rolf
david.rolf@tu-dortmund.de

Jonah Blank
jonah.blank-dortmund.de


Durchführung: 14.11.2017

Abgabe: 21.11.2017

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es, die Wärmeleitfähigkeit von verschiedenen Materialien einmal nach der statischen, als auch nach der dynamischen Methode zu bestimmen.

# 2 Theorie

Befindet sich ein Körper nicht im Temperaturgleichgewicht, so kommt es nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu einem Wärmeaustausch, da die Wärmeenergie vom wärmeren Gebiet ins kältere Gebiet transportiert wird. Der Wärmetransport geschieht in diesem Versuch nur durch Wärmeleitung, also über Phononen und frei bewegliche Elektronen. Dabei wird ein eventueller Gitterbeitrag aufgrund seiner geringen Größe bei Metallen vernachlässigt.

In einem Stab mit Länge $L$, Querschnittsfläche $A$, Dichte $\rho$, spezifischer Wärmekapazität $c$ und Wärmeleitfähigkeit $\kappa$ gilt für den Fluss der Wärmemenge $\mathrm{d}Q$ pro Zeit $\mathrm{d}t$:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = A j_{\mathrm{w}} \tag{1}$$

Dabei entspricht $j_{\mathrm{w}} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ der Wärmestromdichte.

Für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung folgt mit $\frac{\partial \rho_{\mathrm{T}}}{\partial t} = -\frac{\partial j_{\mathrm{T}}}{\partial x}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sigma_{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2}$$

Wobei $\sigma_{\mathrm{T}} = \frac{\kappa}{\rho c}$ die Temperaturleitfähigkeit darstellt.

Wird der Stab periodisch erhitzt, so breitet sich eine Temperaturwelle der Form

$$T(x,t) = T_{\mathrm{max}} e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}}x} cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}}x\right) \tag{3}$$

in dem Stab aus. Diese besitzt die Phasengeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}} \tag{4}$$

Für die Wärmeleitfähigkeit gilt entsprechend mit den Amplituden $A_{\mathrm{nah}}$ und $A_{\mathrm{fern}}$, sowie dem Abstand $\Delta x$ und der Temperaturdifferenz $\Delta t$ zwischen zwei Messstellen:

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t ln(A_{\mathrm{nah}}/A_{\mathrm{fern}})} \tag{5}$$

# 3 Aufbau

Die vier Probestäbe sind mit einem Peltierelement verbunden, welches die Stäbe bei Betrieb auf einer Seite erhitzt beziehungsweise kühlt. Die Temperaturen werden durch Thermoelemente an den gekennzeichneten Stellen abgegriffen. Über ein Temperatur Array werden die Informationen an einen Xplorer GLX weitergegeben. Mit dem Schalter kann das Peltierelement auf heizen oder kühlen gestellt werden.

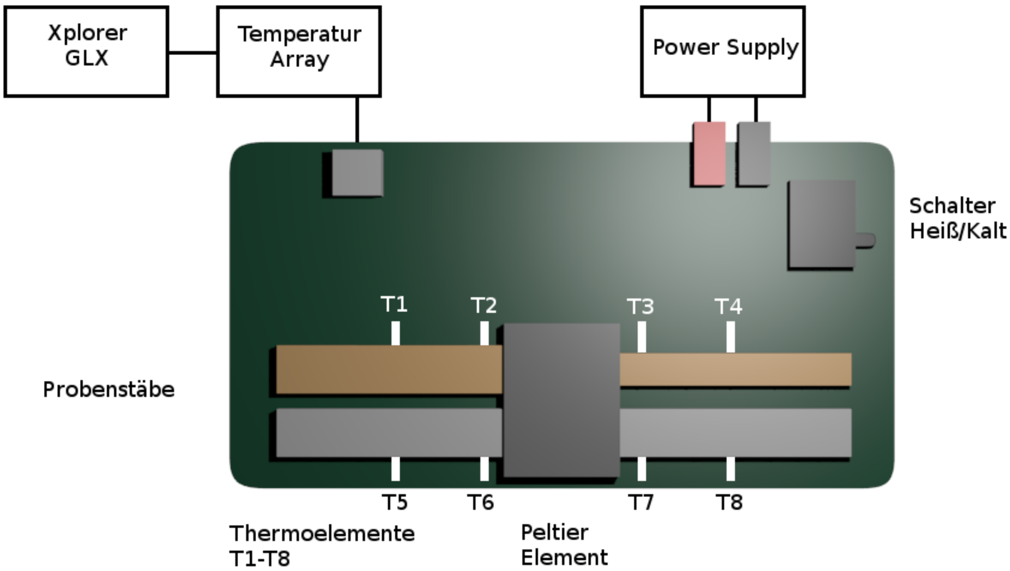


**Abbildung 1:** Schema des Versuchaufbaus

# 4 Durchführung

Bei jeder Messung werden alle Acht Thermoelemente wärmeisoliert und ausgemessen. Nach jeder Messung müssen die Stäbe unter 30 °C abkühlen, bevor die nächste Messung beginnt. Der Abstand zwischen den Thermoelementen der jeweiligen Materialien wird notiert.

## 4.1 Statische Methode

Die Wärmeleitfähigkeit wird über den zeitlichen Temperaturverlauf an zwei Messstellen bestimmt. Mit dem Datenlogger wird in einem Abstand von 5 s bei einer Spannung von $U_\mathrm{P} = 5\,\mathrm{V}$ und maximalem Strom der Temperaturverlauf der Acht Thermoelemente gemessen, bis $T_7$ ungefähr eine Temperatur von 45 °C erreicht.

Die ermittelten Temperaturverläufe der Thermoelemente $T_1$, $T_4$, $T_5$ und $T_8$ werden graphisch dargestellt und nach 700 s werden die Temperaturen notiert. Gemeinsamkeiten und Unterschiede werden diskutiert. Es wird für fünf verschiedene Messzeiten der Wärmestrom berechnet. Die Temperaturdifferenz von $T_2$ und $T_1$, sowie von $T_7$ und $T_8$ wird in Abhängigkeit von der Zeit in ein Diagramm eingetragen.

### 4.2 Dynamische Methode

Die Wärmeleitfähigkeit wird aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperaturwelle bestimmt, die durch periodisches heizen der Stäbe entsteht. Mit dem Datenlogger wird in einem Abstand von 2 s bei einer Spannung von $U_\mathrm{P} = 8\,\mathrm{V}$ und maximalem Strom zweimal der Temperaturverlauf der Acht Thermoelemente gemessen.

Bei der ersten Messung werden die Stäbe mit einer Periode von 80 s erhitzt und mindestens zehn Perioden durchgeführt. Die Temperaturverläufe für den breiten Messingstab und für Aluminium werden graphisch dargestellt und die jeweiligen Amplituden $A_\mathrm{nah}$ und $A_\mathrm{fern}$, sowie die Phasendifferenz $\varDelta t$ bestimmt. Aus den ermittelten Werten wird die Wärmeleitfähigkeit $\kappa$ der Materialien errechnet.

Bei der zweiten Messung werden die Stäbe mit einer Periode von 200 s erhitzt, bis eins der Thermoelemente über 80 °C erreicht. Die Temperaturverläufe für Edelstahl werden graphisch dargestellt und die Wärmeleitfähigkeit wird analog zu Messing und Aluminium berechnet.

## 5 Auswertung

Alle Mittelwerte werden berechnet mit:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n \tag{6}$$

Die Abweichungen ergeben sich nach:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2} \tag{7}$$

### 5.1 Statische Methode

Messwerte für $T_1$, $T_4$, $T_5$ und $T_8$ nach 700 s

$$\begin{aligned} T_1 &= 316{,}46\,\mathrm{K} \\ T_4 &= 314{,}43\,\mathrm{K} \\ T_5 &= 320{,}15\,\mathrm{K} \\ T_8 &= 305{,}88\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Der Wärmestrom pro Zeit $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ lässt sich nach Formel(1) berechnen. Die gemessenen Werte lassen sich gemeinsam mit diesen Werten in Tabelle 1 ablesen. Die Graphen der Temperaturdifferenzen $T_2 - T_1$ und $T_7 - T_8$ sind in Abbildung (3) und (4) im Anhang zu sehen.

Es werden die Wärmeleitungsfähigkeit $\kappa$ aus der Literatur[2] und die Querschnitsfläche $A$ aus der Anleitung[1] entnommen. Dabei wird für $\kappa_{\text{Messing}}$ der Mittelwert des angegeben Bereichs genommen. Die Distanz zwischen den Thermoelementen eines Stabes ist $\Delta x$.

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0{,}03\,\mathrm{m} \\ \kappa_{\text{Messing}} &= 93\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}} \\ \kappa_{\text{Edelstahl}} &= 20\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}} \\ A_{\text{Messing, breit}} &= 48 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \\ A_{\text{Edelstahl}} &= 48 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

**Tabelle 1:** Die gemessenen Daten für Temperaturdifferenzen und den Wärmestrom pro Zeit zum Zeitpunkt $t$.

| $t/\mathrm{s}$ | $T_{2\text{-}1}/\mathrm{K}$ | $\frac{\mathrm{d}Q_{2\text{-}1}}{\mathrm{d}t}/\mathrm{W}$ | $T_{7\text{-}8}/\mathrm{K}$ | $\frac{\mathrm{d}Q_{7\text{-}8}}{\mathrm{d}t}/\mathrm{W}$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,35 | −5,34 | −0,08 | 0,26 |
| 200 | 4,49 | −66,81 | 11,90 | −38,08 |
| 400 | 3,07 | −45,68 | 10,30 | −32,96 |
| 550 | 2,81 | −41,81 | 9,65 | −30,88 |
| 950 | 2,69 | −40,03 | 8,91 | −28,51 |

## 5.2 Dynamische Methode

Für die dynamischen Methode wird $\kappa$ über Formel (5) berechnet. Die gemessenen Werte für die Periodendauer $\Delta t$ und für die beiden Amplituden $A_{\text{nah}}$ und $A_{\text{fern}}$ des näheren und des weiter entfernteren Thermoelements lassen sich aus den Tabellen 2, 3 und 4 ablesen. Die Materialkonstanten $\rho$ und $c$ werden aus der Anleitung entnommen[1]. Die Distanz $\Delta x$ ist dabei dieselbe, wie bei der statischen Methode.

Für Messing ergibt sich damit

$$\kappa = (120 \pm 11)\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}$$

.

Für Aluminium ergibt sich damit

$$\kappa = (205 \pm 14)\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}$$

.

Für Edelstahl ergibt sich damit

$$\kappa = (30 \pm 2)\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}$$

.

**Tabelle 2:** Temperatur des breiten Messingstabs mit Periodendauer 80 s.

| $\Delta t$/s | $A_{\text{nah}}$/K | $A_{\text{fern}}$/K |
|---|---|---|
| 13,33 | 7,27 | 3,41 |
| 11,11 | 6,36 | 3,18 |
| 13,33 | 6,14 | 2,73 |
| 13,33 | 5,91 | 2,50 |
| 13,33 | 5,68 | 2,27 |
| 13,33 | 5,45 | 2,27 |
| 13,33 | 5,45 | 2,05 |
| 17,78 | 5,45 | 1,82 |
| 17,78 | 5,23 | 1,82 |
| 17,78 | 5,23 | 1,82 |

**Tabelle 3:** Temperatur des breiten Aluminiumstabs mit Periodendauer 80 s.

| $\Delta t$/s | $A_{\text{nah}}$/K | $A_{\text{fern}}$/K |
|---|---|---|
| 8,89 | 10,20 | 6,60 |
| 8,89 | 8,80 | 5,40 |
| 8,89 | 8,20 | 4,80 |
| 6,67 | 8,00 | 4,40 |
| 11,11 | 7,80 | 4,00 |
| 8,89 | 7,60 | 4,00 |
| 6,67 | 7,60 | 3,80 |
| 8,89 | 7,40 | 3,80 |
| 8,89 | 7,40 | 3,60 |
| 8,89 | 7,20 | 3,60 |

**Tabelle 4:** Temperatur des breiten Edelstahlstabs mit Periodendauer 200 s.

| $\Delta t$/s | $A_{\text{nah}}$/K | $A_{\text{fern}}$/K |
|---|---|---|
| 30,30 | 13,33 | 3,56 |
| 36,36 | 11,33 | 3,11 |
| 30,30 | 10,67 | 2,67 |
| 36,36 | 10,22 | 2,22 |
| 36,36 | 10,00 | 2,00 |

# 6 Diskussion

## 6.1 Statische Methode

Aus den Abbildung (1) und (2) im Anhang, die die Graphen der Temperaturzunahme der jeweils weiter vom Heizelement entfernten Messstellen $T_1$ und $T_4$ und $T_5$ und $T_8$ zeigen, lässt sich als gemeinsames Merkmal ein zunächst exponentieller und dann immer weiter abflachender Anstieg ablesen, der sich einem bestimmten Temperaturwert annähert. Die Verläufe von $T_1$ und $T_4$ sind sich sehr ähnlich, während $T_5$ und $T_8$ stark von einander abweichen.

Dies lässt sich auch an den nach 700 s gemessenen Werten erkennen. Thermoelement $T_5$ des Aluminiumstabes misst dabei die höchste Temperatur. Zu Beginn der Messreihe haben alle Proben in etwa dieselbe Temperatur, was darauf schließen lässt, das Aluminium die höchste Wärmeleitfähigkeit $\kappa$ der getesteten Stoffe besitzt.

Die Graphen aus Abbildung (3) und (4) steigen zunächst zu einem Maximalwert an und fallen anschließend wieder, wobei sie sich wieder einem Temperaturwert annähern. Jedoch liegt das Maximum des Stahlstabes (s.Anhang, Abb.4) deutlich höher, als das des Messingstabes (s.Anhang, Abb.3). Des Weiteren ist der Abfall nach erreichen des Maximums bei beiden Graphen in absoluten Zahlen zwar in etwa gleich. Dies hängt mit den unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten $\kappa$ zusammen: Da Messing eine wesentlich höhere Wärmeleitfähigkeit hat, als Edelstahl verteilt sich die Wärme im Messingstab schneller und die Temperaturdifferenz wird schneller ausgeglichen. Das Maximum entsteht dadurch, dass zu Beginn die Heizung stärker ist als die Wärmeleitfähigkeit.

## 6.2 Dynamische Methode

Die über die dynamische Methode berechneten Mittelwerte für $\kappa$ weichen von den Literaturwerten, die in der statischen Methode verwendet werden ab, wobei die Standardabweichungen zwischen 6 und 10 % und somit im Rahmen liegen. Die relativen Fehler zu den Literaturwerten betragen:

$$\begin{aligned}\Delta\kappa_{\text{Messing}} &= 29\,\%\\ \Delta\kappa_{\text{Aluminium}} &= 7\,\%\\ \Delta\kappa_{\text{Edelstahl}} &= 50\,\%\end{aligned}$$

Die größeren Abweichungen von den Literaturwerten lassen sich auf die Wahl dieser zurückführen, da diese schwanken und es bei Messing und Edelstahl stark auf die jeweilige Legierung ankommt. Zudem sind alle Werte per Hand aus dem Graphen abgelesen worden. Für eine genauere Aussage müssten die originalen Daten verwendet, oder weitere Messungen durchgeführt werden.

## Literatur

[1] TU Dortmund. *V204 Wärmeleitung von Metallen.* URL: http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Waermeleitf.pdf (besucht am 19. 11. 2017).

[2] Anton Schweizer. *Wärmeleitfähigkeit - Metalle.* URL: https://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit_metall/wleit_metall.php (besucht am 19. 11. 2017).