

V14

# Tomographie

Durchführung: 27.06.2018

Abgabe: 11.07.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Ziel</b>	<b>1</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>1</b>
2.1 Grundlagen der Tomographie . . . . .	1
2.2 Bestimmung der Absorptionskoeffizienten . . . . .	3
<b>3 Durchführung</b>	<b>4</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>6</b>
<b>5 Diskussion</b>	<b>9</b>
<b>Literatur</b>	<b>13</b>

# 1 Ziel

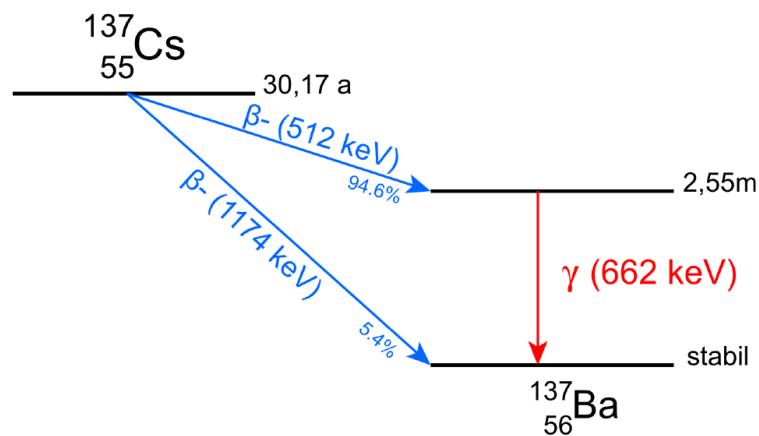
Ziel dieses Versuchs ist es, die Zusammensetzung eines Würfels, der aus 27 kleineren Würfeln besteht, zu bestimmen. Diese Würfel bestehen aus verschiedenen Materialien. Zur Bestimmung dieser Materialien wird die Tomographie verwendet, welche ein bildgebendes Verfahren ist.

## 2 Theorie

Bei der hier verwendeten Methode der Tomographie durchdringt  $\gamma$ -Strahlung die Würfel, die untersucht werden sollen. Bei Durchdringen der Würfel wird ein Teil dieser Strahlung absorbiert. Diese Absorption ist abhängig vom Material des durchdrungenen Würfels und kann über die Intensität gemessen werden. Durch verschiedene Messungen der gleichen Schicht aus mehreren Richtungen entstehen so verschiedene sogenannte Projektionen. Diese Projektionen können zu einem zweidimensionalen Abbild des untersuchten Würfels zusammengesetzt werden.

### 2.1 Grundlagen der Tomographie

Als  $\gamma$ -Strahlungsquelle wird  $^{137}\text{Cs}$  verwendet. Der radioaktive Zerfall des  $^{137}\text{Cs}$  in  $^{137}\text{Ba}$  findet mit einer Wahrscheinlichkeit von 94,6 % so statt, dass das  $^{137}\text{Ba}$  in einem angeregten Zustand verbleibt. Dieser angeregte Zustand wird über Aussendung eines Photons der Energie 662 keV abgeregt. Dies ist in Abbildung 1 dargestellt.



**Abbildung 1:** Zerfall eines  $^{137}\text{Cs}$  mit und ohne angeregten Endzustand  $^{137}\text{Ba}$  [1]

Die Absorption der  $\gamma$ -Strahlung setzt sich grundlegend aus drei verschiedenen Wechselwirkungen zusammen. Diese sind der Photoeffekt, der Compton-Effekt und die Paarbildung. Sie entstehen bei der Wechselwirkung des  $\gamma$ -Quants mit der Materie.

Beim Photoeffekt wird die gesamte Energie des  $\gamma$ -Quants an ein Hüllenelektron übertragen. Das Elektron wird dabei aus seiner Schale ausgelöst. Dies geschieht jedoch nur, wenn die Energie des  $\gamma$ -Quants größer als die Bindungsenergie des Hüllenelektrons ist. Der Compton-Effekt ist die inelastische Streuung des  $\gamma$ -Quants an einem Elektron. Dabei wird die nur ein Teil der Energie an das Elektron abgegeben.

Bei der Paarbildung zerfällt das  $\gamma$ -Quant im Coulomb-Feld eines Atomkerns in ein Elektron und ein Positron. Dabei wird die Energie des  $\gamma$ -Quants in die Ruheenergie des Elektron-Positron Paares übertragen. Über die Energieerhaltung lässt sich so die kleinst mögliche Energie berechnen die benötigt wird. Diese Energie entspricht  $2m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}$ .

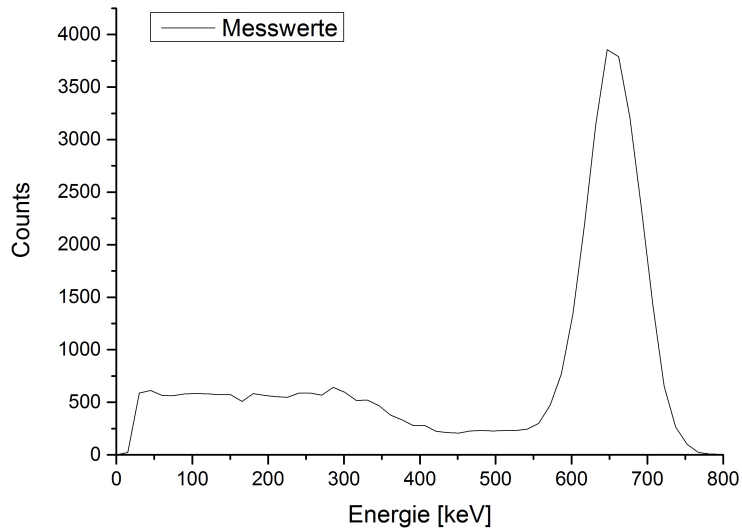
Die Dominanz der Effekte ist abhängig von der Energie des  $\gamma$ -Quants. Während der Photoeffekt bis zu einer Energie von 100 keV dominant ist, ist der Compton-Effekt im Bereich 100 keV - 1 MeV der wichtigste Effekt. Überhalb dieser Energie ist die Paarerzeugung der Haupteffekt, der jedoch bei  $^{137}\text{Cs}$  irrelevant ist, da die Strahlung nicht energiereich genug ist.

Für die Intensität die nachdem Durchqueren des Materials noch vorhanden ist gilt:

$$\bar{I} = I_0 \exp \left( \sum_i \mu_i d_i \right) \quad (1)$$

Dabei ist  $\bar{I}$  die abgeschwächte Intensität,  $I_0$  die Eingangsintensität,  $\mu_i$  der Absorptionkoeffizient des  $i$ ten Materials und  $d_i$  die Dicke des  $i$ ten Materials.

In Abbildung 2 ist beispielhaft das Spektrum des  $^{137}\text{Cs}$ -Strahlers dargestellt. Das erste Plateau entsteht hierbei durch die Rückstreuung der Strahlung. Das Minimum zwischen dem Plateau und dem Peak ist die sogenannte Compton-Kante. Die hier gestreuten Photonen übertragen dabei die größtmögliche Energie an die Elektronen. Der Peak ist der Photo-Peak. Hierbei wird die Energie des Photons vollständig durch den Photo-Effekt absorbiert und in das Aluminium abgegeben.



**Abbildung 2:** Spektrum des  $^{137}\text{Cs}$ -Strahlers bei diagonalem Strahlengang durch das Aluminiumgehäuse.

## 2.2 Bestimmung der Absorptionskoeffizienten

Mit Gleichung 1 lässt sich folgende Gleichung herleiten:

$$\sum_i \mu_i d_i = \ln \left( \frac{I_0}{\bar{I}_j} \right) \quad (2)$$

In Matrixschreibweise:

$$A \cdot \vec{\mu} = \vec{I} \quad (3)$$

Hierbei enthält der Vektor  $\vec{\mu}$  alle Absorptionskoeffizienten der Materialien innerhalb des Würfels.  $\vec{I}$  enthält alle Anfangsintensitäten und die jeweiligen abgeschwächten Intensitäten. Die Matrix  $A$  enthält die Informationen über die Dicke der Materialien der jeweiligen Strahlenrichtung. Damit obiges Gleichungssystem lösbar ist, müssen mindestens  $n$  Messungen für eine  $n \times m$  große Matrix gemacht werden. Durch die nicht perfekte Positionierung des Würfels werden jedoch mehrere Messungen gemacht wodurch das Gleichungssystem überbestimmt ist. Durch Nutzung der Methode der kleinsten Quadrate und unter Berücksichtigung von Gleichung 3 lässt sich so folgende Gleichung herleiten:

$$WA \cdot \vec{\mu} = W\vec{I} \quad (4)$$

Mit der Gewichtungsmatrix  $W$

$$W = V[I]^{-1} \quad (5)$$

ergibt sich final

$$\vec{\mu} = (A^T W A)^{-1} (A^T W \vec{I}). \quad (6)$$

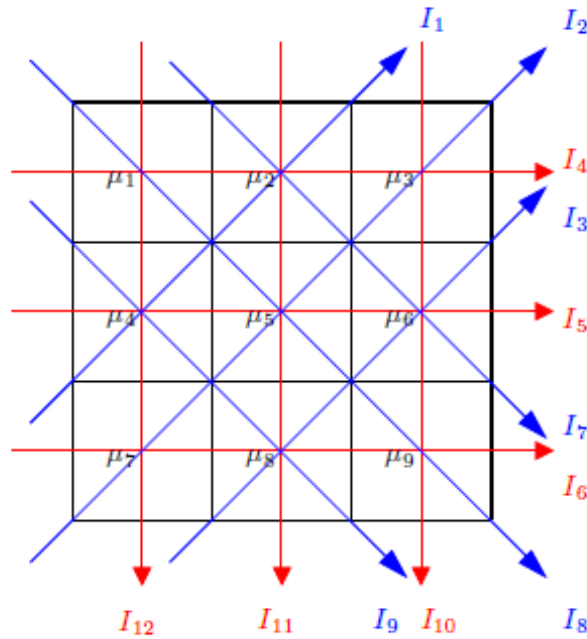
Für die Unsicherheiten folgt

$$V[\mu] = (A^T W A)^{-1}. \quad (7)$$

Sie ist definiert als die Inverse der Gewichtungsmatrix, da die Unsicherheit bei einem Zählexperiment durch den Poission-Fehler gegeben ist.

### 3 Durchführung

In Abbildung 3 sind die verschiedenen Messrichtungen der Ebenen zur Bestimmung eines Würfels dargestellt.



**Abbildung 3:** Verschiedene Messungen zur Bestimmung des Würfels.

Diese werden durch die Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

dargestellt.

In Abbildung 4 ist der Versuchsaufbau dargestellt. Zusätzlich ist der Aufbau rundherum mit Bleiblocken abgeschirmt. Die  $\gamma$ -Strahlung des  $^{137}\text{Cs}$  wird ebenfalls durch einen Bleiblock mit einem kleinen Loch abgeschirmt, um die Strahlung zu fokussieren. Der hier genutzte Detektor ist ein Szintillationsdetektor bestehend aus einem anorganischen Szintillationsmaterial, da die Genauigkeit der Energiemessung bei einem anorganischen Szintillationsmaterial höher ist als bei einem organischen. Innerhalb des Kristalls werden durch die Strahlung Elektronen angeregt, welche sich dann unter Aussendung eines Photons wieder abregen. Dieses Photon wird in einem Photomultiplier gemessen. Das Signal wird an ein Multichannelanalyzer weiter gegeben, welches die Signale, je nach Stärke, histogrammiert. Der Würfel wird zur Messung auf einer Befestigungsvorrichtung angebracht. Dabei lässt sich sicherstellen das der Würfel fest während der Messung steht. Zudem ist in 4 eine kleine Darstellung der kleinen Würfel im Gehäuse gegeben.

Zunächst wird eine Leermessung ohne Würfel vorgenommen zur Bestimmung von  $I_0$ . Danach werden drei Würfel zum Test vermessen. Der erste besteht nur aus einer dünnen Aluminiumschicht, die alle Würfel umhüllt. Der zweite Würfel ist ein reiner Aluminiumwürfel. Würfel drei ist ein reiner Bleiwürfel.

Danach wird ein unbekannter Würfel vermessen. Diese Messung wird wie in Abbildung 3 durchgeführt.

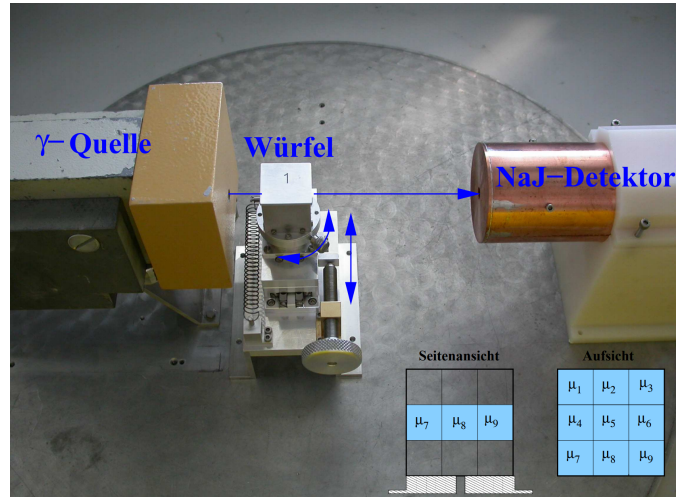


Abbildung 4: Versuchsaufbau der Messung [3].

## 4 Auswertung

In Tabelle 1 sind die Messwerte der Nullmessung mit dem Aluminiumgehäuse eingetragen. Die Eingangsintensität  $I_0$  kann über die gemessenen Zerfälle  $C$  pro Zeitintervall  $\Delta t$  berechnet werden:

$$I_0 = \frac{C}{\Delta t}. \quad (9)$$

Dadurch können die auftretenden Absorptionseffekte des Aluminiumgehäuses der verwendeten Würfel berücksichtigt werden. Der Fehler berechnet sich durch

$$\sigma_{I_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_C}{C}\right)^2} I_0. \quad (10)$$

Die Messung der Zeit wird als fehlerlos angenommen, da dies digital im Millisekundenbereich am Computer geschieht und somit der Fehler vernachlässigbar klein ist.



j	C	$\Delta t$ [s]	$I_0$ [s <sup>-1</sup> ]
1	15165 ± 123	100,46	150,0 ± 1,2
2	13654 ± 117	100	136,5 ± 1,2
3	14274 ± 120	100	142,7 ± 1,2
4	14164 ± 119	100	141,6 ± 1,2
5	14586 ± 121	100	145,9 ± 1,2
6	14560 ± 121	100	145,6 ± 1,2
7	14206 ± 119	100	142,1 ± 1,2
8	14283 ± 120	100	142,8 ± 1,2
9	14457 ± 120	100	144,6 ± 1,2
10	14360 ± 120	100	143,6 ± 1,2
11	14718 ± 121	100	147,2 ± 1,2
12	14331 ± 120	100	143,3 ± 1,2

**Tabelle 1:** Messung mit dem Aluminiumgehäuse

Counts $C$	Zeit $\Delta t$ [s]	Eingangsintensität $I_0$ [s <sup>-1</sup> ]
15075 ± 123	100,48	150,0 ± 1,2

**Tabelle 2:** Leermessung

Zudem ist in Tabelle 2 die Leermessung ohne Würfel dargestellt.

Die Messwerte für die verschiedenen Strahlengänge für die Würfel 2,3 und 5 sowie des Aluminiumgehäuses sind Tabelle 3 und 1 dargestellt. Die Ausgangsintensitäten und deren Fehler werden jeweils mit Gleichung (8) und (9) berechnet.

j	Würfel 2			Würfel 3			Würfel 5		
	C	$\Delta t$ [s]	$N_j$ [s <sup>-1</sup> ]	C	$\Delta t$ [s]	$N_j$ [s <sup>-1</sup> ]	C	$\Delta t$ [s]	$N_j$ [s <sup>-1</sup> ]
1	6814	100	68,1 ± 0,8	1115	217,4	5,1 ± 0,4	10004	273,6	36,6 ± 0,4
2	6889	100	68,9 ± 0,8	1113	624,5	1,8 ± 0,1	10073	548,2	18,4 ± 0,2
3	6814	100	68,1 ± 0,8	1117	218,7	5,1 ± 0,3	10090	173,5	58,2 ± 0,6
4	7975	100	79,8 ± 0,9	1113	222,0	5,09 ± 0,4	10056	330,4	30,4 ± 0,3
5	7824	100	78,2 ± 0,9	1174	248,7	4,7 ± 0,2	10320	346,7	29,8 ± 0,3
6	7907	100	79,1 ± 0,9	1137	232,7	4,9 ± 0,3	10068	134,3	75,0 ± 0,8
7	7733	100	77,3 ± 0,9	1146	148,8	7,7 ± 0,4	10340	435,7	23,7 ± 0,2
8	6665	100	66,7 ± 0,8	1154	612,1	1,9 ± 0,1	10021	459,2	21,8 ± 0,2
9	7875	100	78,8 ± 0,9	1165	156,3	7,5 ± 0,3	10043	138,2	72,7 ± 0,7
10	7839	100	78,4±0,9	1180	220,7	5,3±0,2	10062	129,4	77,8 ± 0,8
11	7775	100	77,8±0,9	1117	229,4	4,9±0,2	10017	795,8	12,6 ± 0,1
12	7669	100	76,7±0,9	1198	222,1	5,4±0,2	10165	130,2	78,1 ± 0,8

**Tabelle 3:** Messwerte für die drei Würfel und dem Würfelgehäuse

Zur Berechnung der Absorptionskoeffizienten wird Gleichung (7) benutzt. Die Diagonalelemente der Gewichtungsmatrix  $W$  werden durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_i = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_0}}{I_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{N_j}}{N_j}\right)^2} \quad (11)$$

berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 und 5 dargestellt. Die Spalte Abw. gibt die Abweichung zum Literaturwert an.

	Würfel 2	Aluminium	Würfel 3	Blei
k	$\mu_k$ [cm <sup>-1</sup> ]	Abw. [%]	$\mu_k$ [cm <sup>-1</sup> ]	Abw. [%]
1	0,1416 ± 0,0001	33	0,9658 ± 0,0005	32
2	0,2702 ± 0,0001	28	1,1789 ± 0,0002	17
3	0,1645 ± 0,0001	22	1,0798 ± 0,0004	24
4	0,2920 ± 0,0001	38	1,2127 ± 0,0002	15
5	0,1543 ± 0,0001	27	1,0209 ± 0,0002	28
6	0,1714 ± 0,0001	19	1,0057 ± 0,0004	29
7	0,1735 ± 0,0001	18	1,0522 ± 0,0004	26
8	0,1883 ± 0,0001	11	1,0725 ± 0,0003	24
9	0,2515 ± 0,0001	19	1,1552 ± 0,0005	19

**Tabelle 4:** Absorptionskoeffizienten der Elementarwürfel 2 und 3

Bei der Berechnung der Absorptionskoeffizienten für die Würfel 2 und 3 wird der Mittelwert über alle Absorptionskoeffizienten gebildet, da diese nur aus einem Material bestehen. Für Würfel 2 ergibt sich ein Wert von

$$\bar{\mu}_2 = (0,2010 \pm 0,0001) \text{ cm}^{-1}$$

und für Würfel 3

$$\bar{\mu}_3 = (1,0826 \pm 0,0003) \text{ cm}^{-1}.$$

Der Wert für Würfel 2 weicht um 4,7% vom Literaturwert für Aluminium ab und der Wert für Würfel 3 weicht um 23,7% vom Literaturwert für Blei ab.

	Würfel 5		
k	$\mu_k [10^{-1}\text{cm}^{-1}]$	Material	Abw. [%]
1	$0,3643 \pm 0,0001$	Eisen	40
2	$1,1068 \pm 0,0001$	Blei	22
3	$0,2874 \pm 0,0001$	Aluminium	36
4	$0,1787 \pm 0,0001$	Delrin	48
5	$1,2999 \pm 0,0001$	Blei	8
6	$0,3985 \pm 0,0001$	Eisen	34
7	$0,2031 \pm 0,0001$	Aluminium	4
8	$0,5016 \pm 0,0001$	Eisen	17
9	$0,0525 \pm 0,0001$	Delrin	57

**Tabelle 5:** Absorptionskoeffizienten des Elementarwürfels 5

## 5 Diskussion

Aus den erhaltenen Werten für die Absorptionskoeffizienten ist erkennbar, dass die Würfel 2 und 3 aus nur einem Material bestehen und der Würfel 5 Elementarwürfel aus verschiedenem Material enthält. Als mögliche Materialien waren Aluminium, Messing, Delrin, Blei und Eisen angegeben. Aus dem Vergleich mit den Literaturwerten aus Tabelle 4 ist ersichtlich, dass der Würfel 2 aus Aluminium und der Würfel 3 aus Blei besteht. Der Wert für Würfel 2 stimmt gut mit dem Literaturwert überein. Er weicht um 4,7% vom Literaturwert ab. Der Wert für Würfel 3 weicht um 23,7% vom Literaturwert ab. Die Literaturwerte werden für eine Photonenenergie  $E_\gamma = 661,7\text{keV}$  entnommen, da die Strahlungsenergie des  $^{137}\text{Cs}$ -Strahlers 661,7 keV beträgt. Die Absorptionskoeffizienten berechnen sich aus dem Produkt von dem Massenschwächungskoeffizient  $\sigma$  und der Stoffdichte  $\rho$ .

Material	$\sigma \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}\right]$	$\rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]$	$\mu \left[\text{cm}^{-1}\right]$
Aluminium	0,078	2,699	0,211
Blei	0,125	11,35	1,419
Eisen	0,077	7,874	0,606
Messing	0,077	8,284	0,638
Delrin	0,086	1,405	0,121

**Tabelle 6:** Literaturwerte der Stoffdichte, Massenschwächungskoeffizient und der Absorptionskoeffizienten [2]

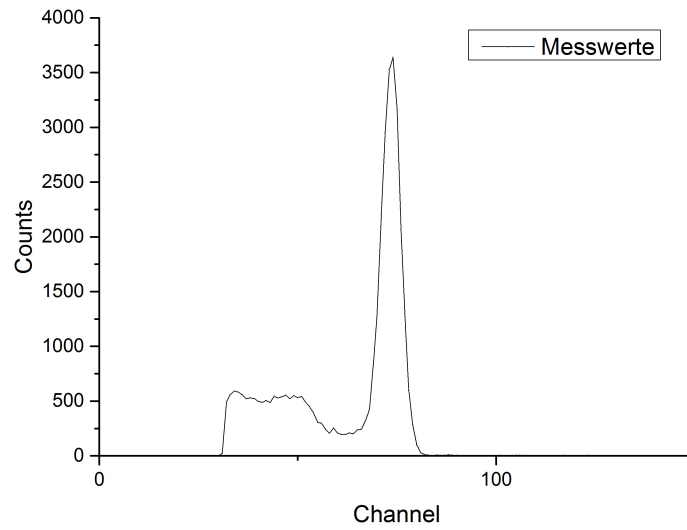
Beim zusammengesetzten Würfel 5 kann aus den Messwerten von Tabelle 3 geschlossen werden, dass keiner der Plätze für die Elementarwürfel leer ist, da die Ausgangsintensität der Projektionen von der Eingangsintensität deutlich abweicht. Des Weiteren ist

erkennbar, dass die Elementarwürfel 2 und 5 aus dem gleichen Material bestehen, da ihr Absorptionskoeffizient in guter Übereinstimmung ist. Mittels der Literaturwerte können diese als Blei und die Elementarwürfel 9 und 4 als Delrin identifiziert werden. Würfel 8 besteht aus Eisen und die Würfel 3 und 7 aus Aluminium. Die Würfel 1 und 6 bestehen aus dem gleichem Material, da ihre Absorptionskoeffizienten gut übereinstimmen. Sie bestehen vermutlich aus Eisen, wobei ihre Werte stark von den Literaturwerten abweichen.

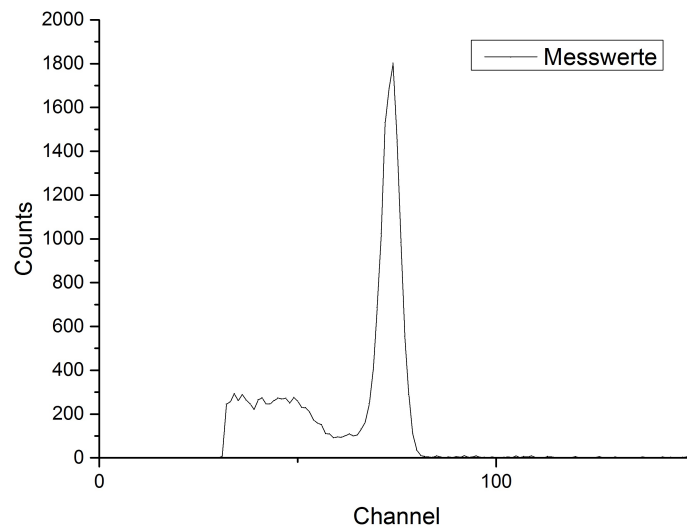
	Würfel 5		
k	$\mu_k [10^{-1}\text{cm}^{-1}]$	Material	Abw. [%]
1	$0,3643 \pm 0,0001$	Eisen	40
2	$1,1068 \pm 0,0001$	Blei	22
3	$0,2874 \pm 0,0001$	Aluminium	36
4	$0,1787 \pm 0,0001$	Delrin	48
5	$1,2999 \pm 0,0001$	Blei	8
6	$0,3985 \pm 0,0001$	Eisen	34
7	$0,2031 \pm 0,0001$	Aluminium	4
8	$0,5016 \pm 0,0001$	Eisen	17
9	$0,0525 \pm 0,0001$	Delrin	57

**Tabelle 7:** Absorptionskoeffizienten des Elementarwürfels 5

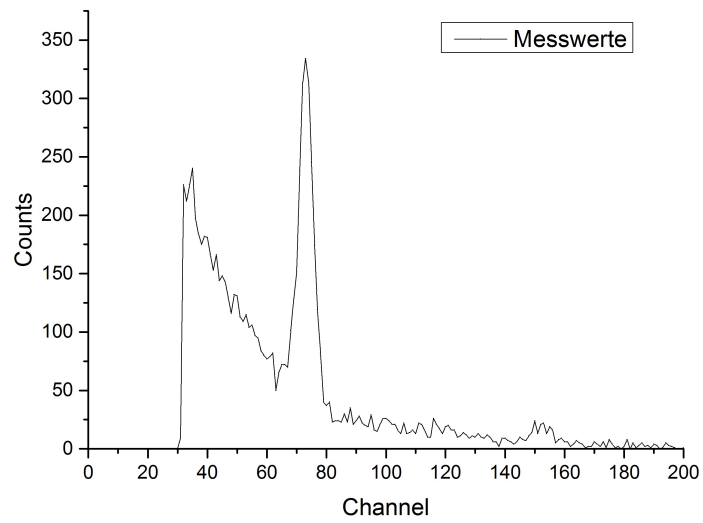
Die Abweichungen lassen sich dadurch erklären, dass die Position des Würfels nicht exakt einstellbar ist und der Strahlengang per Augenmaß justiert wird. Des Weiteren ist die benutzte Strahlungsquelle nicht punktförmig und somit hat der Strahl eine endliche Ausdehnung. Bei diagonalen Projektionen ist es dann nicht vermeidbar, dass der Strahl auch durch anliegende Nachbarn geht. Für bessere Messergebnisse könnten mehrere Messungen für die diagonalen Projektionen gemacht werden und der Mittelwert dieser zur Berechnung der Absorptionskoeffizienten verwendet werden.



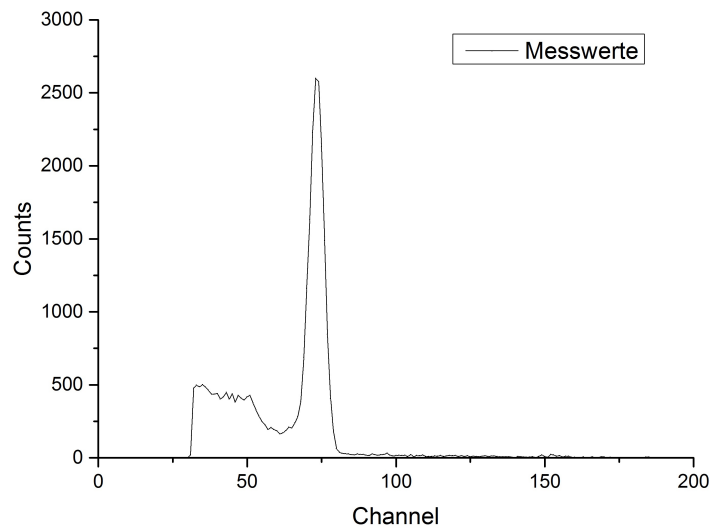
**Abbildung 5:** Spektrum eines  $^{137}\text{Cs}$ -Strahlers bei diagonalem Strahlengang durch das Aluminiumgehäuse



**Abbildung 6:** Spektrum eines  $^{137}\text{Cs}$ -Strahlers bei diagonalem Strahlengang durch Würfel 2



**Abbildung 7:** Spektrum eines  $^{137}\text{Cs}$ -Strahlers bei diagonalem Strahlengang durch Würfel 3



**Abbildung 8:** Spektrum eines  $^{137}\text{Cs}$ -Strahlers bei Strahlengang durch durch die nicht leeren Elementarwürfel von Würfel 5

## Literatur

- [1] URL: <https://www.leifiphysik.de/kern-teilchenphysik/radioaktivitaet-fortfuehrung/versuche/gammaspektrum-von-cs-137> (besucht am 03.07.2018).
- [2] URL: <http://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html> (besucht am 03.07.2018).
- [3] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 14*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/BTomographie.pdf> (besucht am 03.07.2018).