V101

Das Trägheitsmoment

David Rolf
david.rolf@tu-dortmund.de

Jonah Blank
jonah.blank@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.11.2017 Abgabe: 05.12.2017

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Im Versuch wird das Trägheitsmoment von verschiedenen Objekten bestimmt. Darunter eine Kugel, ein Zylinder und eine Puppe.

2 Theorie

Das Trägheitsmoment einer punktförmigen Masse m im Abstand r von einer Drehachse $\vec{\omega}$ lässt sich berechnen durch:

$$I_{\mathrm{S}} = m \cdot r^2 \tag{1}$$

Für mehrere Punktmassen in einem starren Körper gilt somit:

$$I_{\mathrm{S}} = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \tag{2}$$

Verallgemeinert auf eine kontinuierliche Massenverteilung ergibt sich:

$$I_{\mathrm{S}} = \int \rho r^2 dV \tag{3}$$

Dabei bezieht sich I_{S} immer auf die Drehachse bezüglich des Schwerpunktes des Körpers. Bei einer Kugel mit Masse m und Radius R ergibt sich:

$$I_{\mathrm{SK}} = \frac{2}{5} m R^2 \tag{4}$$

Bei einem aufrechten Zylinder mit Masse m, Radius R und Höhe h ergibt sich:

$$I_{\mathrm{SZ}} = \frac{mR^2}{2} \tag{5}$$

Liegt der Zylinder gilt:

$$I_{\mathrm{SZH}} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \tag{6}$$

Ist die Drehachse um den Abstand $\vec{a}$ vom Schwerpunkt verschoben, so lässt sich das Trägheitsmoment nach dem Satz von Steiner berechnen:

$$I = I_{\mathrm{S}} + ma^2 \tag{7}$$

Dabei ist a die Länge von $\vec{a}$. Das Drehmoment eines Körpers lässt sich berechnen nach:

$$\vec{M} = \vec{F} x \vec{r} \tag{8}$$

Dabei ist $\vec{F}$ die Kraft, die im Abstand $\vec{r}$ von der Drehachse auf den Körper wirkt. Wirkt $\vec{F}$ als rückwirkende Kraft, so schwingt das System bei kleinen Auslenkungen mit:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{9}$$

Dabei ist D die Winkelrichtgröße und berechnet sich bei senkrecht wirkender Kraft durch:

$$\begin{aligned} D &= \frac{M}{\phi} \\ &= \frac{F \cdot r}{\phi} \end{aligned} \tag{10}$$

Sind $\vec{a}$ und T eines schwingenden Systems bekannt, so lässt sich das Eigenträgheitsmoment I_{D} nach der in Kapitel**??** beschriebenen Methode bestimmen durch:

$$I_{\mathrm{D}} = \frac{T_0^2 D}{4\pi^2} - \sum I_{\mathrm{S}} \tag{11}$$

Dabei entspricht T_0^2 dem y-Achsenabschnitt, wenn T^2 gegen a^2 aufgetragen wird. Ist Das Eigenträgheitsmoment I_{D} bekannt, so kann Das Trägheitsmoment I_{K} des Körpers mit Formel (**??**) bestimmt werden durch:

$$I_{\mathrm{K}} = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - I_{\mathrm{D}} \tag{12}$$

3 Aufbau

Als schwingendes System wird eine Drillachse (Abbildung **??**) verwendet. Sie besitzt ein Eigenträgheitsmoment I_{D} und eine Winkelrichtgröße D. Der zu untersuchende Körper wird auf die Drillachse gespannt und schwingt aufgrund der Spiralfeder, die eine rückwirkende Kraft ausübt, mit der Periodendauer T.

4 Durchführung

4.1 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes und der Winkelrichtgröße der Drillachse

Es wird die Winkelrichtgröße und das Eigenträgheitsmoment der Drillachse bestimmt. Dazu wird ein Kraftmesser senkrecht zum Radius im Abstand a an der Drillachse befestigt und diese wird um den Winkel ϕ ausgelenkt. Kraft, Abstand und Winkel werden zehn mal gemessen und notiert.

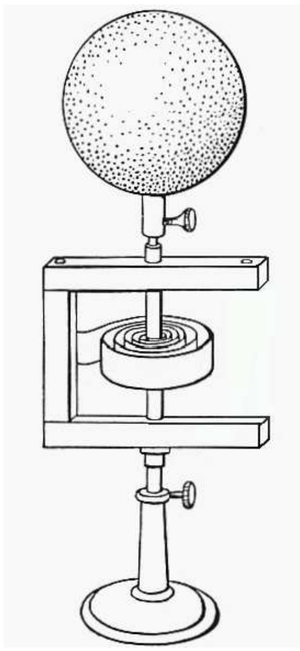

Abbildung 1: Drillachse[1]

Das Eigenträgheitsmoment wird bestimmt, indem zwei Zylinder im Abstand a an einer als masselos angenommenen Stange befestigt werden, welche auf die Drillachse gesteckt wird. Das System wird in Schwingung versetzt und die Periodendauer T^2 gegen a^2 abgetragen. Die Messung wird für zehn verschiedene Abstände wiederholt und durch lineare Regression wird das Eigenträgheitsmoment bestimmt.

4.2 Bestimmung des Drehmomentes von Kugel, Zylinder und Puppe

Um das Trägheitsmoment von Kugel und Zylinder zu bestimmen, werden diese jeweils an der Drillachse befestigt und fünf mal aus der Ruhelage ausgelenkt. Die Werte für T, a und ϕ werden notiert und das Trägheitsmoment bestimmt.
Das Trägheitsmoment einer Holzpuppe wird in zwei unterschiedlichen Haltungen bestimmt. Dazu wird analog wie bei der Kugel und dem Zylinder verfahren. Das Ergebnis wird mit einem genäherten theoretischen Wert verglichen.

5 Auswertung

5.1 Die Drillachse

5.1.1 Die Winkelrichtgröße

Um die Winkelrichtgröße D der Drillachse zu bestimmen wird Gleichung (**??**) verwendet. Die benötigten werte für die Kraft F, den Radius r und den Winkel ϕ lassen sich der Tabelle **??** entnehmen.

$$D = (0{,}0256 \pm 0{,}0006)\,\mathrm{J}$$

Tabelle 1: Messdaten zur Winkelrichtgrößenbestimmung

F/N	r/m	ϕ/rad
0,12	0,119	0,524
0,19	0,119	0,873
0,38	0,059	0,873
0,16	0,190	1,047
0,20	0,170	1,222
0,30	0,110	1,396
0,28	0,139	1,571
0,27	0,159	1,745
0,30	0,170	2,094
0,22	0,239	2,269

5.1.2 Eigenträgheitsmoment

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments werden zwei Zylinder mit dem Durchmesser $d = 0{,}035\,\mathrm{m}$, der Höhe $h = 0{,}03\,\mathrm{m}$ und der Masse $m = 0{,}2218\,\mathrm{kg}$ benutzt.
Die Verbindungsstange wird als masselos angenommen und wird daher nicht berücksichtigt. Die Werte für das Quadrat der Periodendauer T und des Abstands a aus Tabelle

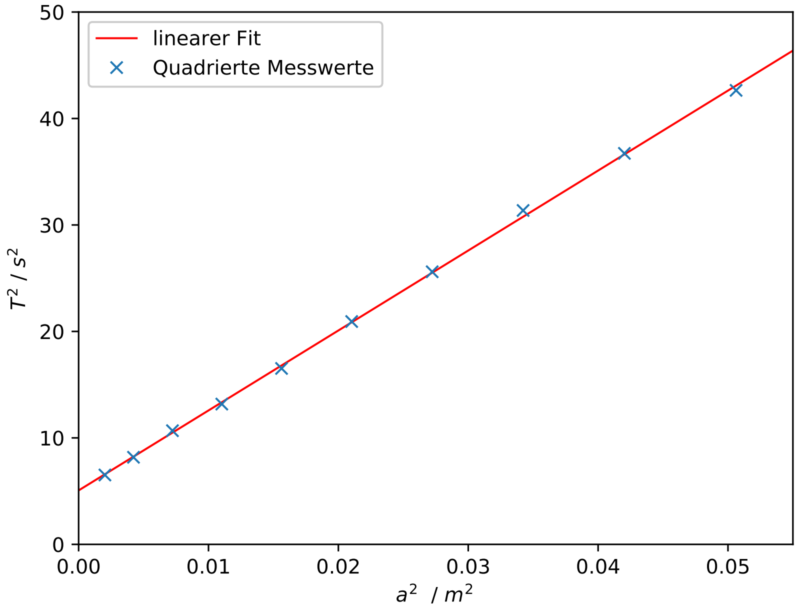

Abbildung 2: Graph der Messdaten zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse

?? sind im Graph **??** gegeneinander aufgetragen. Mittels linearer ergibt sich hier als Achsenabschnitt $T_0^2 = (5{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{s}^2$Mit Gleichung (**??**) ergibt sich für das Trägheitsmoment I_D der Drillachse:

$$I_\mathrm{D} = (3{,}2 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m}^2$$

Tabelle 2: Messdaten zur Eigenträgheitsmomentbestimmung

r/m	T/s
0,045	2,5525
0,065	2,86
0,085	3,2675
0,105	3,63
0,125	4,065
0,145	4,575
0,165	5,06
0,185	5,6
0,205	6,06
0,225	6,53

5.2 Das Trägheitsmomentmoment einer Kugel

Tabelle 3: Messdaten zur Trägheitsmomentbestimmung einer Kugel

T/s
1,7175
1,7225
1,7250
1,7225
1,5100

Das Trägheitsmoment einer Kugel bestimmt sich nach Gleichung (**??**). Die Werte für die Periodendauer T lassen sich dabei aus Tabelle**??** entnehmen:

$$I_{\text{Kugel}} = (-1{,}4 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Der Theoriewert nach Formel (**??**) beträgt

$$I_{\text{Kugel,Theorie}} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

5.3 Das Trägheitsmoment eines Zylinders

Das Trägheitsmoment eines Zylinders berechnet sich nach Gleichung (**??**). Die Werte für die Periodendauer T lassen sich dabei aus Tabelle**??** entnehmen:

$$I_{\text{Zylinder}} = (-2{,}33 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Der Theoriewert nach Formel (**??**) beträgt:

$$I_{\text{Zylinder,Theorie}} = 7{,}9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Tabelle 4: Messdaten zur Trägheitsmomentbestimmung eines Zylinders

T/s
1,1725
1,1900
1,1600
1,1650
1,1825

5.4 Trägheitsmomente einer Puppe

Da nur die Gesamtmasse der Puppe gemessen werden kann ($m_\mathrm{P} = 0{,}3395\,\mathrm{kg}$ und die Puppe näherungsweise in einfache geometrische Figuren zerlegt werden kann, wird bei der Ermittlung des Theoriewertes über das Verhältnis der Einzelvolumina zum Gesamtvolumen die Masse der jeweiligen Körper berechnet. Der Kopf wird als Kugel und Arme, Beine und Rumpf als Zylinder genähert. Die Masse m der Durchmesser d und die Höhe h lassen sich aus Tabelle **??** ablesen.

Tabelle 5: Messdaten zur Winkelrichtgrößenbestimmung

/	m/kg	d/m	h/m
Arm	0,042	0,018	0,180
Be	0,074	0,023	0,198
Rumpf	0,202	0,048	0,125
Kopf	0,221	0,036	

5.4.1 Puppe mit ausgebreiteten Armen

Tabelle 6: Messdaten zur Periodendauer einer Puppe mit ausgebreiteten Armen

T/s
1,2725
1,2800
1,2500
1,2675
1,2575

Aus Formel (**??**) folgt mit den Messwerten aus Tabelle **??** berechnen:

$$I_\mathrm{Puppe,ausg} = (-2{,}18 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Der genäherten Theoriewert berechnet sich durch Gleichung (**??**) und mit dem Satz von Steiner

5.4.2 Puppe mit angelegten Armen

Tabelle 7: Messdaten zur Periodendauer einer Puppe mit angelegten Armen

T/s
0,8875
0,8950
0,8900
0,8875
0,8825

Aus Formel (**??**) ergibt sich mit den Messwerten aus Tabelle **??**:

$$I_{\text{Puppe,ang}} = (-2{,}71 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Der genäherten Theoriewert berechnet sich durch Gleichung (**??**) und mit dem Satz von Steiner zu

$$I_{\text{Puppe,ang,theo}} \approx 9{,}89 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

6 Diskussion

Literatur

[1] TU Dortmund. *V101 Das Trägheitsmoment*. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V101.pdf` (besucht am 12. 03. 2017).