6 小时通关高等数学 A2

作者：SHZ

时间：2022 年 6 月 7 日

版本：1.0

ElegantLaTeX Program

目录

第 1 章 多元函数微分学

1.1 重极限及连续、可偏导、可微的概念

1.1.1 重极限

定义 1.1 (重极限)

设 f 是定义在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的一个二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 若存在常数 A，使得对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当点 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$ 时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立. 则称 A 为函数 $f(x,y)$ 为当点 $P(x,y)$ 趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$，也记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$. ♣

笔记

1. 要求 P_0 为聚点，也就是确保 $\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$ 非空.
2. P 只需要在邻域内，可以沿着任意路径趋于 P_0，也即，$\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=A$ 的充要条件是当 $P(x,y)$ 在邻域内以任何方式趋近于 P_0 时，$f(x,y)$ 都以 A 为极限.
3. 一元函数极限的下列性质对多元函数仍成立：（1）局部有界性；（2）保号性；（3）有理运算；（4）极限与无穷小的关系；（5）夹逼准则.

计算二重极限常用的方法：（1）夹逼准则；（2）变量替换化为已知极限或者一元函数极限；（3）极坐标变换；（4）利用初等函数的连续性，极限的四则运算的性质；（5）利用初等变形，比如取对数；（6）若能看出极限值，可用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明.

例题 1.1 求 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$

解

$$0<\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}=\frac{|x|}{x^2+y^2}+\frac{|y|}{x^2+y^2}<\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\to 0$$

例题 1.2 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}$

解 令 $u=xy$，从而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+xy)}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}\cdot\lim_{y\to 0}y=0$$

例题 1.3 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

解 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，此时 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于对于任何 θ 都有 $r\to 0$.

$$\left|xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{1}{4}r^2\left|\sin 2\varphi\right|\to 0$$

例题 1.4 求 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to 1}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{y^2/\sin\frac{2}{x}}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to 1}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{y^2/\sin\frac{2}{x}}&=\exp\left(\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to 1}}\frac{y^2}{\sin(2/x)}\ln\left(1+\frac{1}{xy}\right)\right)\\&=\exp\left(\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to 1}}\frac{y^2}{\sin(2/x)}\cdot\frac{1}{xy}\right)\\&=\sqrt{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

例题 1.5 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$

解 显然 $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{4}$，从而 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$，$\forall(x,y)$（$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$），

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{4}<\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$

一元函数极限只有两个趋向，而对于二元极限而言需要所有的（事实上是无穷）趋向都满足极限值为同一个值才可以说极限存在，因此一些看上去比较良好的函数，在某些点的极限仍然很有可能是不存在的。由于二重极限的内容并不需要掌握，因此证明重极限不存在的方法主要有三种：（1）证明径向路径的极限与幅角（或斜率）有关；（2）证明某个特殊路径的极限不存在；（3）证明两个特殊极限存在但不相等.

例题 1.6 证明下列函数在 $(0,0)$ 处重极限不存在：（1）$f_1(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$；（2）$f_2(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$；（3）$f_3(x,y)=\dfrac{x^6y^8}{(x^2+y^4)^5}$.

解 （1）令 $y=kx$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 与 k 有关.

（2）令 $y=kx^2-x$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}=-\dfrac{1}{k}$ 与 k 有关

（3）沿 $x=0$ 趋近时，极限为 0；沿 $x=y^2$ 趋近时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^6y^8}{(x^2+y^4)^5}=\dfrac{1}{2^5}$，故重极限不存在.

1.1.2 连续

定义 1.2 (连续)

设 $z=f(x,y)$ 是定义在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点且 $P_0(x_0,y_0)\in D$，如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

关于连续只需要把握一点：在某点极限值等于函数值，所以证明具体函数的连续性，在保证在该点有定义的前提下，其实就是求二重极限的问题，这一部分在上一节已经做了比较详细的介绍，此处不再赘述. 以下我们给出有界闭域上连续函数的性质，这与一元的情形是十分类似的.

定理 1.1 (有界性)

若 f 在有界闭区域上连续，则 f 有界.

定理 1.2 (最大值最小值定理)

有界闭区域上的多元连续函数在此区域上必有最大值和最小值.

定理 1.3 (介值定理)

有界闭区域上的连续多元函数 f，对于介于其最大值和最小值之间的任意值 μ，总存在一点 P_0 使得 $\mu=f(P_0)$.

定理 1.4 (Cantor 定理)

有界闭区域上的连续函数必然一致连续.

1.1.3 偏导

定义 1.3

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数. 记作 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$，$z_x(x_0,y_0)$. 类似地也可以定义关于 y 的偏导数.

可以看出，定义偏导数时并没有考虑另一个变量的变化，只考虑了轴向的变化，因此求偏导的时候只需要将函数看作关于某一个变量的一元函数即可. 但是在二元的情形当中，变化的路径可以是多种多样的，为什么不可以考虑其它的变化情形呢？因为导数表示的不就是因变量的变化量除以自变量的变化量——“变化率”吗？这个疑问将在“方向导数”的定义当中得到解决. 类似地，我们也可以用“偏导的偏导”定义高阶偏导，对于二阶有四种情形.

定义 1.4

设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内可偏导，其偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=z_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=z_y(x,y)$ 仍然是二元函数，设 $h(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}$，$g(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}$，若 h，g 可偏导，则 $\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$，$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$，$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，称其为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数. 记作

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{xy}$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{yy}$$

笔记 定义二阶偏导需要一阶偏导在一个区域内都存在，而并非只在某点可偏导，因为二阶偏导是一阶偏导的“变化率”，自然不能是单点存在.

如下的定理主要用于求导后的表达式进行“合并同类项”的操作，如果你的解答与答案不一致，可以检查是否漏掉了这一步. 这个定理的证明也是十分有趣的，时间关系这里略去. 定理可以简记为“二阶混合偏导连续则相等”

定理 1.5 (Euler,1734)

如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy}，f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 连续，那么 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

1.1.4 全微分

定义 1.5 (可微)

若函数 $z=f(x,y)$ 在其定义域的内点 (x_0,y_0) 的全增量可表示为

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中 A，B 是不依赖于 Δx，Δy，而仅与 (x_0,y_0) 有关的两个常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数

$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是可微分的，称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分，记作 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$

简单记忆即：全增量等于线性主部加高阶无穷小，关于可微性的判定有以下三种方法.

1. 必要条件：$f'_x(x_0,y_0)$ 与 $f'_y(x_0,y_0)$ 都存在；
2. 充分条件：$f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 都连续；
3. 用定义判定：
   (a). $f'_x(x_0,y_0)$ 与 $f'_y(x_0,y_0)$ 是否都存在
   (b). $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 是否为 0

一般情况下，由于定义是充要条件，且操作比较简单，我们判断可微与否都是用定义直接来做，接下来通过一些简单的例题熟悉一下概念的运用.

例题 1.7 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0),\\ 0,(x,y)=(0,0),\end{cases}$$

在原点的可微性以及偏导数在原点的连续性.

解 （1）由偏导数的定义

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\Delta x\sin\frac{1}{|\Delta x|}=0,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\Delta y\sin\frac{1}{|\Delta y|}=0,$$

加之

$$\left|\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|=\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\left|\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|$$
$$\leqslant\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to0\,(\Delta x\to0,\Delta y\to0)$$

故函数在原点可微.

（2）当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

显然 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，但若 (x,y) 沿 $y=x$ 趋近于原点，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\sqrt{2}\mathrm{sgn}(x)\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}$$

极限不存在，因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)$ 不存在，因此 $f_x(x,y)$ 在原点不连续，同理可知 $f_y(x,y)$ 在原点也不连续.

1.2 偏导数与全微分的计算

1.2.1 复合函数

定理 1.6

若函数 $x=\phi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$ 在点 $(s,t)\in D$ 可微，$z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)=(\phi(s,t),\psi(s,t))$ 可微，则复合函数 $z=f\left(\phi\left(s,t\right),\psi\left(s,t\right)\right)$ 在点 (s,t) 可微，且它关于 s 与 t 的偏导数分别为

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

♡

当然实际的情况可能有很多层复合，大家可以按照课本上做的那样，画出变量的关系图，按照“连线相乘，分线相加”的原则写出偏导的表达式.

1.2.2 一阶全微分形式不变性

$z=f\left(u,v\right)$，$u=\phi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，f，ϕ，ψ 有一阶连续偏导数，则

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$$

不管是中间变量还是自变量，全微分的形式完全一样. 这个方法使用的比较少，我们通过一道例题了解一下.

例题 1.8 设 $z=\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x-y}}$，求 $\mathrm{d}z$、z_x、z_y.

解

$$\ln z=\frac{1}{4}\left[\ln\left(x+y\right)-\ln\left(x-y\right)\right]$$

设 $u=x+y$，$v=x-y$，$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$，

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{d}u}{x+y}-\frac{\mathrm{d}v}{x-y}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y}-\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{x-y}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2-y^2}$$

从而 $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x-y}}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2-y^2}$

于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x-y}}\cdot\dfrac{y}{x^2-y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x-y}}\cdot\dfrac{x}{x^2-y^2}$

在例题当中我们做了这样一件事，通过变换将关于 x、y 的二元函数变为了关于 u、v 的二元函数，再根据全微分的表达式，求得 $\dfrac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$，最后只需要“代入” $\mathrm{d}u$、$\mathrm{d}v$ 的表达式，将表达式变为 $A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y$ 的形式，而一阶全微分形式不变性告诉我们，这个形式正好就是 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$，从而也就得到了关于 x、y 的偏导数.

1.2.3 隐函数求导

一、由一个方程所确定的隐函数

设 $F(x,y,z)$ 有一阶连续偏导且 $F_z'\neq 0$，$z=z(x,y)$ 由 $F(x,y,z)=0$ 唯一确定，求偏导有两种方式：(1) 直接套用公式，将 x、y、z 视为独立的变量，$z_x=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$；(2) 在等式两边求导.

例题 1.9 求方程 $xy+\sin z+y=2z$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 设 $F(x,y,z)=xy+\sin z+y-2z$，$F_x=y$，$F_y=x+1$，$F_z=\cos z-2$，从而

$z_x=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{y}{2-\cos z}$，$z_y=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{x+1}{2-\cos z}$

$$z_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{2-\cos z}\right)=-\frac{y}{(2-\cos z)^2}\cdot\sin z\cdot z_x=-\frac{y^2\sin z}{(2-\cos z)^3}$$
$$z_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2-\cos z}\right)=\frac{(2-\cos z)^2-(x+1)\,y\sin z}{(2-\cos z)^3}$$

解 两边对 x 求偏导：$y+\cos z\dfrac{\partial z}{\partial x}=2\dfrac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{2-\cos z}$

对 y 求偏导：$x+\cos z\dfrac{\partial z}{\partial y}+1=2\dfrac{\partial z}{\partial y}\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+1}{2-\cos z}$

再求一次：$-\sin z\cdot\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\cos z\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$1-\sin z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\cos z\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

代入解方程即可.

二、由方程组所确定的隐函数

设 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 由 $\begin{cases}F\left(x,y,u,v\right)=0\\G\left(x,y,u,v\right)=0\end{cases}$ 所唯一确定，求 u_x 和 v_x 一般在等式两边关于 x 和 y 分别求导，再解方程得到.

例题 1.10 设有方程组 $xu-yv=x$，$yu+xv=1$，求 u_x，v_x，u_y，v_y

解 方程两边分别关于 x，y 求偏导

$$\begin{cases}xu_x-yu_x=1-u\\yu_x+xv_x=-v\\xu_y-yv_y=v\\yu_y+xv_y=-u\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x&-y&0&0\\y&x&0&0\\0&0&x&-y\\0&0&y&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\v_x\\u_y\\v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-u\\-v\\v\\-u\end{pmatrix},\ \text{记}\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}u_x\\v_x\\u_y\\v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\\&\boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-u\\-v\\v\\-u\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x&y&&\\-y&x&&\\&&x&y\\&&-y&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-u\\-v\\v\\-u\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\left(1-u\right)-yv\\y\left(u-1\right)-xv\\xv-yu\\-yv-xu\end{pmatrix}$$

对于方程组的情形其实就不推荐用隐函数的方法来做了，如果有兴趣的话，可以了解一下隐函数求导的终极版本.

定理 1.7

设 m 个 $n+m$ 元函数 $F_i(x_1,\cdots x_n,y_1\cdots,y_m)$，$i=1,\cdots,m$，满足以下条件：

（1）$F_i\left(x_1^0,\cdots x_n^0,y_1^0,\cdots,y_m^0\right)=0$

（2）在闭长方体

$$D=\left\{(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)\,\middle|\,|x_i-x_i^0|\leqslant a_i,|y_j-y_j^0|\leqslant b_j\right\}$$

上，函数 F_i 连续，且具有连续偏导数.

（3）在 $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$ 处，Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial\left(F_1,\cdots,F_m\right)}{\partial\left(y_1,\cdots,y_m\right)}\neq 0$

那么

（i）在 $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$ 的某个邻域上，可以从函数方程组唯一确定向量值隐函数 $\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1\left(x_1,\cdots,x_n\right)\\ \vdots\\ f_m\left(x_1,\cdots,x_n\right)\end{pmatrix}$

（ii）这个向量值隐函数在邻域上连续.

（iii）这个向量值隐函数在邻域上有连续的导数，且

$$\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\\
\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n}
\end{pmatrix}
=-\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\\
\dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}
\end{pmatrix}^{-1}
\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}\\
\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}
\end{pmatrix}$$

简记为，

$$\frac{\partial\left(y_1,\cdots,y_m\right)}{\partial\left(x_1,\cdots,x_n\right)}=-\left[\frac{\partial\left(F_1,\cdots,F_m\right)}{\partial\left(y_1,\cdots,y_m\right)}\right]^{-1}\frac{\partial\left(F_1,\cdots,F_m\right)}{\partial\left(x_1,\cdots,x_n\right)}$$

可以看出这个公式与 $z_x=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}\dfrac{\partial F}{\partial x}$ 还是高度相似的，但是并不需要掌握，用以娱乐即可.

例题 1.11 设有方程组 $xu-yv=x$，$yu+xv=1$，求 u_x，v_x，u_y，v_y

解 设 $F(x,y,u,v)=xu-yv-x$，$G(x,y,u,v)=yu+xv-1$，

当 $\dfrac{\partial\left(F,G\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\begin{vmatrix} x & -y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2+y^2\neq 0$ 时，由隐函数定理得到

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}&=-\begin{pmatrix} F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{pmatrix}\\
&=-\frac{1}{F_uG_v-F_vG_u}\begin{pmatrix} G_v & -F_v\\ -G_u & F_u\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{pmatrix}\\
&=-\frac{1}{F_uG_v-F_vG_u}\begin{pmatrix} G_vF_x-F_vG_x & G_vF_y-F_vG_y\\ -G_uF_x+F_uG_x & -G_uF_y+F_uG_y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = -\frac{1}{F_uG_v - F_vG_u}\begin{pmatrix} G_vF_x - F_vG_x & G_vF_y - F_vG_y \\ -G_uF_x + F_uG_x & -G_uF_y + F_uG_y \end{pmatrix}$$

而 $F_x = u - 1$，$F_y = -v$，$F_u = x$，$F_v = -y$，$G_x = v$，$G_y = u$，$G_u = y$，$G_v = x$.

从而 $u_x = \dfrac{x(1-u) - yv}{x^2 + y^2}$，$u_y = \dfrac{xv - yu}{x^2 + y^2}$，$v_x = \dfrac{-xv - y(1-u)}{x^2 + y^2}$，$v_y = \dfrac{-xu - yv}{x^2 + y^2}$

当然，对于具体的函数而言自然是无论如何都比较好处理的，我们接下来处理一些抽象函数.

例题 1.12 设函数 $f(u,v)$ 由 $f[xg(y), y] = x + g(y)$ 确定，其中 $g(y)$ 可微且 $g(y) \neq 0$，求 f_{uv}.

解 令 $u = xg(y)$，$v = y$，则

$$f(u,v) = \frac{u}{g(v)} + g(v)$$

从而 $f_u = \dfrac{1}{g(v)}$，$f_{uv} = -\dfrac{g'(v)}{[g(v)]^2}$

例题 1.13 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $f_{uu} + f_{vv} = 1$，又 $g(x,y) = f\left(xy, \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\right)$，求 $g_{xx} + g_{yy}$.

解 $g_x = yf_u + xf_v$，$g_y = xf_u - yf_v$

$g_{xx} = y(yf_{uu} + xf_{uv}) + x(f_{vu} + xf_{vv}) + f_v = f_v + y^2 f_{uu} + 2xyf_{uv} + x^2 f_{vv}$

$g_{yy} = x(xf_{uu} - yf_{uv}) - f_v - y(xf_{vu} - yf_{vv}) = -f_v + x^2 f_{uu} - 2xyf_{uv} + y^2 f_{vv}$

从而 $g_{xx} + g_{yy} = (x^2 + y^2)(f_{uu} + f_{vv}) = x^2 + y^2$.

笔记

1. 这里的 f_u 应当理解为 $f_u\left(xy, \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\right)$，仍需按照复合函数求导来做.
2. 本章许多看起来复杂的高阶偏导问题往往都有数理方程背景（尤其是计算求和、平方和等等），因此最终的结果通常是较为简洁的.

例题 1.14 设 $z = z(x,y)$ 是由 $F(x-y, y-z)$ 所确定的隐函数，求 z_x、z_y、z_{xy}.

解 方程两边分别关于 x、y 求导

$$F_1 - z_x F_2 = 0$$

$$-F_1 + (1 - z_y) F_2 = 0$$

解得 $z_x = \dfrac{F_1}{F_2}$，$z_y = 1 - \dfrac{F_1}{F_2}$，从而

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{(-F_{11} + (1-z_y)F_{12})F_2 - F_1(-F_{21} + (1-z_y)F_{22})}{F_2^2} \\ &= \frac{-F_{11}F_2^2 + F_{12}F_1F_2 + F_1F_2F_{21} - F_{22}F_1^2}{F_2^3} \\ &= \frac{2F_1F_2F_{12} - F_{11}F_2^2 - F_{22}F_1^2}{F_2^3} \end{aligned}$$

笔记

1. 一般如无特别声明，默认混合二阶偏导相等，合并同类项.
2. F_1 表示对第 1 个变量求导.

例题 1.15 设函数 $u = u(x,y)$，$v = v(x,y)$ 由方程组

$$\begin{cases} u = f(ux, x+y) \\ v = g(u - x, v^2 y) \end{cases}$$

所唯一确定，求 u_x，u_y.

解 方程关于 x 求偏导，得

$$\begin{cases} u_x = (u + xu_x) f_1 + v_x f_2 \\ v_x = (u_x - 1) g_1 + 2vyv_x \end{cases}$$

整理得到

$$\begin{cases}(1-xf_1)\,u_x-f_2v_x=uf_1\\ g_1u_x+(2vyg_2-1)\,v_x=g_1\end{cases}$$

由 Cramer 法则立得 $u_x=\dfrac{(2vyg_2-1)\,uf_1+f_2g_1}{(1-xf_1)\,(2vyg_2-1)+f_2g_1}$，$v_x=\dfrac{(1-xf_1)\,g_1-uf_1g_1}{(1-xf_1)\,(2vyg_2-1)+f_2g_1}$.

1.3 几何应用

1.3.1 曲线的切平面和法线

1. 曲面 $F(x,y,z)=0$：法向量 $\boldsymbol{n}=\left(F_x',F_y',F_z'\right)$
2. 曲面 $z=f(x,y)$：法向量 $\boldsymbol{n}=\left(f_x',f_y',-1\right)$

例题 1.16 求曲面 $2^{x/z}+2^{y/z}=8$ 在点 $M_0(2,2,1)$ 处的切平面和法线方程.

解 $F_x'\,(2,2,1)=\dfrac{1}{z}2^{x/z}\ln 2\,|_{(2,2,1)}=4\ln 2$

$F_y'\,(2,2,1)=\dfrac{1}{z}2^{y/z}\ln 2\,|_{(2,2,1)}=4\ln 2$

$F_z'\,(2,2,1)=-\dfrac{1}{z^2}\left(x2^{x/z}+y2^{y/z}\right)\ln 2\,|_{(2,2,1)}=-16\ln 2$

于是取法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,-4)$，故所求切平面方程为 $(x-2)+(y-2)-4\,(z-1)=0$，即 $x+y-4z=0$.

法线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$.

1.3.2 曲线的切线与法平面

1. $\begin{cases}x=x\,(t)\\ y=y\,(t)\\ z=z\,(t)\end{cases}$：切向量 $\boldsymbol{\tau}=\left(x'\,(t_0)\,,y'\,(t_0)\,,z'\,(t_0)\right)$
2. $\begin{cases}F\,(x,y,z)=0\\ G\,(x,y,z)=0\end{cases}$：切向量 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，其中 $\boldsymbol{n}_1=\left(F_x',F_y',F_z'\right)$，$\boldsymbol{n}_2=\left(G_x',G_y',G_z'\right)$.

例题 1.17 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程.

解 曲面 $x^2+y^2+z^2=6$ 在 $(1,-2,1)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-2,1)$，曲面 $x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$，则曲线在该点的切向量

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$$

故曲线在 $(1,-2,1)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{3}$.

法平面方程为 $x-z=0$.

解 代入 $z=-(x+y)$ 得到 $x^2+y^2+xy=3$，即 $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}=3$，得到曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos t-\sin t\\ y=2\sin t\\ z=-\sqrt{3}\cos t-\sin t\end{cases},t\in(0,2\pi)$$

$t_0=\dfrac{3\pi}{2}$，从而切向量 $\boldsymbol{\tau}=\left(\sqrt{3},0,-\sqrt{3}\right)$.

笔记 这种化参数方程的方法在曲线积分中还有机会用到

1.4 方向导数与梯度

1.4.1 方向导数

定义 1.6 (方向导数)

设点 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{l}$ 是平面上一非零向量，其单位向量 $\boldsymbol{e_l}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\beta\cdot\boldsymbol{j}$. 函数 $z=f(x,y)$ 在 P_0 的某邻域内有定义，P_0 为平行于向量 $\boldsymbol{l}$ 的直线 L 上的定点，若极限

$$\lim_{t\to0}\frac{f\left(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{t}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在直线 L 上的点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数. 记作 $\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$. 由导数的含义知，方向导数就是函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率.

令 $\boldsymbol{e_l}=\boldsymbol{i}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$. 令 $\boldsymbol{e_l}=\boldsymbol{j}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}$. 所以方向导数是偏导数的推广. 当函数可微时，可以通过偏导数来计算方向导数.

定理 1.8

设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则对于任一单位向量 $\boldsymbol{e_l}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\beta\cdot\boldsymbol{j}$，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿方向 l 的方向导数存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=f_x\left(x_0,y_0\right)\cos\alpha+f_y\left(x_0,y_0\right)\cos\beta$$

例题 1.18 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿 $\boldsymbol{l}=(1,-1,0)$ 方向的方向导数最大.

解 在椭球面上任取一点 $P(x,y,z)$，则函数在该点沿 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\,|_P=\sqrt{2}\,(x-y)$$

令 $t=\frac{x}{y}$，一方面，

$$x-y\leqslant|x-y|=\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{2x^2+2y^2+z^2}}\leqslant\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{2x^2+2y^2}}=\sqrt{\frac{t^2-2t+1}{2t^2+2}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{t+\frac{1}{t}}}\leqslant1$$

注意到 $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 时，$x-y=1$，故方向导数在该点取得最大值 $\sqrt{2}$.

解 令 $F\left(x,y,z,\lambda\right)=x-y+\lambda\left(2x^2+2y^2+z^2-1\right)$，

$$\begin{cases}F_x'=1+4\lambda x=0\\F_y'=-1+4\lambda y=0\\F_z'=2\lambda z=0\\F_\lambda'=2x^2+2y^2+z^2-1=0\end{cases}$$

解方程再代回验证即可.

笔记

1. 既然题目只要求了存在性，我们只需要“找到”一个点即可
2. 可以用 Lagrange 乘数法，并且对于大部分题目而言，拉乘得到的点是充要的

1.4.2 梯度

方向导数表征了函数在某点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的增加速度，方向导数大于 0 时，函数的变化是递增的，小于 0 时则递减，为了研究函数沿什么方向增加得最快，也即沿什么方向的方向导数最大，我们引入梯度的概念.

定义 1.7

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可偏导，则称向量 $f_x(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{j}$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的梯度. 记作 $\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0)$ 或者 $\nabla f(x_0,y_0)$.

设 $\boldsymbol{e_l}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\beta\cdot\boldsymbol{j}$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e_l}$，从而，$\boldsymbol{l}$ 的方向与梯度方向一致时，方向导数取得最大值 $|\nabla f(x_0,y_0)|$，方向相反时取得最小值 $-|\nabla f(x_0,y_0)|$

例题 1.19 中国国家大剧院的顶部是一个半椭球面 S，设其方程为 $z=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{36}}$.

（1）设 $M(x,y)$ 为 S 在 xOy 面投影区域内一点，问函数 z 在点 M 沿平面上什么方向的方向导数最小？

（2）求下雨时过剧院房顶上 $P(1,3,\sqrt{11})$ 的雨水流下的轨迹方程（假设雨水沿着 z 下降最快的方向流下）.

解 （1）由于

$$\mathbf{grad}\, z=\left(-\frac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}},-\frac{y}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}}\right)$$

故沿 $\left(\dfrac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}},\dfrac{y}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}}\right)$ 方向的方向导数最小.

（2）设雨水轨迹的投影方程为 $F(x,y)=0$，则其切向量 $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 平行于 $-\mathbf{grad\, z}$，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4y}{9x}\,(x\neq 0)\Rightarrow y=Cx^{4/9}$$

由 $F(1,3)=0$ 得 $C=3$，因此轨迹方程为 $\begin{cases} z=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{36}} \\ y=3x^{4/9} \end{cases}$

笔记 一类很无聊但是很重要的题型，一般来说方向导数和梯度很容易结合实际的背景，需要进行一些翻译.

1.5 极值与最值

例题 1.20 用条件极值方法证明：

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6,\forall a,b,c>0.$$

证明 先求 $f(a,b,c)$ 在条件 $a+b+c=6m$（$m>0$），$a,b,c>0$ 下的最值. 构造 Lagrange 函数 $L(a,b,c,\lambda)=ab^2c^3+\lambda(a+b+c-6m)$，令

$$\begin{cases} L_a=b^2c^3+\lambda=0 \\ L_b=2abc^3+\lambda=0 \\ L_c=3ab^2c^2+\lambda=0 \\ L_\lambda=a+b+c-6m=0 \end{cases}$$

解得 $a=m$，$b=2m$，$c=3m$.

由于 f 在有界闭区域 $D=\{(a,b,c)\,|a+b+c=6m,a>0,b>0,c>0\}$ 上非负连续，从而一定存在最大值，同时在边界 ∂D 上取得最小值 0，所以 f 的最大值一定在内点取得，进而上述得到的稳定点 $(m,2m,3m)$ 一定是

$f(a,b,c)$ 的最大值点，从而

$$f\left(a,b,c\right)=ab^2c^3\leqslant f\left(m,2m,3m\right)=108\cdot m^6=108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$$

□

例题 1.21（无条件极值——一元函数） 求由方程 $x^2+2xy+2y^2=1$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的极值.

解 记 $F(x,y)=x^2+2xy+2y^2-1$，则 $F_x=2x+2y$，$F_y=2x+4y$，$F_{xx}=2$，$F_{xy}=F_{yx}=2$，$F_{yy}=4$.

由 $F\left(x,y\right)=0$，两边对 x 求导得到 $F_x+y_xF_y=0$，即 $y'(x)=-\dfrac{F_x}{F_y}$，令 $y'(x)=0$，得到 $x+y=0$. 联立得到

$$\begin{cases}x+y=0\\x^2+2xy+2y^2=1\end{cases}$$

解得稳定点为 $P_1(1,-1)$，$P_2(1,-2)$. 由于

$$\begin{aligned}y''\left(x\right)&=-\frac{\left(F_{xx}+y'F_{xy}\right)F_y-F_x\left(F_{yx}+y'F_{yy}\right)}{F_y^2}\\&=\frac{F_xF_{yx}-\frac{F_x^2}{F_y}F_{yy}-F_{xx}F_y+F_xF_{xy}}{F_y^2}\\&=\frac{2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}-F_y^2F_{xx}}{F_y^3}\\&=\frac{4\left(2x+2y\right)\left(2x+4y\right)-4\left(2x+2y\right)^2-2\left(2x+4y\right)^2}{\left(2x+4y\right)^3}\\&=\frac{2\left(x+y\right)\left(x+2y\right)-2\left(x+y\right)^2-\left(x+2y\right)^2}{\left(x+2y\right)^3}\\&=-\frac{2y^2+2xy+x^2}{\left(x+2y\right)^3}\end{aligned}$$

于是 $y''\,|_{P_1}=-\dfrac{1-2+2}{(1-2)^3}=1>0$，$y''\,|_{P_2}=-\dfrac{1-2+2}{(-1+2)^3}=-1<0$，从而 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 -1；$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 1.

定理 1.9 (极值的的第二充分条件)

设 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0;\delta)$ 上一阶可导，在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq0$.

（1）若 $f''(x_0)<0$，则 f 在 x_0 取得极大值.

（2）若 $f''(x_0)>0$，则 f 在 x_0 取得极小值.

例题 1.22（无条件极值——二元函数） 求由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

解 分别在方程两边关于 x，y 求偏导

$$x-3y-yz_x-zz_x=0$$

$$-3x+10y-z-yz_y-zz_y=0$$

令 $z_x=z_y=0$，并与原方程联立

$$\begin{cases}x-3y=0\\3x-10y+z=0\\x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0\end{cases}$$

解得稳定点为 $P_1(9,3,3)$，$P_2(-9,-3,-3)$. 在 (1.1) 和 (1.2) 中再关于 x、y 求偏导

$$\begin{cases} 1 - yz_{xx} - z_x^2 - zz_{xx} = 0 \\ -3 - z_x - yz_{xy} - z_y z_x - zz_{xy} = 0 \\ 10 - z_y - z_y - yz_{yy} - z_y^2 - zz_{yy} = 0 \end{cases}$$

（1）代入 $(x,y,z)=(9,3,3)$ 及 $z_x=z_y=0$，得到 $z_{xx}=\frac{1}{6}$，$z_{xy}=-\frac{1}{2}$，$z_{yy}=\frac{5}{3}$，所以

$$z_{xx}>0, z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=\frac{1}{36}>0.$$

这说明 $(x,y)=(9,3)$ 是 z 的极小值点，极小值为 3.

（2）将 $(x,y,z)=(-9,-3,-3)$ 及 $z_x=z_y=0$ 代入，得到 $z_{xx}=-\frac{1}{6}$，$z_{xy}=\frac{1}{2}$，$z_{yy}=-\frac{5}{3}$，所以

$$z_{xx}<0, z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=\frac{1}{36}>0.$$

这说明 $(x,y)=(-9,-3)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 -3.

定理 1.10 (二元函数取极值的必要条件)

若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数，且在 P_0 取得极值，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0.$$

反之，若函数在 P_0 满足上式，则称 P_0 为 f 的稳定点. 若 f 存在偏导数，则其极值点必是稳定点，但稳定点并不都是极值点.

定理 1.11 (二元函数极值的充分条件)

设二元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上具有二阶连续偏导数，且 P_0 是 f 的稳定点. 则当 Hessian 矩阵

$$\boldsymbol{H}_f(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix}$$

是正定矩阵时，f 在 P_0 取得极小值；当 Hessian 矩阵负定时，f 在 P_0 取得极大值. 当 Hessian 矩阵不定时，f 在 P_0 不取极值. 一般用顺序主子式的符号来判断正定、负定. 负定是指其负矩阵正定，具体到 2 阶就是一阶顺子小于 0 而二阶顺子大于 0.

笔记 求无条件极值的步骤：

1. 对隐函数求导，代入一阶导为 0，与原方程联立解稳定点
2. 求二阶导（或二阶偏导），根据极值的充分条件验证是否为极值.

对于一元函数可能还有更复杂的情形，也就是如果二阶导为 0，那就要再求一阶，如果三阶导不等于0，那么在此处不取极值，如果等于零，再用四阶导判断，正负和极值的关系和二阶是一样的. 总之：奇数阶可以判断有没有可能是极值点，偶数阶正负可以判断极值点类型（如果奇数阶为 0 的话）

例题 1.23（条件极值—— 限制条件为闭区域） 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内接且各面均平行于坐标平面的长方体的最大体积.

解 长方体的最大体积转化为 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 下的最大值，构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

令

$$\begin{cases} L_x = 8yz + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ L_y = 8xz + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ L_z = 8xy + \dfrac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ L_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

由前三个方程得到 $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{4xyz}{\lambda}$，代入第四个方程得到 $\lambda = 12xyz$，再分别代回前三个方程，解得 $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$，$b = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$，$c = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

由于 f 在有界闭区域 $D = \left\{(x,y,z) \,|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\right\}$ 上非负连续，从而一定存在最大值，同时由于在边界 ∂D 上取得最小值零，所以 f 的最大值一定在 D° 中取得，进而上述的稳定点一定是最大值点，也即 $f(x,y,z) \leqslant f\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{8}{3\sqrt{3}}abc$，$V_{\max} = \dfrac{8}{3\sqrt{3}}abc$.

笔记 对于有界闭域上的函数，我们判断极值点的类型是用“闭域上连续函数必有最值”，用算出来的值和其他值进行比较（因为内部的最值点必为极值点，自然也满足极值的必要条件），大的就是极大值，小的就是极小值，再和边界比较就可以确定最大还是最小.（而不是像无条件一样考虑 Hessian 矩阵的正定性）

例题 1.24（条件极值——限制条件为开区域） 求函数 $f(x,y,z) = xyz$ 在条件 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}$（$r > 0$），$x > 0$，$y > 0$，$z > 0$ 下的极值.

解 构造 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{r}\right)$，令

$$\begin{cases} L_x = yz - \dfrac{\lambda}{x^2} = 0 \\ L_y = xz - \dfrac{\lambda}{y^2} = 0 \\ L_z = xy - \dfrac{\lambda}{z^2} = 0 \\ L_\lambda = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{r} = 0 \end{cases}$$

和上面一样解方程，解得 $x = y = z = 3r$.

为了判断是否为极值，将 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}$ 看作隐函数 $z = z(x,y)$，那么 $f(x,y,z) = xyz(x,y) = F(x,y)$ 就是一个二元函数，且

$$z_x = -\frac{z^2}{x^2}, z_y = -\frac{z^2}{y^2}$$

$$F_x = yz + xyz_x = yz - \frac{yz^2}{x}, F_y = xz + xyz_y = xz - \frac{xz^2}{y}$$

$$F_{xx} = yz_x - \frac{2xyzz_x - yz^2}{x^2} = \frac{2yz^3}{x^3}$$

$$F_{yy} = xz_y - \frac{2xyzz_y - xz^2}{y^2} = \frac{2xz^3}{y^3}$$

$$F_{xy} = F_{yx} = z + yz_y - \frac{z^2 + 2yzz_y}{x} = z - \frac{z^2}{y} - \frac{z^2}{x} + \frac{2z^3}{xy}$$

代入 $(x,y,z) = (3r,3r,3r)$ 有

$$F_{xx} = 6r > 0$$

$$F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 27r^3 > 0$$

从而在 $x = y = z = 3r$ 处取得极小值 $27r^3$.

笔记 对于限制条件为开区域的条件极值，还是构造 Lagrange 函数，解出稳定点以后，将边界条件视为 $z =$

$f(x,y)$，从而目标函数就是一个二元函数，然后再根据边界条件得到的 z_x，z_y 求出目标函数的一、二阶偏导，然后用 Hessian 矩阵判断极值点的类型.

第 2 章 重积分

2.1 二重积分

二重积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 是一个数. 当 $f(x,y) \geqslant 0$ 时，其值等于以积分区域 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶柱体的体积.

命题 2.1 (二重积分的性质)

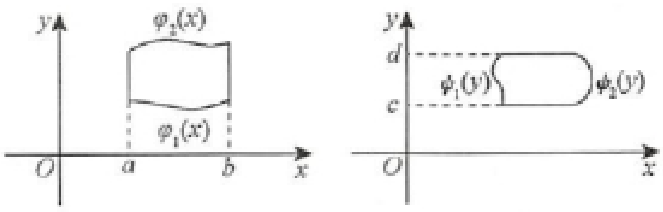
1. 若在 D 上 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$，则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.
2. 若 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $mS \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant MS$，其中 m 和 M 分别为 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值和最大值，S 为积分区域 D 的面积.
3. 绝对值不等式：$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$.
4. 积分中值定理：若 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S$，其中 $(\xi,\eta)\in D$，S 为积分区域 D 的面积.

2.1.1 直角坐标下计算二重积分

这是两个比较良好的区域的示意图，化为累次积分的方法就是“穿针引线”，比如对于左边的 X 型区域，用一根平行于 y 轴的直线自下而上穿过区域，起止的曲线就是下限和上限

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

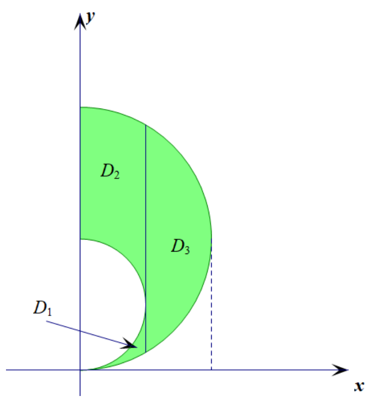
Y 型区域也是类似的.



当然对于一些复杂的区域，在不同的部位得到的起止结果可能是不一样的.

例题 2.1 设区域 $D=\{(x,y)\,|2y \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4y\ ,x \geqslant 0\}$，分别将 D 表示为 x 型区域和 y 型区域.

解 表示为 x 型区域可分为三块，其中

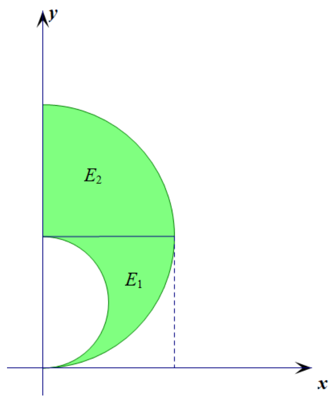


$$D_1=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant 1-\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

$$D_2=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{4-x^2}\end{cases}$$

$$D_3=\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ 2-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{4-x^2}\end{cases}$$

表示为 y 型区域可以分为两块



$$E_1=\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 2\\ \sqrt{2y-y^2}\leqslant x\leqslant \sqrt{4y-y^2}\end{cases}$$

$$E_2=\begin{cases}2\leqslant y\leqslant 4\\ 0\leqslant x\leqslant \sqrt{4y-y^2}\end{cases}$$

例题 2.2 计算二重积分 $\iint_D\left(x^2+y^2-x\right)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x$，$y=2x$，$y=2$ 围成.

解

$$\begin{aligned}\iint_D\left(x^2+y^2-x\right)\mathrm{d}\sigma&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2x}\left(x^2+y^2-x\right)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2\left(x^2+y^2-x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x^3-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(-\frac{4}{3}x^3+3x^2-2x+\frac{8}{3}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{13}{6}\end{aligned}$$

2.1.2 极坐标下计算二重积分

一般都是先 ρ 后 θ 来计算，ρ 的确定就是从原点（极点）发出的射线先后穿过的曲线来确定，θ 就是从原点出发的射线逆时针旋转所扫过的范围.

例题 2.3 计算 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由曲线 $x^2+y^2=2ay$（$a>0$）所围成.

解 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{32}{9}a^3.$

笔记 二重积分计算不难，但是在概率论中还是要大量使用，不要忘记

2.1.3 对称性技巧

包括积分区域对称性与变量的轮换对称性，这个相信大家都比较熟悉，写一个结论。

命题 2.2

若积分域 D 关于 y 轴对称，$f(x,y)$ 关于 x 有奇偶性，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_{x\geqslant 0}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\ ,f(-x,y)=f(x,y)\\ 0,f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases}$$

结论很简单，用起来也很简单，我们来尝试理解一下这件事情. 我们以奇函数为例，考虑这样的一个曲顶柱体，在 y 轴的左边取一个 $\Delta x\times\Delta y$ 的小矩形，假设在左侧 $f(x,y)>0$，可以得到一个体积为 V 的一个曲顶柱体. 那么对称地，在右侧也有一个对应的体积为 V 的曲顶柱体，但方向是往 z 轴负向生长的. 积分表示的面积、体积都是有向的，因此 y 轴左右的部分就会相互抵消，偶函数同理.

2.1.4 积分换序

一般情况下，当被积函数中含有非初等解的那些函数，就需要换序，包括经典的高斯积分、菲涅尔积分等等，这些都是无法用初等函数表达出原函数的. 换序的重要工作就是将 x 型区域改写为 y 型区域.

例题 2.4 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x=1-\sin 1.$

例题 2.5 $\int_0^3\mathrm{d}y\int_{y^2}^{9}y\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^9\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}y\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}y=\frac{1-\cos 81}{4}$

当然，还有一些很有意思的题目，不过在比较简单的高等数学考试当中，大部分都是计算，以及伪装成证明题的计算.

2.2 三重积分

相比于花里胡哨的换元法，三重积分比较重要的还是先一后二以及先二后一两种基础的方法，所以画出积分区域是很重要的步骤. 并且画出积分区域后，才可以根据各个参数的几何意义进行换元定限.

例题 2.6 计算 $I=\iiint_\Omega\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V$，其中 Ω 由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面和平面 $z=2$ 和 $z=8$ 所围成的立体.

解 用截面法计算，取定一个 z，设 $D=\left\{(x,y)\left|x^2+y^2=2z\right.\right\}$，从而

$$\begin{aligned}I&=\int_2^8\mathrm{d}z\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\int_2^8 2\pi z^2\mathrm{d}z\\&=336\pi\end{aligned}$$

当然柱面坐标和球面坐标也是十分重要的，换元法的意义在于简化积分的区域，因此当区域有两项平方和或者有三项平方和的时候可以考虑进行对应的换元，如果系数不一样还可以用椭球面的坐标. 三重的对称性有如下的结论.

命题 2.3

若积分区域 Ω 关于 xOy 面对称，$f(x,y,z)$ 关于 z 有奇偶性，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_{z\geqslant 0}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V\ , f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0, f(x,y,z)=-f(x,y,-z) \end{cases}$$

可以像二重积分对称性一样理解记忆，考虑体积微元与函数值的乘积即可，变量的轮换对称性也是十分重要的技巧.

例题 2.7 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(mx+ly+nz)^2\,\mathrm{d}V$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$.

解

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega}(mx+ly+nz)^2\,\mathrm{d}V &= \iiint_{\Omega}\left(m^2x^2+l^2y^2+n^2z^2\right)\mathrm{d}V \\
&= \frac{m^2+l^2+n^2}{3}\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V \\
&= \frac{m^2+l^2+n^2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a} r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi a^5}{15}\left(m^2+l^2+n^2\right)
\end{aligned}$$

第 3 章 曲线积分

3.1 第一型曲线积分

命题 3.1

设 xOy 平面上的光滑曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

笔记 还记得弧长公式吗？

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

所以这个公式就是把该代入的全代入就好了. 所以一个很重要的功课就是，写出空间曲线的参数式. 写出参数式以后想用什么奇偶性对称性都很简单了.

例题 3.1 计算 $I = \oint_L x^2\mathrm{d}s$，其中 L 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

这个例子很简单啦，怎么化参数方程前面已经演示过了，答案是 $\frac{2\pi}{3}R^3$. 也可以利用轮换对称性，注意，这个轮换对称性是“区域的轮换对称性”，因为当我们把 y 换为 x 的时候，如果需要积分的值不变的话，需要把区域表达式中的 x 和 y 进行对应的调换. 如果调换之后这个区域没有变化（但被积函数发生了变化），就可以像下面一样相加或者相减.

解

$$I = \frac{1}{3}\oint_L \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\mathrm{d}s = \frac{2\pi R^3}{3}$$

3.2 第二型曲线积分

命题 3.2

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\right]\mathrm{d}t$$

和第一型的一样，也就是直接代入，$\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$，把握一下路径的方向即可. 对于第二型，还有一类重要的题目是积分与路径无关的判定与应用.

定理 3.1

设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在单连通区域 D（没有洞）有一阶连续偏导数，则以下四个结论等价：

1. 线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关；
2. $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$，其中 L 为 D 中任一分段光滑闭曲线；
3. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x,y) \in D$
4. $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}F$

反应出来这些结论也就不难了，曲线积分最重要的内容就是 Green 公式，我们需要单开一节说明这个问题.

3.3 Green 公式

定理 3.2

设 D 为平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线所围成的单连通闭区域. 若函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数，那么

$$\iint_{\partial D} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

其中 ∂D 取正向，即诱导定向.

笔记

1. Green 公式要求单连通区域，所以如果内部有洞的话，需要分割区域.
2. 注意 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$，注意对谁求导以及谁减谁
3. 要求闭区域，因此需要补线
4. 注意函数在区域内需要有连续的偏导数，这个条件很重要.

例题 3.2 计算 $I=\displaystyle\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y$，其中 L 为圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$（$a>0$）的上半圆周，方向为从点 $A(2a,0)$ 到原点 $O(0,0)$.

解 补线 OA，设曲线和 OA 围成的区域为 D，由 Green 公式

$$\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y+\int_{\overline{OA}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y=m\iint_D\mathrm{d}\sigma=\frac{m\pi a^2}{2}$$

而

$$\int_{\overline{OA}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y=\int_0^{2a}0\mathrm{d}x+0=0$$

从而 $I=\dfrac{m\pi a^2}{2}$.

接下来是一道关于 Green 公式的经典问题.

例题 3.3 设 $a,b>0$，计算

$$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{ax^2+by^2}$$

其中 L 为简单封闭分段光滑曲线，且不经过原点，其方向为正向.

解 设 L 包围的区域为 D，记 $P=-\dfrac{y}{ax^2+by^2}$，$Q=\dfrac{x}{ax^2+by^2}$，显然在不包含原点的区域内都存在连续的偏导数，且

$$Q_x=P_y=\frac{by^2-ax^2}{(ax^2+by^2)^2}$$

因此需要对 D 是否包含原点做讨论.

（1）D 不包含原点时，由 Green 公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D(Q_x-P_y)\,\mathrm{d}\sigma=0.$$

（2）D 包含原点时，在 D 内部任取一个以原点为中心的椭圆 $ax^2+by^2=r^2$，记为 L'，并设 L' 围成的椭圆面区域记为 D'，则 $D-D'$ 就是以 L 与 L' 为边界的区域，且 P、Q 在 $D-D'$ 上有连续的偏导数，从而由 Green 公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{-L'}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+=\iint_{D-D'}(Q_x-P_y)\,\mathrm{d}\sigma=0.$$

从而

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L'}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L'}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{ax^2+by^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{L'}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{ab}.$$

第 4 章 曲面积分

4.1 第一型曲面积分

定理 4.1 (第一型曲面积分的计算)

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\begin{cases}\displaystyle\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ , z=z(x,y)\\ \displaystyle\iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\ , \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)\end{cases}$$

笔记 第一个公式是曲面为 $z=f(x,y)$ 的形式（或者$x=f(y,z)$，对应的要向 yOz 投影），第二个公式是参数式的曲面

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}$$

大家可以看到第一型的都比较简单，也是直接代入，$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$ 这个在求曲面的面积时也出现过哦。

例题 4.1 计算 $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 夹在 $z=0$ 和 $z=H$（$H>0$）之间的部分

解 $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_1}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ_1 为 Σ 在 yOz 面前侧的部分，方程为 $x=\sqrt{R^2-y^2}$，从而

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=\iint_D\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=R\int_{-R}^{R}\mathrm{d}y\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}z=\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

故 $I=2\pi\arctan\dfrac{H}{R}$.

上面我们用到了对称性，有如下的结论

命题 4.1

若曲面 Σ 关于 xOy 面对称，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\begin{cases}2\displaystyle\iint_{\Sigma_{z\geqslant 0}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S\ , f(x,y,z)=f(x,y,-z)\\ 0, f(x,y,z)=-f(x,y,-z)\end{cases}$$

同样地分析，曲面关于 xOy 面对称，那么在这个面之上有 $f(x,y,z)\mathrm{dS}$，在下面有 $f(x,y,-z)\mathrm{d}S$，面都是对称的，从而如果是奇函数，根据区间可加性，这两项就会抵消，从而使得积分为 0.

例题 4.2 计算 $I=\displaystyle\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2az$（$a>0$）

解 $I=2a\displaystyle\iint_\Sigma z\mathrm{d}S$，由于球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 关于平面 $z=a$ 对称，则

$$\iint_\Sigma(z-a)\,\mathrm{d}S=0$$

从而 $I=4\pi a^3$.

所以一定要灵活运用对称性呀，不是只有关于坐标面对称这么良好的情况的. 按照我上面分析的去理解似乎也就没那么难了.

4.2 第二型曲面积分

命题 4.2

对于曲面 $S: z = z(x,y)$，设其在 xOy 平面的投影为 D，则

$$\iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_D R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

正负号的选取根据 S 的方向向量与 z 轴正向的夹角来确定，若夹角为锐角（包括零角），则取正号；若夹角为钝角（包括平角），则取负号；若夹角为直角，则积分为 0，其它投影的情况与之类似。

为什么会有这个结果呢？我们假设一下锐角的情形吧，如果曲面在这里的方向向量与 z 轴正向的夹角为锐角，说明 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 正负性会一致，因此乘积为正，其余情况同理. 一般来说不会出现太复杂的情形，举一个例子.

例题 4.3 计算第二型曲面积分

$$\iint_S (xy - yz)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(y^2 + xz\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 S 为 $x = y = z = 0$，$x = y = z = a$ 六个平面所围成的立方体表面，并取外侧为正向.

解 首先考虑 $z = a$ 的顶面 S_1，方向向量与 z 轴夹角为零，也即含有 $\mathrm{d}z$ 的积分都为零，

$$\iint_{S_1} (xy - yz)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(y^2 + xz\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_1} \left(y^2 + ax\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{5}{6}a^4.$$

在 $z = 0$ 的底面 S_2，

$$\iint_{S_2} (xy - yz)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(y^2 + xz\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_2} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}a^4.$$

同理可以求得其他面的情形，最后得到 $I = a^4$.

例题 4.4 计算曲面积分 $I = \displaystyle\iint_\Sigma \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2 + z^2}$，其中 Σ 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及平面 $z = R$，$z = -R$（$R > 0$）所围成的立体表面外侧.

解 设 Σ_1，Σ_2，Σ_3 依次为 Σ 的上、下底和圆柱面部分，则

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_2} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

$$\iint_{\Sigma_3} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{yz}} \frac{-\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\pi^2 R}{2}$$

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

$$\iint_{\Sigma_3} \frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

从而 $I = \dfrac{\pi^2}{2}R$.

4.3 Gauss 公式

定理 4.2 (Gauss 公式)

空间区域 V 的边界是分片光滑的双侧封闭曲面 S，若函数 P、Q、R 在 V 上连续且有一阶连续偏导，则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 取外侧.

和 Green 公式很像对吧哈哈，记得补面，我们用一道经典的例题来熟悉这个定理.

例题 4.5 计算第二型曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

其中 Σ 是 $V=\{(x,y,z)\mid |x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2,|z|\leqslant 2\}$ 的边界，取外侧.

解 记 $P=\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，$Q=\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，$R=\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

作一个半径为 1 的球 $V_1: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，设其表面为 Σ_1，取内侧，则 P、Q、R 在 $V-V_1$ 上有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{x^2+y^2+z^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{z^2+x^2-2y^2}{x^2+y^2+z^2}$$
$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

注意到 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$，且在 Σ_1 上有 $x^2+y^2+z^2=1$，从而由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{-\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{-\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=3\iiint_{V_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi\end{aligned}$$

4.4 Stokes 公式

定理 4.3 (Stokes 公式)

设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线. 若函数 P、Q、R 在 S 和 L 上连续且有一阶连续偏导，则

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

其中 S 的侧与 L 的方向按右手法则确定.

可以用 Stokes 公式将空间第二型曲线积分转化为第一型曲面积分进行计算.

例题 4.6 求曲线积分

$$I=\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$$

其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴 $+\infty$ 看为逆时针方向.

解 记 L 所围的平面区域为 S，取上侧，其正侧单位法向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，由 Stokes 公式

$$I=\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt3} & \dfrac{1}{\sqrt3} & \dfrac{1}{\sqrt3}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\iint_S\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

例题 4.7 计算曲线积分 $I=\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\dfrac{y^2}{2}\mathrm{d}z$，其中 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往负向看去为逆时针方向.

解 记平面 $z=x+y$ 包含在柱面 $x^2+y^2=1$ 内的部分上侧为 Σ，其法线向量的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，则由 Stokes 公式得

$$I=\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(1-x-y)\,\mathrm{d}S=\pi$$

上面我们用到了两类曲面积分的关系

定理 4.4

设 S 为光滑曲面，正侧单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，$P$，$Q$，$R$ 在 S 上连续，则

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.$$

♡

到此为止吧！无穷级数主要是一些代数变形的技巧，靠大家自己平时的积累了，没有特别难理解的定理。Fourier 级数只需要会求系数（套公式）就可以了，至于空间解几，太无聊了，我拒绝写.