基于压缩感知的信号重构

摘要:：传统的 Nyquist 采样定理要求采样频率必须大于信号最高频率的两倍，当被采样信号频率过高时，导致采样点过多，给后续的处理和传输造成困难.近年来,诞生了一种新的采样模式——压缩感知。针对稀疏或可压缩信号，该理论在采样的同时就可对信号进行适当压缩，其采样率远低于 Nyquistt 采样定理限制下的采样率。该理论利用原始信号的稀疏性先验知识，通过合适的优化算法，可由少量的采样值或观测值对信号进行重建。本文主要介绍了压缩传感的基本理论及部分重构算法。

Abstract：The sampling rate must be two times higher than the highest frequency of the signal based on Nyquist sampling theorem. When the frequency of the signal is too high, there will be too many sampling points to process and transmit. Recently, a new sampling theorem has been proposed——compressed sensing. For sparse and compressive signal, the sampling rate based on CS can be very lower than the sampling rate based on Nyquist. This is because that it compress the signal when sampling it. The signal can be reconstructed exactly by using the appropriate reconstruction algorithms. This paper surveys the principles of compressive sensing and part of the reconstruction algorithms.

1、引言

传统的信号获取和处理过程主要包括采样、压缩、传输和解压缩四个部分，如图 1 所示。其采样过程必须满足香农采样定理，即采样频率不能低于模拟信号频谱中最高频率的 2 倍。传统的信息获取与处理时在信号传输前进行数据压缩，接收到数据后再解压缩。

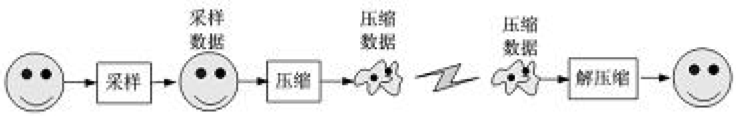


图1　传统的信息获取与处理流程

如果信号本身是可压缩的，那么是否可以直接获取其压缩表示(即压缩数据)，从而略去对大量无用信息的采样呢？Candés 在 2006 年从数学上证明了可以从部分傅立叶变换系数精确重构原始信号，为压缩传感奠定了理论基础[1]。Candés 和 Donoho 在相关研究基础上于 2006 年正式提出了压缩传感的概念[2][3]。 其核心思想是将压缩与采样合并进行,首先采集信号的非自适应线性投影(测量值)，然后根据相应重构算法由测量值重构原始信号[2]。 压缩传感的优点在于信号的投影测量数据量远远小于传统采样方法所获的数据量，突破了香农采样定理的瓶颈,使得高分辨率信号的采集成为可能. 压缩传感理论框架如图 2 所示

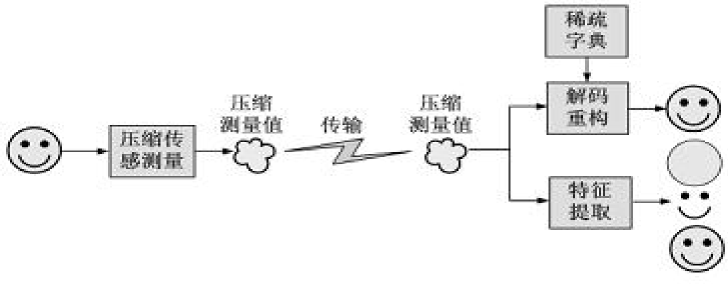


图2　压缩传感理论框架

2、压缩感知基本理论

压缩传感理论主要包括信号的稀疏表示、编码测量和重构算法等三个方面[4]。信号的稀疏表示就是将信号投影到正交变换基时，绝大部分变换系数的绝对值很小，所得到的变换向量是稀疏或者近似稀疏的，可以将其看作原始信号的一种简洁表达[5]，这是压缩传感的先验条件，即信号必须在某种变换下可以稀疏表示。通常变换基可以根据信号本身的特点灵活选取，常用的有离散余弦变换基、快速傅立叶变换基、离散小波变换基、Curvelets 基、Gabor 基以及冗余字典等. 在编码测量中,首先选择稳定的投影矩阵，为了确保信号的线性投影能够保持信号的原始结构，投影矩阵必须满足约束等距性(Restricted Isometry Property，RIP)条件[6]，然后通过原始信号与测量矩阵的乘积获得原始信号的线性投影测量.最后，运用重构算法由测量值及投影矩阵重构原始信号. 信号重构过程一般转换为求解一个最小 l_0 范数的优化问题，解方法主要有最小 l_1 范数法[7]、匹配追踪系列算法[8]等。

3、利用压缩传感重构信号

首先考虑一般的信号重构问题，即已知某一个测量矩阵 $\Phi \in R^{M\times N}(M \le N)$ 以及某未知信号 x 在该矩阵下的线性测量值 $y \in R^M$，

$$y = \Phi x \qquad (1)$$

上述方程也可以看做原信号 x 在 Φ 下的线性投影，现在考虑由 y 重构 x。显然，由于 y 的维数远远低于 x 的维数，方程（1）有无穷多个解，即该问题是不适定的，很难重构原始信号。然而，如果原始信号 x 是 K 稀疏的，并且 y 与 Φ 满足一定的条件，理论证明，信号 x 可以由测量值 y 通过求解最优 l_0 范数问题精确重构[1]：

$$\hat{x} = \arg\min \| x \|_0 \ \ s.t. \ \ \Phi x = y \qquad (2)$$

上式中，$\| . \|_0$ 为向量的 l_0 范数，表示向量 x 中非零元素的个数。Candés 等指出，如果要精确重构 K 稀疏信号 x，测量次数 M（即 y 的维数）必须满足 $M = O(K\log(N))$，并且矩阵 Φ 必须满足约束等距性条件[9][10]。

然而常见的自然信号在时域内几乎都是不稀疏的，因而上述信号重构过程不能直接应用于自然信号的重构。信号稀疏表示理论指出，自然信号可以通过某种变换 Ψ 进行稀疏表示，即 $f = \Psi x$，x 为该信号在 Ψ 变换域的稀疏表示。考虑测量公式 $y = \Phi f$，并且 f 是可以稀疏表示的，即 $f = \Psi x$，则有

$$y = \Phi f = \Phi \Psi x = \tilde{\Phi} x \qquad (3)$$

其中 $\tilde{\Phi} = \Phi\Psi$ 为 $M \times N$ 的矩阵，被称为传感矩阵。y 可以看作是稀疏信号 z 关于测量矩阵 $\tilde{\Phi}$ 的测量值。这时如果 $\tilde{\Phi}$ 满足约束等距性条件，可以通过求解一个类似于（2）的最优 l_0 范数问题（4）来重构稀疏信号 x，即

$$\hat{x} = \arg\min \| x \|_0 \ s.t. \ \tilde{\Phi} x = y \qquad （4）$$

由于 Ψ 是固定的 $\tilde{\Phi} = \Phi\Psi$ 满足约束等距性，则测量矩阵 Φ 就必须满足一定的条件。如果已经得到了 f 的稀疏表示 $\hat{x}$，可以进一步由变换基 Ψ 通过下式精确重构原始信号 $\hat{f}$

$$\hat{f} = \Psi \hat{x} \qquad (5)$$

这就是压缩传感的核心思想, 即与传统信号采样方法对原始信号 f 先采样后压缩不同, 压缩传感由少量线性测量通过求解最优化问题(4)直接得到信号 f 的压缩表示 x, 突破了香农采样定理的瓶颈, 降低了对传感器件分辨率的要求, 使得超高分辨率信号获取成为可能。

下面通过正交匹配跟踪实现重构。

4、算法实现

匹配跟踪算法是一种贪婪算法，原理如下：由于 s 是稀疏信号，由图一可以看出，在计算 y 的过程中，只有 s 中非零行所对应的测量矩阵列元素的值参与了运算，即是说这些元素与 y 最相匹配。基于以上，设余量为 r_t，设 $r_0 = y$，把 r_t 投影到测量矩阵 Φ 的列向量 φ_j，j=1,2…,N 中，记 $\bar{r_t} = < \bar{r}, \bar{\varphi_j} > \bar{\varphi} + \bar{r_{t+1}}$，范数平方得 $\| \bar{r_t} \|^2 = \| < \bar{r}, \bar{\varphi_j} > \varphi + \bar{r_{t+1}} \|^2$，由于 $\bar{\varphi_j}$ 和 $\bar{r_{t+1}}$ 正交，混合项内积为 0，可得 $\| \bar{r_t} \|^2 = \| < \bar{r}, \bar{\varphi_j} > \|^2 + \| \bar{r_{t+1}} \|^2$，算法是求与当前余量 r_t 最匹配的量，即在 φ_j，j=1,2…,N 中选出使 $\| < \bar{r}, \bar{\varphi_j} > \|^2$ 最大的项 φ_{λ_t}，然后计算 x 中对应的非零元素 X_{λ_t} 及余量 r_{t+1}, $x_{\lambda_t} = < r_t, \varphi_{\lambda_r} >, \bar{r_{t+1}} = \bar{r_t} - < \bar{r_t}, \bar{\varphi_{\lambda_r}} > \bar{\varphi_{\lambda_r}}$ 再次循环。设有 M 维的数据向量 y，M*N 的测量矩阵 Φ，理想稀疏信号的估计量 $\hat{x}$，N 维的集合 Λ_m，包含 m 个元素，其取值为{1,2…,N}，匹配矩阵 Ω，用于存放从 φ_j 中选出来的向量，Ω_0 为空集，N 维的余量 r_m，其算法步骤如下

1、初始化余量 r_0=y,索引集合 Λ_0 为空集，迭代次数 t=1

2、找到索引 λ_t，使其满足 $\lambda_t = \arg \max\limits_{j=1,2,\dots N} |< r_{t-1}, \varphi_j >|$

3、增加索引集合 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$ 和集合 $\Omega_t = [\Omega_{t-1}, \varphi_{\lambda_t}]$

4、求 x 中对应的非零元素 X_{λ_t}： $x_{\lambda_t} = < r_t, \varphi_{\lambda_r} >$

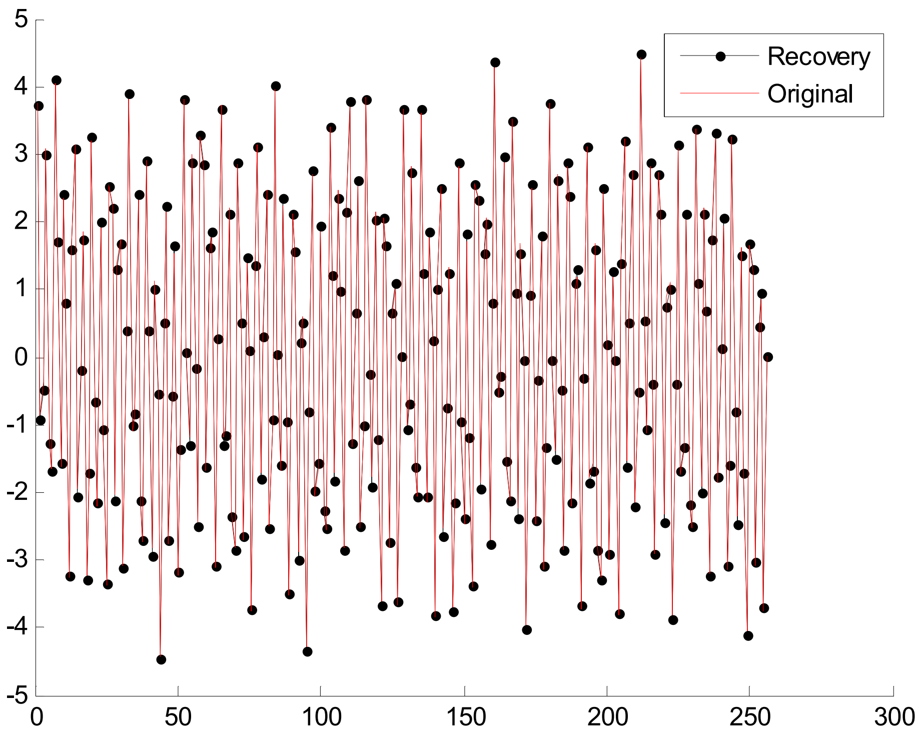
5、求余量 r_{t+1} : $\bar{r_{t+1}} = \bar{r_t} - < \bar{r_t}, \bar{\varphi_{\lambda_r}} > \bar{\varphi_{\lambda_r}}$

6、增加 t，验证 t<m 是否成立，如果成立，则返回第二步。

7、则最后 $\hat{x}_t$ 即为要恢复的信号 $\hat{x}$。

在匹配追踪算法中，φ_j，j=1,2…,N 并不是相互正交的。故 OMP 算法对已选择的各列逐一进行正交化，把新选出的列 φ_{λ_t} 与 t-1 次选出的列向量进行正交化。再把 r_t 投影到正交化后的向量 φ_{λ_t}' 上，得余量 $\bar{r}_{t+1} = \bar{r}_t - <\bar{r}_t, \bar{\varphi}_{\lambda_r} > \bar{\varphi}_{\lambda_r}'$，再次循环。

下面对一个信号进行重构，结果如下图所示。程序见 OMP.m 文件。



如图所示，黑点即为重构图像，红色的为原始图像。根据图示，使用压缩感知恢复数据的能在少量数据的基础上获得比较高的精度。

五、总结

本文通过对压缩感知相关知识及算法的介绍，方便大家了解这样一种新的数据恢复的方法。

参考文献

[1] Candés E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. IEEE Transactions on Information Theory. 2006, 52(2): 489−509

[2] Donoho D L. Compressed sensing. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289−1306

[3] Candés E. Compressive sampling. In: Proceedings of International Congress of Mathematicians. Zürich, Switzerland: European Mathematical Society Publishing House, 2006.1433−1452

[4]Baraniuk R. Compressive sensing. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118−121

[5]Olshausen B A, Field D J. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images. Nature, 1996, 381(6583): 607−609

[6] Candés E, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling. Inverse Problems, 2007, 23(3): 969−985

[7] Candés E, Braun N, Wakin M B. Sparse signal and image recovery from compressive samples. In: Proceedings of the 4th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro. Washington D. C., USA, USA: IEEE,2007. 976−979

[8]Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655−4666

[9]Candés E, Tao T. Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406-5425

[10] Candés E, Tao T. Decoding by linear programming: IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(12): 203-4215