交巡警服务平台的设置与调度

摘要

本文针对交巡警服务平台设置和调度的两个问题进行数学建模并求解。

针对本文要解决的问题，我们采用 Floyd 算法算出各个路口与平台之间的最短距离作为问题分析的基础数据；服务平台设置为 0−1 规划问题，可用 Monte Carlo 算法或 Lingo 进行直接求解。对于紧急情况的调度问题，我们采用了二部图与匈牙利最大匹配算法。

问题一包括三部分，分别是分配 A 区交巡警管辖范围，确定重大案件发生时的调度方案即封锁 13 个路口，以及合理调整服务平台的数量和位置。对于分配 A 区服务平台管辖范围，利用 Monte Carlo 算法产生一系列划分方案，然后根据不同的评价标准，包括距离之和最短、负载均衡和数量均衡三个方面，建立目标函数，通过非线性规划问题的求解方法找出最优解。另一种做法是直接使用 Lingo 求解。对于确定重大案件发生时的调度方案即封锁 13 个路口，考虑两个因素，一是服务平台封锁 13 个出口所需要的总时间最短，二是封锁过程中服务平台到相应封锁出口的最远距离最短，使用匈牙利算法对 0-1 规划问题进行求解。对于合理调整服务平台的数量和位置，有两个调整原则，一是使每一个路口都有服务平台管辖，最终结果为：增设 4 个服务平台，（28,39,48,88）二是使各服务平台的工作量尽可能均衡。最终结果为：增设 4 个服务平台，分别是 29,40,28,91。

问题二分为两部分，一是分析现有服务平台设置方案的合理性，二是设计一起实际案件的围堵方案。对于分析现有服务平台设置方案的合理性，我们主要考虑以下几个指标：每个区平均每个服务平台的工作量，每个区各平台工作量方差，超时路口个数（即距离服务台远于 3 分钟路程），平均每个服务台覆盖路口面积及平均每个平台管辖人口数量，要求工作量、覆盖面积、管辖人口数量尽可能平均，要求各平台工作量方差、超时路口个数尽可能小，在此基础上对不能满足要求的区进行合理的平台设置。对于设计实际案件的围堵方案，考虑在时间 t_0 内犯罪分子的活动范围，在此时间内使警力封锁住其全部活动范围的下一个路口处，即将犯罪分子包围在活动范围内。模型的最终结果为围堵犯罪嫌疑人的最短时间约为 8 分钟。

最后本文分析了现有模型的缺陷，提出了进一步的改进方向。
关键词：0-1 规划　　Floyd 算法　　Monte Carlo 算法　二部图和匈牙利算法

Abstract

In this paper, the mathematics modeling and solving of the two issues of setting up and dispatching the patrol police service platform are carried out.

For the problems to be solved in this paper, we use the Floyd algorithm to calculate the shortest distance between each intersection and the platform as the basic data for problem analysis. The distribution of service platform is set to the 0-1 planning problem, which can be directly solved by Monte Carlo algorithm or Lingo. For the emergency scheduling problem, we use the bipartite graph and Hungary's largest matching algorithm.

Problem one includes three parts. They are to assign the jurisdiction of Area A to the jurisdiction of the patrols, determine the scheduling plan for the occurrence of major cases, that is, block 13 junctions, and reasonably adjust the number and location of service platforms. For allocating area A service platform jurisdiction, use Monte Carlo algorithm to generate a series of division schemes, and then establish objective function based on different evaluation criteria, including minimum distance sum, load balance and quantity balance, through nonlinear programming problem. The solution method finds the optimal solution. Another approach is to use Lingo directly. For determining the scheduling of major cases, that is, blockade of 13 intersections, consider two factors. First, the total time required for the service platform to block 13 exports is the shortest, and the second is the maximum distance between the service platform and the corresponding blockade in the process of blockade is the shortest. We used the Hungarian algorithm to solve this 0-1 programming problem. There are two adjustment principles for a reasonable adjustment of the number and location of service platforms. First, each intersection has a service platform jurisdiction. The final result is: the addition of four service platforms (28, 39, 48, 88). The workload of each service platform is as balanced as possible. The end result is: There are four additional service platforms, 29, 40, 28, and 91 respectively.

Question 2 is divided into two parts. One is to analyze the rationality of the existing service platform setting plan, and the other is to design a containment plan for an actual case. For the analysis of the rationality of the existing service platform setting plan, we mainly consider the following indicators: the average workload of each service platform in each district, the variance of the workload of each platform in each district, and the number of overtime crossings (ie distance from the service desk More than 3 minutes away), each service station covers the intersection area and the average population of each platform. The workload, coverage area, and number of people under the jurisdiction are required to be as even as possible. The workload of each platform is required to be within the variance and the number of overtime crossings is required. It may be small. On this basis, a reasonable platform can be set up for areas that cannot meet the requirements. For the containment plan for designing an actual case, consider the range of activities of criminals within time t0, during which time the police force will block the next intersection of its entire range of activities, that is, the criminals will be surrounded by the scope of activities. The final result of the model is that the minimum time for contaminating suspects is about 8 minutes.

In the end, the paper analyzes the defects of the existing models and proposes further improvements.

Keywords: 0-1 planning Floyd algorithm Monte Carlo algorithm bipartite graph and Hungarian algorithm

交巡警服务平台的设置与调度

一、问题重述

警察肩负着刑事执法、治安管理、交通管理、服务群众四大职能。为了更有效地贯彻实施这些职能，需要在市区的一些交通要道和重要部位设置交巡警服务平台。每个交巡警服务平台的职能和警力配备基本相同。由于警务资源是有限的，如何根据城市的实际情况与需求合理地设置交巡警服务平台、分配各平台的管辖范围、调度警务资源是警务部门面临的一个实际课题。

现需建立数学模型分析解决以下问题：

（1）①分配 A 区各交巡警平台分配管辖范围：根据中心城区 A 的交通网络和现有的 20 个交巡警服务平台的设置情况示意图为各交巡警服务平台分配管辖范围，使其在所管辖的范围内出现突发事件时，尽量能在 3 分钟内有交巡警（警车的时速为 60km/h）到达事发地。

②给出当发生重大突发事件时交巡警服务平台警力合理的调度方案：对于重大突发事件，需要调度全区 20 个交巡警服务平台的警力资源，对进出该区的 13 条交通要道实现快速全封锁。实际中一个平台的警力最多封锁一个路口。

③根据需要确定增加平台的最佳个数和位置：根据现有交巡警服务平台的工作量不均衡和有些地方出警时间过长的实际情况，拟在该区内再增加 2 至 5 个平台，请确定需要增加平台的具体个数和位置。

（2）①分析现有服务平台设置方案的合理性：针对全市（主城六区 A，B，C，D，E，F）的具体情况，按照设置交巡警服务平台的原则和任务，分析研究该市现有交巡警服务平台设置方案（参见附件）的合理性。

②围堵方案设计：如果该市地点 P（第 32 个节点）处发生了重大刑事案件，在案发 3 分钟后接到报警，犯罪嫌疑人已驾车逃跑。为了快速搜捕嫌疑犯，请给出调度全市交巡警服务平台警力资源的最佳围堵方案。

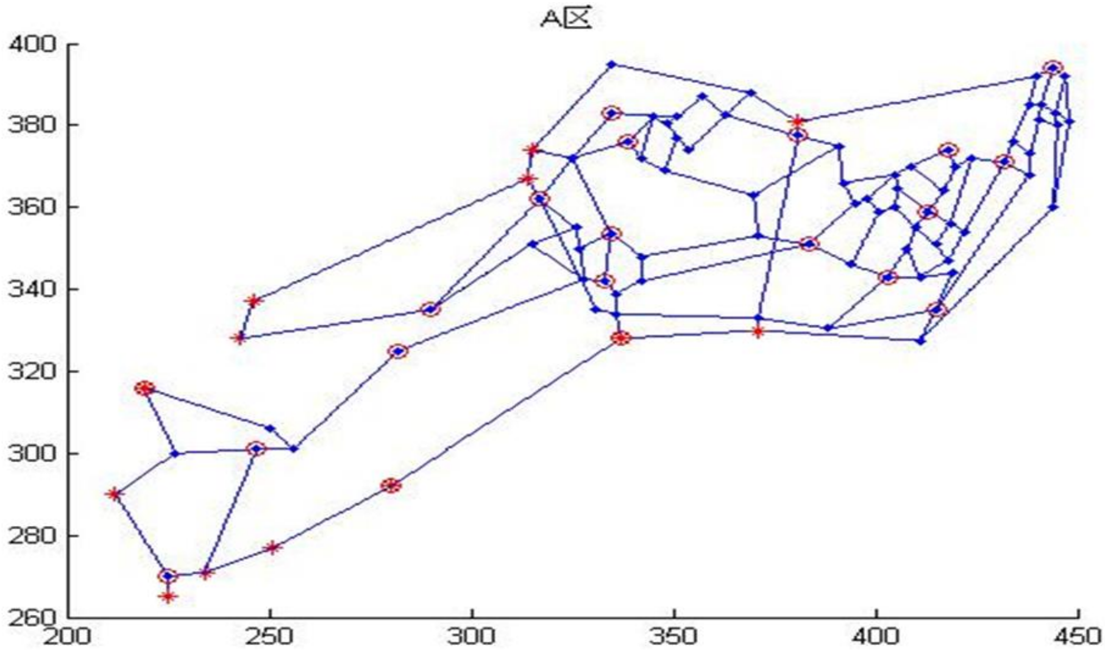


图 1　A 区的交通网络与平台设置的示意图

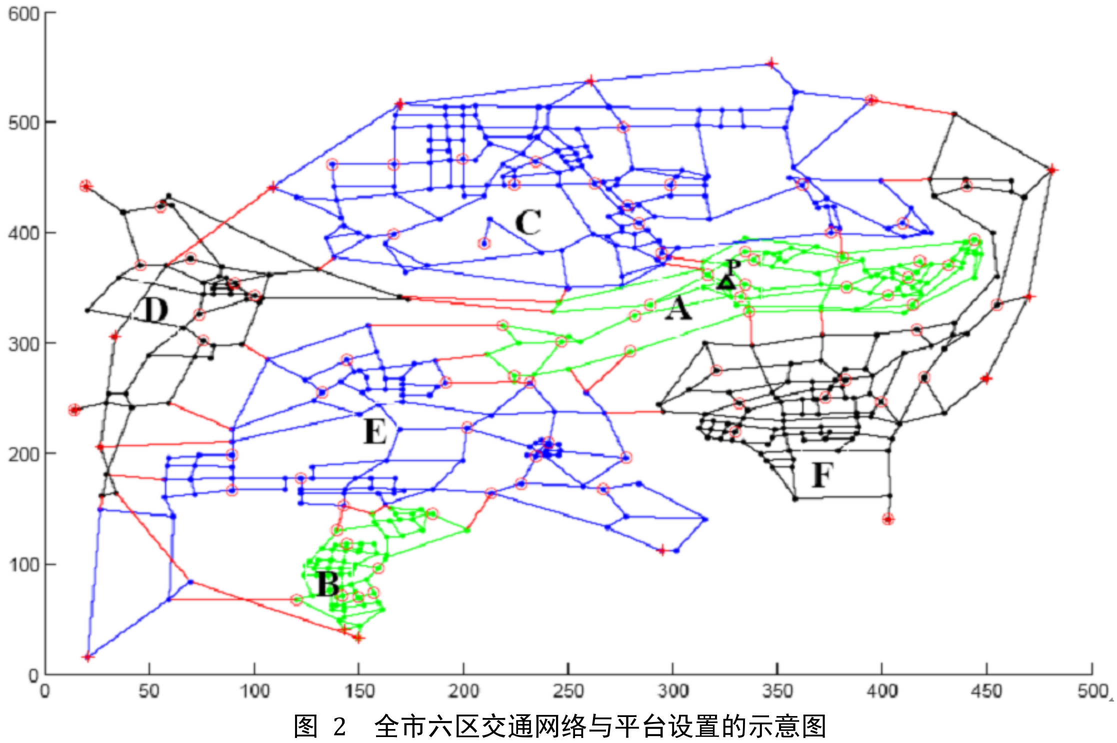


图 2　全市六区交通网络与平台设置的示意图

二、问题分析

本题以某市设置的交巡警平台的相关情况为背景，建立数学模型。

1、观察附件中所给地图和数据发现，可以先对数据进行预处理，包括对 A 区 92 各点编号和利用 Floyd 算法求出全区 582 个点之间的最短距离。

2、问题一

问题一主要分成三个小部分，分别是分配 A 区交巡警管辖范围，确定重大案件发生时的调度方案，以及合理调整服务平台的数量和位置。

对于分配 A 区交巡警管辖范围，我们的思路是先排除三种特殊情况：

（1）20 个设置好的服务台各自划归在自己的辖区内；

（2）对于 3km 内没有找到服务台的节点，划归在距离它最近的服务台辖区内；

（3）对于 3km 内只有一个服务台的节点，直接将此节点划归在该服务台的辖区内。

然后设定一个评价指标，通过 0-1 规划将剩下的路口划分到 20 个交巡警平台内。作为对比，我们还采用了 Monte Carlo 算法随机分配，并计算相应的指标，从随机的方案中选择指标最符合要求的分配方案。

对于发生重大案件时的调度方案，我们需要考虑两个重要因素，一是 20 个服务平台封锁 13 个出口所需要的总时间要尽可能短，二是封锁过程中服务平台到相应封锁出口的最远距离要尽可能短，为此我们先随机分配，再根据这两个指标分别找到对应的最优解。

对于合理调整服务平台的数量和位置，思路是考虑在原始图中 3km 以内没有服务平台的点（可称为孤立点），然后以其为中心以 3km 为半径在其周围道路上设置预服务平台，当多个孤立点的预服务平台发生重合的情况时，则选用重合点作为服务平台，然后再将新的服务平台和原有的 20 个混合起来，对 A 区内所有的点再做随机分配，根据不同的指标找到不同的最优解。

3、问题二

问题二分成两个部分，首先是分析现有服务平台设置方案的合理性，二是设计一起实际案件的围堵方案。

对于现有服务平台设置的合理性，考虑以下几个评价指标，定义安全度函数，比较 6 个区的安全度；定义负载函数，即每个路口的犯罪率及到服务台的距离的关系函数，比较 6 个区的平均负载；考虑孤立路口（即 3km 以内没有服务台的路口）数量；最后还可以考虑每个区的人口数量和服务台数量之间的关系。还有其他评价指标，但本文暂不考虑。

对于设计一起实际案件的围堵方案，我们的想法是考虑在时间 t_0 内犯罪分子的活动范围，在此时间内使警力封锁住其全部活动范围的下一个路口处，即将犯罪分子包围在活动范围内。不考虑警察的反应时间，我们从 t_0 为 3 分钟开始增大，方法和前面用 20 个服务台堵住 13 个路口的方法相同，直到找到能够实现包围的最短时间为止。

以上即为我们对此问题的分析和解决思路，下面是建模阶段。

三、基本假设

1、假设案发地点均位于路口

2、假设警车和歹徒车辆均以 60km/h 行驶，不存在影响车辆行驶的其他因素

3、一个平台的警力最多封锁一个路口，每个路口只需要一个交巡警服务平台管辖

4、路口增设新的交巡警平台不影响路口的发案率

5、接到报警后，交巡警平台立刻展开围捕行动，无反应延迟时间。

四、名词解释

1、孤立路口：3km 范围内没有服务台的路口。

2、负载：定义每个交巡警服务平台的负载为该平台辖区内路口到平台的最短距离和该路口发案率的乘积。

3、服务台工作量：与服务台的所管辖的路口发案率、距离及 3km 以内其余服务台数量相关的函数。

4、安全度：用来评估一个路口的安全度，与路口发案率、距服务台的距离以及服务台负载相关的函数。

五、参数说明

参数	定义
i	路口编号（包含 20 个平台）
j	平台编号（只有平台）
$\boldsymbol{a_i}$	第 i 个路口隶属于的平台编号 j
$\boldsymbol{c_i}$	每个路口的发案率
$\boldsymbol{dis(j,i)}$	路口 i 到平台 j 的最短距离
D	所有路口到对应平台的最短距离之和
$\boldsymbol{load_j}$	交巡警服务平台的负载
$\boldsymbol{P}$	服务台工作量
$\mathbf{S}$	安全度

六、建立模型

（一）问题一

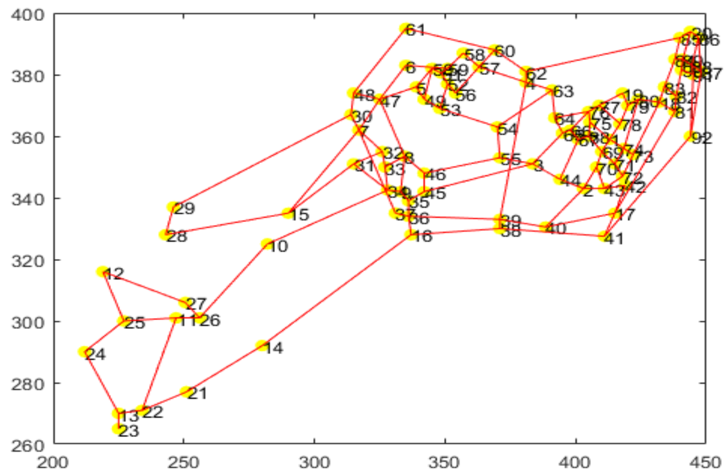
问题一主要分成三个小部分，分别是分配 A 区交巡警管辖范围，确定重大案件发生时的调度方案，以及合理调整服务平台的数量和位置。

- 1、分配 A 区交巡警管辖范围

（1）首先先对 A 区中 92 个点进行数据处理。

①A 区 92 个点坐标的对应

利用 matlab 编程，以及附录中 A 区 92 个点标出其序列号。



②利用 Floyd 算法求解出 A 区 92 个点之间的最小距离矩阵

Floyd 算法[1]可以通过一个图的权值矩阵求出它每两点之间最短距离矩阵。利用 matlab 编程实现 Floyd 算法，求出 92 个点（包括 20 个交巡警服务平台和 72 个路口）之间的最短距离，得到 92×92 的矩阵，部分如下表所示。

0	1.8987	3.8839	4.5352	9.3743	9.5375	11.5	9.0226	9.2254
1.8987	0	2.1117	5.6851	7.8337	9.8421	9.7281	7.2504	7.4532
3.8839	2.1117	0	4.0434	5.7221	7.7304	7.6165	5.1387	5.3416
4.5352	5.6851	4.0434	0	4.92	5.0023	7.6567	8.3273	8.9867
9.3743	7.8337	5.7221	4.92	0	2.9426	2.7366	3.5357	4.6954
9.5375	9.8421	7.7304	5.0023	2.9426	0	2.7672	3.5663	4.726
11.5	9.7281	7.6165	7.6567	2.7366	2.7672	0	2.4777	2.9092
9.0226	7.2504	5.1387	8.3273	3.5357	3.5663	2.4777	0	1.1597
9.2254	7.4532	5.3416	8.9867	4.6954	4.726	2.9092	1.1597	0

表格 1　最短距离矩阵

3.2 排除特殊情况

从最小距离矩阵 D 中取出前 20 行，作为矩阵 D1。显然，D1 为 20X92 的矩阵，每一列代表每一个路口到 20 个服务平台的最小距离。经过搜索，发现有 6 个路口（下图 danger1 的输出）到任何一个服务平台的距离都大于 3km，分别为 28、29、38、39、61、92 号路口。而有 24 个（见下图 danger2 的输出）是 3km 范围内只有一个平台，因为其中 4、10、11、12、13、14、15 路口是服务台，直接分配到其所在的服务台，所以这 92 个路口中有 20+6+（24-7）=43 个路口分配已经确定下来，我们只要对剩下的 49 个路口使用蒙特卡洛算法分配到 3km 内的服务台，并且根据我们设定的评价指标来选择合适的分配方案。

```
danger1 =

    28    29    38    39    61    92


danger2 =

     4    10    11    12    13    14    15    21    22    23    24    26    27    30    41    49    53    54    55    57    60    62    63    86
```

（2）利用 0-1 规划模型求解各路口的隶属关系

针对路口的隶属关系，可以建立 0-1 模型。

定义变量

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & （路口\ i\ 不隶属于平台\ j） \\ 1, & （路口\ i\ 隶属于平台\ j）\end{cases}$$

由于每个路口只需要一个交巡警服务平台，所以有：

[1] 算法介绍和其实现过程见附录一

$$\sum_{j=1}^{20} x_{ij} = 1,\ \ i = 1,2,3,\dots\dots 92$$

定义路口与平台的对应矩阵为$A_{92\times1}$：

$$A_{92\times1} = [a_1 \quad a_2 \cdots a_i \quad \cdots \quad a_{92}]^T$$

其中a_i表示第 i 个路口隶属于的平台编号 j。

定义发案率矩阵$C_{92\times1}$：

$$C_{92\times1} = [c_1 \quad c_2 \cdots c_i \quad \cdots \quad c_{92}]^T$$

其中c_i为每个路口的发案率（具体数据见附件 2）。

a_i代表每个路口所对应的服务台，所以约束条件为：

$$a_i\text{是整数且 } 0 < a_i \le 20$$

然后根据不同的目标要求建立不同的目标函数，由目标函数和约束条件可得在不同标准下的最优解。

①距离之和最短

定义路口 i 到平台 j 的最短距离表示为$dis(j,i)$，则所有路口到对应平台的最短距离和 D 为：

$$D = \sum_{i=1}^{92} dis(a_i, i)$$

在此标准下，可由该公式计算各方案的总距离，找到最短距离，确定最优方案。

因此在此标准下的目标函数为：

$$f_1 = \sum_{i=1}^{92} dis(a_i, i)$$

使目标函数最小

并且当总距离最小时，从服务台到各个路口的总时间也最小，所以这两个标准实际意义是相同的。

由 matlab 算出最优解的路口与服务台对应关系如下表：

整理得：

	管辖节点										
节点 1	1	66	67	68	69	70	71	72	74	78		
节点 2	2	39	40	43								
节点 3	3	44	54	55	64	65						
节点 4	4	57	60	62	63							
节点 5	5	49	50	51	52	53	58	59				

节点 6	6	56										
节点 7	7	30	34	48	61							
节点 8	8	33	47									
节点 9	9	31	32	35	37	45	46					
节点 1	1											
节点 11	11	26	27									
节点 12	12	25										
节点 13	13	21	22	23	24							
节点 14	14											
节点 15	15	28	29									
节点 16	16	36	38									
节点 17	17	41	42									
节点 18	18	73	80	81								
节点 19	19	75	76	77	79							
节点 2	2	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92

②负载均衡

由于每个交巡警服务台的工作量与改服务台所管辖的各路口的发案率和到服务台的距离有关，所以我们定义了负载这一概念来衡量每个服务台的工作量。

定义每个交巡警服务平台的负载$load_j$为该平台辖区内路口到平台的最短距离和该路口发案率的乘积，即：

$$load_j = load_{a_i} = \sum_j dis(a_i, i) \times c_i$$

为了防止出现城市中部分区域发案率较高，造成某些服务台执行任务的频率高，且路口到服务台距离远，造成警务不方便的情况，每个服务台的负载大小应该尽可能均衡，所以可由此公式计算出所有方案内各个服务台的负载值，再取方差，当方差小时，负载更均衡，方案更有优势。

所以在此标准下的目标函数为：

$$f_2 = Var\ load_j$$

使目标函数最小。

由 matlab 算出最优解的路口与服务台对应关系如下表：

	管辖节点								
节点 1	1	67	68	70	71	73	78		
节点 2	2	39	40	42	44	69			
节点 3	3	54	55	66	76				
节点 4	4	57	58	60	62	63	64		

节点 5	5	49	51	52	53	59		
节点 6	6	50	56					
节点 7	7	30	33	48	61			
节点 8	8	46	47					
节点 9	9	32	34	36	37			
节点 1	1							
节点 11	11	25	26	27				
节点 12	12							
节点 13	13	21	22	23	24			
节点 14	14							
节点 15	15	28	29	31				
节点 16	16	35	38	45				
节点 17	17	41	43					
节点 18	18	72	81	82	83	84		
节点 19	19	65	74	75	77	79	80	
节点 2	20	85	86	87	88	89	90	91	92

表格 2 ②情况下服务台与路口对应表

③数量均衡

这里的数量是指每个服务台所管辖的路口数量大小：

$$\mathrm{num_j} = \sum_{j} 1 = \sum_{a_i=j} 1$$

在要求每个服务台所管辖的路口数量均衡时，目标函数为：

$$f_3 = Var\ num_j$$

使目标函数最小。

由 matlab 算出最优解的路口与服务台对应关系如下表：

	管辖节点							
节点 1	1	42	74	75	80			
节点 2	2	39	43	69	71	73	76	
节点 3	3	44	54	55	66	67	68	
节点 4	4	57	58	60	62	63	64	65
节点 5	5	49	50	51	53	59		
节点 6	6	48	52	56				
节点 7	7	30	32	34	61			
节点 8	8	36	47					
节点 9	9	35	37	46				
节点 1	10							
节点 11	11	26	27					

节点 12	12	25						
节点 13	13	21	22	23	24			
节点 14	14							
节点 15	15	28	29	31				
节点 16	16	33	38	45				
节点 17	17	40	41	70	72			
节点 18	18	79	84	85	89	90		
节点 19	19	77	78	81	83			
节点 2	20	82	86	87	88	91	92	

表格 3 ③情况下的服务台与路口对应关系

方法二：使用 Lingo 直接求解

评价方案 1：所有路口到平台最短路径之和最短

$$\min z=\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{49}x_{ij}*a_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{20}x_{ij}=1;\ j=1,2,3\cdots\cdots 49\\ x_{ij}=0,1;\\ \sum_{i=1}^{20}x_{ij}*a_{ij}<=3;\ j=1,2,3\cdots\cdots 49\end{cases}$$

根据目标函数以及约束条件，使用 LINGO 求解得到路径之和最短为 56.8km，小于蒙特卡洛法得到的距离，x_{ij}的解矩阵如下（部分）：

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	……
i=1	0	0	0	0	0	0	0	……
i=2	0	0	0	0	0	0	0	……
i=3	0	0	0	0	0	0	0	……
i=4	0	0	0	0	0	0	0	……
i=5	0	0	0	0	0	0	0	……
i=6	0	0	0	0	0	0	0	……
i=7	0	0	1	0	0	0	0	……
i=8	0	0	0	1	0	0	0	……
i=9	0	1	0	0	1	1	0	……
i=10	0	0	0	0	0	0	0	……
i=11	0	0	0	0	0	0	0	……
i=12	1	0	0	0	0	0	0	……
i=13	0	0	0	0	0	0	0	……
i=14	0	0	0	0	0	0	0	……
i=15	0	0	0	0	0	0	0	……

i=16	0	0	0	0	0	0	1	……
i=17	0	0	0	0	0	0	0	……
i=18	0	0	0	0	0	0	0	……
i=19	0	0	0	0	0	0	0	……
i=20	0	0	0	0	0	0	0	……

带回 matlab 中，求得对应分配方案如下：

	管辖节点									
节点 1	1	67	68	69	71	73	74	75	76	78
节点 2	2	39	40	43	44	70	72	71	72	
节点 3	3	54	55	65	66					
节点 4	4	57	60	62	63	64	64	66		
节点 5	5	49	50	51	52	53	56	58	59	
节点 6	6	51	59							
节点 7	7	30	32	47	48	61				
节点 8	8	33	46	45	46	47				
节点 9	9	31	34	35	45					
节点 10	10									
节点 11	11	26	27	27						
节点 12	12	25								
节点 13	13	21	22	23	24					
节点 14	14									
节点 15	15	28	29							
节点 16	16	36	37	38						
节点 17	17	41	42							
节点 18	18	80	81	82	83					
节点 19	19	77	79	82						
节点 20	20	84	85	86	87	88	89	90	91	92

评价方案 2：负载均衡

负载定义同蒙特卡洛方法中给出的定义，c_j 为路口 j 对应的犯罪率。

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{49}[x_{ij} * a_{ij} * c_j]}{20}$$

$$\min z = \frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2}{19}$$

$$
s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = 1;\ j = 1,2,3\cdots\cdots 49 \\ x_{ij} = 0,1; \\ \sum_{i=1}^{20} x_{ij} * a_{ij} <= 3;\ j = 1,2,3\cdots\cdots 49 \end{cases}
$$

同理，求得最小负载方差为 23.735，对应分配方案如下：

	管辖节点									
节点 1	1	68	69	78	76					
节点 2	2	39	40	43	70	75				
节点 3	3	44	54	55	65	66	67	76		
节点 4	4	57	58	60	62	63	64			
节点 5	5	49	53	51	52	53	59			
节点 6	6	50	51	52	56	59				
节点 7	7	30	32	48	61	61				
节点 8	8	33	46	47						
节点 9	9	31	34	35	46					
节点 10	10									
节点 11	11	26	27							
节点 12	12	25								
节点 13	13	21	22	23	24					
节点 14	14									
节点 15	15	28	29	31						
节点 16	16	36	37	38	45					
节点 17	17	41	42	72						
节点 18	18	71	73	74	81	82	83			
节点 19	19	77	79	80	78	79	80			
节点 20	20	84	85	86	87	88	89	90	91	92

评价方案 3：每个服务平台管辖的路口数量均衡

同上，n_i 为平台 i 的管辖的路口数。

$$n_i = \sum_{j=1}^{49} x_{ij}$$

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{20} n_i}{20}$$

$$\min z = \frac{\sum_{i=1}^{20} (n_i - \bar{n})^2}{19}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = 1; j = 1,2,3\cdots\cdots 49 \\ x_{ij} = 0,1; \\ \sum_{i=1}^{20} x_{ij} * a_{ij} <= 3; j = 1,2,3\cdots\cdots 49 \end{cases}$$

同理，求得最小管辖路口数量方差为 10.1，对应分配方案如下：

	管辖节点									
节点 1	1	68	69	78	80					
节点 2	2	39	40	43	70	75	75			
节点 3	3	44	54	55	65	66	67	76		
节点 4	4	57	58	60	62	63	64			
节点 5	5	49	53	52	53	59				
节点 6	6	50	51	52	56	59				
节点 7	7	30	32	48	61	61				
节点 8	8	33	46	47						
节点 9	9	31	34	35						
节点 10	10									
节点 11	11	26	27	27						
节点 12	12	25								
节点 13	13	21	22	23	24					
节点 14	14									
节点 15	15	28	29	31						
节点 16	16	36	37	38	45					
节点 17	17	41	42	72	43	70				
节点 18	18	71	73	74	81	82	83			
节点 19	19	77	79	80	81	82				
节点 20	20	84	85	86	87	88	89	90	91	92

两种方法对比：

蒙特卡洛算法由于是随机生成一系列选择方案，而实际上至少有 2^42=4.3980*10^12 次(按剩下的 49 个路口每个路口只有两个服务平台可供选择估算)，而我们随机只进行了 1*10^7 次，远远没有遍历所有的情况。而由于

仅仅是 10^7 次随机，就用时 1 分半左右，要想实现全部遍历，需要运行4*10^5*1.5/60=10000h=416day！可见蒙特卡洛算法对于数据维度较大的问题，随机性比较大，不是很适合，这时应该考虑采用确定性算法。

- *评价方案 4:* 目标规划

以上只是单目标规划，这里给三个目标设置不同的权值，构成新的目标函数，形成多目标规划。

根据经验，我们认为交巡警平台的负载是否均衡更重要，所以设置权重为0.5，总距离次之，设置权重为 0.3，数量是否均衡权值最小，设置权重为 0.2，使用 Lingo 再次进行运算：

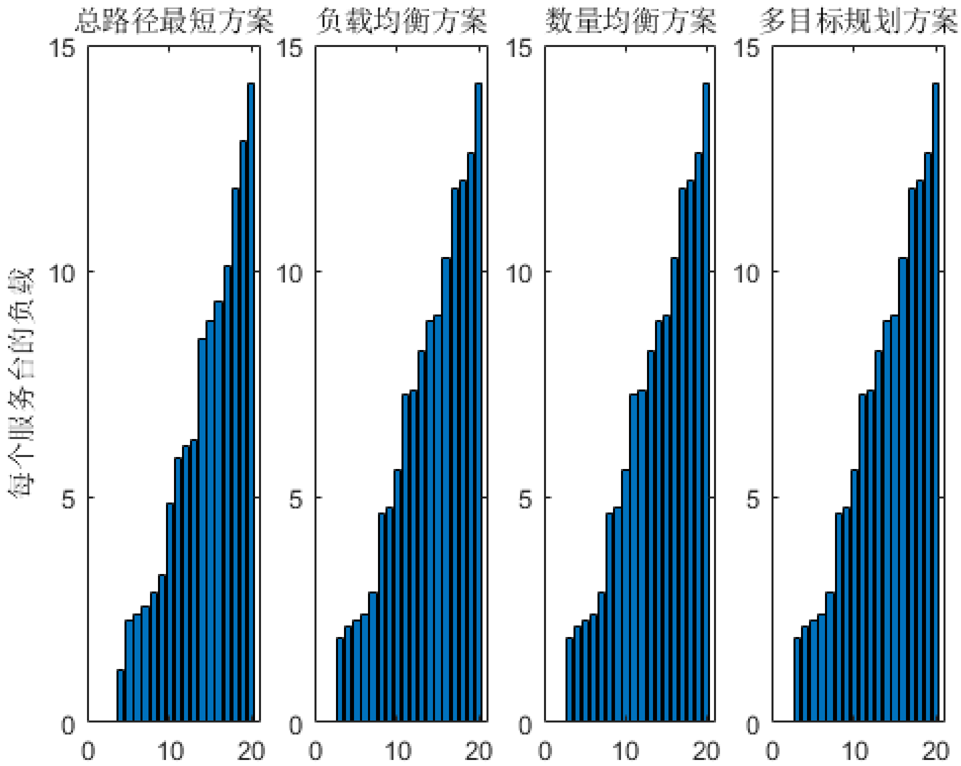
$$\min \quad z = 0.5z_1 + 0.2z_2 + 0.3z_3$$

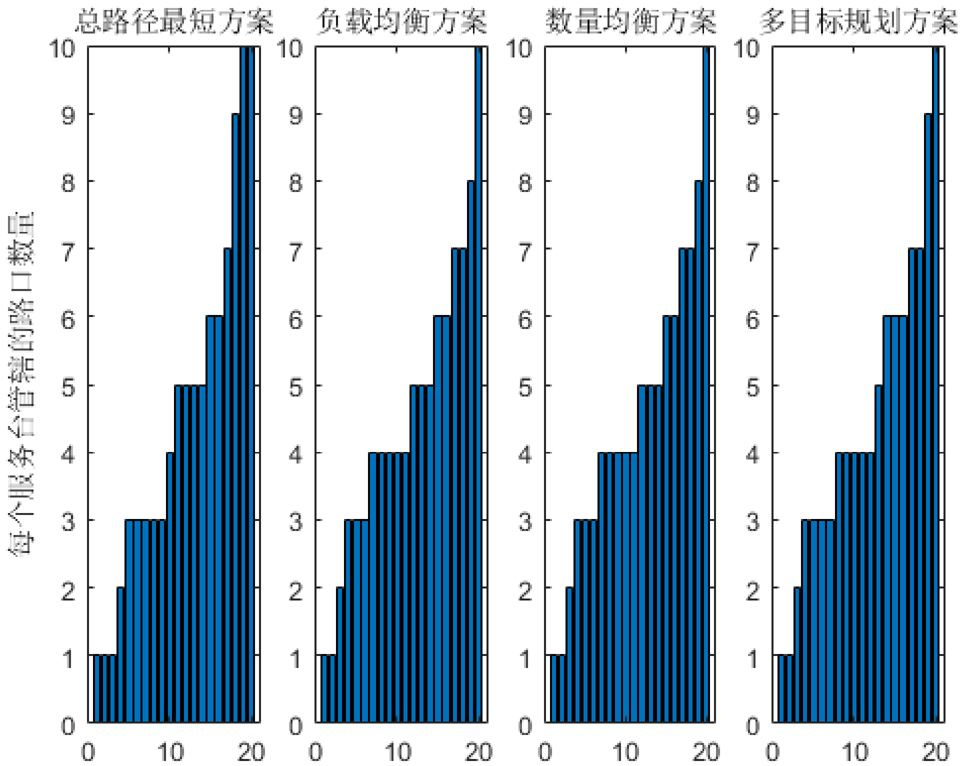
$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = 1;\ j = 1,2,3\cdots\cdots 49 \\ x_{ij} = 0,1; \\ \sum_{i=1}^{20} x_{ij} * a_{ij} <= 3;\ j = 1,2,3\cdots\cdots 49 \end{cases}$$

目标最小值 43.78　分配方案

	管辖节点								
节点 1	1	67	68	69					
节点 2	2	39	40	43	70	75			
节点 3	3	44	54	55	65	66	76		
节点 4	4	57	58	60	62	63	64		
节点 5	5	49	53						
节点 6	6	50	51	52	56	59			
节点 7	7	30	32	47	48	61			
节点 8	8	33	46						
节点 9	9	34	35	45					
节点 10	10								
节点 11	11	26	27						
节点 12	12	25							
节点 13	13	21	22	23	24				
节点 14	14								
节点 15	15	28	29	31					
节点 16	16	36	37	38					
节点 17	17	41	42						
节点 18	18	72	73	74	78	80	81	82	83
节点 19	19	71	77	79					

节点 20	20	84	85	86	87	88	89	90	91	92





2、确定重大案件发生时的路口围堵方案

对于重大突发事件，需要调度全区 20 个交巡警服务平台的警力资源，对进出该区的 13 条交通要道实现快速全封锁。

在这里我们首选对路口数据进行预处理，采用 Floyd 算法对邻接矩阵进行处理，得到路口与路口两两之间的最短距离矩阵（特别注意，考虑到 A 区部分路口之间的最短路径可能从隔壁区经过，因此预处理的时候应当把所有路口数据输入处理而不仅仅是 A 区的路口），考虑到理想情况下的调度是从 20 个交巡警平台中选取 13 个路口的警力调到 13 个交通要道的路口，那么这实际上已经变成了一个典型的 0-1 指派问题，将 20 个交警平台和 13 个路口的数据从之前经过处理的距离矩阵中取出单独形成一个 20×13 的矩阵后，再用 0 将其补足为方阵（考虑到剩余的 7 个交警平台调度实际不需要，因此在数学模型中怎么调都行），再采用经典的匈牙利方法进行处理，在调度距离最短的时候平均调度时间也最短，因此我们采用取最小值的规划方式，处理并得到结论。

通过 matlab 得出以下结果。

当要求平均距离最小时：

	路口 1	路口 2	路口 3	路口 4	路口 5	路口 6	路口 7
平台	12	9	16	14	11	13	10
	路口 8	路口 9	路口 10	路口 11	路口 12	路口 13	
平台	15	8	7	2	5	4	

表格 4 平均距离最小时服务台与被封锁路口对应关系

3、合理调整服务平台的数量和位置

观察题目可知，问题要求从两个方面对平台进行 2 至 5 个增加。根据第一部分的结果可知，A 区中存在 6 个不能被覆盖的孤立点，分别是：28,29,38,39,61,92。然后以其为中心以 3km 为半径在其周围道路上设置预服务平台，当多个孤立点的预服务平台发生重合的情况时，则选用重合点作为服务平台，然后再将新的服务平台和原有的 20 个混合起来，对 A 区内所有的点再做随机分配，根据不同的指标找到不同的最优解。

（1）我们先单纯的从有些地方出警时间过长这一情况进行考虑。结合第一问第一部分要求警车尽量在三分钟内赶到，可认为当 A 区所有点都能满足在重大事故发生后，三分钟内有警车可以达到现场这一条件时，可以满足减少出警时间。根据第一部分的结果知，A 区中存在 6 个不能被覆盖的点，要在 3 分钟之内覆盖这 6 个点，需要增加 4 个平台。

超时路口	备选增加路口					
28	28	29				
29	28	29				
38	38	39	40			
39	38	39	40			
61	48	61				
92	87	88	89	90	91	92

所以覆盖全部 6 个路口需要增加的服务台为:

28/29, 38/39/40, 61/48, 87/88/89/90/9192

定义状态变量：

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{（路口 i 不隶属于平台 j）} \\ 1, & \text{（路口 i 隶属于平台 j）}\end{cases}$$

以达到 92 个路口的总距离最小为目标：

$$\text{minf}=\sum_{j=1}^{24}\sum_{i=1}^{92}x_{ij}dis(j.i)$$

以每一个路口都属于某一服务台为约束条件：

$$\sum_{j=1}^{24}x_{ij}=1$$

以所有服务台到达路口的时间小于三分钟为约束条件：

$$x_{ij}dis(j.i)\le 3$$

由此建立规划模型，由 matlab 解出应增加的服务台编号为：

28,39,48,88.

具体分配结果如下：

服务台编号	对应管辖路口									
1	1	67	68	69	71	73	74	75	76	78
2	2	43	44	70	72					
3	3	54	55	65	66					
4	4	57	60	62	63	64				
5	5	49	50	51	52	53	56	58	59	
6	6									
7	7	30	32							
8	8	33	46							
9	9	31	34	35	45					
10	10									
11	11	26	27							
12	12	25								

13	13	21	22	23	24					
14	14									
15	15									
16	16	36	37							
17	17	41	42							
18	18	80	81	82	83					
19	19	77	79							
20	20	85	86							
28	28									
39	39									
48	48									
88	88									

表格 5　距离之和最小时增设平台结果

每个服务台的数据分析如下：

服务台编号	1	2	3	4	5
管辖路口数量	10	5	5	6	9
最短路程之和	8.976919	4.215142	6.900963	9.92449	11.31455
负载	8.470322	4.462742	5.848642	6.124133	10.09435
服务台编号	6	7	8	9	10
管辖路口数量	1	3	3	5	1
最短路程之和	0	1.723271	1.757701	4.077559	0
负载	0	2.934763	2.274771	6.270473	0
服务台编号	11	12	13	14	15
管辖路口数量	3	2	5	1	1
最短路程之和	2.543303	1.788854	6.499225	0	0
负载	2.394643	2.862167	8.883303	0	0
服务台编号	16	17	18	19	20
管辖路口数量	3	3	5	3	3
最短路程之和	1.726454	1.834886	3.094912	1.432099	0.807769
负载	0.780922	2.56884	3.256078	1.14568	1.041433
服务台编号	28	39	48	88	
管辖路口数量	0	0	0	0	
最短路程之和	0	0	0	0	
负载	0	0	0	0	

表格 6 距离之和最小时服务台数据分析

（2）现行平台安置方案使部分服务台的负载很大，使整个 A 区的各个服务

台的负载不均衡。因此在优化过程中，应尽量使服务台处于三分钟可到达的同时均衡个服务台的负载。

结合（1）中公式，此时的目标函数应为：

$$\min f = Var\ load_j$$

约束条件不变，由 matlab 计算出此时应该增加的平台编号应为：29,40,48,91

具体分配结果如下：

服务台编号	对应管辖路口								
1	1	67	68	69	71	73	74	75	76	78
2	2	43	44	70	72					
3	3	54	55	65	66					
4	4	57	60	62	63	64				
5	5	49	50	51	52	53	56	58	59	
6	6									
7	7	30	32							
8	8	33	46							
9	9	31	34	35	45					
10	10									
11	11	26	27							
12	12	25								
13	13	21	22	23	24					
14	14									
15	15									
16	16	36	37							
17	17	41	42							
18	18	80	81	82	83					
19	19	77	79							
20	20	85	86							
29	29									
40	40									
48	48									
91	91									

表格 7　负载均衡时增设平台结果

每个服务台的数据分析如下：

服务台编号	1	2	3	4	5
管辖路口数量	10	5	5	6	9
最短路程之和	8.976919	4.215142	6.900963	9.92449	11.31455
负载	8.470322	4.462742	5.848642	6.124133	10.09435
服务台编号	6	7	8	9	10
管辖路口数量	1	3	3	5	1

最短路程之和	0	1.723271	1.757701	4.077559	0
负载	0	2.934763	2.274771	6.270473	0
服务台编号	11	12	13	14	15
管辖路口数量	3	2	5	1	1
最短路程之和	2.543303	1.788854	6.499225	0	0
负载	2.394643	2.862167	8.883303	0	0
服务台编号	16	17	18	19	20
管辖路口数量	3	3	5	3	3
最短路程之和	1.726454	1.834886	3.094912	1.432099	0.807769
负载	0.780922	2.56884	3.256078	1.14568	1.041433
服务台编号	29	40	48	91	
管辖路口数量	0	0	0	0	
最短路程之和	0	0	0	0	
负载	0	0	0	0	

表格 8 负载均衡时服务台数据分析

可见增加的几个服务台只是负责管理自己一个路口即可。可能的原因是受距离影响，由于距离别的路口较远因而只需管理自身即可。

（二）问题二

问题二分成两个部分，首先是分析现有服务平台设置方案的合理性，二是设计一起实际案件的围堵方案。

1、分析现有服务平台设置方案的合理性

对于现有服务平台设置的合理性，考虑以下几个评价指标，定义安全度函数，比较 6 个区的安全度；定义负载函数，即每个路口的犯罪率及到服务台的距离的关系函数，比较 6 个区的平均负载；考虑孤立路口（即 3km 以内没有服务台的路口）数量；考虑每个区的人口数量、管辖区域面积和服务台数量之间的关系。

在平台设计时应该满足工作量、覆盖面积、管辖人口数量尽可能平均，且要求各平台工作量方差，超时路口个数尽可能小。在此基础上进行平台设置方案合理性分析。

（1）服务台工作量

首先定义服务台工作量，服务台工作量和服务台的负载成正相关，即和服务台所管辖的路口的发案率和路口到服务台的距离成正相关；二是和该服务台 3km 以内的其他服务台的数量成负相关，因为该服务台周边的其他服务台越多，工作压力越小，工作量相对越小。所以服务台工作量公式定义如下：

$$P=\sum_{<3km}\frac{\text{路口发案率}\times\text{路口到服务台距离}}{\text{3km 以内其他服务台数量}}$$

然后定义安全度函数，一个路口的安全度取决于三个重要因素，一是路口本身的发案率，发案率越高安全度越低，所以安全度与发案率是负相关；二是路口到管辖该路口的服务平台的距离，距离越远，警力调动越慢，消耗时间越长，所以安全度越低，因此距离和安全度也是负相关；三是服务平台的负载，一个服务平台的工作量越大，对路口的监管力度越小，所以安全度也越低，因此服务平台的负载和安全度成负相关。所以建立如下所示的安全度函数：

$$S=\sum_{<3km}\frac{1}{\text{发案率}\times\text{到服务台的距离}\times\text{服务台工作量}}$$

$$=\sum_{<3km}\frac{1}{c_i\times dis(a_i,i)\times P_j}$$

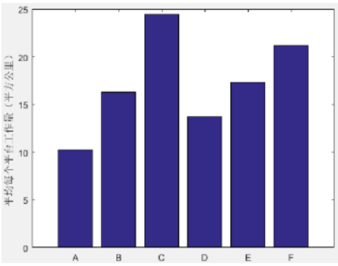


图 3　平均每个平台工作量

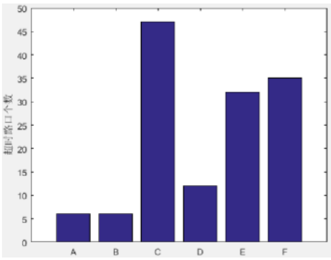


图 4　超时路口个数

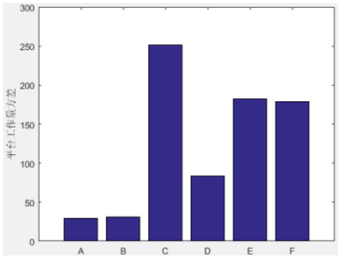


图 5　平台工作量方差

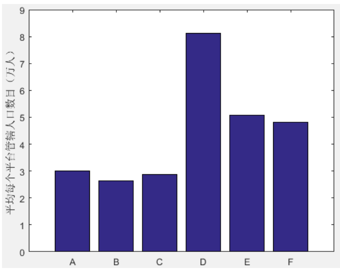


图 6 平均每个平台管理人口数目

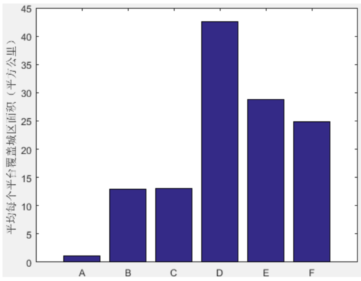


图 7　平均每个平台管辖面积

依据设置交巡警服务平台的原则和任务，为考察各区出警时间和工作量（方差，平均值）的实际情况及地域因素（平均每个平台所管辖人口数，平均每个平台所覆盖城区面积），首先按照最短时间分别对每个城区交巡警平台管辖路口范围进行分配，再一句每个城区超时路口数，服务台工作量方差，平均每个平台工作量，平均每个平台管理人口数目，平均每个服务台所管辖区域面积五个指标对六个城区进行对比分析，结果如上图。

（1）由图中的超时路口柱状分布图（图 4）可知，C、E、F 区超时路口个数大于

其他城区，其中 C 区远高于其他 5 个城区，由各区服务台工作量方差柱状分布可知，C 区方差高于其他区域，即由各平台工作量大小不均衡程度过高造成。由平均服务台工作量柱状分布图可知，C 区服务台平均工作量远高于其他城区，这主要由平台数目过少导致。因此综合以上 3 个标准，针对 C 区存在的平均工作量大，工作量分配不均及超时路口数量过多等不良情况，结合多目标规划模型，通过增设平台对平台设置方案不合理的问题提出解决措施。

（a）服务台平均工作量

通过所有城区平台总工作量除以总平台数目计算可得 6 个城区所有平台平均工作量为 17.21，当 C 城区平台增设数目为 7 时，可使 C 城区平均工作量从 24.45 降至平均水平。

（b）超时路口数量

增设平台

（2）针对平均每个服务台管理人口数目以及平均每个平台所管辖区域面积两个指标，D 城区平均每个服务台管理人口数目以及平均每个平台所管辖区域面积远高于其他城区。由于警力配备基本相同，每个平台负担较大，可能出现现有警力无法满足工作量需求情况。具体体现为交巡警平台在执行服务群众等职能时，原有平台警力无法满足实际服务人数及区域面积需求。可通过增加交巡警平台警力配备提高其处理任务的负担能力，从而解决任务量较大时现有平台可能难以负担的问题。

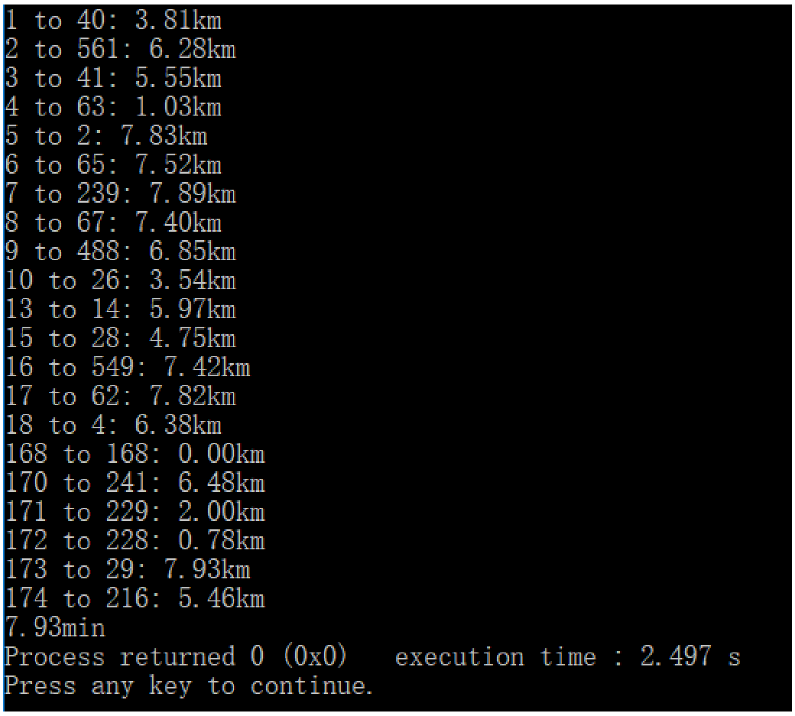
2、设计一起实际案件的围堵方案

如果该市地点 P（第 32 个节点）处发生了重大刑事案件，在案发 3 分钟后接到报警，犯罪嫌疑人已驾车逃跑。为了快速搜捕嫌疑犯，请给出调度全市交巡警服务平台警力资源的最佳围堵方案。由于题目中没有给出犯罪嫌疑人的活动速度，为了方便起见，我们假设犯罪嫌疑人的活动速度也是 60km/h。

我们的考虑如下：设 T 时刻，S1 表示距离 32 节点车程不超过 T 的路口集合，S2 表示与 S1 相邻的路口集合，当服务平台能够在 T 时间内封锁属于 S2 且不属于 S1 的所有路口，则可以封堵犯罪嫌疑人的所有逃跑路线。

反证法：假设犯罪嫌疑人可以逃脱，犯罪嫌疑人在 T 时刻时必刚经过 S1 内的某一个路口，且还未达到下一路口，如果能够逃离，则一定会通过与属于 S1 的某路口相邻的路口，即属于 S2 的某个路口，说明该路口没有被封锁，前提为属于 S2 且不属于 S1 的所有路口都被封锁了，矛盾，因此犯罪嫌疑人无法逃脱。通过匈牙利算法求取二部图的最大匹配则可以得到平台与路口的封锁方案。

计算结果如下图：



```
1 to 40: 3.81km
2 to 561: 6.28km
3 to 41: 5.55km
4 to 63: 1.03km
5 to 2: 7.83km
6 to 65: 7.52km
7 to 239: 7.89km
8 to 67: 7.40km
9 to 488: 6.85km
10 to 26: 3.54km
13 to 14: 5.97km
15 to 28: 4.75km
16 to 549: 7.42km
17 to 62: 7.82km
18 to 4: 6.38km
168 to 168: 0.00km
170 to 241: 6.48km
171 to 229: 2.00km
172 to 228: 0.78km
173 to 29: 7.93km
174 to 216: 5.46km
7.93min
Process returned 0 (0x0)   execution time : 2.497 s
Press any key to continue.
```

最终抓捕犯人需要 7.93min。

七、模型评价和改进方向

1、模型评价

从整体上看，整个模型都选用了 0-1 规划原则，但是门特卡罗法要取得较为精确的计算结果，需要消耗的运算时间会很长，使用 Lingo 很好的解决了问题。在解决图中任意两点间最短距离时采用了 Floyd 算法，精确性很高，但是运行效率较低。

在解决合理调整服务台的数量和位置问题时，采用以服务台到各个路口的总时间最短为目标函数，然后进行线性规划，但是算出结果在均衡度上（负载均衡和数量均衡）效果不是很好。

在考虑问题二实际案件的围堵方案中，我们的模型没有考虑警方的反应时间，具有一定的局限性。

2、模型改进

（1）在建模与求解过程中，设定警车与犯罪嫌疑人逃跑的速度为定值且相同，这在现实生活中不合常理，不切实际，可以考虑将速度改为动态参数。

（2）对于问题一的第三小问，即合理调整服务台的数量和位置问题，还可以采用多目标层次分析法进行建模，各目标之间分开考察，有先后侧重关系，对于权重的确定，可以通过更加专业的方式获得。

（3）对于问题二的第一小问，即评估全城服务平台设置方案的合理性，我们通过 5 个参考指标绘制柱形图分析其合理性，还可以建立综合评价公式，增加对五个指标在不同城区的综合评估，减少单一因素评估的片面性。

（4）对于问题二的第二小问，即一起实际案件的围堵方案，模型假设平台接到报警后立刻出发，而在实际生活中，由于确定并部署平台围堵方案需要花费一定时间，导致接到报警后到交巡警平台出动开始围堵存在一定延迟时间，可在建模过程中作为参数进行考察。

参考文献

[1] Kenneth H Rosen.著，袁崇义等译，离散数学，北京：机械工业出版社，2002.1。

[2] 姜启源等著，数学模型，北京：高等教育出版社，2011.1。

[3]（美）Giordano,F.R.等著，叶其孝等译，数学建模，北京：机械工业出版社，2014.10

[4] 韩中庚主编，实用运筹学模型、方法与计算，北京：清华大学出版社，2007.12

附录

1、Monte Carlo算法

蒙特·卡罗方法（Monte Carlo method），也称统计模拟方法，是二十世纪四十年代中期由于科学技术的发展和电子计算机的发明，而被提出的一种以概率统计理论为指导的一类非常重要的数值计算方法。是指使用随机数（或更常见的伪随机数）来解决很多计算问题的方法。与它对应的是确定性算法。蒙特·卡罗方法在金融工程学，宏观经济学，计算物理学（如粒子输运计算、量子热力学计算、空气动力学计算）等领域应用广泛。

该算法的基本思想是当所求解问题是某种随机事件出现的概率，或者是某个随机变量的期望值时，通过某种“实验”的方法，以这种事件出现的频率估计这一随机事件的概率，或者得到这个随机变量的某些数字特征，并将其作为问题的解。

蒙特卡罗方法的解题过程可以归结为三个主要步骤：构造或描述概率过程；实现从已知概率分布抽样；建立各种估计量。

蒙特卡罗方法解题过程的三个主要步骤：

（1）构造或描述概率过程

对于本身就具有随机性质的问题，如粒子输运问题，主要是正确描述和模拟这个概率过 程，对于本来不是随机性质的确定性问题，比如计算定积分，就必须事先构造一个人为的概率过程，它的某些参量正好是所要求问题的解。即要将不具有随机性质的问题转化为随机性质的问题。

（2）实现从已知概率分布抽样

构造了概率模型以后，由于各种概率模型都可以看作是由各种各样的概率分布构成的，因此产生已知概率分布的随机变量（或随机向量），就成为实现蒙特卡罗方法模拟实验的基本手段，这也是蒙特卡罗方法被称为随机抽样的原因。最简单、最基本、最重要的一个概率分布是（0，1）上的均匀分布（或称矩形分布）。随机数就是具有这种均匀分布的随机变量。随机数序列就是具有这种分布的总体的一个简单子样，也就是一个具有这种分布的相互独立的随机变数序列。产生随机数的问题，就是从这个分布的抽样问题。在计算机上，可以用物理方法产生随机数，但价格昂贵，不能重复，使用不便。另一种方法是用数学递推公式产生。这样产生的序列，与真正的随机数序列不同，所以称为伪随机数，或伪随机数序列。不过，经过多种统计检验表明，它与真正的随机数，或随机数序列具有相近的性质，因此可把它作为真正的随机数来使用。由已知分布随机抽样有各种方法，与从(0,1)上均匀分布抽样不同，这些方法都是借助于随机序列来实现的，也就是说，都是以产生随机数为前提的。由此可见，随机数是我们实现蒙特卡罗模拟的基本工具。

（3）建立各种估计量

一般说来，构造了概率模型并能从中抽样后，即实现模拟实验后，我们就要确定一个随机变量，作为所要求的问题的解，我们称它为无偏估计。建立各种估计量，相当于对模拟实验的结果进行考察和登记，从中得到问题的解。

通常蒙特 •卡罗方法通过构造符合一定规则的随机数来解决数学上的各种问题。对于那些由于计算过于复杂而难以得到解析解或者根本没有解析解的问题，蒙特 •卡罗方法是一种有效的求出数值解的方法。一般蒙特 •卡罗方法在数学中最常见的应用就是蒙特 •卡罗积分。

2、小组分工

3、展示照片：