

# 基于排队论的武林广场地铁站模型优化与分析

## 目录

一、引言.....	3
二、排队论理论.....	4
2.1 输入过程.....	4
2.2 排队过程.....	5
2.3 服务过程.....	5
三、问题模型构建.....	6
3.1 进站过程.....	7
3.2 出站过程.....	9
3.3 规划目标.....	10
四、进站过程分析.....	10
4.1 模型分析.....	10
4.1.1 单个排队环节.....	11
4.1.2 串联排队环节.....	11
4.1.3 并联排队环节.....	11
4.2 实际计算.....	12
4.2.1 买票过程.....	12
4.2.2 检票过程.....	12
4.2.3 Matlab 程序 .....	13
五、出站过程分析.....	13
5.1 模型分析.....	13
5.1.1 楼梯与扶梯.....	13
5.1.2 出口检票系统.....	14
5.2 实际计算.....	15
5.2.1 楼梯与扶梯.....	15
5.2.2 出口检票.....	15
六、上下车过程分析.....	16
6.1 模型说明.....	16
6.2 数学模型.....	16
6.3 Markov 链性质 .....	17
6.4 仿真模拟.....	17
6.5 排队人数期望.....	19
6.6 仿真模拟.....	20
6.6 目标优化.....	21
6.6.1 目标预测.....	22
6.6.2 仿真结果 1.....	22



---

6.6.3 仿真结果 2.....	23
6.6.4 模拟高峰时期.....	25
6.7 结论 .....	27
七、 目标优化.....	28
7.1 进站优化.....	28
7.2 出站优化.....	29
八、 Matlab 仿真 .....	30
九、 总结.....	32
十、 参考文献.....	32
十一、 附录.....	33
十一、 小组.....	33

## 基于排队论的武林广场地铁站模型优化与分析

**摘要:** 随着城市交通化的不断发展,地铁作为人们最常用的交通工具,正在逐渐面临大量乘客堵塞在购票、检票、出站扶梯等地方情况,车站客流大幅增加。乘客希望地铁越方便越快捷越好,但是地铁公司也面临成本的制约。本文以运筹学的排队论为基础,结合马尔科夫链、线性化及数学建模等相关理论,以杭州武林广场地铁站为原型,构建了乘客从进站到上车,从下车到出站的完整多层排队网络模型,依模型结合 Matlab、Lingo 等相关知识,求解了以设备成本和平均队长为优化目标的各部分最优解,最后对结果进行分析和研究,为地铁站大客流量运输提供了有力的数学论据。

**关键词:** 客流组织; 排队论; 优化; 马尔科夫链

### 一、引言

随着城市的快速发展,地铁作为一种常用的交通运输方式,以其客运量大、速度快、能耗低、安全、准点等优势,成为很多市民首选的出行工具。正是由于地铁的以上特点,在一些大型商业圈、火车站、长途汽车站附近的地铁站,经常会出现大客流。武林广场作为杭州市中心,地处商业圈,客流量较大。尤其在节假日期间,客流增长尤为明显。在多次的大客流组织工作中不难发现,以目前杭州地铁 1 号线的运输能力,是很难满足客流需求的。市民对于排队购票,排队检票,以及下车后排队上电梯等充满了反感,想增加购票机,拓宽楼梯宽度等等;但是地铁公司又面临成本的制约。如何合理设计地铁站各部分的参数,从而达到既能保证客流顺利疏导,又能最大程度节省成本的效果,成为地铁大客流组织工作优化的重点问题。这就需要对乘客坐地铁的情况建立数学模型,进行分析研究。

## 二、排队论理论

任何一个排队问题的基本排队过程都可以用下图表示。从图可知,每个顾客由顾客源按一定方式到达服务系统,首先加入队列排队等待接受服务,然后服务台按一定规则从队列中选择顾客进行服务,获得服务的顾客立即离开。通常,排队系统都有输入过程、服务台、服务时间、服务规则等 3 个组成部分。



### 2.1 输入过程

这是指要求服务的顾客是按怎样的规律到达排队系统的过程,有时也把它称为顾客流。一般可以从下面几个方面来描述一个输入过程:

1. 顾客总体数, 又称顾客源、输入源。这是指顾客的来源。顾客源可以是有限的, 也可以是无限的。例如, 到售票处购票的顾客总数可以认为是无限的, 而某个工厂因故障待修的机床则是有限的。
2. 顾客到达方式。这是描述顾客是怎样来到系统的, 他们是单个到达, 还是成批到达。病人到医院看病是顾客单个到达的例子。在库存问题中如将生产器材进货或产品入库看作是顾客, 那么这种顾客则是成批到达的。
3. 顾客流的概率分布, 或称相继顾客到达的时间间隔的分布。这是求解排队系统有关运行指标问题时, 首先需要确定的指标。这也可以理解为在一定的时间间隔内到达  $K$  个顾客 ( $K=1, 2, \dots, L$ ) 的概率是多大。顾客流的概率分布一般有定长分布、二项分布、泊松流(最简单流)、爱尔朗分布等若干种。
4. 顾客的到达是相互独立的。
5. 输入过程是平稳的, 或称为对时间是其次的, 即相继到达的时间间隔分布与时间无关。

## 2.2 排队过程

顾客到达后的排队方式、形状和队列数目，其特征有三条：

1. 顾客到达后的排队方式可以是即时制，也可以是等待制；对于等待制的服务次序有：先到先服务、后到先服务、随机服务、有优先权服务等
2. 排队可以有形的，也可以是无形的，有的排队容量是有限的，也可以是无限的
3. 排队数目可以是单列的，也可以是多列的，有的可相互转移，有的不可相互转移

## 2.3 服务过程

对顾客提供服务的设施或对象，从机构的形式和工作情况来分有以下特征：

1. 服务机构可以没有服务台或者服务员，也可以有一个或者多个服务台；
2. 对于多个服务台的情况，可以是并列的，也可以是串列，也可以是混合排列
3. 服务方式可以是一个个进行的，也可以是成批进行的
4. 服务时间可以是确定型的，也可以是随机型的；对于随机型的需要知道它的概率分布；
5. 服务时间的分布对时间是平稳的，即分布均值、方差等都与时间无关

排队论主要研究排队系统运行效率，估计服务质量，确定系统参数的最优值，以决定系统的结构是否合理，研究设计改进措施。因此研究排队问题，要先确定用以判断系统运行优劣的基本量化指标，主要有：

1. 队长：指在系统中的顾客数，期望值为  $L_s$
2. 排队长 指在系统中排队等待服务的顾客数，期望值记作  $L_q$ ，即  $L_s = L_q + L_n$ ，其中  $L_n$

为正在接受服务的顾客数

3. 逗留时间 指在一个顾客在系统中的停留时间，其期望值记作  $W_s$ ；
4. 等待时间 指在一个顾客在系统中排队等待的时间，其期望值记作  $W_q$ ，即  $W_s = W_q + \tau$ ，

$\tau$  为服务时间。

5. 忙期 服务机构连续工作的时间长度，记作  $T_b$ ；
6. 损失率 由于系统的条件限制，使顾客被拒绝服务而使服务部门受到损失的概率，用  $P_{lost}$  表示

7. 服务强度 绝对通过能力  $A$ ，表示单位时间被服务完顾客的均值，或称为平均服务率；

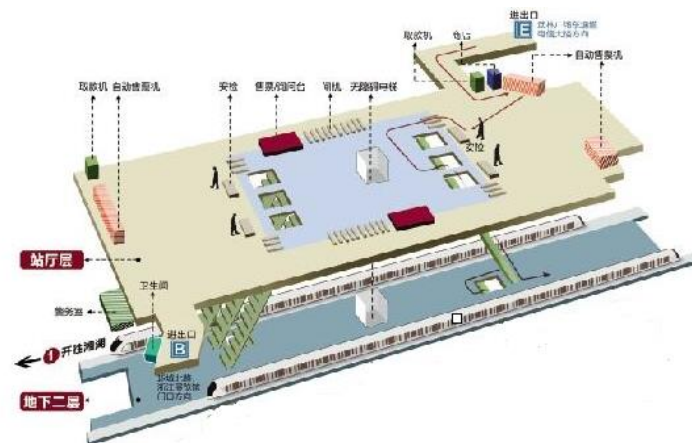
相对通过能力 $Q$ ，表示单位时间内被服务完的顾客数与请求服务的顾客数之比值。

### 三、问题模型构建

武林广场站是杭州地铁 1 号线设立的一个站点，位于武林广场东北角，与广场东通道呈  $34^\circ$  斜交。北接西湖文化广场站，南连凤起路站。武林广场站毗邻杭州传统的中央商务区，地铁地面公交线路共有 50 条，是进出武林广场旅客以及本地市民的一个重要集散地，客流较大。



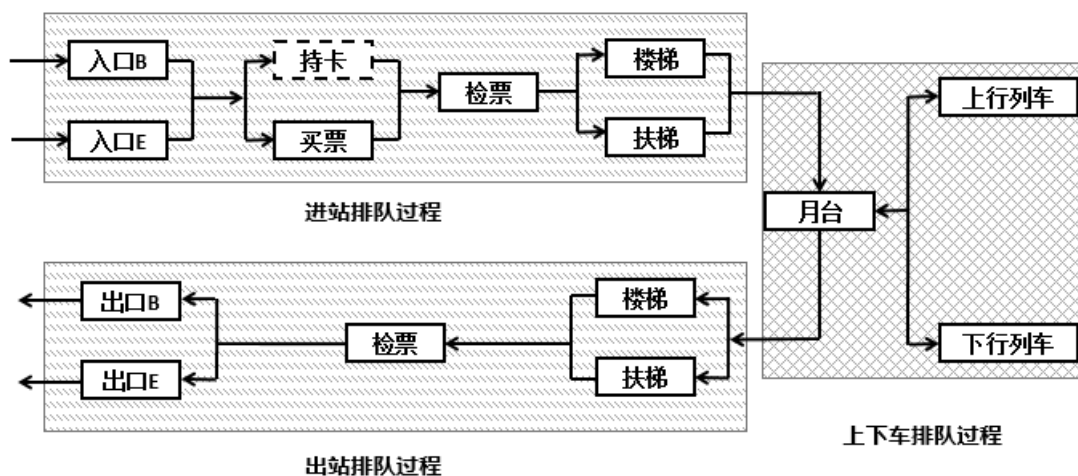
武林广场地铁站有两个出口  $B$ 、 $E$ ，其中  $B$  出口临近杭州大厦与环城北路， $E$  出口临近武林广场。



根据地铁站相关立体图可知，武林广场站共分为两层，其中站厅层为底下一层，由  $B$ 、 $E$  入口进入的人员汇集于此进行购票与检票操作。而地下二层为站台层，与地下一层之间通过楼梯与扶梯进行连接，检票后的人通过楼梯或者扶梯进入站台进行排队乘车等候。

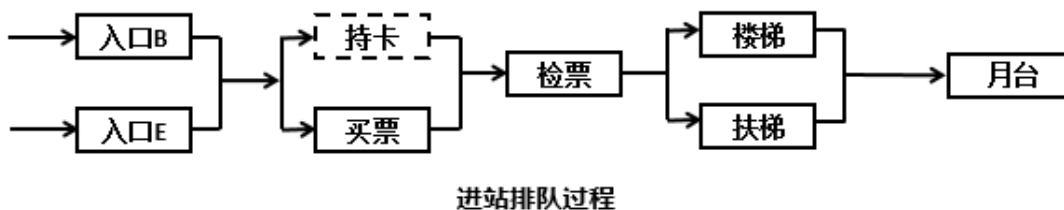
针对武林广场地铁站，我们考察了其相关设施以及人流情况，通过对于地铁上下客分析，对于可能产生拥挤堵塞产生排队情况的环节进行重点讨论，利用排队论相关知识，从而达到既能保证客流顺利疏导，又能最大程度节省经济成本的效果。

我们将这个模型分成进站排队，上下车排队，出站排队三个过程如图所示。



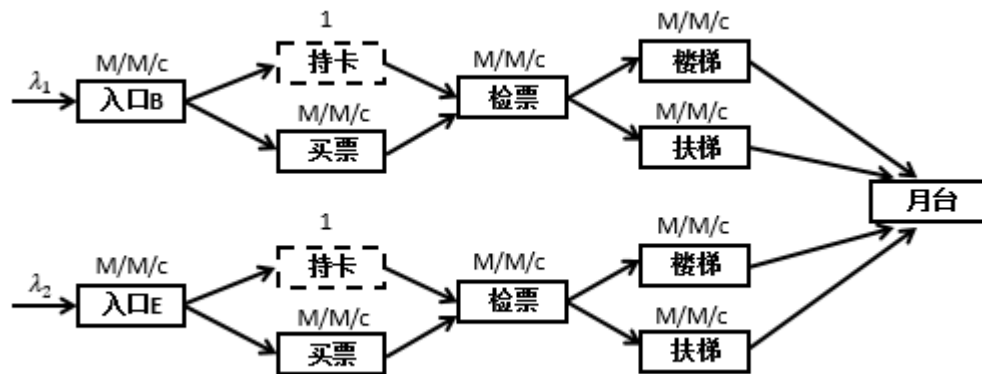
### 3.1 进站过程

对于进入武林广场地铁站旅客，其从进入地铁站至站台的中间环节模型如下：



由于一个城市或其他城市的所有人都被认为是地铁武林广场站的可能“乘客”，这样大的数目可以认为乘客的总体是无限的。因此可以假定南京站系统的容量一般是无限的。南京站到达的情况是随机的，服务时间也是随机的，且乘客到达间隔时间和服务时间是相互独立的。这样一来，考虑数学模型  $M/M/C$  模型。又由于我们采用的是多个排队系统串联的模型，即指乘客到达服从泊松分布，服务时间服从负指数分布。由于我们采用的是多个排队模型串联的形式，我们可以假定不同的环节的乘客达到率一致且都为泊松分布。

根据相关资料可知，武林广场地铁站在运营时间内日均每小时进站客流量 3500 人，其中由于入口  $E$  临近武林广场，人流量较大，为  $\lambda_1=2000/h$ ；而入口  $B$  人流量相对较少为  $\lambda_2=1500/h$ 。旅客由入口进入后，汇集至站厅层的人群由两部分构成，一部分需要在自动贩卖机处进行购票。



这一部分人群约占总人群数量的 75%，即  $\lambda_3=(\lambda_1+\lambda_2)\times 75\%=2625/h$ ，而另一部分人持有市民卡直接进入检票通道，无需进行购票。以目前市民使用自动购票机的熟练程度来看，购票的速度约为  $\mu_3=4/\text{min}$ 。而目前武林广场地铁站共设有自动购票机  $n_3=12$  台。根据相关资料查询，我们得知目前地铁自动售票机价格约为  $\eta_3=30000$  元。

经过买票过程之后，所有的乘客将通过检票环节。检票主要由闸机进行，目前武林广场地铁站共有进站闸机  $n_4=7$  台。由于所有人都需要进行检票环节，因此人流量与进站的人流量相等，为  $\lambda_4=3500/h$ 。而根据观察，通过一道闸机的人数为  $\mu_4=10/\text{min}$ 。根据相关资料查询，我们得知目前地铁闸机价格约为  $\eta_4=6000$  元。

而由于楼梯与扶梯能够承载人数较大，在乘客进行入站操作时我们假定其将不会产生相关的堵塞，因此在入站过程中我们不讨论楼梯与扶梯。

根据上述模型构建，我们得出进站过程各环节参数如下：

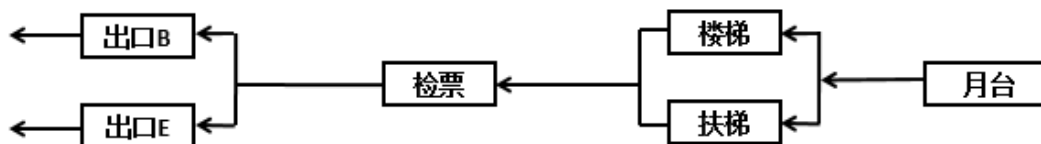
	$n$	$\lambda$	$\mu$	$\eta$
入口 $B$		1500/h	/	/
入口 $E$		2000/h	/	/
买票	12	2625/h	4/min	30000
检票	7	3500/h	10/min	6000

而由于楼梯与扶梯能够承载人数较大，在乘客进行入站操作时我们假定其将不会产生相关的堵塞，因此在入站过程中我们不讨论楼梯与扶梯。



## 3.2 出站过程

对于乘坐地铁到达武林广场地铁站旅客，其从进入地铁站至出口的中间环节模型如下：



出站排队过程

在某一趟车到来后，在这一单位时间内站台短时间内聚集了大量的旅客。因此我们选取每一单位时间作为研究对象。对于该对象来说，每一个环节的输入与输出是一个定长输入、定长输出、多通道的排队系统即： $d/d/n$  排队系统，其具体参数的计算公式可见模型分析部分。

乘客到达楼梯和自动扶梯口处，若楼梯和自动扶梯没被占用时，乘客立即使用楼梯和自动扶梯，若楼梯和自动扶梯被占用，不能为乘客提供服务时，乘客就会在此等候楼梯和自动扶梯的服务，而且服务次序为先到先服务。

根据资料可知，杭州地铁站采用的地铁为 6 节编组的 B 型车为例，列车长度 114m。车厢定员 245 人，到站后的乘客 15% 下车出站，乘客在站台上的走行速度取 0.64m/s。

由公式  $\lambda = \frac{q}{t_0} = \frac{2 \cdot w \cdot v}{l}$  （具体推导见模型分析部分），可以得出  $\lambda_5 = 2.5/s$ 。

假设站台上布置三组自动扶梯与楼梯供乘客出站，且对于每组楼梯和扶梯而言，由相关数据显示其输出率为 80/s，即对于楼梯和扶梯而言， $\lambda_6 = 2.5/s$ ， $\mu_6 = 4800/h$

下车的旅客通过楼梯或者扶梯后，汇集于检票处进行检票出站操作。对于检票而言，其达到率受到楼梯与扶梯处的总的服务率的影响。检票主要由闸机进行，目前武林广场地铁站共有出站闸机  $n_7 = 11$  台。而根据观察，通过一道闸机的人数为  $\mu_7 = 10/\text{min}$ 。根据相关资料查询，我们得知目前地铁闸机价格约为  $\eta_7 = 6000$  元。

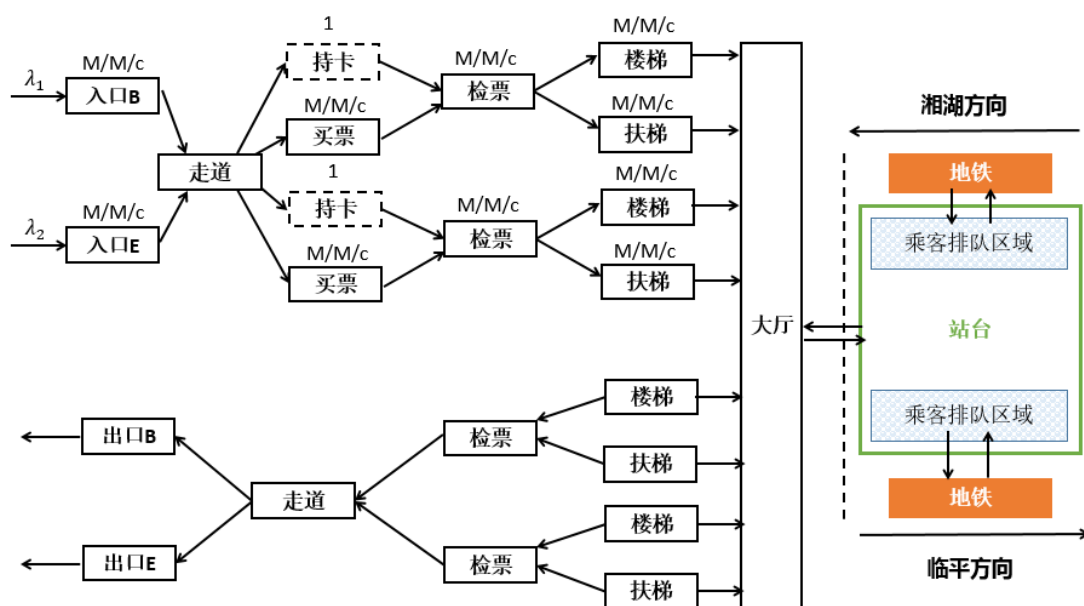
根据上述模型构建，我们得出出站过程各环节参数如下：

	$n$	$\lambda$	$\mu$	$\eta$
到站		2.5/s	/	/

楼梯扶梯	3	2.5 / s	4800 / h	50000
检票	11		10 / min	6000

### 3.3 规划目标

我们需要在使整个地铁站成本尽量降低的基础上,充分的提高乘客在舒适和效率上的满意程度。即减小乘客在乘车与下车过程中所花费的时间。该时间成本我们利用总的排队队长来进行衡量。

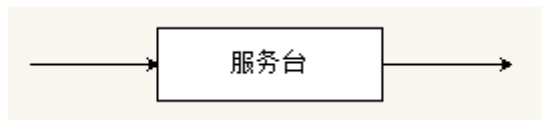


## 四、进站过程分析

### 4.1 模型分析

乘客在地铁站乘车的过程中会遇到许多可能引起排队的每个环节,包括售票口、检票口、楼梯、自动扶梯。由于在一段时间内的乘客到达近似地符合泊松过程,因此这些环节都可以分别用  $M/M/C$  排队模型来描述,涉及的参数有服务台的个数,乘客的平均到达率,平均服务率。同时,这些单个的环节构成一个排队网络,互相之间有串并联关系,在数学上可以用 Jackson 排队网络模型来描述。因此,我们先考虑单个环节的排队问题,再考虑排队环节的串并联问题。

### 4.1.1 单个排队环节



对于单个的  $M/M/C$  排队环节，假设其有  $c$  个服务台，乘客的平均到达率为  $\lambda$ ，平均服务率为  $\mu$ ，则其平均服务强度  $\rho$  的计算公式是：

$$\rho = \frac{\lambda}{cu}$$

由模型  $M/M/C$  的运行指标计算公式得系统的空闲概率是：

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^c \frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \frac{1}{c!} \frac{1}{1-\rho} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^c \right]^{-1}$$

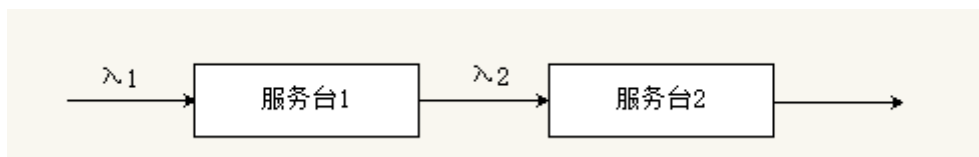
系统的排队长为：

$$L_q = \frac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} P_0$$

系统的队长（排队长加正在接受服务的顾客数）为：

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

### 4.1.2 串联排队环节



对于两个串联的排队环节，如果第一个环节顾客到达的人数服从强度为  $\lambda_1$  的泊松分布，则第二个环节顾客到达的人数也服从泊松分布，两个服务台的顾客是独立的，且其强度为：

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

这个结论的证明见聂盼红的“串联开排队网络系统分析”中 2.1.3 推论 2。

### 4.1.3 并联排队环节



对于两个并联的排队环节，设入口处乘客的总人数符合强度为  $\lambda$  的泊松分布，且乘客经

过服务台 1 的概率是  $P_1$ ，经过服务台 2 的概率是  $P_2$ ，且

$$P_1 + P_2 = 1$$

则服务台 1 和服务台 2 的顾客到达互相独立且服从泊松分布，且其强度为：

$$\lambda_1 = \lambda p_1$$

$$\lambda_2 = \lambda p_2$$

根据串联排队环节的结论，出口的乘客也为泊松分布，且其强度为：

$$\lambda_3 = \lambda$$

## 4.2 实际计算

### 4.2.1 买票过程

由于需要买票的人数占入口进入总人数的 75%，因此根据并联排队环节的相关理论，自动购票机出人员输入率为： $\lambda_3 = (\lambda_1 + \lambda_2) \times 75\% = 2625/h$

而根据已知的数据可知，其服务率为： $\mu_3 = 4/\text{min}$ 。

故根据相关公式计算可得：平均总队长为：

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 17.90$$

而自动购票机对应的成本总数为：

$$Y_3 = n_3 \eta_3 = 360000$$

### 4.2.2 检票过程

买票环节过后，无论刷卡或者买票人旅客都需要汇聚至检票口进行检票操作。因此根据因此根据并联排队环节的相关理论，自动购票机处人员输入率与入口的人员输入率相等，其值为： $\lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_2 = 7000/h$ 。

而根据已知的数据可知，其服务率为： $\mu_3 = 10/\text{min}$ 。

故根据相关公式计算可得：平均总队长为：

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 8.63$$

而自动购票机对应的成本总数为：

$$Y_4 = n_4 \eta_4 = 42000$$

### 4.2.3 Matlab 程序

我们利用 Matlab 对于进站过程中的对长进行编程求解，Matlab 程序见第五部分程序一。

根据相关的程序进行求解得到队伍总长为：26.53。

## 五、出站过程分析

### 5.1 模型分析

#### 5.1.1 楼梯与扶梯

楼梯和扶梯是地铁站中主要的升降措施，由于楼梯和自动扶梯通过能力有限，大量乘客会在楼梯和自动扶梯处等待，对于乘客在楼梯和自动扶梯处排队等候的状况，可以用排队论进行推导。

在一列车到站后的发车间隔内，把列车下到站台的乘客看成服务对象，出站的楼梯和扶梯看成服务通道，并且做一定的假设：

1. 乘客平均分布在所有车厢中，且下车乘客行走速度相同且恒定
2. 楼梯和扶梯沿着站台均匀分布，且这种分布使乘客在站台行走距离最短

输入过程：乘客从站台以一定速度行走到距离自己最近的楼梯和自动扶梯处寻求服务，以  $\lambda$  表示乘客单位时间到达电梯和扶梯的人数，即排队系统的输入率；乘客总人数为  $w$ ，共有  $n$  组楼梯和扶梯，则每组扶梯和楼梯服务的人数为： $q = \frac{w}{n}$ ，输入时间  $t_0 = \frac{l}{2 * v * n}$ ， $l$  为站台有效距离， $v$  为行走速度；则输入率  $\lambda$  具体表达式：

$$\lambda = \frac{q}{t_0} = \frac{2 * w * v}{l}$$

排队规则：乘客到达楼梯和扶梯时，若楼梯和扶梯没有被占用，乘客立刻使用该设备；若被占用，乘客就会等待服务；服务次序为先到先服务。

输出过程：由于楼梯和自动扶梯通过能力有限，以  $\mu$  表示楼梯和扶梯的输出率，则输出率和楼梯与自动扶梯的宽度有关；当宽度确定时，每一组楼梯与扶梯的输出过程是一个定长过程，其输出率表达式为：

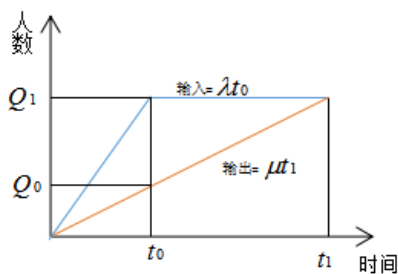
$$\mu = c * d$$

$c$  为扶梯和楼梯通过能力； $d$  为扶梯和楼梯宽度；

输出时间表达式：

$$t_1 = \frac{w}{\mu * n}$$

通过上面的假设与分析，每一组楼梯和扶梯的服务系统是一个定长输入，定长输出的单通道服务系统，由  $n$  组楼梯与扶梯构成的服务系统则是一个定长输入，定长输入的多通道服务系统，即  $d/d/n$  系统



上述图像可以近似表达  $d/d/n$  系统：横坐标表示时间，纵坐标表示累计人数；排队系统输入曲线和输出曲线如图， $t_0$  表示排队系统输入结束时间，对应的人数为  $Q_0$ ， $t_1$  表示排队系统输出结束时间，对应的人数为  $Q_1$

$$\text{平均排队人数: } Q' = \frac{Q_1(t_1 - t_0)}{2t_1}$$

$$\text{平均等待时间: } t' = \frac{Q_1(t_1 - t_0)}{2Q_1}$$

### 5.1.2 出口检票系统

由于扶梯和楼梯的输出是线性的，则进入出口检票站也应该是线性的，其输入率等于楼梯的输出率  $\mu$ ，输出率与出口检票机个数有关，为  $\mu_2$ ；我们在这里也采用类似的  $d/d/n$  模型。相关理论部分不再赘述。

## 5.2 实际计算

### 5.2.1 楼梯与扶梯

在一列车到站后的发车间隔内，把列车下到站台的乘客看成服务对象，出站的楼梯和扶梯看成服务通道，根据之前的模型构建我们可知对于这一环节输入过程为一线性过程，其输入率为：

$$\lambda_6 = \frac{2wv}{l} = 2.5/s$$

而根据已知的数据可知，其服务率为： $\mu_6 = 4800/h = 80/s$

故根据相关公式计算可得：平均总队长为：

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0$$

而楼梯扶梯对应的成本总数为：

$$Y_3 = n_3\eta_3 = 150000$$

### 5.2.2 出口检票

对于出口检票来说，其输入率应该为楼梯扶梯的输出率： $\lambda_7 = \mu_6 = 80/s$

而根据相关的统计可知，单个检票机服务率为： $\mu_7 = 10/\min$

则总服务率 $\mu_8 = 10/\min$ ，每台价格 6000 元

故根据相关公式计算可得：平均总队长为：

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 69.82$$

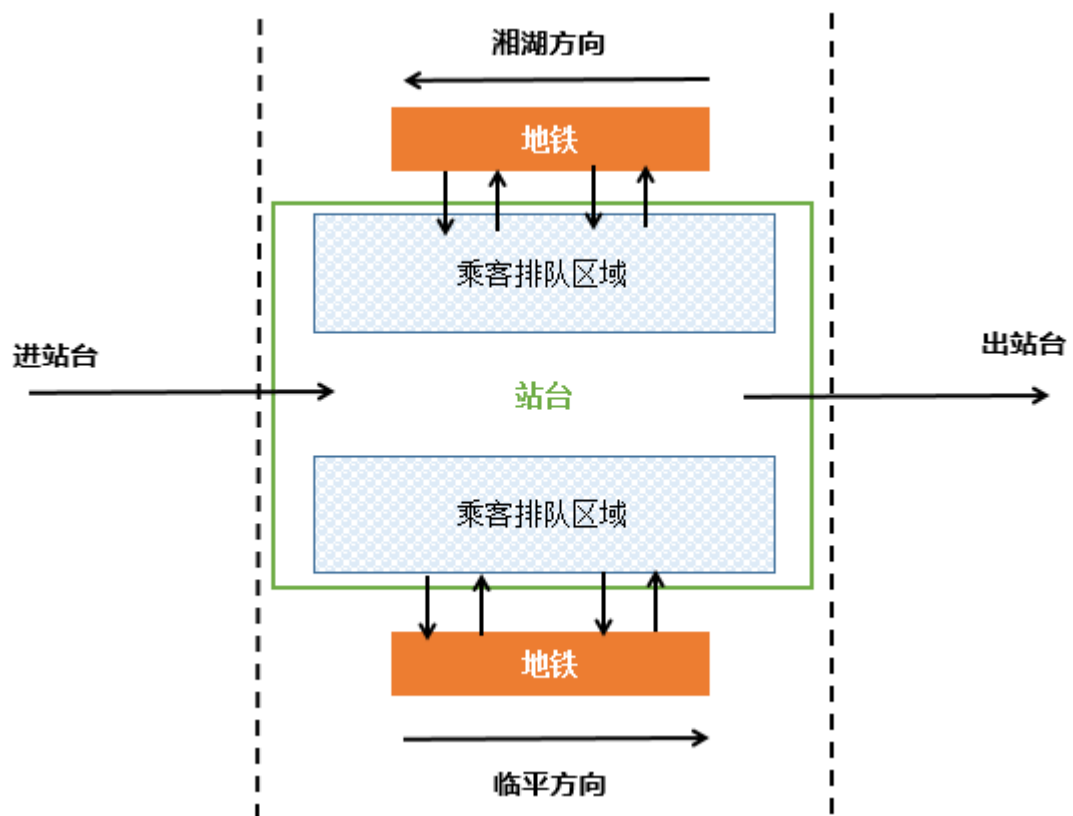
而检票机对应的成本总数为：

$$Y_3 = n_3\eta_3 = 66000$$

## 六、上下车过程分析

### 6.1 模型说明

上下车过程中，乘客抵达站台的过程是连续过程，抵达站台后在各个月台排队，随着乘客搭乘地铁离开，每个月台的排队人数发生着变化，上下车的过程是离散的，因此整个模型是离散循环的连续系统。



月台人数改变过程符合“Markov”的无记忆性，每个月台的剩余排队乘客可以看做一个单独的 Markov 链。

### 6.2 数学模型

地铁每次到达之间的间隔为一个循环，假设 $P_a$ 为每次循环中抵达每个月台的人数总和的



分布函数,  $P_s$  为每次循环中从站台离开人数的分布函数, 前者为泊松分布, 参数为进站过程中实际到达率  $\lambda^*$

$$\lambda^* = Ls$$

其中, 实际到达率即为进站过程的最后阶段的队长  $Ls$ , 由进站过程参数得到。

因此到达人数分布  $P_a$  的概率密度为 (到达  $k$  个人的概率):

$$P_a(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

离开人数分布  $P_s$  为正态分布, 因此可得到站台总人数从  $i$  转移到  $j$  的概率:

$$P_{ij}(k) = \begin{cases} \sum_{s_k}^{s_{max}} P_a(n = j - i + s_k) P_s(s_k), & \forall j - i + s_k \leq a_{max} \\ 0, & \forall j - i + s_k > a_{max} \end{cases}$$

其中  $s_k$  为离开上车的人数,  $a_k = j - i + s_k$  为到达人数, 如果实际到达人数大于服务容量, 则不会发生人数转移, 即不会有人上车, 转移量为 0。

### 6.3 Markov 链性质

该部分证明为何上下车过程具有 Markov 性, 因为每次上车过程是独立的, 与前一辆上车的人数无关, 只与剩余的排队人数相关, 由此上车过程为时间平稳的 Markov 链。

一旦状态人数为  $i$  到状态人数为  $j$  的转移概率确定, 则每次循环内站台排队人数为在各个状态中跳转, 且不受再之前状态人数的影响, 具有强 markov 性质, 最终  $Q_{max}$  为最大站台排队人数的话就可以得到  $P(k)$  为  $Q_{max} \times Q_{max}$  的矩阵, 第  $i$  行的第  $j$  元素, 代表着从人数  $i$  变到人数  $j$  的概率:

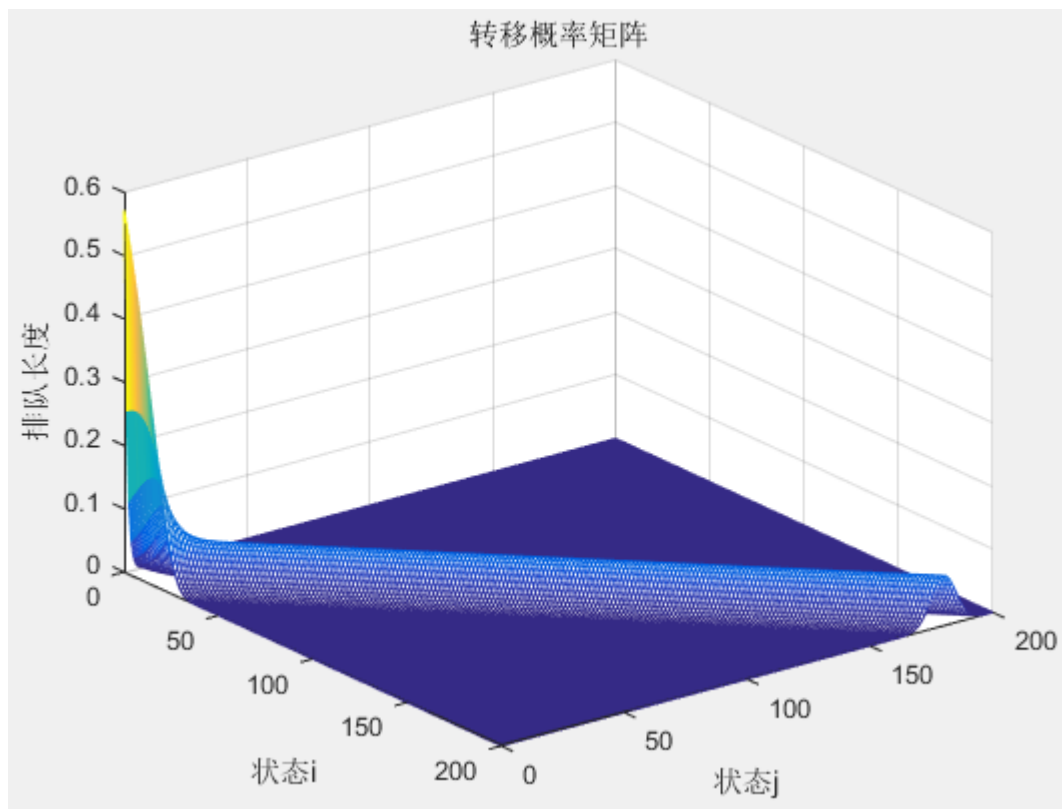
$$P(k) = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1Q_{max}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{Q_{max}1} & \cdots & P_{Q_{max}Q_{max}} \end{pmatrix}$$

### 6.4 仿真模拟

设置站台最大容纳 200 人, 达到过程满足参数为 3500 每小时的泊松分布, 地铁站有两个方向的月台, 因此每个方向而言, 相当于参数为 1750 的泊松分布, 而对每个每趟列车可搭载乘客 (空座率) 满足期望为 140 人, 方差为 5 的正太分布, 列车为每 5 分钟一趟。

在这个条件下, 设定列车每 10 分钟来一趟, 每次最大到达人数为 120, 因为最大到达

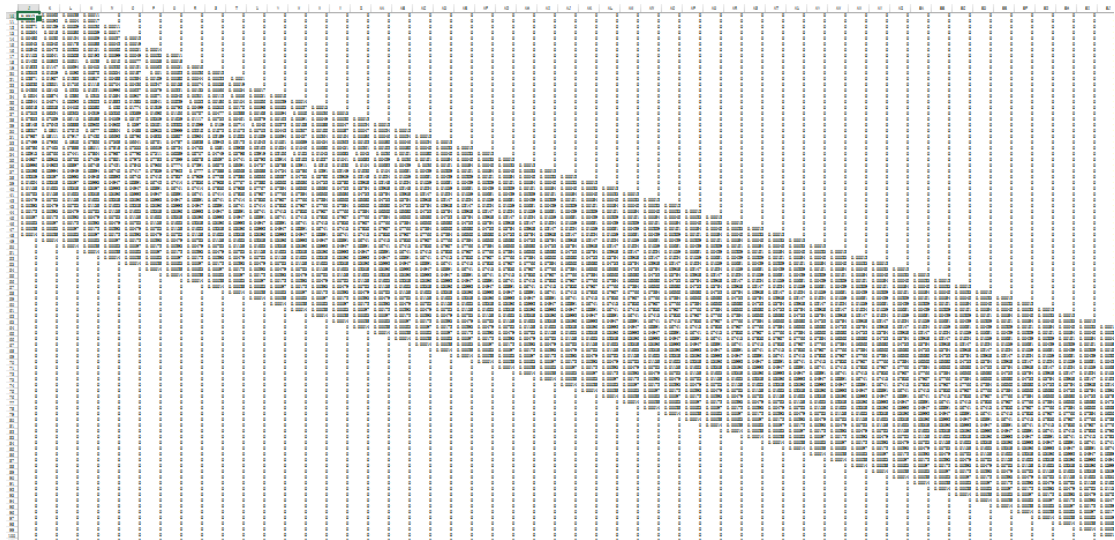
人数小于服务人数，因此在大多数情况下，各个站台应当更倾向于为空。假设每次转移可能独立且同分布（即时间平稳 *marcov* 的性质），做出在乘客到达人数不饱和的情况下，由  $i$  个人转移到  $j$  个人转移矩阵的三维图：



从该图中明显发现转移概率矩阵为稀疏矩阵，状态  $i$  在人数比较大的区域时，只会在  $i$  的附近转移，这和现实的拥堵情况相符，当月台排队人数大于列车服务能力，再加上源源不断进入站台的乘客，每次列车开走时剩余的队长会在上一个状态周围波动。

另一方面，在初始状态为 0 或几近于 0 的排队人数时，由于没有乘客积累以及列车服务能力较大，极有可能在下次转移中仍然只剩余 0 个人，概率超过 50%。

整个转移概率矩阵就如同图像一样，只集中分布呈一条带状，因为发生拥堵时不会转移到队长改变很大的地方。



## 6.5 排队人数期望

将  $j$  设为 0，则可得到每次站台人数被清空的概率：

$$P_{i0}(k) = \sum_{n=0}^{S_k-i} P_a(n \leq s_k - i) P_s(s_k), \quad \forall s_k - i \leq a_{\max}$$

设  $Q_{\max}$  为最大的站台排队长度， $Q_0$  为最初站台排队长度，因此可以得到每次循环站台剩余人数为  $j$  的概率：

$$P_r(Q_0 = j, k) = \sum_{i=0}^{Q_{\max}} P_r(Q_0 = i, k-1)$$

该概率为每次站台剩余队长，转移概率为固定的，且模型为强平稳的，其中想要得到  $P_r(Q_0 = i, k-1)$  即  $k$  步转移概率矩阵，可运用全概率公式可以计算得：

$$P(X_1 = j) = \sum_{i=1}^N P(X_1 = j | (X_0 = i) P(X_0 = i)$$

$$p_1(i) = \sum_{i=1}^N p_0(i) p_{ij}$$

因此写成矩阵形式，易得：

$$P_1 = P_0 P_{ij}$$

$$P_2 = P_0 P_{ij} P_{ij}$$

运用归纳法可得  $N$  步转移矩阵为一步转移矩阵的  $N$  次方

$$P_n = P_0 P_{ij}^n$$

由此可得到  $k$  步转移矩阵，得到  $k$  次循环后的每个站台剩余人数的概率分布：

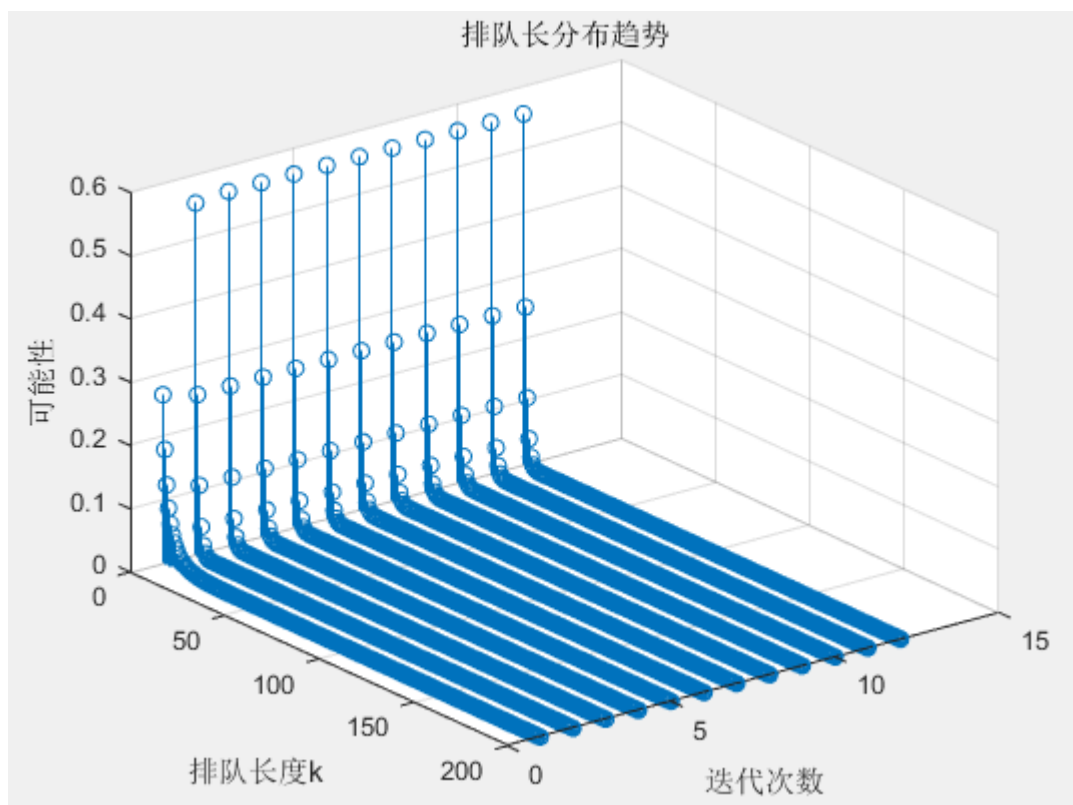
$$P_r(Q_0 = j, k)$$

计算其期望就可以得到站台剩余人数的平均值：

$$E[Q_0(k)] = \sum_{j=0}^{Q_{\max}} j P_r(Q_0 = j, k)$$

## 6.6 仿真模拟

在 matlab 中初始分布设定为期望为 15，方差为 10 的正态分布，不断迭代运算后可到 12 次运算后站台剩余队长的概率分布如下：



观察该图像，可发现随着迭代次数的增加，概率分布逐渐稳定，趋近于一个定值，由于概率转移矩阵的设置，整个系统的站台剩余人数为 0 的概率很高，因为服务能力高于到达率嘛，整个 markov 链非周期正常返，则可以发现整个矩阵存在平稳分布，且极限分布等于平稳分布，可以通过下列线性方程组求得：

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{i=1}^N \pi_i = 1 \end{cases}$$

因为 $\pi$ 是平稳分布，所以乘上转移概率矩阵后仍为 $\pi$ ，是一个  $N*1$  矩阵，来看下列 10 次迭代结果：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.2661	0.5551	0.5593	0.5591	0.5588	0.5585	0.5581	0.5577	0.5572	0.5567
2	0.1811	0.2536	0.2532	0.2531	0.2530	0.2529	0.2527	0.2525	0.2523	0.2520
3	0.1265	0.1117	0.1104	0.1103	0.1103	0.1102	0.1101	0.1101	0.1100	0.1099
4	0.0910	0.0475	0.0463	0.0463	0.0463	0.0463	0.0462	0.0462	0.0462	0.0461
5	0.0674	0.0195	0.0187	0.0187	0.0187	0.0187	0.0187	0.0187	0.0187	0.0186
6	0.0513	0.0077	0.0073	0.0073	0.0073	0.0073	0.0073	0.0073	0.0073	0.0073
7	0.0400	0.0030	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
8	0.0318	0.0011	9.8894e-04	9.8854e-04	9.8807e-04	9.8749e-04	9.8683e-04	9.8607e-04	9.8521e-04	9.8426e-04
9	0.0257	4.0878e-04	3.4469e-04	3.4455e-04	3.4439e-04	3.4419e-04	3.4396e-04	3.4369e-04	3.4339e-04	3.4306e-04
10	0.0210	1.0585e-04	6.9219e-05	6.9189e-05	6.9155e-05	6.9115e-05	6.9069e-05	6.9015e-05	6.8956e-05	6.8889e-05
11	0.0173	2.0658e-05	4.3913e-06	4.3888e-06	4.3867e-06	4.3841e-06	4.3812e-06	4.3778e-06	4.3740e-06	4.3698e-06
12	0.0144	7.5713e-06	2.1085e-07	2.1068e-07	2.1058e-07	2.1046e-07	2.1032e-07	2.1015e-07	2.0997e-07	2.0977e-07
13	0.0120	4.0024e-06	8.5713e-09	8.5566e-09	8.5525e-09	8.5475e-09	8.5417e-09	8.5352e-09	8.5278e-09	8.5195e-09
14	0.0100	2.3346e-06	2.4901e-11	2.4613e-11	2.4601e-11	2.4587e-11	2.4570e-11	2.4551e-11	2.4530e-11	2.4506e-11
15	0.0083	1.4319e-06	1.7550e-14	2.9243e-15	2.9229e-15	2.9212e-15	2.9192e-15	2.9170e-15	2.9145e-15	2.9116e-15
16	0.0069	9.0386e-07	5.0682e-15	4.9622e-28	6.5188e-46	1.6458e-68	2.3101e-95	3.7518e-126	8.3603e-161	2.6207e-199
17	0.0057	5.9162e-07	2.5064e-15	1.6399e-28	1.0460e-46	6.5323e-70	1.2159e-97	2.0913e-129	3.8455e-165	7.5660e-205

可以发现经过 10 次迭代后，每次迭代之间的误差越来越小，结果稳定收敛，有平稳分布。

最后由期望公式求得平均排队长度为 1.7384 人/每趟班次，符合现实逻辑，因为只有拥挤时间段才会使得站台上乘客剩余。

另外其队长随着迭代次数减少的情况也可看出，整个队长逐渐趋近于稳定。

1x13 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	16.5041	4.4916	1.7661	1.7505	1.7498	1.7490	1.7480	1.7468	1.7454	1.7439	1.7423	1.7404	1.7384
2													

## 6.6 目标优化

2013 年杭州 1 号线，通知将在春运期间将原来的 9 分钟发车间隔改动为 4 分 45 秒发车间隔，为了探讨不同发车间隔对地铁站月台处排队人数影响，下从间隔时间 10 分钟，5 分钟，3 分钟不同的量级下：

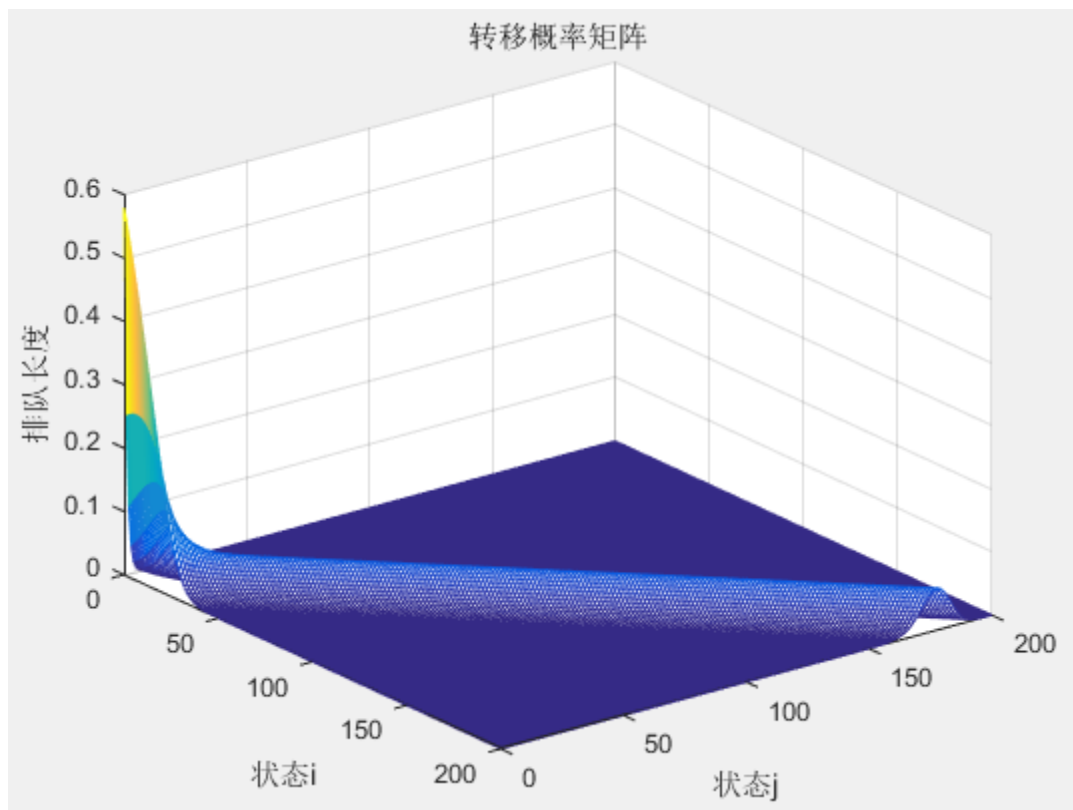
### 6.6.1 目标预测

最终想得到一个较小的平均剩余队长，或者在发生人口爆炸时有较快的转移速度，使得地铁站月台能够迅速恢复到少量人等待的状态。对于 10 分钟发车间隔的情况，由于泊松分布期望与参数相等则  $600 \times 1750 / 3600 = 291$ ，则每 10 分钟平均抵达站台人数为 291，远超过站过列车空座率均值 140 因此会有部分乘客流失，可以理解为发现地铁过分拥堵而更换交通工具。

而对于 5 分钟的情况， $300 \times 1750 / 3600 = 145$ ，因此每 10 分钟平均抵达站台人数为 145，在空座率均值附近，服务能力勉强维持。对于 3 分钟情况，其参数为 87.5 则远小于站台最大容量能力，因此可以预测 3 种情况中 3 分钟的队长压力最小。

### 6.6.2 仿真结果 1

10 分钟情况仿真结果参照 6.6 章节开头，5 分钟发车间隔按照原理论模型仿真可得到转移概率矩阵如下：

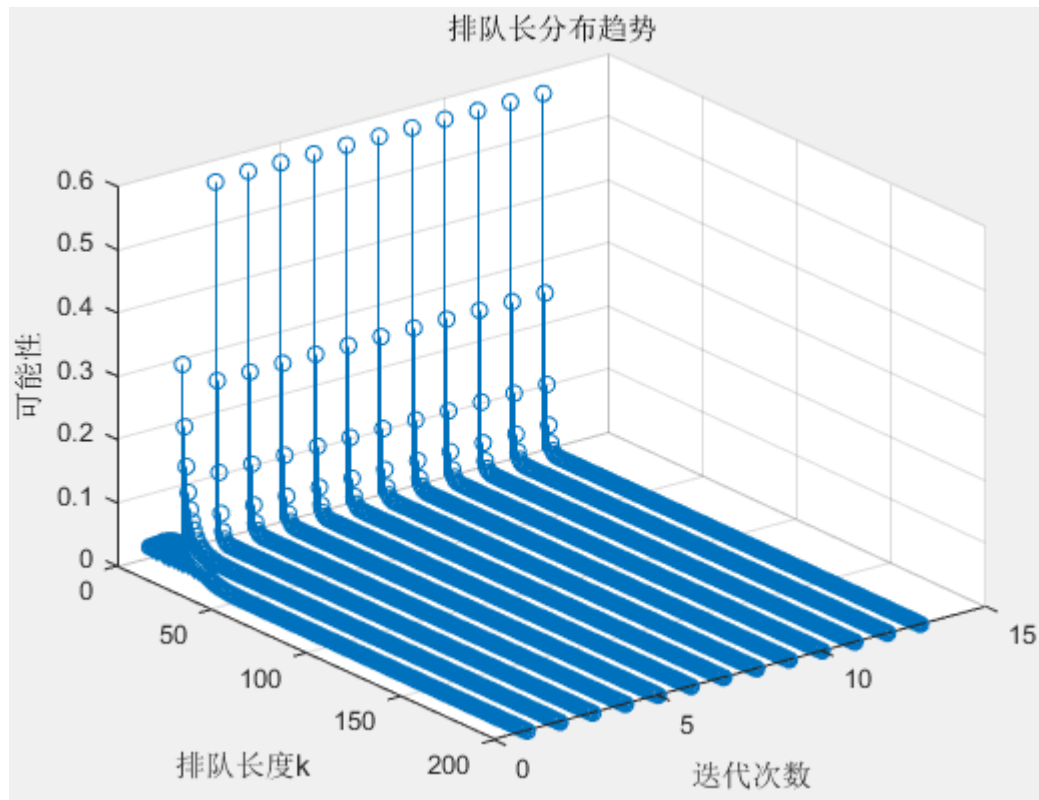


该模型为服务能力勉强满足需求，仿真结果相似于 10 分钟的拥挤情况，可以发现末端值概率要小于 10 分钟发车间隔情况，“勉强满足要求”比“无法满足要求”在不拥挤和拥



挤的情况基本一致，但在拥挤达到临界设定值时，前者会更具有减小排队长度的倾向，使得其由高状态向低状态转移的可能性更大。

然后增加迭代次数：



E

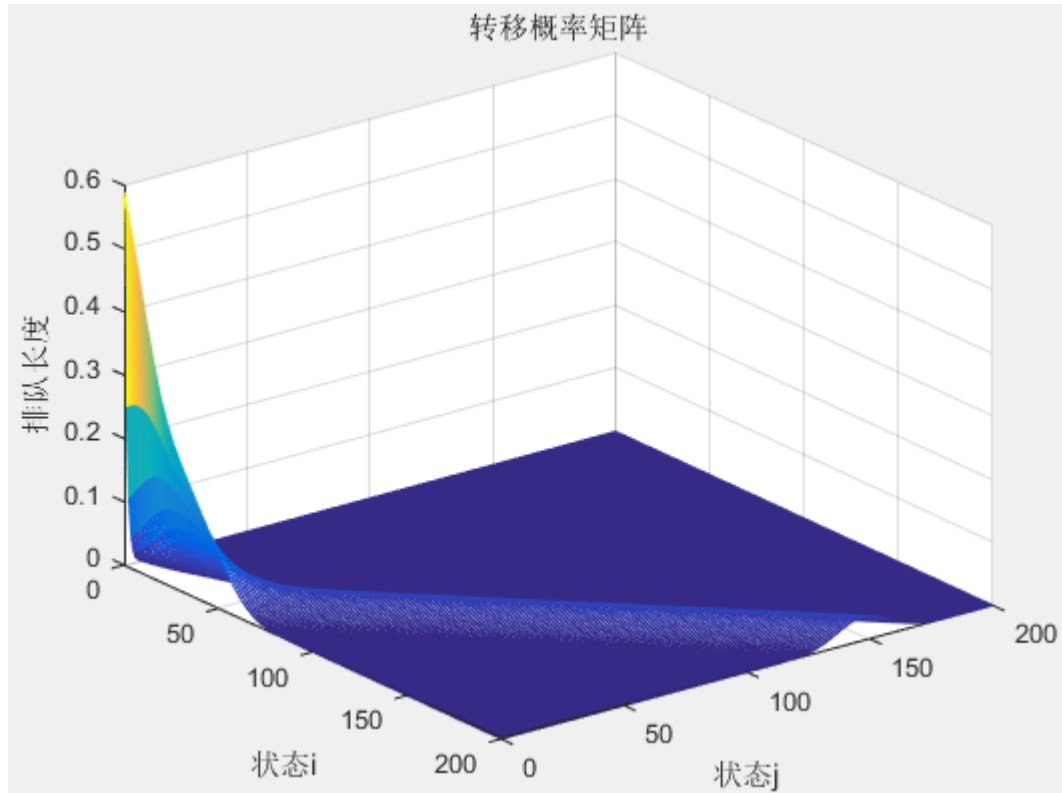
1x13 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	16.5041	3.9781	1.7371	1.7278	1.7272	1.7264	1.7256	1.7245	1.7233	1.7220	1.7205	1.7189	1.7171

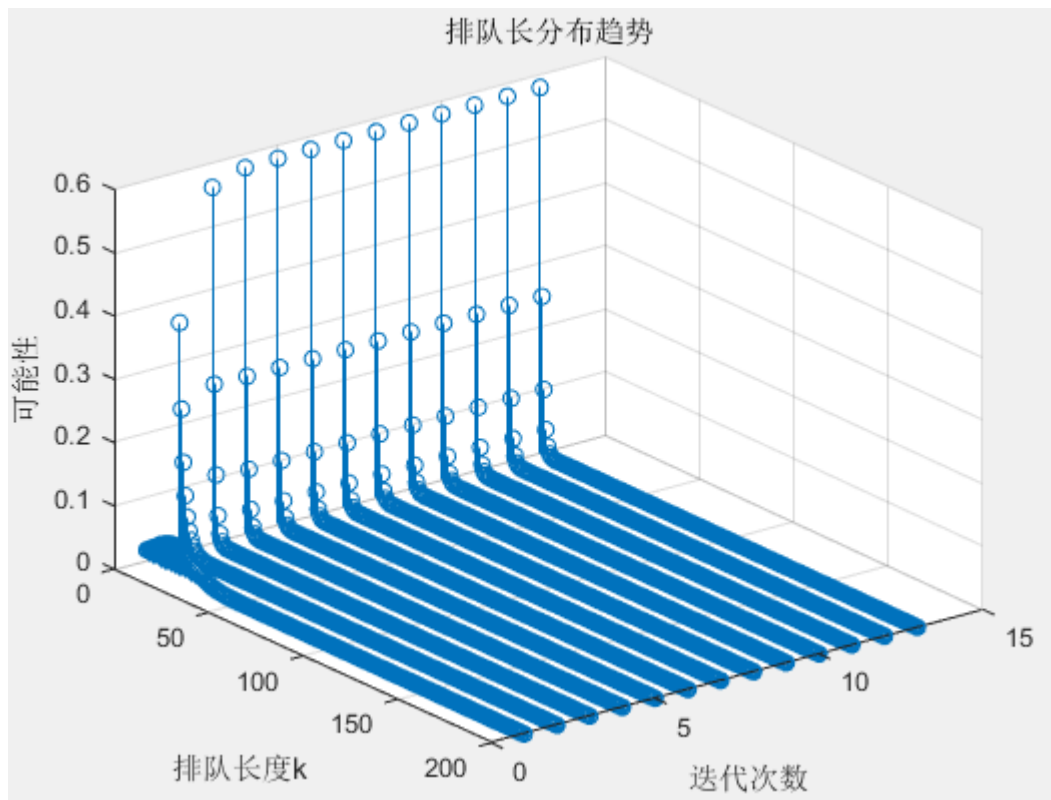
从结果来看，最终稳定的平均排队长度并没有减小很多，从 1.7384 人/站台变为 1.7171 人/站台，但其第二次的平均队长要比 10 分钟情况小，说明发生拥挤时，5 分钟发车间隔下的平均队长缩小的速率更快。

### 6.6.3 仿真结果 2

3 分钟发车间隔的转移概率矩阵结果如下：



由于发车间隔缩短，平均抵达站台人数减小，该转移概率矩阵在高状态（ $i=200$ ）向低状态（ $j=150$ ）转移的概率更高，而不是在（ $j=200$ ）附近分布，而低状态（ $i=50$ ）更是更容易向低状态（ $i=50$ ）转移。





E

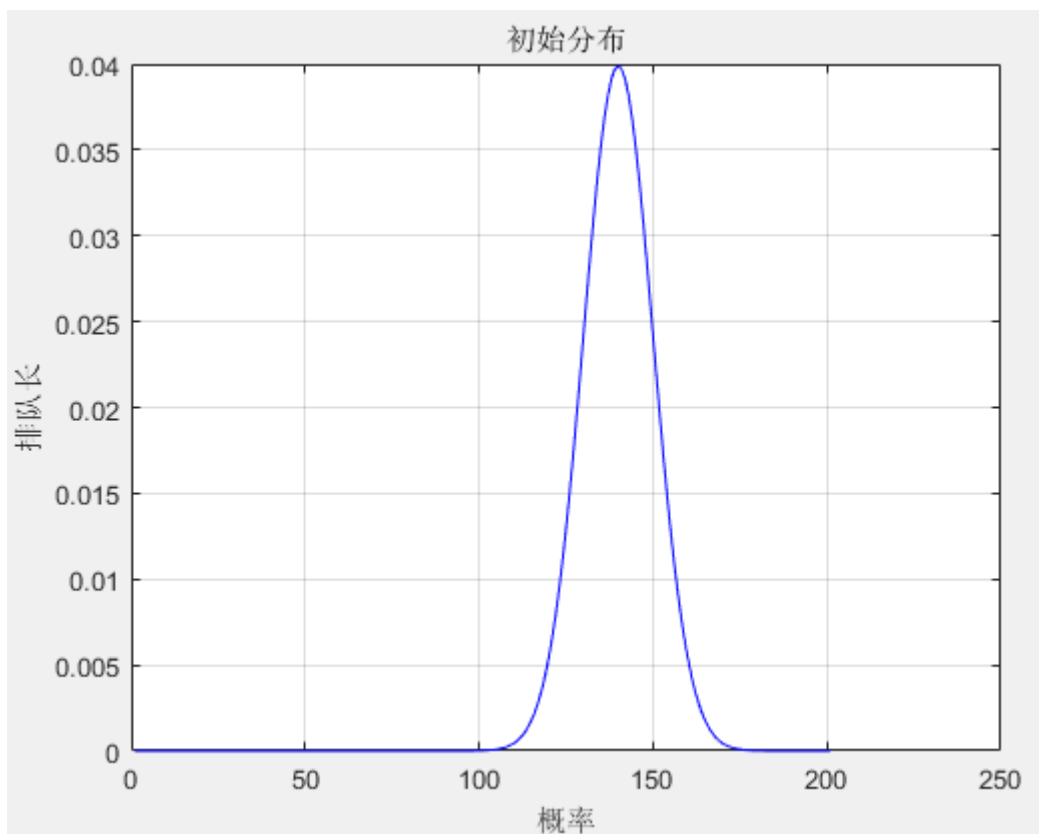
1x13 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	16.5041	2.8550	1.7553	1.7008	1.6983	1.6980	1.6978	1.6977	1.6975	1.6974	1.6972	1.6970	1.6969

观察平均排队长度并没有优化很多，稳定的剩余队长平均值为 **1.6969**，但第二次迭代的队长比前两种情况都要小，说明发车间隔越短队长减小到稳定的速率会更快。

#### 6.6.4 模拟高峰时期

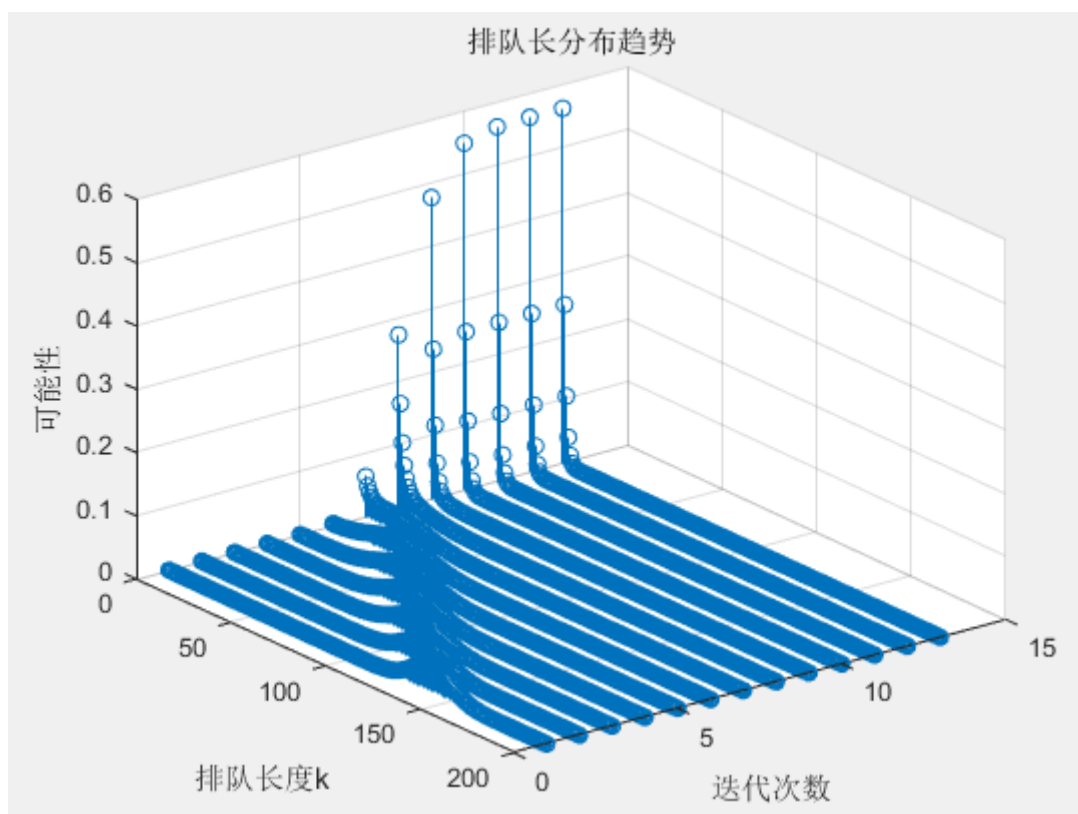
之前做的仿真是建立在初始分布为  $N(15,10)$  的正态分布，初始的站台平均队长集中分布在 15 人，过于稀少，现在将初始的正态分布变为  $N(140,10)$  的期望位 140 的分布，因此其初始状态站台队长很可能会超过服务能力，因为模拟你上下班高峰时期的人口爆炸状况。



因为三种情况的 **marcov** 链都是非周期正常返的，因此存在平稳分布且与极限分布相等，所以最终站台分布情况还是会稳定，且稳定在上一节讨论的那个分布情况下。

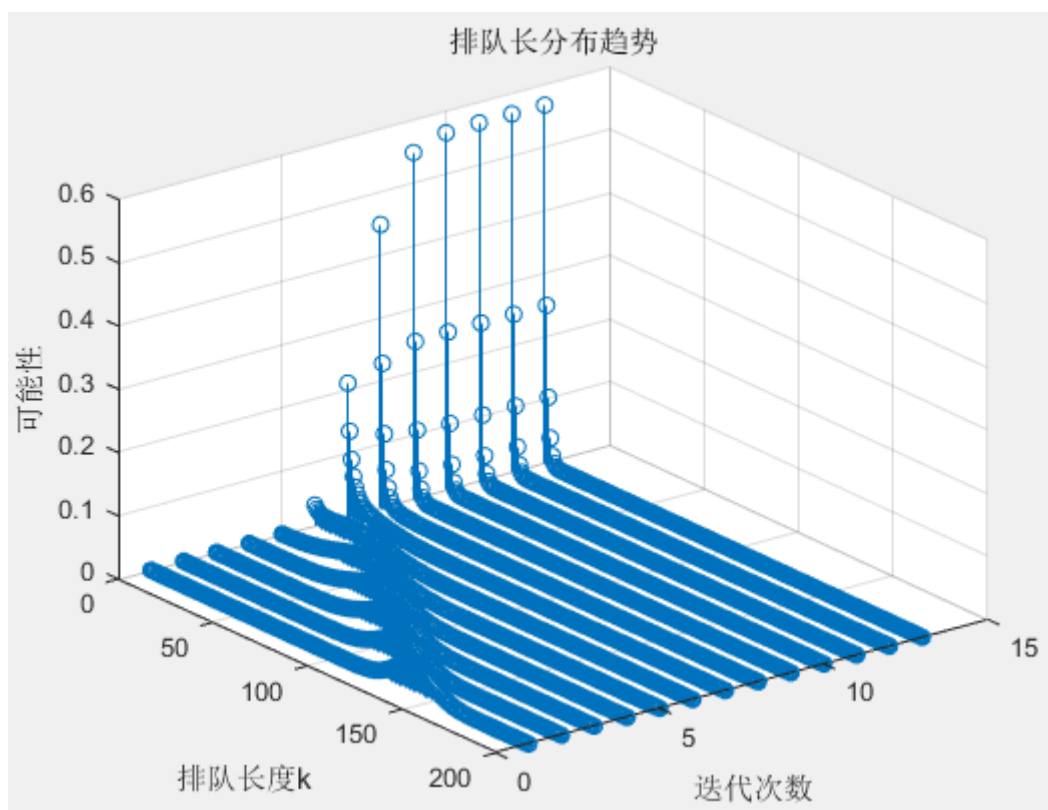
现主要观察人口爆炸时，三种发车间隔时间下队长趋于稳定的速率：

##### 1) 10 分钟发车间隔



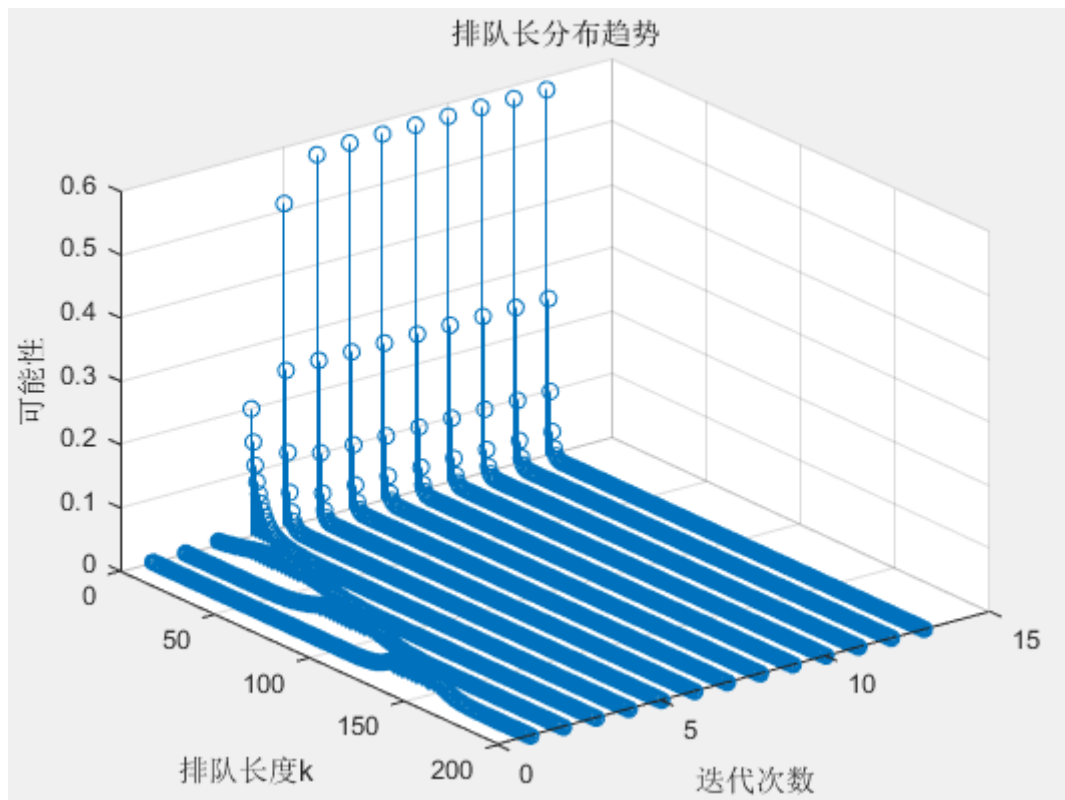
可以发现经过至少 11 次迭代，分布才最终稳定下来

2) 5 分钟发车间隔



经过至少 10 次迭代，没有改善很多。

### 3) 3 分钟发车间隔



由于其处理拥挤情况的能力更优,可以发现明显迭代次数在 5 次的时候就已经趋于稳定了,可以说当发生短时间高峰流量时,3 分钟发车间隔可以迅速减少排队队长并趋于稳定。再算上时间权重,5 分钟间隔的需要  $5 \times 10$  共 50 分钟来缓解拥挤,而 3 分钟间隔的需要  $3 \times 5$  共 15 分钟来缓解拥挤,可缓解 70% 的时间。

## 6.7 结论

将发车间隔减小并不能有效地减小每次列车离开后站台剩余排队人数的长度,但在高峰期高通行流量时,减小发车间隔可以稳定地加快队长逐渐减小的速度,由资料显示列车发车间隔 90s 以上为安全时间,而发车间隔缩短 0.6 倍相应地可能增加成本为原来的 1.667 倍,同样也会增加列车报废率,但明显 3 分钟可以缩短 70% 的时间缓解人流拥挤(定义稳定状态为非拥挤态)

## 七、目标优化

### 7.1 进站优化

对于进站的人，我们需要在使整个地铁站成本尽量降低的基础上，充分的提高乘客在舒适和效率上的满意程度，即减小乘客在乘车过程中所花费的时间。该时间成本我们利用总的排队队长来进行衡量。

而可调的参数为 2 个：购票机数目和检票机数目

对于目前的设施系统，我们已知：

自动售票机价格约为  $\eta_3 = 30000$  元，现有自动售票机  $n_3 = 12$  台。地铁闸机价格约为  $\eta_4 = 6000$  元，现有进站闸机  $n_4 = 7$  台。

则地铁站通行设备部分成本： $Y' = \eta_3 n_3 + \eta_4 n_4 = 402000$

排队人数为：26.53 人

对于该模型，我们存在两个优化目标：

1. 最高优先级目标：提高乘客在舒适和效率上的满意程度，保证客流顺利疏导，即整个地铁站中队长  $L_s$  最小，同时尽可能小于现实地铁站总队长，赋予优先因子  $P_1$ 。

2. 第二优先级目标：最大程度节省经济成本，即方案所需的总经费  $Y$  不超过现实建设地铁站通行设备经费，同时尽可能小，赋予优先因子  $P_2$ 。

根据条件求得模型为：

$$\begin{aligned}
 \max z &= P_1(d_1^- - d_1^+) + P_2 d_2^- \\
 s.t. \quad &\begin{cases} Y = 30000n_3 + 6000n_4 + d_1^- - d_1^+ = 402000 \\ Ls + d_2^- - d_2^+ = 43.8 \\ 10 \leq n_3 \leq 24 \\ 6 \leq n_4 \leq 12 \end{cases}
 \end{aligned}$$

对此我们采用枚举法求解：对这两个可变参数设置范围为：

$$10 \leq n_3 \leq 24, \quad 6 \leq n_4 \leq 10$$

我们对于因子分别进行赋值为：

$$P_1 = 0.0001, \quad P_2 = 1$$

利用 Matlab 程序进行求解，对于出站系统进行调整为：

$$n_3 = 13, \quad n_4 = 8$$

则排队人数以及经济成本经过优化后得出：

$$L_s = 20.03, Y = 438000$$

根据武林广场地铁站实地情况, 整个进站排队过程队长的期望为 26.53 人, 通行设施(售票机、进出站闸机、楼梯-扶梯组)总成本为 40.2W 元人民币。我们对其方案进行改良后, 虽然成本提高了 8.95%, 现为 43.8W 元人民币, 但是整个进出站排队过程队长的期望下降到 20.03 人, 同比下降了 24.5%, 是一个非常可观的优化。我们的方案大大减少了站内人数和乘客等待时间, 提高了乘客在舒适和效率上的满意程度, 保证了客流的顺利疏导。

## 7.2 出站优化

对于出站的人, 我们考虑方式一样。而可调的参数依旧为 2 个: 楼梯扶梯的组数和出站检票机数目

对于目前的设施系统, 我们已知:

每组楼梯扶梯价格约为  $\eta_6 = 50000$  元, 现有楼梯  $n_6 = 3$  台。地铁出站闸机价格约为  $\eta_7 = 6000$  元, 现有进站闸机  $n_7 = 11$  台。

则地铁站通行设备部分成本:  $Y_2' = \eta_6 n_6 + \eta_7 n_7 = 216000$

排队人数为: 69.81 人

对于该模型, 我们存在两个优化目标:

1. 最高优先级目标: 提高乘客在舒适和效率上的满意程度, 保证客流顺利疏导, 即整个地铁站中队长  $L_s$  最小, 同时尽可能小于现实地铁站总队长, 赋予优先因子  $P_3$ 。

2. 第二优先级目标: 最大程度节省经济成本, 即方案所需的总经费  $Y$  不超过现实建设地铁站通行设备经费, 同时尽可能小, 赋予优先因子  $P_4$ 。

根据条件求得模型为:

$$\begin{aligned}
 \max z &= P_3(d_3^- - d_3^+) + P_4 d_4^- \\
 s.t. \quad &\begin{cases} Y = 50000n_6 + 6000n_7 + d_3^- - d_3^+ = 216000 \\ Ls + d_4^- - d_4^+ = 69.8 \\ 1 \leq n_6 \leq 6 \\ 2 \leq n_7 \leq 12 \end{cases}
 \end{aligned}$$

对此我们采用枚举法求解: 对这两个可变参数设置范围为:

$$1 \leq n_6 \leq 6, \quad 2 \leq n_7 \leq 12$$

我们对于因子分别进行赋值为:

$$P_3 = 0.0001, \quad P_4 = 1$$

利用 Matlab 程序进行求解，对于出站系统进行调整为：

$$n_6 = 2, \quad n_7 = 12$$

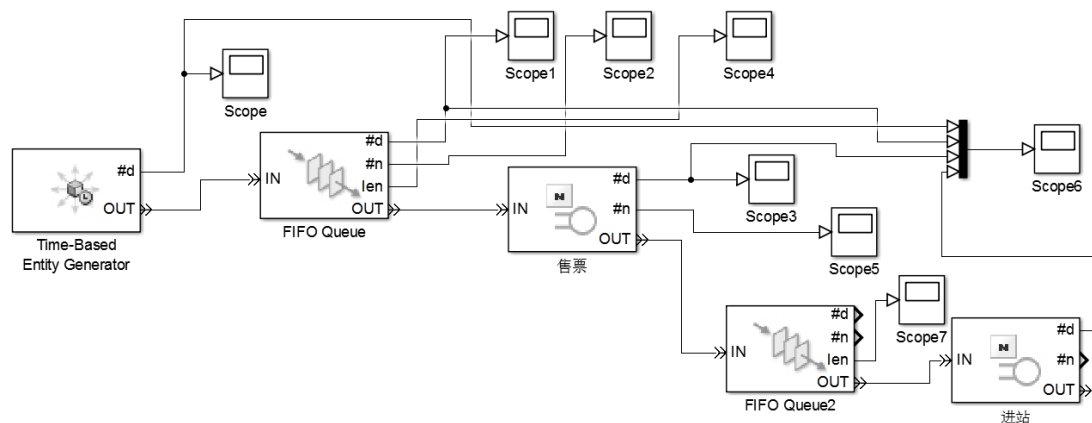
则排队人数以及经济成本经过优化后得出：

$$L_s = 44.10, \quad Y = 172000$$

根据武林广场地铁站实地情况，整个出站排队过程队长的期望为 69.83 人，通行设施（楼梯扶梯、出口闸机）总成本为 21.6W 元人民币。我们对其方案进行改良后，成本下降为 17.2W 元，下降显著，并且整个排队过程队长的期望也下降到 44.1 人，成本和排队人数都显著减少了，是一个非常好的优化。证明了我们模型的正确性与优越性，为地铁建设优化提供了有力的数学证明。

## 八、Matlab 仿真

下面我们利用 Matlab 的 Simevents 工具箱仿真简单的排队购票模型：

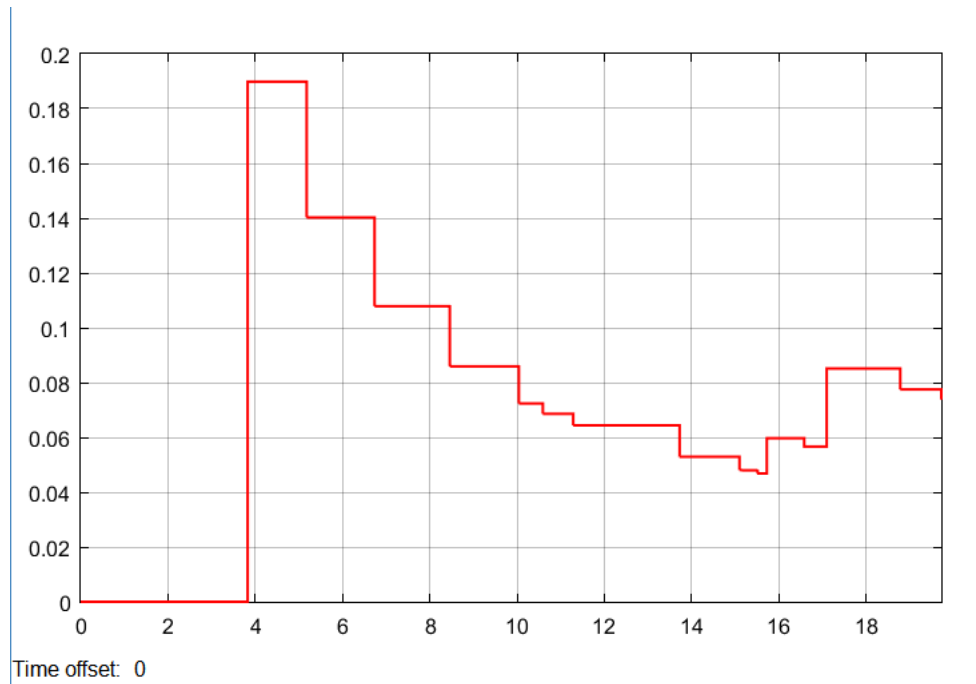


其中，系统进入的人数由发生器模块 Time-Based Entity Generator 随机生成泊松分布；而 FIFO Queue 模块模拟先到先服务的排队规则，售票服务方式模块来模拟购票环节，特点是服务窗口不足而效率一般；而进站服务方式模块模拟进站环节，特点是服务窗口比售票窗口少，但是效率更高。

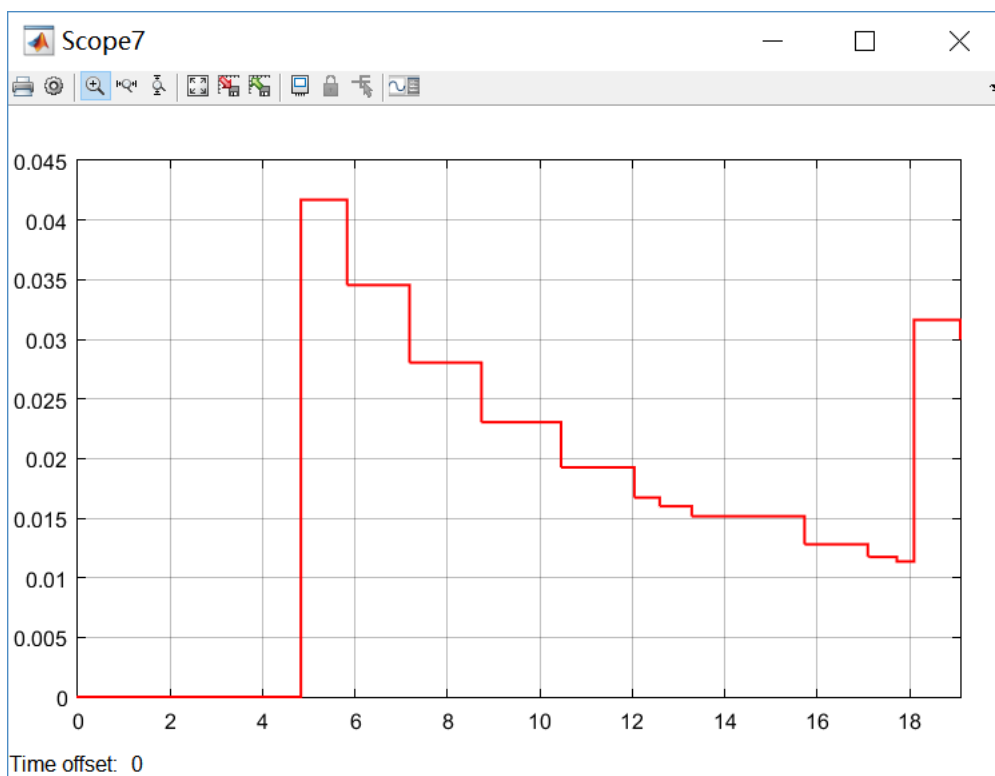
因为由概念图可知，三者为串联结构，故我们仿真图也采用串联结构，下面为仿真结果，

其中红线代表平均队长。

售票环节，实时队长的期望值（窗口不足，效率一般）：



进站环节，实时队长的期望组（窗口更少，效率更高）



对比可见，进站环节平均队长较小，下降区间较长，波动较大（注意比较二者的纵坐标数量级）；而售票环节平均队长较大，波动也更小一些。

另外，由于队长的期望值有升和降的过程，人数不会过度累积，也不会有太多窗口闲置，

说明售票机器和进站闸机的服务窗口数和服务效率都在可接受范围内,符合实际情况,证明了模型的正确性,也可用于检验设计方案的合理性。

## 九、总结

本文以排队论为基础,运用  $M/M/C$  模型和  $d/d/n$  模型以及马尔科夫链,分别对杭州武林广场地铁站的进站、出站以及站台上下车三种情况的乘客,进行了排队模型构建与分析,并在此基础上,运用多目标规划方式,优化了地铁站的设施组成,达到了减少乘客排队人数,同时优化经济成本的目标。

根据我们的优化结果,进出站旅客排队平均队长下降,成本增长很少甚至减少,符合预期目标,为地铁设计建设提供了有力的数学证明与参考。

此外,对于上车过程我们运用马尔科夫链相关知识,进行了模拟与仿真,能更好的帮助同学理解站台上车过程。

由于篇幅有限,我们的相关代码与程序可见附件,其中的 Excel 表格为所有优化情况的枚举。

## 十、参考文献

- [1] 马玉姣, 刘凯. 城铁安全检查通过率分析及建模研究 [J]. 物流技术. 2011(30):102-103.
- [2] Xin-yue Xu, Hai-ying Li. Analysis of subway station capacity with the use of queueing theory. Transportation Research Part C 38(2014)28-43
- [3] Cruz, F.R.B., Smith, J.M.G., 2007. Approximate analysis of  $M/G/c/c$  state-dependent queueing networks. Computers & Operations Research 34 (8), 2332–2344.
- [4] Xu, Xin-yue, Liu, Jun, Li, Hai-ying, Zhou, Yan-fang, 2013a. Probabilistic model for remain passenger queues at subway station platform. Journal of Central South University of Technology 20, 837–844.
- [5] Kerbache, L., Smith, J.M.G., 2000. Multi-objective routing within large scale facilities



using open finite queueing networks. European Journal of Operational

Research 121 (1), 105–123.

[6] Smith, J.M.G., 2011. Optimal routing in closed queueing networks with state dependent queues. INFOR: Information Systems and Operational Research 49

(1), 45–62.

[7] 常坤, 王三军. 系统论下银行排队问题的调查与思考 [B]. 中国人民银行秦皇岛市中心支行 1007-4392(2012)11-0040-02

[8] 聂盼红. 串联开排队网络系统分析[D]. 南京理工大学, 2004.

[9] 饶雪平. 轨道交通车站楼梯和自动扶梯处客流延时分析 [J]. 交通与运输: 学术版, 2005(B07):13-15.

## 十一、附录

### 10.1 程序一（进站过程队长）

## 十一、小组