投资收益与风险评估问题研究

摘要

当今社会随着金融市场的成熟与个人资产的增多，投资理财已经成为个人财产管理和升值的重要手段。但是，投资的过程中往往伴随着风险，收益越大，往往风险越大。因此，选择理财产品时如何有效评估收益与风险是一个非常重要的问题。本文通过对投资的收益与风险问题进行简化处理，得到了四种较为实用的收益与风险模型。利用示例数据，通过运筹学方法对这四种模型进行了求解，并对结果进行了比较分析。

关键词

投资收益；投资风险；运筹学方法

问题提出

个人投资理财的目的，是通过对所有资产和负债的有效管理，使其达到保值、增值的目的。投资理财不等于简单的攒钱、存钱，把钱放在银行里，也不等于简单的炒股(股票买卖)。投资理财是根据需求和目的将所有财产和负债，其中包括有形的、无形的、流动的、非流动的、过去的、现在的、未来的、遗产、遗嘱及知识产权等在内的所有资产和负债进行积极主动的策划、安排、置换、重组等使其达到保值、增值的综合的、系统的、全面的经济活动。前者只是投资的一种具体行为，充其量为现金的使用。作为投资理财一部分的现金管理要比它复杂得多，也难得多。

投资过程最重要的两项数据就是投资收益率和风险损失率。投资收益率(rate of return on investment)又称投资利润率是指投资收益（税后）占投资成本的比率。公式为：

投资收益率=年平均利润总额/投资总额×100%

年平均利润总额=年均产品收入-年均总成本-年均销售税金。它反映的是投资的收益能力。风险损失率是在一定时间内一定数目的危险单位中可能受到的损失的程度。其公式为：

风险损失率=实际损失额/发生事故件数×100％

个人投资理财，简单来讲，就是如何平衡投资的收益与风险问题。

模型建立

为建立投资收益与风险模型，现提出如下简单的个人投资理财问题：假定市场上有 n 种资产（如股票、债券、…） $S_i(i=1,..,n)$ 供投资者选择，某家庭现持有可用于投资的资金数额为 M。评估公司对这 n 中资产进行了评估，估算出在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i，并预测出购买 S_i 的风险损失率为 q_i。考虑到投资越分散，总的风险越小，因此假定当用这笔资金购买若干种资产时，总体风险可用投资的 S_i 中最大的一个风险来度量。

另外，购买产品 S_i 时需要付交易费，费率为 p_i，并且当购买额不超过给定值 u_i 时，交易费按购买 u_i 来计算（不买无需付费）。另外，假定同期的银行存款利率是 r_0，且既无交易费又无风险。（$r_0=5\%$）

为了保证投资的分散性，防止投资的过于集中，限定每种投资产品的投资额不能超过总投资额的一半。

如何选择投资方案或选择银行生息，使得总收益尽可能的大，而风险尽可能的小。

1.模型分析

为了使建模过程得以简化，我们做如下假设：

1.投资总金额 M 足够大，为建模方便设 M 为 1；

2.投资越分散，风险越小，可使用投资产品中最大的一个风险损失来度量总体风险；

3.投资产品之间相互独立；

4.投资收益与风险损失仅与 r_i， q_i， p_i 三者相关，不受其他因素的影响。

模型参数说明如下：

$x_i, i=1,...n$ 为每种投资产品的投资金额， x_0 为银行存款金额；

r_i， q_i， p_i 分别是收益率、风险损失率和交易费率， r_0 为银行利息；

由此可得，投资总收益

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} r_i x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \max(u_i, x_i)$$

即投资总收益为各类投资收益之和减去总的交易费用。

投资总风险

$$g(x)=\max(q_i x_i), i=1,...n$$

即投资总风险为各类投资中的最大风险。

约束条件为

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \max(u_i, x_i) = M$$
$$0 \le x_i \le 0.5, i = 0, \dots n$$

因此投资风险与评估模型为：

$$\begin{cases} \max f(x) = \sum_{i=0}^{n} r_i x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \max(u_i, x_i) \\ \min g(x) = \max(q_i x_i), i = 1, \dots n \\ \sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \max(u_i, x_i) = M \\ 0 \le x_i \le 0.5, i = 0, \dots n \end{cases}$$

为使模型得以简化，假定每种投资产品的投资金额足够大，均超过了最低投资值 u_i，则模型可以简化为：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (r_i - p_i) x_i + r_0 x_0$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$$

此外，假设最大风险损失为 η，则 $\min g(x) = \max(q_i x_i), i = 1, \dots n$ 可转化为

$$\begin{cases} \min \eta \\ q_i x_i \le \eta, i = 1, \dots n \end{cases}$$

因此，投资收益与风险模型可简化为

$$\begin{cases} \max f(x) = \sum_{i=1}^{n} (r_i - p_i) x_i + r_0 x_0 \\ \min \eta \\ \sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M \\ q_i x_i \le \eta, i = 1, \dots n \\ 0 \le x_i \le 0.5, i = 0, \dots n \end{cases}$$

这是一个较为典型的多目标线性规划问题。在此，我们提出以下四种不同优化方式的模型求解方法。

2.模型建立

（1）以总收益/总风险作为最终目标函数。此时模型可写为：

$$\begin{cases}\max f(x)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(r_i-p_i)x_i+r_0x_0}{\eta}\\ \sum_{i=0}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=M\\ q_ix_i\le\eta, i=1,\dots n\\ 0\le x_i\le 0.5, i=0,\dots n\end{cases}$$

（2）设定风险上限α，以总收益最大为最终目标函数。此时模型可写为：

$$\begin{cases}\max f(x)=\sum_{i=1}^{n}(r_i-p_i)x_i+r_0x_0\\ \sum_{i=0}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=M\\ q_ix_i\le\alpha, i=1,\dots n\\ 0\le x_i\le 0.5, i=0,\dots n\end{cases}$$

（3）设定总收益下限β，以总风险最小为最终目标函数。此时模型可写为：

$$\begin{cases}\min\eta\\ \sum_{i=1}^{n}(r_i-p_i)x_i+r_0x_0\ge\beta\\ \sum_{i=0}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=M\\ q_ix_i\le\eta, i=1,\dots n\\ 0\le x_i\le 0.5, i=0,\dots n\end{cases}$$

（4）对收益和风险分别赋予权重系数$s,1-s$，综合得到最终目标函数。此时模型可写为：

$$\begin{cases}\max s\ (\sum_{i=1}^{n}(r_i-p_i)x_i+r_0x_0)-(1-s)\eta\\ \sum_{i=0}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=M\\ q_ix_i\le\eta, i=1,\dots n\\ 0\le x_i\le 0.5, i=0,\dots n\end{cases}$$

3．模型求解

假定如下 15 种投资产品的相关数据，利用这些数据对以上的四种模型分别进行求解和分析。

S_i	r_i %	q_i %	p_i %	u_i 元
1	9.6	42	2.1	181
2	18.5	54	3.2	407
3	49.4	60	6.0	428

4	23.9	42	1.5	549
5	8.1	1.2	7.6	270
6	14	39	3.4	397
7	40.7	68	5.6	178
8	31.2	33.4	3.1	220
9	33.6	53.3	2.7	475
10	36.8	40	2.9	248
11	11.8	31	5.1	195
12	9	5.5	5.7	320
13	35	46	2.7	267
14	9.4	5.3	4.5	328
15	15	23	7.6	131

模型一

$$\begin{cases} \min f(x) = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - p_i)x_i + r_0 x_0}{\eta} \\ \sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M \\ q_i x_i - \eta \le 0, i = 1,\dots n \\ 0 \le x_i \le 0.5, i = 0,\dots n \end{cases}$$

以 $\left[x_i (i = 0,\dots 15), \eta\right]$ 作为决策变量。利用 matlab 得到计算结果如下：

S_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.0084	0.0065	0.0059	0.0084	0.2945	0.0091	0.0052	0.0106	0.0066	0.0088

11	12	13	14	15	16
0.0114	0.0643	0.0077	0.0067	0.0154	0.0035

银行存款额为 0.5，最优目标函数值为 17.6979。

结果分析

该模型是以收益/风险作为目标函数，亦即得到的投资组合使得收益和风险之间的比值或者说是差距达到最大。

从优化结果可以看出，银行存款额达到最大值 0.5，说明该种模型更偏向于无风险损失的银行存款。当全部投资均用于银行存款时，目标函数值将达到无穷大。

模型二

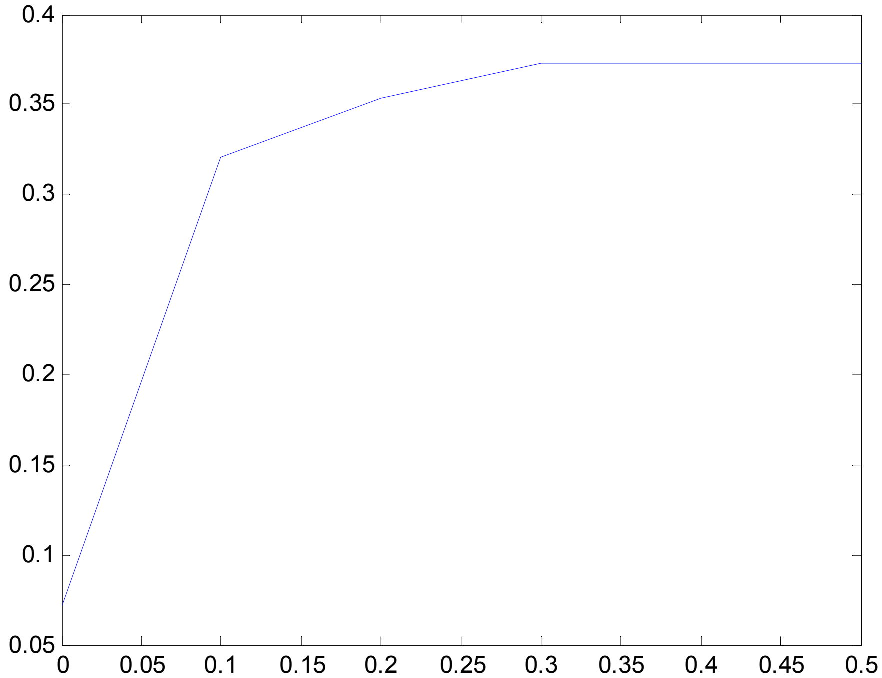
$$\begin{cases} \min f(x) = -(\sum_{i=1}^{n}(r_i - p_i)x_i + r_0 x_0) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M \\ q_i x_i \le \alpha, i = 1,\dots n \\ 0 \le x_i \le 0.5, i = 0,\dots n \end{cases}$$

以 $x_i, i = 0,\dots,n$ 为决策变量，选定取风险水平 $\alpha = 0:0.1:0.5$，在不同的风险水平之下得到计算结果如下（篇幅所限，仅取 6 个点）：

a	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x1	0.5	9.02E-12	1.72E-11	8.87E-11	8.62E-14	4.74E-10
x2	0.008415	7.78E-02	2.09E-11	9.76E-11	9.27E-14	5.02E-10
x3	0.006545	6.05E-02	7.66E-11	1.61E-10	1.34E-13	6.67E-10
x4	0.00589	0.054436	0.107146	0.157741	0.30018	0.5
x5	0.008415	7.78E-02	1.53E-01	3.53E-10	2.46E-13	1.02E-09
x6	0.294519	3.92E-12	1.55E-11	8.11E-11	7.91E-14	4.37E-10
x7	0.009062	8.37E-02	2.68E-11	1.14E-10	1.04E-13	5.50E-10
x8	0.005197	0.048032	0.094541	0.139183	0.264865	0.445076
x9	0.010582	0.097789	1.92E-01	2.83E-01	5.71E-13	1.44E-09
x10	0.006631	0.061279	1.21E-01	1.78E-01	6.74E-12	1.35E-09
x11	0.008836	8.17E-02	1.61E-01	2.70E-11	2.78E-13	1.10E-09
x12	0.011401	1.05E-01	1.85E-11	9.02E-11	8.66E-14	4.73E-10
x13	0.064259	1.32E-12	1.45E-11	7.70E-11	7.61E-14	4.25E-10
x14	0.007683	0.071004	0.139756	0.205749	3.92E-01	1.51E-08
x15	0.006668	7.50E-12	1.68E-11	8.34E-11	8.15E-14	4.51E-10
x16	0.015366	1.42E-01	1.87E-11	9.05E-11	8.63E-14	4.70E-10
x17	0.003534	0.032662	0.064288	0.094644	0.180108	0.486751
f(x)	-0.07238	-0.32085	-0.3536	-0.37315	-0.37322	-0.37322

其中，目标函数 $f(x)$ 为化为标准型，取其相反数。

目标函数值随风险系数的变化情况如下：



图一 $f(x)$ 随风险系数变化图

结果分析

该模型通过设定可接受的风险系数，来确定可获得的最大收益值。不同风险上限情况下可获得的最大收益如上图所示，每种风险上限情况下的最优组合如上表所示。

由变化图我们可以看出，风险上限值越大，所能获得的收益越大，这与实际情况是相符的。

目标函数随风险系数变化图呈折现形式，在风险上限小于 0.1 的部分，曲线斜率较大，说明较少的风险增大将获得较大的收益增长，而 0.1 之后，曲线斜率降低，因此风险上限为 0.1 时的投资组合是一个最佳的投资组合。

当风险上限大于 0.3 之后，目标函数的变化趋于平稳，说明在条件约束下，风险上限为 0.3 时，通过寻找最优投资组合，已经能够达到最大的投资收益。

模型三

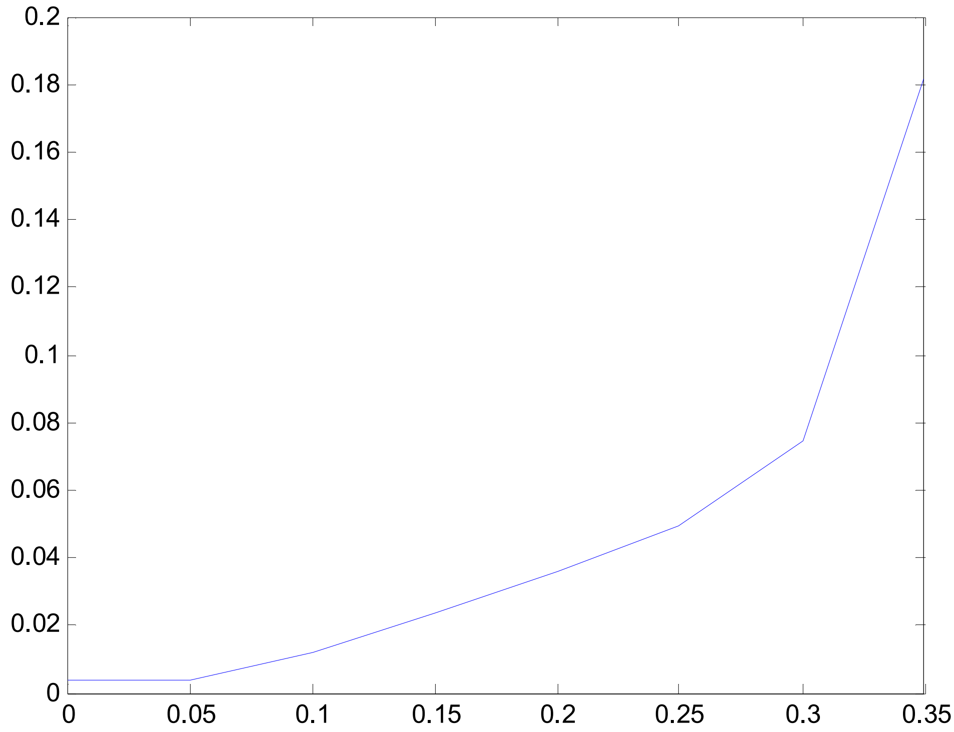
$$
\begin{cases}
\min \eta \\
-(\sum_{i=1}^{n}(r_i - p_i)x_i + r_0 x_0) \le -\beta \\
\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M \\
q_i x_i \le \eta, i = 1,\ldots n \\
0 \le x_i \le 0.5, i = 0,\ldots n
\end{cases}
$$

以 $\left[x_i(i=0,\ldots 15),\eta\right]$ 作为决策变量。利用 matlab 得到计算结果如下：

b	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
x1	0.5	5.00E-01	5.00E-01	2.77E-01	6.05E-12	6.87E-13	4.73E-14	3.58E-13
x2	0.008415	8.41E-03	2.84E-02	5.62E-02	8.51E-02	5.31E-03	5.48E-14	3.86E-13
x3	0.006545	6.54E-03	2.21E-02	4.37E-02	6.62E-02	9.16E-02	1.17E-13	5.66E-13
x4	0.00589	0.00589	0.019864	0.039361	0.05955	0.082398	0.124615	3.03E-01
x5	0.008415	8.41E-03	2.84E-02	5.62E-02	8.51E-02	1.18E-01	1.74E-02	1.07E-12
x6	0.294519	2.95E-01	1.04E-01	2.01E-10	4.15E-12	5.36E-13	4.23E-14	3.28E-13
x7	0.009062	9.06E-03	3.06E-02	6.06E-02	9.16E-02	1.27E-01	6.82E-14	4.37E-13
x8	0.005197	0.005197	0.017527	0.03473	0.052544	0.072704	0.109955	2.67E-01
x9	0.010582	0.010582	3.57E-02	7.07E-02	1.07E-01	1.48E-01	2.24E-01	2.46E-12
x10	0.006631	0.006631	2.24E-02	4.43E-02	6.70E-02	9.28E-02	1.40E-01	8.06E-12
x11	0.008836	8.84E-03	2.98E-02	5.90E-02	8.93E-02	1.24E-01	1.87E-01	1.21E-12
x12	0.011401	1.14E-02	3.84E-02	7.62E-02	2.59E-02	1.18E-12	4.94E-14	3.60E-13
x13	0.064259	6.43E-02	2.85E-13	4.93E-11	1.86E-12	2.99E-13	3.89E-14	3.15E-13
x14	0.007683	0.007683	0.02591	0.051341	7.77E-02	1.07E-01	1.63E-01	3.87E-01
x15	0.006668	6.67E-03	2.25E-02	1.40E-10	4.49E-12	5.70E-13	4.42E-14	3.38E-13
x16	0.015366	1.54E-02	5.18E-02	1.03E-01	1.55E-01	1.97E-13	5.00E-14	3.59E-13
x17	0.003534	0.003534	0.011919	0.023617	0.03573	0.049439	0.074769	1.82E-01
f(x)	0.003534	0.003534	0.011919	0.023617	0.03573	0.049439	0.074769	0.181575

目标函数 $f(x)$ 即为在收益下限约束下的最低风险损失。

下图为最低风险损失 η 随收益下限 β 变化的趋势图。（由模型二的计算结果可知，在约束条件下，所能获得的最大投资收益在 0.35 左右，因此趋势图的 β 选取范围为 $0-0.35$）



图二 $\eta-\beta$ 变化趋势图

结果分析

从变化趋势来讲，图二和图一的变化趋势保持一致，所要求的收益也高，所要承担的风险也越大。

该模型是通过设定最低收益下限 β，确定最佳投资组合使得风险最小。不同收益下限情况下的最低风险如上图所示，相应的最佳投资组合如上表所示。

由图可知，在 $\beta\le 0.3$ 时，η 值上升缓慢，而超过 0.3 之后，η 值迅速上升，因此，最低收益下限 $\beta=0.3$ 时的投资组合是最佳的投资组合，这与模型二的分析相一致（模型二中风险上限为 0.1 是对应的最大收益大约为 0.3）。

模型四

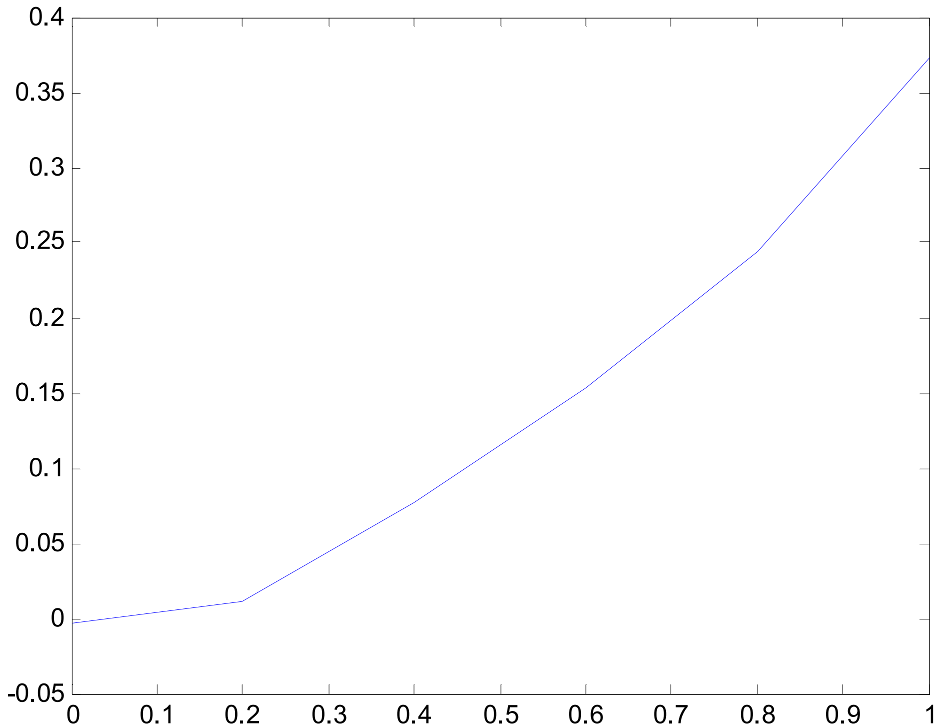
$$\begin{cases} \min -(s(\sum_{i=1}^{n}(r_i-p_i)x_i+r_0x_0)-(1-s)\eta) \\ \sum_{i=0}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=M \\ q_ix_i\le\eta, i=1,\dots n \\ 0\le x_i\le 0.5, i=0,\dots n \end{cases}$$

以 $\left[x_i(i=0,\ldots 15),\eta\right]$ 作为决策变量。利用 matlab 得到计算结果如下：

s	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
x1	0.5	9.02E-12	1.72E-11	8.87E-11	8.62E-14	4.74E-10
x2	0.008415	7.78E-02	2.09E-11	9.76E-11	9.27E-14	5.02E-10
x3	0.006545	6.05E-02	7.66E-11	1.61E-10	1.34E-13	6.67E-10
x4	0.00589	0.054436	0.107146	0.157741	0.30018	0.5
x5	0.008415	7.78E-02	1.53E-01	3.53E-10	2.46E-13	1.02E-09
x6	0.294519	3.92E-12	1.55E-11	8.11E-11	7.91E-14	4.37E-10
x7	0.009062	8.37E-02	2.68E-11	1.14E-10	1.04E-13	5.50E-10
x8	0.005197	0.048032	0.094541	0.139183	0.264865	0.445076
x9	0.010582	0.097789	1.92E-01	2.83E-01	5.71E-13	1.44E-09
x10	0.006631	0.061279	1.21E-01	1.78E-01	6.74E-12	1.35E-09
x11	0.008836	8.17E-02	1.61E-01	2.70E-11	2.78E-13	1.10E-09
x12	0.011401	1.05E-01	1.85E-11	9.02E-11	8.66E-14	4.73E-10
x13	0.064259	1.32E-12	1.45E-11	7.70E-11	7.61E-14	4.25E-10
x14	0.007683	0.071004	0.139756	0.205749	3.92E-01	1.51E-08
x15	0.006668	7.50E-12	1.68E-11	8.34E-11	8.15E-14	4.51E-10
x16	0.015366	1.42E-01	1.87E-11	9.05E-11	8.63E-14	4.70E-10
x17	0.003534	0.032662	0.064288	0.094644	0.180108	0.486751
f(x)	0.003534	-0.01153	-0.07698	-0.1531	-0.24375	-0.37322

其中， $f(x)$ 化为标准型，取其相反数。

下图为综合的目标函数随 s 的变化趋势图。



图三 目标函数随 s 变化趋势图

结果分析

该模型是分别赋予收益和风险不同的权重系数，综合得到的性能指标。

$s=0$ 时表示仅考虑风险，使风险损失最小，最小风险损失接近于 0；$s=1$ 时表示仅考虑收益，最大收益大约为 0.35，这与其他模型的结果相一致。

结论

投资的收益与风险评估问题是个人或公司在进行投资理财过程中需要考虑的最为重要的问题。本文通过一个简化的投资问题，提出了四种投资收益与风险评估模型，这四种模型的侧重点各有不同。模型一以收益/风险最大化为优化目标，侧重于使风险最小；模型二是以保证风险不超过上限的情况下的投资收益最大化为优化目标；模型三是以保证一定收益下限情况下的风险最小化作为优化目标；而模型四通过引入投资偏好系数将风险与收益综合到了一个指标之内。

由于能力所限，本文所提出的投资收益与风险模型相对于实际情况来讲还过于简化，但模型优化结果仍具有一定的指导意义。

参考文献

1. 古伯琼 个人投资高等教育的收益与风险研究[D].四川：四川大学教育经济与管理，2007.
2. 钱颂迪 运筹学[M].北京：清华大学出版社 2005