DB、DC 养老金计划最优资产配置分析

目　　录

1 背景介绍......1
2 研究内容......3
2.1 基于 Heston 模型的 DB 型养老金计划......3
2.1.1 模型假设......3
2.1.2 模型建立......4
2.1.3 模型验证及模拟......6
2.2DC 型养老金计划......9
2.2.1 模型假设......9
2.2.2 模型建立......11
2.2.3 模型验证及模拟......12
3 总结......14
4 风采展示......15
5 参考文献......15
6 附录......15

DB、DC 养老金计划最优资产配置分析

摘要：随着全球经济和社会的发展，养老金对老年人的生活保障变得愈加重要。在当今人口老龄化迅速加快的趋势下，养老金更成为大家关注的焦点。从人口结构来看，未来我国社会养老资金的压力将非常大，因此我们关注到如何能确保养老金保持一定的购买力水平并让养老金的持有者尽量不受损失这个关键问题，对此我们运用 DB、DC 两种模型分别对其模型及结构进行构建及分析，并通过模型的求解求得最优决策的结果用来回答我们关注的问题，并取得较好的结果。

关键词：养老金；收益确定型（DB）；缴费确定型（DC）；最优决策

Abstract: With the development of the global economy and society, the pension security for the elderly has become increasingly important. With the rapid aging of the population, pensions have become the focus of attention. From the perspective of population structure, the pressure on China's social pension funds will be very large in the future, so we are concerned about how we can ensure that pensions maintain a certain level of purchasing power and keep pensioners out of loss as a key issue. The DB and DC models are used to construct and analyze their models and their structures. The results of the optimal decision are obtained by solving the model to answer our concerns and achieve better results.

Key words: Pension; Defined Benefit; Defined Contribution; Optimal decision

1 背景介绍

随着我国老龄化趋势日益严重以及事业单位养老体制的改革，养老金问题已经成为社会普遍关心的热点问题。习近平总书记在十九大上提出要“按照兜底线、织密网、建机制的要求，全面建设覆盖全民、城乡统筹、权责清晰、保障适度、可持续的多层次社会保障体系。全面实施全民参保计划。要完善国民健康政策，为人民群众提供全方位、全周期的健康服务。”明确提出了建立多层次社会保障体系及推进“健康中国战略”的基本方向。

反观目前实际情况，我国 60 岁及以上人口已达 2.3 亿，占总人口的 16.7%，作为老龄化速度快、未富先老的发展中国家，我国社会保障体系面临严峻的形势。据浙江省人力资源和社会保障统计，2017 年浙江省参加基本养老保险人数为 3913.07 万人，比上年末增加 174.01 万人，参保率为 88.63%。全年基本养老保险

基金总收入 3252.25 亿元，比上年增长 29.3%。全年基本养老保险基金总支出 2856.29 亿元，比上年增长 25%。年末基本养老保险基金滚存结余 3800.03 亿元，比上年增长 11.6%。其中。参加企业职工基本养老保险人数为 2500.66 万人。其中，参保职工 1816.43 万人，离退休人员 684.23 万人。全年企业职工基本养老保险基金总收入 2429.95 亿元，比上年末增长 23%，基金总支出 2058.38 亿元，增长 17%，基金年末滚存结余 3597.24 亿元，增长 11.5%，基金支付能力为 21.7 个月，比上年减少 0.9 个月。城乡居民基本养老保险参保人数 1200.7 万人，比上年末减少 32.42 万人。其中实际领取待遇人数 537.92 万人。全年城乡居民基本养老保险基金总收入 158.52 亿元，同比增长 5.6%，基金总支出 157.43 亿元，同比增长 9.6%，基金年末滚存结余 151.89 亿元，同比增长 0.7%。机关事业单位基本养老保险参保人数（含统筹试点，下同）211.71 万人，比上年增加 27.79 万人。其中，在职职工参保人数 148.44 万人，退休人员参保人数 63.27 万人。全年机关事业单位基本养老保险基金（含统筹试点，下同）总收入 693.99 亿元，同比增长 61.12%，基金总支出 649.75 亿元，同比增长 45.49%，基金年末滚存结余 112.65 亿元，同比增长 64.67%。全省被征地农民参保人数 542.44 万人，比上年增加 35.35 万人。其中，参加职工基本养老保险人数 370.52 万人，比上年末增加 46.41 万人；参加基本生活保障人数 171.93 万人，比上年末减少 11.05 万人。全省被征地农民基本生活保障资金收入 230.72 亿元，支出 305.19 亿元，年末滚存结余 328.77 亿元，比上年减少 18.5%。随着社会经济的发展，养老保险的发展势必也变得更为重要。

养老金制度作为社会保障制度中的重要部分是为社会成员提供养老金的社会化制度，养老金就给付方式来看，基本可以被分为 DB 与 DC 两种类型，还有一种就是二者的混合模式即混合型计划。所谓 DB 模式，就是收益确定型模式的简称。DC 模式是缴费确定型模式的简称。在 DB 模式下，养老金计划发起人或管理人向计划者作出承诺，保证其养老金收益按事先的约定发放，也就是说，养老金计划者在退休后每月领取的养老金数量是事先确定好的。而在 DC 模式下，计划者到退休年龄为止，一共向养老金计划缴了多少费是确定的，但其退休后每月可领取多少养老金是不确定的，因为养老金总额是缴费和投资收益的总和，而投资收益是不确定的，投资风险由计划者自己承担。

2 研究内容

基于上述的背景及理论，我们分别考虑 DB、DC 型两种养老金计划的模型及结构，通过查阅相关资料对其模型进行求解，以求得最优决策的结果。

2.1 基于 Heston 模型的 DB 型养老金计划

2.1.1 模型假设

在 DB 型养老金计划问题中，缴费水平的制定和资产组合（风险投资占总资产的占比）是该问题需要做最优决策的关键。养老金的资产配置决策中，由于大量不确定性因素影响着投资的收益与方差，所以基于简化模型的考虑，我们将实际的投资市场看作是一个随机波动市场，例如 CEV 模型和 Heston 模型描述了不同的市场条件和市场过程状态下的随机波动情形。CEV 模型最早由 Cox 和 Ross 提出，考虑了风险资产市场价格因素，能很好地描绘实际市场隐含波动的不对称性，Heston 模型是由 Steven Heston 于 1993 年提出的描述标的资产波动率变化的数学模型。这种模型假设资产收益率的波动率并不恒定，也不确定，而是跟随一个随机过程来运动。

对于该模型来说，求解 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程会是一个比较复杂的数学过程，特别是对于增加控制量（本题有两个）和应用随机波动率的情况下，会需要求解比较复杂的非线性偏微分方程，在后续的推导中我们借助 Legendre 变换将原问题转化为对偶问题加以运算分析，可以解决部分模型求解问题。我们采用对数效用函数，建立 Heston 随机波动率模型，结合最优控制理论和 Legendre 变换，将原问题转化为对偶问题，同归对对偶问题的求解，得到原问题的解析解，从而确定风险资产比例 μ 和缴费水平 C，并且使用 Matlab 画出不同养老金发放水平下关于 C 或者 μ 的图像，探讨在满足缴费成员既定收入的条件下缴费最少的养老金管理制度。

2.1.2 模型建立

在 DB 模型中，我们定义如下变量：固定发放水平 P，依靠总缴费和投资收益兑现预先承诺；

总资产V_t；风险投资占总资产比例μ_t；无风险投资收益率r为常数，那么t时刻的价格B_t满足：$dB_t = rB_t dt$。假设风险投资的收益与方差均随机波动，t时刻价格S_t，波动D_t满足：

$$dS_t = (r + \lambda D_t)S_t dt + \sqrt{D_t} S_t dW_t$$

W_t是标准的布朗运动（布朗运动假设是现代资本市场理论的核心假设。现代资本市场理论认为证券期货价格具有随机性特征。这里的所谓随机性，是指数据的无记忆性，即过去数据不构成对未来数据的预测基础），$\lambda > 0$,为常数，D_t为 CIR 过程（CIR 模型认为，利率围绕一个平均值波动，如果利率偏离了平均值，它总是要回到平均值的），满足：

$$dD_t = k(\theta - D_t)dt + \sigma\sqrt{D_t} S_t dW'_t$$

k为D_t的均值回归率，θ为D_t的长期平均值，σ表示D_t波动率，$W_t{}'$也为布朗运动，与W_t相关系数为ρ，即$(dW_t，dW_t{}') = \rho dt$

为了养老基金管理者在能保证发放水平的条件下，通过投资收益，尽量降低缴费水平；同时考虑到未来价值贴现，也就是要使得累计缴费现值最小，故选择对数效用函数如下：

$$U = \int_0^\infty e^{-\beta t} \ln C_t dt$$

β表示贴现率，（贴现率：贴现率是指将未来支付改变为现值所使用的利率，简单的说，就是将来的钱，折算到现值，少掉或多出的那部分的钱与将来的钱的比值。假设现在有 95 万的存款，若一年后因为利息或者是人民币升值存款变为 100 万，那这个过程的贴现率就是 5%。相当于一年后的 100 万在现在的价值只有 95 万。贴现率是在投资中为了衡量收益的现值而出现的，是一种用来衡量投资是否合理高效的变量），C_t表示在t时刻下的缴费

$$H(t,S,V) = \max_{\mu,C}\{E[-U(C)] \mid S_t = S, V_t = V\}$$

待遇预定制养老基金管理的最优问题就可以表述为在t时刻给定风险资产价

格S_t和总资产价值V_t的条件下，确定控制——缴费水平C_t和风险资产比例μ_t，使得负效用期望最大，即缴费水平最低。

$$dV_t = \mu_t V_t \frac{dS_t}{S_t} + (1-\mu_t)V_t \frac{dB_t}{B_t} + C_t dt - Pdt$$

对以上最优问题求得关于值函数H(t, S, V)的偏微分方程。

$$\sup\{\int_0^\infty e^{-\beta t}\ln Cdt + (rV + \lambda\mu VD + C - P)H_V + \frac{1}{2}\mu^2 v^2 DH_{VV} + \rho\mu v\sigma DH_{VD} + k(\theta - D)H_D + \frac{1}{2}\sigma^2 DH_{DD}\} + H_t = 0$$

最优条件下有：

$$C = e^{-\beta t}\frac{1}{HV}$$

$$\mu = \frac{\rho\sigma H_{VD} + \lambda H_V}{VH_{VV}}$$

代入上式，即得到：

$$H_t + \beta te^{-\beta t} + e^{-\beta t}\ln H_V + rVH_V + e^{-\beta t} - PH_V + k(\theta - D)H_D + \frac{1}{2}\sigma^2 DH_{DD} - \rho\sigma\lambda D\frac{H_{VD}H_V}{H_{VV}} - \frac{1}{2}\lambda^2 D\frac{{H_V}^2}{H_{VV}} - \frac{1}{2}\rho^2\sigma^2 D\frac{{H_{VD}}^2}{H_{VV}} = 0$$

该方程不方便直接求解，引入对偶函数：

定义原问题的对偶函数：

$$\hat{H}(t,S,Z) = \sup_{V>0}\{H(t,S,V) - ZV\}$$

$$g(t,S,Z) = \inf_{V>0}\{V \mid H(t,S,V) \ge ZV + \hat{H}(t,S,Z)\}$$

$Z > 0$，表示V的对偶变量。

原问题效用函数的对偶函数：

$$\hat{U}(t,Z) = \sup_{C>0}\{U(t,C) - ZC\}$$

$$G(t,Z) = \inf_{C>0}\{C \mid U(C) \ge ZC + \hat{U}(t,Z)\}$$

得到对偶问题的 HJB 方程：

$$e^{-\beta t}\frac{1}{Z} - g_t + rg - P - k(\theta - D)g_D - \frac{1}{2}\sigma^2 Dg_{DD} + \rho\sigma\lambda Dg_D + \rho\sigma\lambda DZg_{DZ} - \lambda^2 DZg_Z - \frac{1}{2}\lambda^2 DZ^2 g_{ZZ} - \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sigma^2 D\frac{g_D^2 g_{ZZ} - 2g_D g_{DZ} g_Z}{g_Z^2} = 0$$

legendre 变换定义和可分离变量求解得：

$$g = \frac{1}{(\beta + r)Z}e^{-\beta t}[1 - (1 - \beta - r)e^{-(\beta + r)t}] + \frac{P}{r}(1 - e^{-rt})$$

缴费水平和风险资产投资的最优决策的解析解如下：

$$C = e^{-\beta t}\frac{1}{H_V} = e^{-\beta t}\frac{1}{Z} = \frac{(\beta + r)}{1-(1-\beta-r)e^{-(\beta+r)t}}[V - \frac{P}{r}(1-e^{-rt})]$$

$$\mu = -\frac{\rho\sigma H_{VD} + \lambda H_V}{VH_V} = -\frac{\lambda Z}{V} gZ = \frac{\lambda}{V}[V - \frac{P}{r}(1-e^{-rt})]$$

2.1.3 模型验证及模拟

在本次数值模拟中，参照国内现行银行存款利率和社会折现率，贴现率β取8%，无风险利率r取 5%，λ = 1. 参照查找到的浙江省企业年金基金业务数据，设总资产 V 在[500，3500]百万元之间，待遇发放 P=150 百万元，并以此为基准，扩大待遇 2 倍、3 倍和 4 倍，比较缴费水平与风险投资比例随时间的变化，同时分别比较总资产 V 和待遇发放 P 对养老基金投资决策的影响。

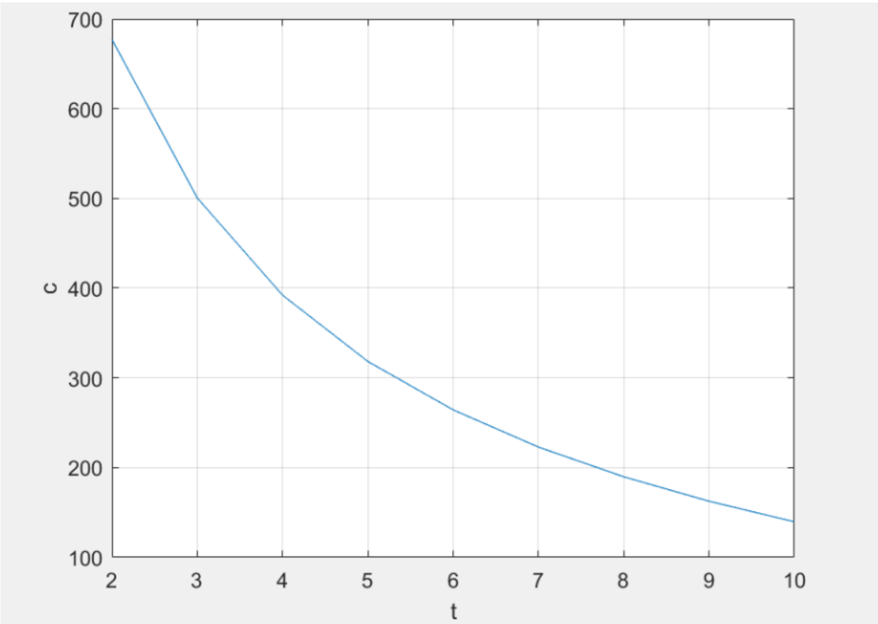


图 1：当 V=2000 百万元，P=150 百万元时，缴费水平 C 随时间 t 的变化趋势图

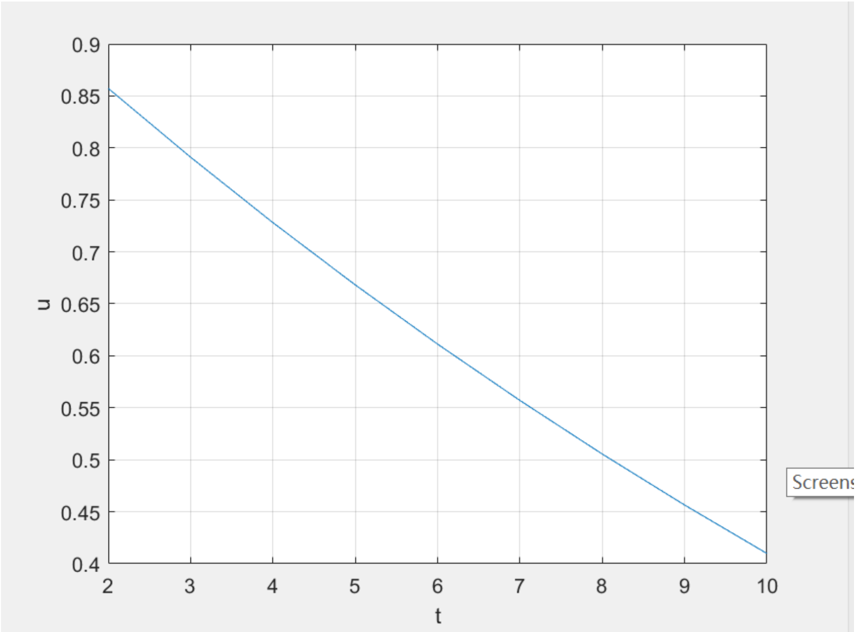


图 2：当 V=2000 百万元，P=150 百万元时，风险资产比例 μ 随时间 t 的变化趋势图

由图 1、图 2 可以看出，随着时间的推移，缴费与净资产的比例逐渐缩小，体现了待遇预定制养老金以少缴费而领取固定养老待遇的福利。

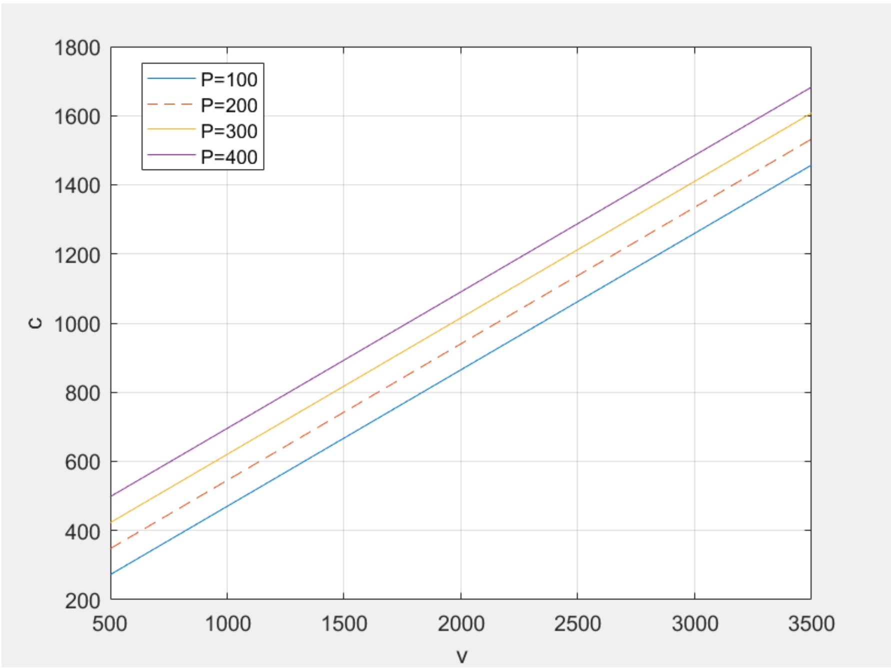


图 3：V，P，C 的趋势变化图

由图 3 可以看出，对于待遇预定制养老基金，在不同的待遇发放水平 P 下，缴费水平 C 随着待遇水平的提高而升高，这种趋势满足待遇预定制养老基金追求的最优问题，即通过投资收益，尽量降低缴费水平。同时可以清楚地看出，缴

费水平 C 与总资产 V 基本成线性正相关，其缴费相对值基本保持恒定，所以在待遇预定制度下，确定了缴费水平 C 后，应重点考虑养老基金对总资产的追求目标值。

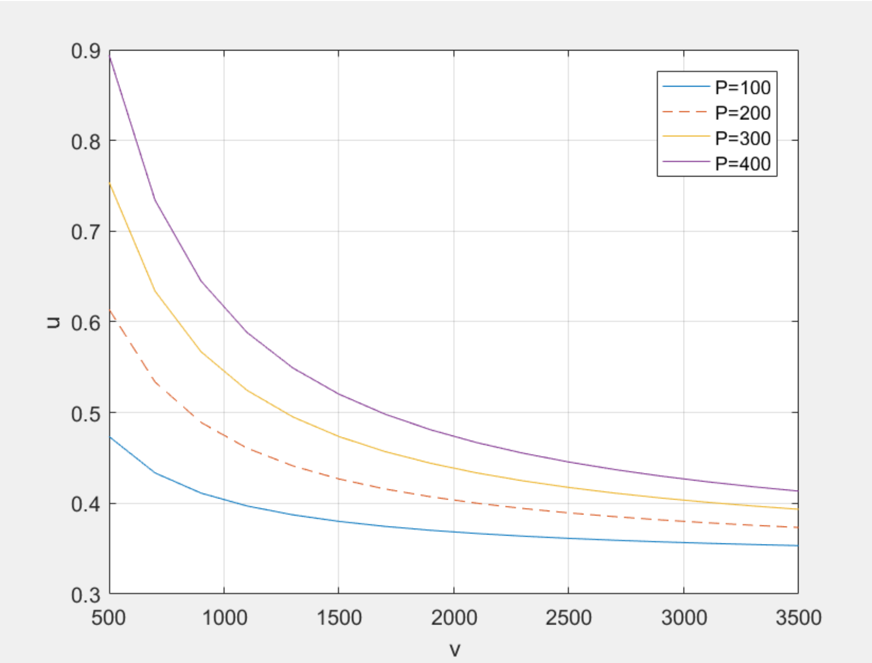


图 4：V，P， μ 的趋势变化图

由图 4 可以看出，当待遇发放水平一定时，风险资产比例 μ 随着总资产 V 的增多而下降；而当总资产 V 一定时，待遇发放水平 P 越低，风险资产比例 μ 越低，也符合待遇预定制养老基金的规律。当总资产到达一定的量时，投资组合比例几乎不需要随着总资产的变化而调整，即总资产对投资比例影响不大，重点考虑应为总资产扣除待遇发放现值的净资产部分。

按照以上的方法，可以分析其他参数对投资决策和缴费水平的影响，例如分析 λ 对投资决策和缴费水平的影响。对于风险投资比例 μ，它正比于净资产与总资产的比，比例系数为 λ， λ 表示风险溢价部分，说明除资产因素外，风险投资比例取决于因承担风险而获得的额外收益水平，风险收益越大，从而在风险投资上的力度越大。

2.2DC 型养老金计划

2.2.1 模型假设

1. 假设所有人都选择 DC 型养老金。企业首先确定缴费水平，由企业和职工按规定比例出资，计入个人账户。雇员退休时是根据个人账户基金积累值领取退休金，投资风险全部由职工个人承担。如果退休时个人账户基金累积不能提供足够的退休金，企业一般也不会另行缴费。
2. 假设只有两种投资

1）现金

一部分资金存在银行，会获得利息（考虑利滚利情况），假设现金的瞬时名义无风险利率为R_t，则 t 时刻的现金金额为：

$$\frac{dM_t}{M_t} = R_t dt$$

$$M_t = C_M e^{R_t t}$$

其中瞬时名义无风险利率R_t遵循平方根 CIR 过程，CIR 模型是基于 vasicek 模型改进后的 Cox-Ingersoll-Ross 模型。CIR 模型的理论基础是让参与者的期望效用能够最大化。参与者必须考虑自己的最优消费水平，债券的最优投资组合以及生产过程的最优投资组合，剩余财富根据短期的无风险利率来投资，用借款来弥补可能出现的财富短缺。模型中利率会围绕平均值波动，即使偏离了也总会回到平均值，具体时间由调整系数描述。如果调整系数近似 1，利率将会很快回到平均值。利率的变化率等于乘上调整系数之后的平均利率和短期利率的差值加上误差。也就是说

$$\mathrm{d}R_t = (a - bR_t)dt - \sigma_R\sqrt{R_t}dZ_{1f}$$

σ_R是利率变化率，Z_{1f}是标准布朗运动，也就是误差。为了简化起见，假设误差为零，也就是不考虑经济的波动。此处利率加入了通货膨胀的影响，也就说认为钱一直在贬值。

$$\mathrm{d}R_t = (a - bR_t)dt$$

$$R_t = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} - C_R e^{bt}$$

a，b 是常数，参考资料得到 a=0.018172，b=0.0854。

2）股票

剩下的一部分资金在股票中投资，股票是一个更复杂的投资市场。认为管理养老资金的人员是经验丰富的，也就是能控制股票的风险在现有利率的情况下低于一定水平。因此股票的名义价格为：

$$\frac{dS_t}{S_t}=[R_t+\lambda_R\sigma_{S1}R_t+\lambda_S\sigma_{S2}]dt+\sigma_{S1}\sqrt{R_t}dZ_{1f}+\sigma_{S2}dZ_{2f}$$

其中λ_R是利率风险的市场价格，λ_S是股票风险的市场价格，均用常数代替。Z_{2f}是独立于Z_{1f}的标准布朗运动。同样，我们在本模型中忽略。也就是说

$$\frac{dS_t}{S_t}=[R_t+\lambda_R\sigma_{S1}R_t+\lambda_S\sigma_{S2}]dt$$

3. 考虑通货膨胀的干扰。由于通货膨胀的存在，钱的实际价值一直在贬值。同样数量的养老金，购买力在下降。因此，我们需要知道 t 时刻的商品价格。一揽子商品的名义价格计算的公式如下：

$$\frac{dP_t}{P_t}=\pi dt+\sigma_{P1}\sqrt{R_t}dZ_{1f}+\sigma_{P2}dZ_{2f}+\sigma_{P3}dZ_{3f}$$

其中 π 代表预期的通货膨胀率。Z_{3f}是独立于Z_{2f}、Z_{1f}的标准布朗运动，代表除利率风险和股票市场风险以外的非系统风险。

其他对经济市场的影响因素暂不纳入考虑

4. 假设所有选择 DC 型养老金的人在退休日之前都会按时并且持续缴费，C_t表示瞬时缴费率。在完备市场假设（资金供应者和使用者自由进入，充分竞争，参与者不影响定价，拥有金融资产无限可分，无交易成本含破产成本，对每个参与者所有信息充分且免费等条件）下，C_t满足以下方程：

$$\frac{dC_t}{C_t}=\mu dt+\sigma_{C1}\sqrt{R_t}dZ_{1f}+\sigma_{C2}dZ_{2f}+\sigma_{C3}dZ_{3f}$$

忽略经济市场的波动

5. 假设缴纳养老金的人在退休之后每年获得的养老金都是定值。也就是说在合适的资产分配比例下，最终缴纳养老金的人在退休前缴纳的养老金用于投资之后得到的本金和利息的和足够支付年金，假设这个年金为 g。

6. 假设每个缴纳养老金的人都在工作相同年份数后退休，T 为每个人退休的日期。假设每个人平均工作 40 年。

7. 假设参与 DC 型养老金计划的人的死亡时间满足正态分布，因此可以用平均

死亡年龄 T'代替，简化模型。查阅相关数据，各地的平均死亡年龄在 75 岁左右，平均退休年龄在 55 岁左右，因此假设每个人退休之后平均能活 20 年。

2.2.2 模型建立

由于实际最终年金为 g，一揽子商品在 t 时刻的价格为P_t，则年金的实际价值为$g \cdot P_t$。已经设定最终拿到的年金是定值，我们希望能够最大限度地保证能够拿到这笔年金，因此我们希望投资过程中的风险尽可能地小。

投资过程中的风险我们用 CRRA 效用模型描述。CRRA（Coefficient of Relative Risk Aversion）模型，常用相对风险规避效用函数，形式为

$$\mathrm{u}(C_t) = \frac{{C_t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta}，\ \theta > 0，\ \theta \neq 1$$

（1）当$\theta \to 1$时，此效用函数会变为对数型效用函数$\mathrm{u}(C_t) = \ln C_t$

（2）从风险的角度看，我们经常使用$\mathrm{u}''(c)$的符号来判断人们的风险态度：$\mathrm{u}''(c) > 0$则为风险偏好型；$\mathrm{u}''(c) < 0$则为风险回避型；$\mathrm{u}''(c) = 0$则为风险中性。但由于$\mathrm{u}''(c)$在线性变换时的数值变化，不能用其测量规避风险或风险偏好程度。$\alpha = \frac{\mathrm{u}''(c)}{\mathrm{u}'(c)}$及$\sigma = \alpha c = c\frac{\mathrm{u}''(c)}{\mathrm{u}'(c)}$可以分别提供绝对风险回避（或绝对风险偏好）及相对风险回避程度的度量方法。

上面给的效用函数中$\sigma = \theta$，所以称为常相对风险规避（CRRA）型效用函数。

（3）该效用函数的跨期替代弹性是固定的，为$1/\theta$。因此该效用函数也称为固定跨期替代弹性（CIES）效用函数。时期 t 与 t+1 之间消费的跨期替代弹性描述的是两期之间消费数量比率的相对变化对两期之间消费品价格比率的相对变化的反映水平。

在本题中风险规避函数是

$$\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{W_T - G_T}{P_T}\right)^{1-\gamma}$$

其中γ是相对风险规避程度。

W_t表示时刻 t 个人退休账户中的资产值，W_0是资产初始值，根据假设中缴费金额、现金金额、股票金额叠加可以得到对应的W_t。假设股票占全部投资的$x_{st} * 100\%$

$$dW_t = W_t[R_t + \lambda_R \sigma_{S1} R_t + \lambda_S \sigma_{S2} * x_{st}]dt + C_t dt$$

而G_T是担保水平的名义价值，定义为

$$G_T=\int_T^{T'} g ds$$

我们的最终目的是使风险规避函数最大，也就是

$$\max_{x_{st}0，\le t\le T} \mathrm{E}\left[\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{W_T-G_T}{P_T}\right)^{1-\gamma}\right]$$

只要我们求出使风险规避函数的数学期望最大的x_{st}取值即可。

2.2.3 模型验证及模拟

本模型中涉及的数学期望是一个连续函数的数学期望，因此可以将公式转换如下：

$$\max_{x_{st}0，\le t\le T} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{W_T-G_T}{P_T}\right)^{1-\gamma}$$

这个模型可以认为是一个最优控制问题。可以用 E-L 方程处理。

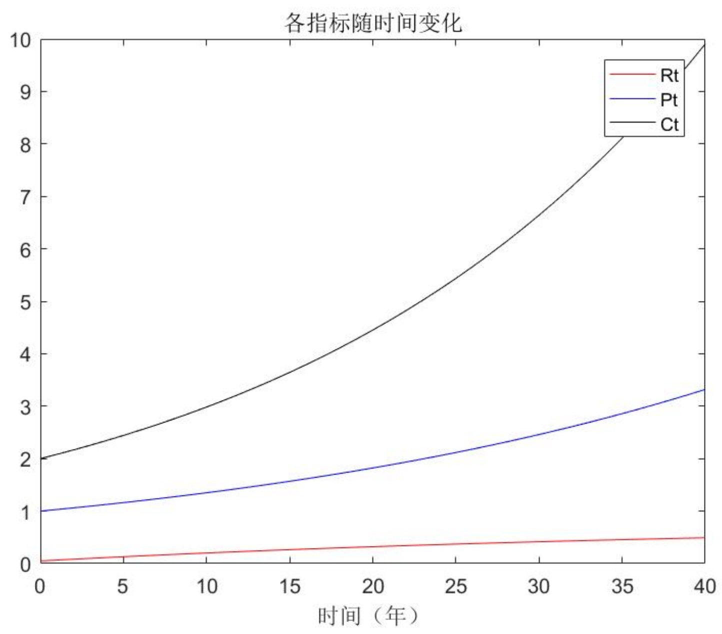
在最优控制问题中，性能指标$\mathrm{J}(\mathrm{x})=\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\dot{x}(t),t)dt$

对应的必要条件是对任意时刻$\mathrm{t}\in[t_0,t_f]$

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \dot{\mathrm{x}}}(x(t),\dot{x}(t),t)\right]=0$$

也就是 Euler—Lagrange 方程。

首先，经过仿真，得到各指标随时间变化如下



把仿真得到的R_t、C_t函数代入W_t的约束函数

$$dW_t = W_t[R_t + \lambda_R \sigma_{S1} R_t + \lambda_S \sigma_{S2} * x_{st}]dt + C_t dt$$

求解得到在某一特定时间t下W_t关于x的解析式，代入 Euler—Lagrange 方程

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \dot{\mathrm{x}}}(x(t), \dot{x}(t), t)\right] = 0$$

其中，$g(x(t), \dot{x}(t), t)$即为

$$\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{W_T - G_T}{P_T}\right)^{1-\gamma}$$

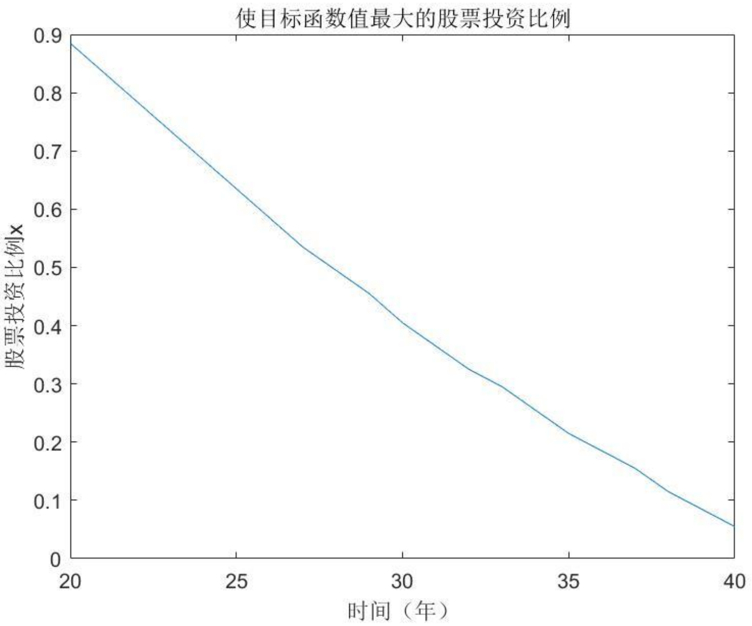
已知该表达式中没有关于$\dot{x}(t)$的项，因此求解 Euler—Lagrange 方程相当于求解

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

对$g(x(t), \dot{x}(t), t)$关于x进行求导，发现其他部分均不可能为 0，只有$(W_T - G_T)$这一项有可能为 0，因此将求解 Euler—Lagrange 方程简化为求解

$$(W_T - G_T) = 0$$

求出每一年使目标函数值最大的股票投资比例，最后得到结果如下



本部分模型中我们为了简单起见，假设养老金只做两种类型的投资（实际上现金储蓄作为保底的安排，并不能算作严格意义的投资，也就是我们的养老资金模型只用作股票投资一种方式），但是实际上投资的类型非常多，并不止这两种，为了分散风险，实际上养老基金的管理人员还会应用多种金融工具，比如基金、

债券等等。在进一步的模型中，我们可以加入这些投资，分别优化他们的投资比例。同时我们忽视了经济市场的波动，但是实际情况是存在的，因此我们要加入经济市场的波动对，也就是Z_{1f}、Z_{2f}、Z_{3f}不能被忽略。

3 总结

根据上述两种模型的分析，我们可以知道在 DB 模型中，我们基于 Heston 模型可以计算求得缴费水平和风险资产投资的最优决策的解析解，可以分析式中参数对投资决策和缴费水平的影响，具有直观性。在 DC 模型中，我们基于 CRRA 效用模型，可以计算求得现金和股票投资比例的最优决策的数值解。

DB 和 DC 型各有不同：

1、在收入水平上，DB 型计划收入更稳定，雇员而无须为市场风险而操劳，也无须操劳长寿的风险，是一个很好的可以分散死亡风险的工具；而 DC 的收入情况主要看退休那个时点上股市的情况如何和以往股市的收益情况；但其优点是无须操劳企业内部与雇主的关系，收入情况与雇主的关系基本无关。

2、DB 的缴费弹性较好，好年景可以多一些，坏年景可以少一些，对于业务骨干可以给得高一些，一般员工可以少一些，雇主的权力比较大。而 DC 则基本上是固定的，雇主雇员按照比例缴费，弹性小，但很公平，在雇主那里不易产生腐败行为。

3、DB 型计划在企业内部对减少老年贫困的效果要好一些，雇主可以根据情况有较大的回旋余地，但容易出现不公平的事情发生；DC 下要完全依靠雇员以往的积累，回旋余地比较小，但制度结构单纯，不容易引发制度矛盾和员工矛盾。

4、在融资上，DB 型计划非常复杂，对支付能力的要求比较高，需要保持资产。

5、在灵活性方面，DC 型相比于 DB 型更加灵活，可随时终止，对对账户余额有选择权，而 DB 型由于退休前不能支取，故其流动不能转移。

6、从风险角度看，DB 型主要受通货膨胀风险的影响，而 DC 型除了受通货膨胀风险的影响之外还受到基金投资风险的影响。

7、DB 型给付水平取决于退休前的工资水平及工作年限，而 DC 型则取决于

积累基金的规模及投资收益。

综合来看，DB 型突出了社会的保障与调剂作用，也不会有投资压力，因为根本就没有基金积累。但在我国 DB 型计划会面临着人口老龄化的压力。DC 型则不受人口结构变化的影响，并不担心人口老龄化，但其不能全面地体现出社会的统筹和调剂作用，而且个人账户可能会由于通货膨胀造成潜在的贬值风险。从国际发展趋势看，DC 型养老金计划已成为国际企业年金计划的主流。

4 风采展示

5 参考文献

[1]伍慧玲, 董洪斌. 带有通胀风险和随机收入的确定缴费养老计划[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(3):545-558.

[2]肖建武. 基于 Heston 模型的待遇预定制养老基金管理最优决策[J]. 运筹学学报, 2015, 19(1):85-91.

[3]孙洁. 通货膨胀下 DC 型养老金计划最优资产配置——基于 CIR 模型及 CRRA 效用函数[D]. 中国矿业大学, 2014.

[4]常浩, 王春峰, 房振明. 通胀风险下基于 HARA 效用的 DC 型养老金计划[J]. 运筹学学报, 2016, 20(4):39-51.

[5]杨鹏, YANGPeng. 具有随机工资的养老金最优投资问题[J]. 运筹学学报, 2016, 20(1):19-30.

[6]叶燕程, 高随祥. 缴费确定型企业年金最优投资策略研究[J]. 中国科学院大学学报, 2007, 24(2):149-153.

6 附录

小组成员分工具体如下：