Лабораторная работа

Тема: Решения задачи о распространении тепла в однородном одномерном стержне.

Процесс распространения тепла в одномерном однородном стержне $0 \le x \le L$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Без ограничения общности можно считать $L = 1$, $a^2 = 1$. Мы будем рассматривать первую краевую задачу в области

$$D = \{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$$

Требуется найти непрерывное в *D* решение u(x,t) задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), 0 < x < 1, 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), 0 \le x \le 1, u(0,t) = u_1(t), u(1,t) = u_2(t), 0 \le t \le T^2.$$

С целью построения разностной схемы в области D введем сетку

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j): x_i = ih, 0 \le i \le n, h = 1/n, t_j = j\tau, 0 \le j \le m, \tau = T/m\},$$

с шагами h по x и τ по t. Используя приближенные формулы вычисления производных

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2},$$

можно записать явную разностную схему вида

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j,$$

где $\varphi_i^j = f(x_i, t_j)$; граничные условия при этом останутся неизменными. Шаблон схемы имеет вид

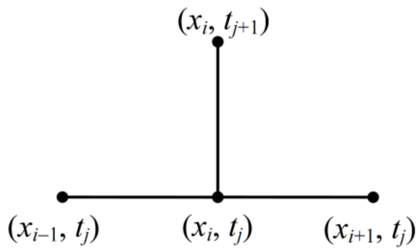

Рис. 1

Действительно, значения сеточной функции на (j+1)-м слое можно найти по явной формуле

$$u_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) u_i^j + \frac{\tau}{h^2}\left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right) + \tau\varphi_i^j, 0 \le j \le L - 1 \qquad (1)$$

используя известные значения на j-м слое.

Известно [2], что явная разностная схема будет вычислительно устойчива лишь при выполнении условия $2\tau \le h^2$. т.е. схема является условно устойчивой. При этом схема аппроксимирует исходное уравнение с порядком $O(\tau + h^2)$. Условие вычислительной устойчивости налагает существенные требования на шаг по времени, поэтому данная вычислительная схема требует существенных вычислительных затрат.

Организация параллельных вычислений

Анализ последовательного алгоритма показывает, что вычисления проводятся «по слоям», и вычислить значения сеточной функции на (j+1)-м слое можно лишь вычислив значения на j-м слое. Таким образом, в качестве подзадачи, допускающей распараллеливание, можно рассмотреть вычисление значений на очередном слое.

Рассмотрим последовательную реализацию решения уравнения теплопроводности на примере сетки состоящей из 9 точек. На рисунке 2 зеленым цветом отмечены точки значения, которых определяются начальным $(u(x,0) = u_0(x))$ и граничным $(u(0,t) = u_1(t), u(1,t) = u_2(t))$ условием.

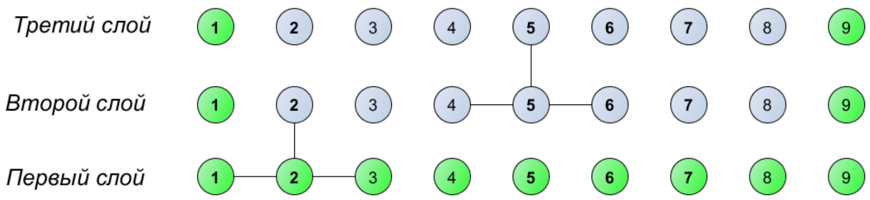

Рис. 2

Для определения значения во второй точке на втором слое по формуле (1) понадобятся значения в первой, второй и третьей точке на предыдущем слое по времени. Таким образом, для последовательного вычисления значений необходимо хранить только 2 слоя по времени (2 массива, содержащих значения в точках) для данной схемы.

Рассмотрим реализацию параллельных вычислений для 3 процессов геометрическим методом на примере сетки состоящей из 9 точек.

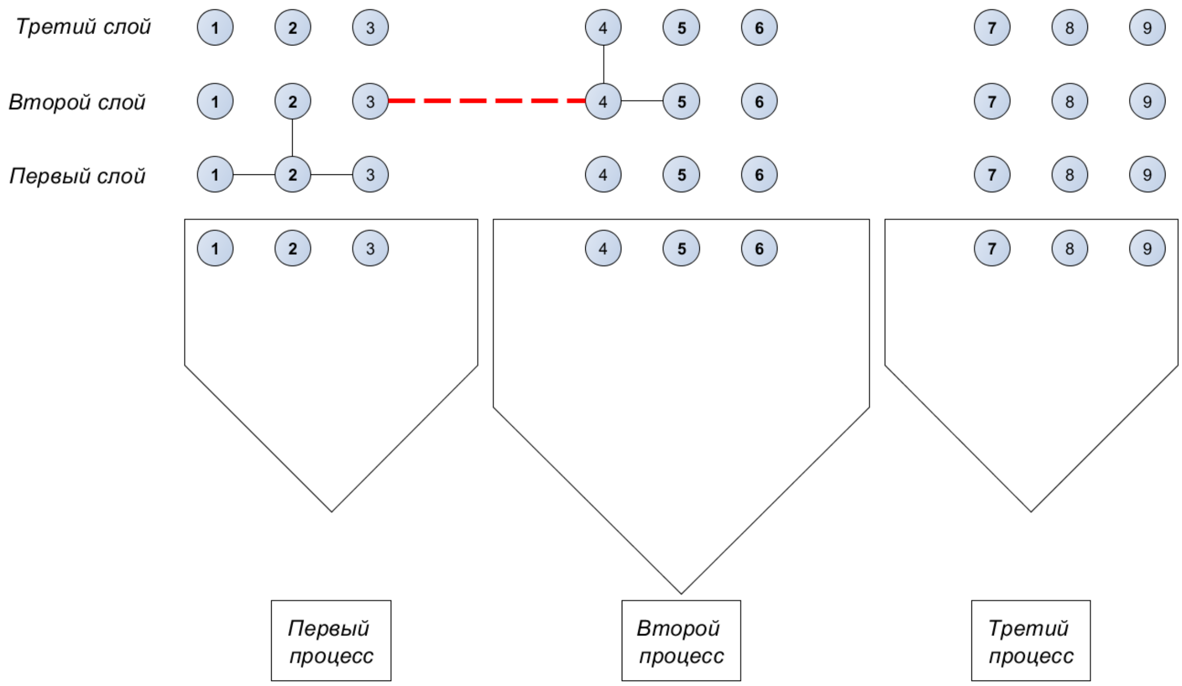

Рис. 3

Согласно методу необходимо осуществить равномерное распределение узлов сетки между MPI-процессами. То есть первому процессу достанутся 1, 2, 3 узлы сетки, второму процессу – 4,5,6 узлы сетки, а третьему процессу – 7,8,9 узлы сетки. Предположим, что каждый процесс хранит 2 массива (предыдущий слой u_i^j и текущий=рассчитываемый слой u_i^{j+1}), в которых только 3 соответствующих значения узла см рис 3.

Первый слой для каждого процесса определяется начальным условием $u_0(x)$. Второй слой можно вычислить по формуле (1) используя $u_0(x_i)$, 1 и 9 точки определяются из граничных условий $u_1(t_2), u_2(t_2)$. Однако, для вычисления значения в 4 узле сетки на третьем слое понадобится значения в 3, 4 и 5 узлах. Отметим, что для второго процесса значение в 3 узле не известно, так как оно хранится в массиве первого процесса. Отсюда следуют 2 вывода:

- для организации параллельного расчета, необходимо увеличить хранимые массивы (на 2 элемента), так чтобы они включали необходимые значения для расчета на следующем слое по времени;
- необходимо между параллельными процессами организовать передачу необходимых значений для расчета на следующем слое.

Таким образом, первый и третий процесс должны дополнительно хранить один элемент массива, содержащих значения в 4 и 6 узлах соответственно. А второй процесс должен хранить два дополнительных элемента массива, содержащих значения в 3 и 7 узлах (см. рисунок 4).

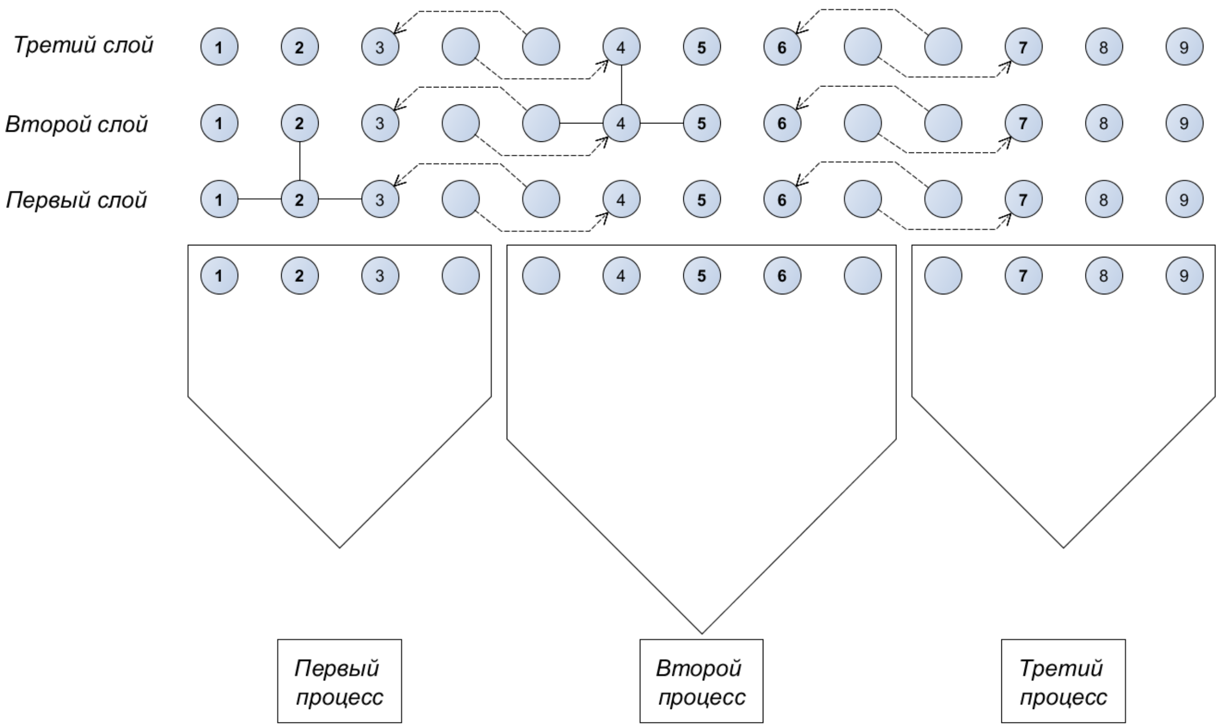

Рис. 4

Рекомендуемая методика построения программы, основанная на методе геометрического параллелизма для явной схемы решения дифференциальных уравнений

Программа должна состоять из нескольких ключевых модулей, которые можно реализовывать согласно перечисленным этапам.

Этап 1. Равномерное распределение N точек (которым соответствуют координаты по оси x) среди **P** mpi-процессов, согласно методу геометрического параллелизма.

Этап 2. Инициализация граничных условий и других параметров задачи, проверка возможности решения явной схемой.

Этап 3. Вычисление значений на следующем слое по времени.

Этап 4. Обмен данными на границах между узлами.

Этап 5. Циклическое выполнение Этапа 3 и Этапа 4, пока не будет достигнуто условие выхода.

Условие выхода

Естественным условием выхода для данной задачи является достижение стационарного значения температуры, то если $\left\|u_i^{j+1} - u_i^j\right\| < \varepsilon$ значения на текущем слое не значительно отличается от значения на предыдущем. Однако в рамках выполнения лабораторной работы можно ограничиться выполнением определенного количества итераций основного цикла по времени.

Тестирование

Для проверки правильности работы разработанной программы необходимо подготовить серию тестов. Предложите серию тестовых данных, которые по параметрам задачи, позволили бы определить правильность полученного результата.

ЗАДАНИЕ 1

Написать последовательную программу, решающую «модельное» (с выбранными вами граничными и начальными условиями) уравнение теплопроводности.

На вход программе поступают параметры, которые однозначно определяют задачу: длина стержня (L = 1), необходимые свойства среды (a = 1), начальные и граничные условия.

На выходе программа выдает значения искомой функции.

ЗАДАНИЕ 2

Написать программу, основанную на методе геометрического параллелизма.

На вход программе поступают параметры, которые однозначно определяют задачу: длина стержня, необходимые свойства среды, начальные и граничные условия.

На выходе программа выдает значения искомой функции.

ЗАДАНИЕ 3

Проведите тестирование Вашего приложения на выбранных Вами наборах тестов.

ЗАДАНИЕ 4

А) Проведите аналитический расчет ускорения и эффективности реализуемых вами алгоритмов.

Б) Приведите графики ускорения и эффективности работы Ваших программ.

ЗАДАНИЕ 5

Привести примеры значений параметров, определяющих входные данные, и параметров запускаемого приложения, которые иллюстрируют сверхлинейное ускорение.

Рекомендуемая литература:

1. *Якобовский М.В.* Введение в параллельные методы решения задач: Учебное пособие / Предисл.: В. А. Садовничий. – М.: Издательство Московского университета, 2012. – 328 с., илл. – (Серия «Суперкомпьютерное образование»), ISBN 978-5-211-06382-2 URL: http://lira.imamod.ru/ITTPMOPS/

2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.