第一章　函数与极限

第一节　映射与函数　习题 1.1

1. 设 $A=(-\infty,-6)\cup(4,+\infty)$，$B=[-9,4)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$，$A\setminus(A\setminus B)$。

2. 设 A、B 是任意两个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

3. 求下列函数的自然定义域：

（1）$y=\sqrt{5x+8}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{4-x^2}$；

（3）$y=\cos\sqrt{x}$；　　（4）$y=\tan(1+x)$；

（5）$y=\arcsin(x-2)$；　　（6）$y=\sqrt{5-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

4. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

（2） $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$， $g(x)=x\cdot\sqrt[x]{x-1}$；

5. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|,|x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0,|x|\geq\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

求 $\varphi(\frac{\pi}{6})$， $\varphi(\frac{\pi}{4})$， $\varphi(-\frac{\pi}{4})$， $\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形。

6. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

（1） $y=\dfrac{x}{1-x}$， $(-\infty,1)$；

（2） $y=x+\ln x$， $(0,+\infty)$

7. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加。

8. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的，证明：

（1）两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

（2）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

9. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

（1） $y=x^4(1-x^2)$；　　（2） $y=3x^2-x^3$；

（3） $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

10. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

（1） $y=\sin(x-2)$；　　（2） $y=\sin 4x$；

（3） $y=\cos^2 x$

11. 求下列函数的反函数：

（1） $y=\sqrt[3]{x+5}$；　　　　　　　　　　（2） $y=\dfrac{2-x}{2+x}$；

（3） $y=1+\ln(x+3)$

12. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界。

13. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

（1） $y=u^2, u=\sin x, x_1=\dfrac{\pi}{6}, x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

（2） $y=\sqrt{u}, u=1+x^2, x_1=1, x_2=2$；

（3） $y=u^2, u=e^x, x_1=1, x_2=-1$

14. 设 $f(x)$ 的定义域 D=[0，1]，求下列各函数的定义域：

（1） $f(x^2)$；　　　　　　　　　　（2） $f(1-\ln x)$

15. 设 $f(x)=\begin{cases} 1, |x|<1 \\ 0, |x|=1 \\ -1, |x|>1 \end{cases}$ ，$g(x)=e^x$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形。

16. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元，厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的每多订购 1 台，售价就降低 1 元，但最低价为每台 75 元。

（1）将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

（2）将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

（3）某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少。

第二节　数列的极限　习题 1.2

1. 观察一般项 x_n 如下的数列{ x_n }的变化趋势；对收敛数列，写出它们的极限：

（1） $x_n = \dfrac{1}{2^n}$；　　　　（2） $x_n = 2 + \dfrac{1}{n^3}$；

（3） $x_n = n(-1)^n$

2. 设数列{ x_n }的一般项 $x_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$，问 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$ 求出 N，使当 $n > N$ 时， x_n 与极限之差的绝对值小于正数 ε，当 ε =0.001 时，求出数 N 。

3. 根据数列极限的定义证明：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$；　　　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = |a|$，并举例说明：如果数列{ $|x_n|$ }有极限，但数列{ x_n }未必有极限。

5. 对于数列{ x_n }，若 $x_{2k-1} \to a(k \to \infty)$， $x_{2k} \to a(k \to \infty)$，证明： $x_n \to a(n \to \infty)$

第三节　函数的极限　习题 1.3

1. 根据函数极限的定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$；　　（2）$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$　　（4）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}=0$

2. 当 $x\to 2$ 时，$y=x^2\to 4$，问 δ 等于多少，使当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$？

3. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$，当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在。

4. 根据极限定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等。

第四节　无穷小与无穷大　习题 1.4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？请举例说明。

2. 根据定义证明：

（1）$\frac{x^2-4}{x+2}$为当$x\to 2$时的无穷小；

（2）$y=\frac{1}{x^2}\cos x$为当$x\to\infty$时的无穷小。

3. 根据定义证明：函数$y=\frac{1+3x}{x}$为当$x\to 0$时的无穷大，问x应满足什么条件，能使$|y|>10^4$？

4. 求极限并说明理由：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x}$；

5. 函数$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？这个函数是否为$x\to+\infty$时的无穷大？为什么？

第五节　极限运算法则　习题 1.5

1．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3}{x-5}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^2+3}$；

（3）$\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{(x+a)^2-x^2}{a}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2})$；

（5）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}(2+\dfrac{1}{x})(3-\dfrac{1}{x^2})$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})$；　　（8）$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$

2．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+3x}{(x-3)^2}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$

3、计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{2}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$

4*．若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^3+1}{x^2-1}+\alpha x+\beta\right]=0$，试求 α 与 β .

第六节　极限存在准则，两个重要极限　习题 1.6

1. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2\omega x}{x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 7x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\tan x}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n}$；

2. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{3x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$

3. 如果（1）当 $x\in\overset{o}{U}(x_0,r)$（或 $|x|>M$）时，$g(x)\le f(x)\le h(x)$；（2）$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且等于 A。

4. 利用极限存在准则证明：

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})=1$；

（3）数列 $\sqrt{3}$，$\sqrt{3+\sqrt{3}}$，$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$，...的极限存在；

（4） $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\frac{1}{x}]=1$；

（5*） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

（6*） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}=0$；

第七节　无穷小的比较　习题 1.7

1. 当 $x \to 0$ 时，$2x - x^2$ 与 $x^2 - x^3$ 相比，哪一个是高阶无穷小？

2. 当 $x \to 1$ 时，无穷小 $x-1$ 和（1）$x^3 - 1$，（2）$\frac{1}{2}(x^4 - 1)$ 是否同阶？是否等价？

3. 证明：当 $x \to 0$ 时，有：

（1）$\arctan x \sim x$；　　　　（2）$\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$；

4. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{3x}$；　　　　（2）$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)}$

5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质：

（1）$\alpha \sim \alpha$（自反性）；

（2）若 $\alpha \sim \beta$，则 $\beta \sim \alpha$（对称性）；

（3）若 $\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$，则 $\alpha \sim \gamma$（传递性）

第八节　函数的连续性与间断点 习题 1.8

1. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

（1） $f(x)=\begin{cases}x^2, 0\le x\le 1\\ 2-x, 1<x\le 2\end{cases}$　　（2） $f(x)=\begin{cases}x, -1\le x\le 1\\ 1, x<-1 或 x>1\end{cases}$

2. 下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类。如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续：

（1） $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, x=1, x=2$；

（2） $y=\dfrac{x}{\tan x}, x=k\pi, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ （$k=\pm1,\pm2,...$）；

（3） $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

3. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判别其类型。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, x>0\\ \ln(1+x), -1<x\le 0\end{cases}$ ，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点所属类型。

第九节　连续函数的运算与初等函数的连续性　习题 1.9

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to -3}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$。

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，证明函数 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，

$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 在点 x_0 连续。

3. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-3x+4}$；　　（2）$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$；

（5）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

4. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{2}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$　　　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$

（5*）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{2\sin x}}{x\ln(1+x^2)}$；

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, x<0 \\ a+x, x\ge 0\end{cases}$，应当怎样选择数 a，使得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

6. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}, & x\ne 1, x\ne -2 \\ 2, & x=1\end{cases}$，为使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，a 与 b 应如何取值？

7. 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$ 的连续性.

第十节　闭区间连续函数的性质　习题 1.10

1. 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间。

2. 证明方程 $x = \sin x + b$，其中 $a > 0$，$b > 0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$。

3. 设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在区间 $\boldsymbol{[a,b]}$ 上连续，且 $\boldsymbol{f(a) < a, f(b) > b,}$ 则至少有一点 $\boldsymbol{\xi \in (a,b)}$ 使 $\boldsymbol{f(\xi) = \xi}$。

4. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$，则在 (x_1, x_n) 内至少有一点 ξ，使：

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

5. 证明：方程 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$ 有分别包含于(1, 2), (2, 3) 内的两个实根.

6. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

综合练习题一

一．在“充分”、“必要”和“充要”三者中选择一个正确的填空：

1. $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的_______条件；

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的_______条件；

3. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 左、右极限都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的_______条件；

4. 若 $x\to a$ 时，有 $0\le f(x)\le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x\to a$ 过程中为无穷小的_______条件；

5. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值的_______条件.

二．填空题：

1. 已知 $f(x)=\sin x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$, 则 $\varphi(x)=$_________的定义域为__________；

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=$__________；

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$__________；

4. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\ne 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$__________；

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\dfrac{1}{2}$，则 $a=$___________， $b=$__________；

6. 设 $x=0$ 、 $x=1$ 分别为 $f(x)=\dfrac{x+b}{(x-a)(x-1)}$ 的无穷间断点和有可去间断点，则 $a=$__________； $b=$__________；

7. 若当 $x\to 0$ 时， $2ax+3x^2-x^3$ 与 $\sin 4x$ 为等价无穷小，则常数 $a=$__________；

8．当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{x^2+\sin\sqrt{x}}$ 是 x 的_____阶无穷小。

三. 选择题：

1. 当 $x\to+\infty$ 时，下列变量中的无穷小量是（　　）.

(A) $(\dfrac{1}{2})^x$，　　(B) $\dfrac{1+x}{x}$ ，　　(C) e^x ，　　(D) $\sin x$.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则（　　）.

(A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点，

(B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点，

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

3. 若 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，则 k =（　　）.

(A) 3，　　(B) -3，　　(C) 1，　　(D) -1.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{(x-2)e^{\frac{1}{x-1}}}{|x-2|}$ 的连续区间是（　　）.

(A) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，　　(B) $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，

(C) $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$，　　(D) $(-\infty,1)\cup(1,2)$.

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$（　　）.

(A) 0，　　(B) 6，　　(C) 36，　　(D) ∞.

6. 若 $x_n\le a\le y_n$，（$n=1,2,......$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则（　　）.

（A）$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都收敛于 a，　　（B）$\{x_n\}$ 收敛于 a，$\{y_n\}$ 发散，

（C）$\{x_n\}$ 发散，$\{y_n\}$ 收敛于 a，　　（D）$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都发散.

7. 下列极限运算, 正确的是（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)(e^x-1)}{\frac{1}{2}\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=4$，

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0$，

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^2\cdot x}=0$，

(D) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

8. 曲线 $y=\dfrac{x}{3-x}$（　　）.

（A）既有水平渐近线，又有垂直渐近线，　　（B）仅有水平渐近线，

（C）仅有垂直渐近线，　　（D）无任何渐近线.

9. (2017 考研题)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则(　)

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$，　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$，　(C) $ab=0$，　(D) $ab=2$.

10. (2015 考研题) 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　)

(A) 连续，　(B) 有可去间断点，　(C) 有跳跃间断点，　(D) 有无穷间断点 .

四.求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^{x^2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

五.求函数 $f(x)=(x+1)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的间断点，并判别其类型.

六．设 $0 < x_n < 3$，$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$（$n = 1, 2, 3, \ldots$）. 证明：数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

七．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_i \in [a,b]$, $t_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$. 证明：至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$.

八*．设 $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n+i}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

九*．证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$ ($n \geq 2$ 的正整数）在区间 $(0,1)$ 内必有唯一根 x_n，并求数列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.