



《高数/微积分上》



课时一 函数与极限

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 函数	★★	0 ~ 3	选择、填空
2. 极限	必考	6 ~ 10	选择/填空/大题

1. 函数

题 1. 求函数 $y = \ln \frac{x}{x-2} + \arcsin \frac{3x-1}{5}$ 的定义域。

$$\text{解: } \begin{cases} \frac{x}{x-2} > 0 \\ \left| \frac{3x-1}{5} \right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x < 0$$

$$\text{函数定义域为 } x \in \left[-\frac{4}{3}, 0 \right)$$

题 2. $f(2x+3) = x^2$ 求 $f(x)$ 。

$$\text{解: 令 } t = 2x+3, \text{ 则 } x = \frac{t-3}{2}$$

$$\text{得 } f(t) = \left(\frac{t-3}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

2. 极限 记作: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

$$1) \text{ 左极限: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{右极限: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

$$2) \quad x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \text{表示 } x \neq x_0$$

$$3) \quad x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0^+ \text{ 且 } x \rightarrow x_0^-$$

$$4) \text{ 极限存在的充要条件: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ (左右极限存在且相等)}$$



题 1: 设函数 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时求极限值。

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

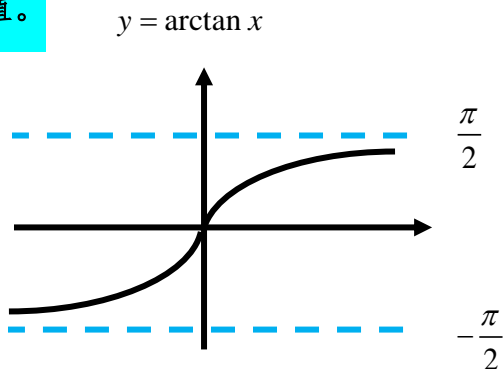
左右极限存在但是不相等, 故无极限

题 2. 设函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x-1}$, 当 $x \rightarrow 1$ 时求极限值。

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

左右极限存在但是不相等, 故无极限



题 3. 设函数 $f(x) = e^{\frac{x}{x-2}}$, 当 $x \rightarrow 2$ 时求极限值。

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{+\infty} = +\infty$$

左极限存在, 右极限不存在, 所以极限不存在

需要从左右极限考虑的情形:

① 分段函数在分界点处的极限, 如: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$, $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \geq 0 \\ e^x - 1 & x < 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

② $f(x)$ 中含 $a^{\frac{\varphi(x)}{x-b}}$ 或 $a^{\frac{\varphi(x)}{b-x}}$, 如: $f(x) = e^{\frac{x}{x-2}}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 。

③ 三角函数或反三角函数, 如: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$



课时一 练习题

1. 函数 $y = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$ 的定义域为_____。

2. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+2)} + \arccos \frac{x-1}{3}$ 的定义域为_____。

3. 下列各组函数中, 是相同的函数的是 ()。

A. $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$

B. $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$

C. $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x$

D. $f(x) = \frac{|x|}{x}, g(x) = 1$

4. 设 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x$, 求 $f(\cos x)$ 。

5. 求函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x+1}$, 当 $x \rightarrow -1$ 时极限是否存在。

6. 从 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ 不能推测 ()。

A. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 1$

C. $f(x_0) = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - 1] = 0$

7. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ e^{-x} + 1, & 0 < x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ ()。

A. 0

B. 不存在

C. 2

D. 1

8. 下列各式正确的是 ()。

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 0$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = -1$

注: 练习题答案在文档最后



课时二 求极限（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 有理化、抓大头	必 考	10 ~ 20	大题
2. 重要极限公式			
3. 无穷小公式			

1. 有理化、抓大头

题 1：求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$

$$\begin{aligned}
 \text{解：原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+9}+3 = 6
 \end{aligned}$$

题 2：求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

$$\text{解：原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}}{7 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{7}$$

$$\text{解：原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{7x^3} = \frac{3}{7}$$

题 3：求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$

$$\text{解：原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2)^3(3x)^4}{(6x^2)^5} = \frac{2}{3}$$



2. 重要极限公式

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{\Delta})^{\Delta} = e$$

题 1: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = 3$

题 2: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = 2$

题 3: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-x)]^{(-\frac{1}{x}) \cdot (-1)} = e^{-1}$

题 4: 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^n$

解: 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{n+1}{n^2})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 + \frac{n+1}{n^2})^{\frac{n^2}{n+1}} \right]^{\frac{n+1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}} = e$

题 5: 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2x+3}{2x+1} - 1)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{2x+1})^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2} \cdot \frac{2}{2x+1} \cdot (x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+1)}{2x+1}} = e$



3. 无穷小

1) 定义: 以 0 为极限的量称作无穷小量

例: $x \rightarrow 0$ 时, $x, 2x^2, \tan x \rightarrow 0$ 称为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小

$x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{2}{3x^3+1} \rightarrow 0$ 称为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小

2) 无穷小比较 α, β 为自变量某种趋向下的无穷小

$$\textcircled{1} \lim \frac{\beta}{\alpha} = 0 \quad \beta \text{ 为 } \alpha \text{ 的高阶无穷小}$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{\beta}{\alpha} = k (k \neq 0) \quad \beta \text{ 为 } \alpha \text{ 的同阶无穷小}$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 \quad \beta \text{ 为 } \alpha \text{ 的等阶无穷小}$$

3) 等价无穷小替换公式:

$x \rightarrow 0$ 时: 1) $x \rightarrow 0$ 才成立 2) x 作为整体看待, 不仅仅指 x

$$\textcircled{1} \sin x \sim x \quad \tan x \sim x \quad \arctan x \sim x \quad \arcsin x \sim x \quad \ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x$$

$$\textcircled{2} (1+x)^a - 1 \sim ax \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad 1 - \cos^a x \sim \frac{a}{2}x^2$$

题 1: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

题 2: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos \sqrt{x}}$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} = 1$$



题 3: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \cdot \arcsin x^2}$

错解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x \cdot x^2} = 0$ (×)

正解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$

题 4: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \cdot \ln(1 + 2x)}$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \cdot \ln(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) + (1 - \cos x)}{2x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)}{2x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

题 5: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x} - 1$ 与 ax 是等价无穷小, 求 a

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{ax} = 1$ 可求得 $a = \frac{1}{2}$



课时二 练习题

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$

2. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-n+1}{18n^3+n^2+n} = ()$ 。

A. $\frac{1}{6}$

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{15}(2x+1)^{10}}{(3x+2)^{25}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 下列极限的计算正确的是 ()

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = 2$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+a}{x-a})^x = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 下列变量在自变量给定的变化过程中是无穷小量的是 ()。

A. $\frac{x^2}{x^3+1} (x \rightarrow 1)$

B. $\ln x (x \rightarrow +\infty)$

C. $2^{-x} (x \rightarrow +\infty)$

D. $\ln x (x \rightarrow 2)$

11. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x-1)\tan 3x^2}{\arctan 2x(1-\cos x)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 若 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x - 1$ 是 $\sin^k x$ 的同阶无穷小量, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



课时三 求极限（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 洛必达法则	必考	8~15	大题

1. 洛必达法则 若满足 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

① 必须满足 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 型才可以使用, 其他形式, 不能直接使用

② 若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍满足 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 可以连续使用洛必达法则 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$

③ 洛必达法则不是万能的, 求极限的时候, 首选无穷小替换, 再用洛必达法则

题 1: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

题 2: 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{2x^2 + x}$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

题 3: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x} = 0 \end{aligned}$$

$$(x^u)' = \mu x^{u-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$



题 4: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{x} = 0$$

题 5: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$

解: 令 $y = \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$, 两边取对数:

$$\ln B^A = A \ln B$$

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} \ln(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2-x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x}{2-x} = -1$$

$$\ln y = -1 \quad y = e^{-1} \quad \text{故} \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$$

题 6: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2 \sin x}$

解: 令 $y = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2 \sin x}$, 两边取对数:

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin x \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x) = 0$$

$$\ln y = 0 \quad y = 1 \quad \text{故} \lim_{x \rightarrow 0} x^{2 \sin x} = 1$$



题 7: 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

解: 令 $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, 两边取对数:

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(e^x-1)} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x-1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x+xe^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$$

$$\ln y = 0 \quad y = 1 \quad \text{故} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = 1$$

课时三 练习题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \tan x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 2x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

6. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$

7. 求 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)^{\tan(x-1)}$

8. $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(x^3+1)}}$



课时四 连续与间断点

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 连续	必考	6~10	选择/填空/大题
2. 间断点			

1. 连续 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (极限值=函数值)

题 1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \end{cases}$ 是否连续

解：分界点在 $x=1$ 处

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1$$

$$\text{函数值: } f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1 \quad \text{函数连续}$$

题 2. 设 $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ e, & x = 0 \\ \frac{\sin ax}{bx}, & x < 0 \end{cases}$ ($a \neq 0, b \neq 0$), 问 a 和 b 各取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 连

续。

$$\text{解: 左极限 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\text{右极限 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{ax} \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} ax \cdot \frac{1}{x}} = e^a$$

$$\text{函数值 } f(0) = e$$

$$\text{由 } \frac{a}{b} = e^a = e \text{ 可得 } a=1, b=\frac{1}{e}$$



题 3. 确定 a, b , 使 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ ax + b & 0 \leq x < 1 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

解：在分界点为 $x=0$ 处

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b$$

$$\text{函数值: } f(0) = b \quad \text{可得: } b = 1$$

在分界点为 $x=1$ 处

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b = a + b$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

$$\text{函数值: } f(1) = 1 \quad \text{可得: } a + b = 1$$

$$\text{联立 } \begin{cases} b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \quad b = 1$$

2. 间断点

第一类间断点	可去间断点	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
	跳跃间断点	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
第二类间断点	无穷间断点	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个是无穷
	振荡间断点	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 振荡不存在



题 1. 求函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断其类型。

解: $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$ 在点 $x=1, x=2$ 处无定义

在 $x=1$ 处

$$\text{极限值: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$$

左右极限存在且相等，故点 $x=1$ 为可去间断点

在 $x=2$ 处

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty \quad \text{右极限: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$

故为第二类间断点

题 2. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x-1}} & x > 0 \\ \ln(1+x) & -0.5 \leq x < 0 \end{cases}$ 的间断点，并判断其类型

解: 在 $x=0$ 处

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1+x) = 0$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{e}$$

左右极限都存在，但是不相等，故 $x=0$ 为跳跃间断点

$x > 0$ 时 $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ 定义域 $x \neq 1$ 故在 $x=1$ 处也是间断点

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

故 $x=1$ 为第二类间断点



课时四 练习题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & x > 0 \\ x & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & x < 0 \end{cases}$, 问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续。

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin 2x & x < 0 \\ k & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + 2 & x > 0 \end{cases}$, 求常数 k 的值, 使函数 $f(x)$ 在定义域内连续。

3. $y = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$ 的可去间断点是 ()。

- A. $x=3$ B. $x=-2$ C. $x=-3$ D. 无

4. 设 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 ()。

- A. 连续点 B. 无穷间断点 C. 跳跃间断点 D. 可去间断点

5. 函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 的间断点是 ()。

- A. 可去间断点 B. 无穷间断点 C. 跳跃间断点 D. 振荡间断点

6. $x=1$ 是 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{1-x}}}$ _____ 间断点。



课时五 导数

考点		重要程度	分值	常见题型
1. 求导定义公式		★★★★★	0~8	选择、填空
2. 求导计算	1) 复合函数求导	必考	6~15	选择、填空、大题
	2) 微分			
	3) 隐函数求导			
	4) 参数方程求导			
3. 可导, 可微, 连续之间的关系		★★★★	0~3	选择、填空

1. 求导定义公式 (导数记作形式: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$)

求导定义公式: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (这个式子有极限值就说明在这点可导)

左导数: $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 右导数: $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

函数在某点可导的充分必要条件: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ (左导数=右导数)

题 1: 求函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 的导数

解: 左导数

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \Delta x - \ln(1+0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

右导数

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \Delta x) - \ln(1+0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'_-(0) = f'_+(0) = 1 \quad \text{所以在 } x=0 \text{ 处导数 } f'(0) = 1$$

题 2: 已知 $f'(2)=1$, 求函数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$

$$\text{解: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = \frac{(2+h) - (2-h)}{h} f'(2) = 2f'(2) = 2$$



2. 求导计算

题 1. 设 $y = e^x \ln x$, 求 y'

$$\text{解: } y' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$$

题 2. 设 $y = \ln \cos e^x$, 求 dy

$$\text{解: } y' = \frac{1}{\cos e^x} \cdot [-\sin e^x] \cdot e^x = -e^x \tan e^x$$

$$dy = -e^x \tan e^x dx$$

题 3. 设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 求 y'

$$\begin{aligned} \text{解: } y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right] \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

题 4. 设 $y = f(\sin x^2)$, 求 $\frac{dy}{dx}$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = f'(\sin x^2) \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2 f'(\sin x^2)$$

题 5. 设 $y = f(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 确定, 求 $dy|_{x=0}$

解: 两边同时对 x 求导, 得

$$y' - e^y - xe^y y' = 0 \quad \text{解得 } y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

把 $x=0$ 代入原方程可得 $y=1$

$$\text{所以 } y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} \Big|_{(0,1)} = e \quad dy|_{x=0} = e dx$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$



题 6. 求曲线 $e^y - xy = e$ 在 $x=0$ 处的切线方程。

解：两边同时对 x 求导，得

$$e^y \cdot y' - y - x \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{e^y - x}$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时代入原方程 } y=1 \quad \text{则 } y' = \frac{1}{e}$$

$$\text{则切线方程为 } y-1 = \frac{1}{e}(x-0) \quad \text{整理可得 } y = \frac{1}{e}x + 1$$

题 7. 设 $y = (1+x^2)^{\sin x}$ ，求 y'

解：两边取对数得： $\ln y = \sin x \cdot \ln(1+x^2)$

$$\text{两边同时对 } x \text{ 求导得： } \frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2} \sin x$$

$$\text{于是 } y' = y \cdot \left[\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2} \sin x \right] = (1+x^2)^{\sin x} \left[\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2} \sin x \right]$$

题 8. 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\text{解： } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2} \quad \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \bigg/ \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{4t}$$

参数方程求导方法：

$$\textcircled{1} \frac{dx}{dt} \quad \textcircled{2} \frac{dy}{dt}$$

$$\textcircled{3} \frac{dy}{dx} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}}$$

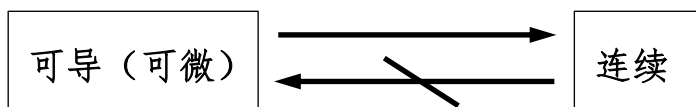
$$\textcircled{4} \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}$$

$$\textcircled{5} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\textcircled{4}}{\textcircled{1}}$$



3. 可导, 可微, 连续之间的关系

(可导和可微可以认为是一样的, 可导就是可微, 可微就是可导)



课时五 练习题

1. 求函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ \sin 2x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的导数。

2. 确定常数 a, b , 使函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{2x} - 1), & x < 0 \\ a + \sin bx, & x \geq 0 \end{cases}$ 处处可导。

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 ()。

A. 极限不存在 B. 极限存在但不连续 C. 连续但不可导 D. 可导

4. 设 $f'(x_0) = 2$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0 - \frac{1}{2n})]n$ 。

5. $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 有定义, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = 1$, 则 $f'(x_0) = ()$ 。

A. $-\frac{1}{2}$ B. 2 C. -1 D. $\frac{1}{2}$

6. 设 $y = \sin x \cdot \cos x$, 求 y' 。



7. $y = \ln \sin \sqrt{x}$, 求 y' 。
8. 设 $f(x) = x \arctan \sqrt{x^2 + 2x}$, 求 $f'(x)$ 。
9. 设 $y = f(\ln x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。
10. 设 $y = f(x)$ 由方程 $xy = e^{x+y}$ 确定, 求 dy 。
11. 求曲线 $y = 2 + xe^y$ 在 $x=0$ 处的切线方程。
12. 设 $y = x^x$, 求 y' 。
13. 设 $y = x^{\cos x}$, ($x > 0$), 求 dy
14. 求由参数方程 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\frac{\pi}{3}}$ 。
15. 已知 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$



课时六 单调性与凹凸性

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 单调性与极值点	★★★★★	3~10	选择/填空/大题
2. 凹凸性与拐点			

1. 单调性与极值点

题 1. 求函数 $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间和极值。

解：定义域： $(-\infty, +\infty)$,

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}, \text{ 可能极值点: } x_1 = -1, x_2 = 0$$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-		+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

解题方法：

- ① 求定义域
- ② 求可能极值点
- ③ 画表判正负
- ④ 总结

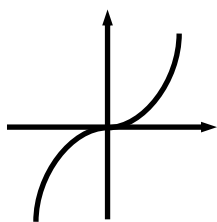
单调递增区间： $(-\infty, -1], [0, +\infty)$ ，单调递减区间： $[-1, 0]$

极大值： $f(-1) = 1$ ，极小值： $f(0) = 0$

题 2：判断：

1) 驻点一定是极值点 (×)

驻点：一阶导数为 0 的点



例 $y = x^3$, $y' = 3x^2 = 0$ 驻点为 $x = 0$

$x = 0$ 不是极值点，因为在 $x = 0$ 的左右两边 y' 不是异号

2) 极值点一定是驻点 (×)

极值点存在于两处：①驻点；②一阶导数不存在点

3) 可导函数极值点一定是驻点 (√) 去掉了导数不存在的情况。



题 3: 证明: 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 。

证明: 令 $f(x) = x - \ln(1+x)$

$$f' = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$$

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 时单调增加, 且 $f(0) = 0$

于是有 $f(x) > 0$, 即 $x - \ln(1+x) > 0$ 得证 $x > \ln(1+x)$,

$$\text{令 } g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

故 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调增加, 且 $g(0) = 0$

故 $g(x) > 0$, 即 $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0$ 得证 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$

综合可得: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

2. 单调性与极值点

题 1: 求函数 $y = xe^{-x}$ 的凹凸区间及拐点。

解: 定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$

$$y' = e^{-x}(1-x) \quad y'' = e^{-x}(x-2)$$

可能拐点: $x = 2$

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	-	= 0	+
$f(x)$	凸	拐点	凹

解题方法:

- ① 求定义域
- ② 求可能拐点
- ③ 画表判正负
- ④ 总结

凹区间: $x \in [2, +\infty)$; 凸区间: $x \in (-\infty, 2]$; 拐点: $(2, 2e^{-2})$



- 1) $f''(x)=0$ 的点一定是拐点 (×) 要保证左右异号。
- 2) 拐点一定是 $f''(x)=0$ 的点。 (×)
(拐点存在于两处① $f''(x)=0$ 的点; ②二阶导数不存在点)
- 3) 二阶导数存在的函数, 拐点一定是 $f''(x)=0$ (√) 去掉了二阶导数不存在的情况。

课时六 练习题

1. 求 $y = 2x \arctan x - \ln(1+x^2)$ 的单调区间。
2. 求函数 $y = \ln x + \frac{1}{x}$ 的极值。
3. 下列关于极值命题中正确的是 ()
 A. 若 $f'(x_0)=0$ 则 x_0 必定是 $f(x)$ 的极值点
 B. 极大值一定大于极小值
 C. 若 $f'(x_0)$ 存在且 x_0 是极限值, 则必有 $f'(x_0)=0$
 D. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续但不可导, 则 x_0 必为 $f(x)$ 的极值点
4. 试证: 当 $x > 0$ 时, $e^x - (1+x) > 1 - \cos x$
5. 问 a, b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点。
6. 求 $y = xe^x - e^x + 1$ 的单调性、极值、凹凸区间及拐点。



课时七 不定积分（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 不定积分原理	★★★★	0~3	选择、填空
2. 直接积分法	★★★★	基础知识	选择、填空、大题
3. 第一类换元法	必考		

不定积分公式表：

$$1. \int k dx = kx + C$$

$$2. (1) \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \quad (2) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3. (1) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (2) \int e^x dx = e^x + C$$

$$4. (1) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(2) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(3) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$(4) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$(5) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$(6) \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$(7) \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(8) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(9) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$(10) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$5. (1) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$(3) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$(4) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$(5) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$(6) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C$$

$$(7) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2-a^2} \right| + C \quad (8) \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + C$$



1. 不定积分原理

题 1. 若 $f(x)$ 的导数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 有一个原函数为 ()。

A. $1 + \sin x$

B. $1 - \sin x$

C. $1 + \cos x$

D. $1 - \cos x$

答案: B $F'(x) = f'(x), f'(x) = \sin x \Rightarrow F''(x) = \sin x$

2. 直接积分法

题 1: $\int \sqrt{x}(x^2 - 5)dx$

$$\text{解: 原式} = \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

题 2: $\int \frac{3x^2}{1+x^2}dx$ (加项减项)

$$\text{解: 原式} = \int \frac{3x^2 + 3 - 3}{1+x^2}dx = \int \frac{3(x^2 + 1) - 3}{1+x^2}dx = \int (3 - \frac{3}{1+x^2})dx = 3x - 3\arctan x + C$$

题 3: $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

$$\text{解: 原式} = \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2})dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

题 4: $\int 2^x e^x dx$

$$\text{解: 原式} = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C$$

题 5: $\int \sin^2(\frac{x}{2})dx$

$$\text{解: 原式} = \int \frac{1}{2}(1 - \cos x)dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + C$$

利用二倍角公式降幂

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2})$$

$$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$



题 6: $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

解: 原式 $= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C$

3. 第一类换元法——凑微分

题 1: $\int (1+2x)^2 dx$

解: 原式 $= \frac{1}{2} \int (1+2x)^2 d(1+2x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (1+2x)^3 + C = \frac{1}{6} (1+2x)^3 + C$

题 2: $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

解: 原式 $= \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1) = \sqrt{x^2+1} + C$

题 3: $\int \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

解: 原式 $= \int (5^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}) dx = - \int 5^{\frac{1}{x}} d(\frac{1}{x}) = - \frac{1}{\ln 5} 5^{\frac{1}{x}} + C$

题 4: $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

解: 原式 $= \int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}) = 2 \arctan \sqrt{x} + C$

题 5: $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx$

解: 原式 $= \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x dx = \int \frac{1}{1+e^x} d(1+e^x) = \ln(1+e^x) + C$



题 6: $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

解: 原式 = $\int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \ln(\ln x) + C$

题 7: $\int \tan x dx$

解: 原式 = $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d \cos x = -\ln |\cos x| + C$

题 8: $\int \cos^3 \theta d\theta$

解: 原式 = $\int \cos^2 \theta \cdot \cos \theta d\theta = \int \cos^2 \theta d \sin \theta = \int (1 - \sin^2 \theta) d \sin \theta = \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta + C$

题 9: $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

解: 原式 = $\int \arctan \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int \arctan \sqrt{x} d(\arctan \sqrt{x}) = (\arctan \sqrt{x})^2 + C$



课时七 练习题

1. 设 $e^x + \sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f'(x) =$ _____。

2. 设 a 是非零常数, 若 $\ln(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 那么 $f(x)$ 的另一个原函数是 ()。

- A. $\ln|ax|$ B. $\frac{1}{a} \ln|ax|$ C. $\ln|a+x|$ D. $\frac{1}{2}(\ln x)^2$

3. 对于不定积分 $\int f(x)dx$, 下列说法正确的是 ()。

- A. $d \int f(x)dx = f(x)$ B. $\int f'(x)dx = f(x)$ C. $\int df(x) = f(x)$ D. $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$

4. 求下列不定积分:

1) $\int (\sqrt{x}+1)\sqrt{x^3} dx$

2) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

3) $\int \frac{1}{x^2-3} dx$

4) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

5) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$

6) $\int \tan^2 x dx$

7) $\int (3-2x)^3 dx$

8) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$

9) $\int 3^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$

10) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

11) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

12) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$

13) $\int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx$

14) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$

15) $\int \tan^3 x \sec x dx$

16) $\int \frac{x e^{\arctan x^2}}{1+x^4} dx$

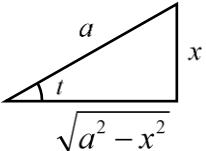
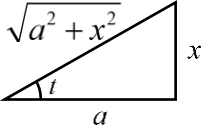
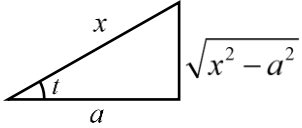


课时八 不定积分 (二)

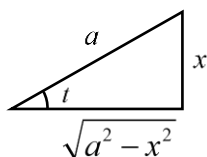
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第二类换元法	★★★★	0~5	大题
2. 分部积分法	必考	5~8	大题
3. 有理化积分	★★★★	0~5	大题

1. 第二类换元法

①三角代换 (被积函数含有二次根式的情况通常用三角换元)

根式形式	所作替换	对应三角形
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	

题 1: $\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

解: 令 $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{1}{a^3 \cos^3 t} \cdot a \cos t dt \\
 &= \frac{1}{a^2} \int \sec^2 t dt = \frac{1}{a^2} \tan t + C \\
 &= \frac{1}{a^2} \tan t + C = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C
 \end{aligned}$$



②幂代换（被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 时，用 t 整体替换）

题 1: $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}} dx$

解：令 $1+\sqrt{2x}=t$, $x=\frac{1}{2}(t-1)^2$, $dx=(t-1)dt$

$$\text{原式} = \int \frac{1}{t} \cdot (t-1)dt = \int (1 - \frac{1}{t})dt = t - \ln t + C = 1 + \sqrt{2x} - \ln(1 + \sqrt{2x}) + C$$

2. 分部积分法

$$\int u \cdot v' dx = \int u dv = uv - \int v \cdot du = uv - \int v \cdot u' dx$$

u 的优先等级：反 对 幂 指 三

题 1: $\int x \ln x dx$

解：原式 $= \frac{1}{2} \int \ln x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 d \ln x = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$

题 2: $\int x \arctan x dx$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \frac{1}{2} \int \arctan x dx^2 \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 d \arctan x \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C \end{aligned}$$

题 3: $\int \ln x dx$

解：原式 $= x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int 1 \cdot dx = x \ln x - x + C$

题 4: $\int e^{\sqrt{x}} dx$ 令 $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $dx=2tdt$

解：原式 $= \int e^t \cdot 2tdt = 2 \int t de^t = 2t \cdot e^t - 2 \int e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$



3. 有理化积分

题 1: $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$

解: $\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-2A-3B}{(x-2)(x-3)}$

$$(A+B)x-2A-3B=x+1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A+3B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-3 \end{cases}$$

故原式 = $\int (\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2}) dx = 4\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C$

课时八 练习题

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, (a > 0)$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$

3. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$

6. $\int x^n \ln x dx$

7. $\int \arcsin x dx$

9. $\int x e^{2x} dx$

10. $\int x \cos x dx$

11. $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$



课时九 定积分（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 凑微分/分部积分	必 考	6 ~ 8	大题
2. 换元换限			
3. 分段函数			
4. 反常积分			

1. 凑微分/分部积分

题 1: 计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ (凑微分)

$$\text{解: 原式} = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

题 2: 计算定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} 2x \arctan x dx$ (分部积分)

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int_0^{\sqrt{3}} \arctan x dx^2 \\ &= x^2 \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x^2 d \arctan x \\ &= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \pi - (x - \arctan x) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$

2. 换元换限

题 1: 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

$$\text{解: } \sqrt{e^x - 1} = t, \quad x = \ln(1+t^2), \quad dx = \frac{2t}{1+t^2} dt$$

$$x=0 \text{ 时 } t=0, \quad x=\ln 2 \text{ 时 } t=1$$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2(t - \arctan t) \Big|_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$



题 2: 计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

解: 令 $x = \tan t, t = \arctan x, dx = \sec^2 t dt$

$x=0$ 时, $t=0$; $x=1$ 时, $t=\frac{\pi}{4}$

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^3 t} \cdot \sec^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. 分段函数

题 1: 计算定积分 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$ (分段积分)

解: 原式 $= \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$

题 2: 计算 $\int_0^2 f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & x > 1 \end{cases}$ (分段积分)

解: 原式 $= \int_0^1 (x+1) dx + \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{6}x^3 \Big|_1^2 = \frac{8}{3}$

4. 反常积分

题 1: 计算定积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ (反常积分—积分区间无界)

解: 原式 $= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(x+1)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(x+1)^2} d(x+1) = \arctan(x+1) \Big|_0^{+\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x+1) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

题 2: 讨论 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ 的收敛性。

解: 原式 $= \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{x} \Big|_0^1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} - 1 - 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, 发散



课时九 练习题

1. 计算 $\int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} dx$

2. 计算 $\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$

3. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$

4. 计算 $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$

5. 计算 $\int_8^{27} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1} dx$

6. 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}} dx$

7. 计算 $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

8. 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$

9. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x \geq 0 \\ xe^{x^2} & x < 0 \end{cases}$, 计算 $\int_{-1}^1 f(x) dx$

10. 下列反常积分中发散的是 ()。

A. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

B. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

D. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

11. 反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx, (p > 0)$ 收敛, 则 p 的取值范围是_____。

12. 下列反常积分中收敛的是 ()。

A. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

B. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

D. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$



课时十 定积分 (二)

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 定积分的性质	★★★★★	3~6	选择、填空
2. 变限积分的求导	★★★★★	0~6	大题

1. 定积分的性质

题 1. $\int_{-2}^2 (\frac{x \cos x}{1+x^2} + \sqrt{4-x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int_{-2}^2 \frac{x \cos x}{1+x^2} dx + \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2\pi \end{aligned}$$

奇偶性:

若 $f(x)$ 为奇, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

若 $f(x)$ 为偶, $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

题 2. 设 $I_1 = \int_1^2 \ln x dx$, $I_2 = \int_1^2 \ln^2 x dx$, $I_3 = \int_1^2 x \ln x dx$, 则下列不等式正确的是 ()。

A. $I_1 > I_2 > I_3$

B. $I_1 < I_2 < I_3$

C. $I_2 < I_1 < I_3$

D. $I_1 > I_3 > I_2$

$f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

答案: C 解: 令 $x=2$, $(\ln 2)^2 < \ln 2 < 2 \ln 2$, 所以 $I_2 < I_1 < I_3$

2. 变限积分的求导

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt = f[\varphi_2(x)] \cdot \varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)] \cdot \varphi_1'(x)$$

题 1: $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$

$$\text{解: 原式} = \sqrt{1+(x^2)^2} \cdot 2x - \sqrt{1+0^2} \cdot (0)' = 2x\sqrt{1+x^4}$$

题 2: 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - e^{-\cos^2 x} \cdot (-\sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\cos^2 x}}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} e^{-1}$$



课时十 练习题

1. $\int_{-2}^2 \left[\frac{\sin x^3 \ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1} - \sqrt{4-x^2} \right] dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\int_{-1}^1 \frac{x+|x|}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $I_1 = \int_0^1 x dx$, $I_2 = \int_0^1 \ln x dx$, $I_3 = \int_0^1 \sqrt{x} dx$ 比较 I_1, I_2, I_3 大小

4. 比较定积分的大小:

1) $\int_0^1 e^x dx \underline{\hspace{1cm}} \int_0^1 e^{x^2} dx$

2) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^5} dx \underline{\hspace{1cm}} \int_0^1 \frac{1}{1+x^{10}} dx$

5. 求极限 $\frac{d}{dx} \int_x^{4x} \sin x^2 dx$

6. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt}{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}$

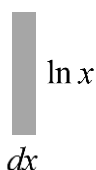
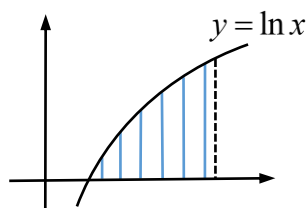


课时十一 定积分的应用

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 利用定积分求面积	必考	5-10	大题
2. 利用定积分求体积			

1. 利用定积分求面积

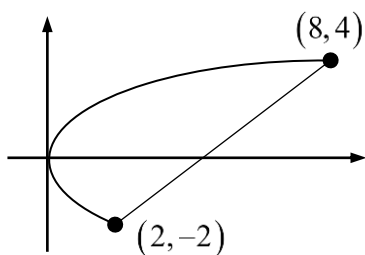
题 1: 计算 $y = \ln x$ 与 x 轴以及 $x = e$ 围成的图形面积。



解: $dA = \ln x dx$

$$A = \int_1^e dA = \int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e = 1$$

题 2: 计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与 $y = x - 4$ 所围成的图形面积



$$A_1: \int_0^2 [\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})] dx$$

解: $dA_1 = [\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})] dx = 2\sqrt{2x} dx$

$$A_1 = \int_0^2 dA_1 = \int_0^2 2\sqrt{2x} dx = \frac{16}{3}$$

$$A_2: \int_2^8 [\sqrt{2x} - (x - 4)] dx$$

$$dA_2 = [\sqrt{2x} - (x - 4)] dx = (\sqrt{2x} + 4 - x) dx$$

$$A_2 = \int_2^8 dA_2 = \int_2^8 (\sqrt{2x} + 4 - x) dx = \frac{38}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = 18$$

解法二: $\int_{-2}^4 \left[(y+4) - \frac{1}{2}y^2 \right] dy$

解: $dA = \left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy$ $A = \int_{-2}^4 \left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right] \Big|_{-2}^4 = 18$



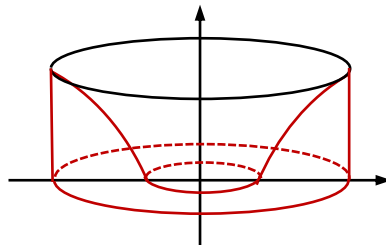
2. 利用定积分求体积

题 3: 计算 $y = \ln x$, x 轴以及 $x = e$ 围成的图形绕 x 轴和 y 轴旋转一周的体积分别是多少

解: 绕 x 轴

$$dV_x = \pi r^2 dx = \pi \cdot (\ln x)^2 dx$$

$$V_x = \int_1^e dV_x = \int_1^e \pi (\ln x)^2 dx = \pi(e-2)$$

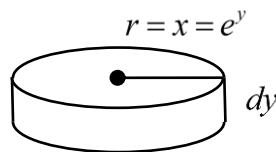


绕 y 轴 $V_y = V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$

$$V_{\text{外}} = \pi \cdot e^2 \cdot 1 = \pi e^2$$

$$dV_{\text{内}} = \pi \cdot (e^y)^2 \cdot dy = \pi \cdot e^{2y} dy$$

$$V_{\text{内}} = \int_0^1 dV_{\text{内}} = \int_0^1 \pi e^{2y} dy = \frac{1}{2} \pi (e^2 - 1)$$



$$\text{则 } V_y = V_{\text{外}} - V_{\text{内}} = \pi e^2 - \frac{1}{2} \pi (e^2 - 1) = \frac{1}{2} \pi (e^2 + 1)$$

课时十一 练习题

1. 计算平面图形由抛物线 $y = 2 - x^2$ 与直线 $y = x$ 围成的面积。
2. 计算曲线 $y = \ln x$ 与直线 $y = \ln a$, $y = \ln b$ ($b > a > 1$) 及 y 轴所围图形的面积。
3. 求曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 $y = 0$ 所围成的平面图形面积以及绕 x 轴旋转所得的体积。
4. 过坐标原点作曲线 $y = e^x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = e^x$ 以及 x 轴围成的平面图形记为 D
①求 D 的面积 A ; ②求 D 绕 x 轴所围成的旋转体体积 V
5. 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线并交于点 $(e, 1)$, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D 。1) 求平面图形 D 的面积; 2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。



课时十二 微分方程

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 可分离变量	★★★★	0 ~ 3	选择、填空
2. 齐次微分方程	★★★★	0 ~ 3	
3. 一阶线性微分方程	必 考	6 ~ 10	大题
4. 二阶常系数齐次			
5. 二阶常系数非齐次			

1. 可分离变量 方程形式: $g(y)dy = f(x)dx$ 方法: 两边同时积分

题 1. $\frac{dy}{dx} = 2xy$

解: 分离变量 $\frac{dy}{y} = 2xdx$, 两边同时积分 $\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$

$$\Rightarrow \ln|y| = x^2 + C$$

$$\Rightarrow |y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C$$

$$\Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{x^2}$$

因 $\pm e^{C_1}$ 是任意非零常数, 又 $y \equiv 0$ 也是原方程的解,

故得方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解为: $y = C_1 e^{x^2}$ (C_1 为任意常数)

题 2. $xy' - y \ln y = 0$

解: $x \frac{dy}{dx} - y \ln y = 0$ 分离变量 $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{x}$ 两边积分 $\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{x}$

$$\ln|\ln y| = \ln|x| + C_1 = \ln|x| + \ln e^{C_1} = \ln e^{C_1} |x|$$

$$|\ln y| = e^{C_1} |x| = C_2 |x|$$

$$\Rightarrow \ln y = \pm C_2 x = C x$$



2. 齐次微分方程

$$\text{方程形式: } \frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

题 1. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + 2xy}{xy} = -\frac{1 + 2\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}$$

$$\text{令 } u = \frac{y}{x}, \text{ 则 } y = xu \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = -\frac{1 + 2u}{u}$$

$$\text{整理得 } x \frac{du}{dx} = -\frac{1 + 2u}{u} - u = -\frac{(u + 1)^2}{u}$$

$$\text{分离变量 } \frac{u}{(u + 1)^2} du = -\frac{1}{x} dx$$

$$\text{两边积分 } \int \frac{u}{(u + 1)^2} du = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|u + 1| + \frac{1}{u + 1} = -\ln|x| + C$$

$$\text{将 } u = \frac{y}{x} \text{ 代回 } \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = -\ln|x| + C$$

$$\text{化简整理: } \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \ln|x| + \frac{x}{x + y} = C$$

$$\ln|y + x| + \frac{x}{x + y} = C$$



3. 一阶线性微分方程 形式: $y' + P(x)y = Q(x)$

题 1. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

解: $P(x)=1, Q(x)=e^{-x}$

通解公式: $y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$

$$\int P(x)dx = \int 1dx = x$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx} = \int e^{-x} \cdot e^x dx = x$$

所以方程通解: $y = e^{-x}(x+C)$

题 2. 已知 $f(x)$ 为可导函数, 且满足方程 $\int_0^x tf(t)dt = x^2 + f(x)$, 求 $f(x)$

解: 两边求导 $xf'(x) = 2x + f'(x)$

整理得 $f'(x) - xf(x) = -2x$

$$P(x) = -x \quad Q(x) = -2x$$

$$\int P(x)dx = \int -x dx = -\frac{1}{2}x^2$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int -2xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

故方程通解: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \left(2e^{-\frac{1}{2}x^2} + C \right) = 2 + Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

$$x=0 \text{ 时 代入原方程 } \int_0^x tf(t)dt = x^2 + f(x) \Rightarrow 0 = 0 + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

代入 $(0,0)$ 点, 即 $0 = 2 + C \Rightarrow C = -2$, 故 $f(x) = 2 - 2e^{\frac{1}{2}x^2}$



4. 二阶常系数齐次线性微分方程

形式: $y'' + Py' + Qy = 0$ 题 1. 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.解: 特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$ 特征根: $r_1 = -1 \quad r_2 = 3$ 方程通解: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

特征根 r_1, r_2	通解
$r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

题 2. 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ 的解, 满足初始条件 $y|_{x=0} = 4, \quad y'|_{x=0} = -2$ 解: 原方程: $y'' + 2y' + y = 0$ 特征方程: $r^2 + 2r + 1 = 0$ 特征根: $r_1 = r_2 = -1$ 通解为: $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$ 代入 $y|_{x=0} = 4$ 得 $C_1 = 4$,则 $y = (4 + C_2 x) e^{-x}$ $y' = C_2 e^{-x} - (4 + C_2 x) e^{-x}$ 代入 $y'|_{x=0} = -2$ 得 $-2 = C_2 - 4 \Rightarrow C_2 = 2$ 所以方程的解: $y = (4 + 2x) e^{-x}$ 

5. 二阶常系数非齐次线性方程

①: $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

题 1. $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$

解: 特征方程: $r^2 - 5r + 6 = 0$

特征根: $r_1 = 2, r_2 = 3$

通解: $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

从原方程可知 $\lambda = 2$, $P_m(x) = x$

设特解: $y^* = xe^{2x}(ax + b)$

$$(y^*)' = e^{2x}(2ax^2 + 2bx + 2ax + b)$$

$$(y^*)'' = e^{2x}(4ax^2 + 4bx + 8ax + 4b + 2a)$$

将 y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ 代入原方程, 化简后得: $-2ax + 2a - b = x$

$$\text{对应系数相等} \begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow y^* = -x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{2x}$$

则方程通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{2x}$

通解结构: $y = Y + y^*$ (齐通+非特)

$$y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x) \quad k = \begin{cases} 0 & \lambda \neq \lambda_1, \lambda_2 \\ 1 & \lambda = \lambda_1 \text{ 或 } \lambda = \lambda_2 \\ 2 & \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

$P_m(x)$	$Q_m(x)$
x	$ax + b$
$x^2 + 1$	$ax^2 + bx + c$
$x^3 + x^2 + 1$	$ax^3 + bx^2 + cx + d$



② $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$ 型题 2. 求微分方程 $y'' + 4y = x \cos x$ 的通解。解: $\lambda = 0, \omega = 1, P_l(x) = x, Q_n(x) = 0$ 特征方程: $r^2 + 4 = 0$ 特征根: $r = \pm 2i \quad \alpha = 0, \beta = 2$ $Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ 由于 $\lambda \pm \omega i = \pm i$ 不是特征方程的根故 $y^* = (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x$ $(y^*)' = (cx + d + a) \cos x + (-ax + c - b) \sin x$ $(y^*)'' = (2c - ax - b) \cos x - (cx + d + 2a) \sin x$ 代入原方程化简整理得: $(3ax + 3b + 2c) \cos x + (3cx + 3d - 2a) \sin x = x \cos x$

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3b + 2c = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow y^* = \frac{1}{3}x \cos x + \frac{2}{9} \sin x$$

故 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}x \cos x + \frac{2}{9} \sin x$ 通解: $y = Y + y^*$ (齐通+非特)

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)} \sin \omega x]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \lambda \pm \omega i \text{不是特征根} \\ 1 & \lambda \pm \omega i \text{是特征根} \end{cases}$$

$$m = \max\{l, n\}$$

$$R_m^{(1)} = ax^m + bx^{m-1} + \cdots + c$$

$$R_m^{(2)} = ex^m + fx^{m-1} + \cdots + g$$



课时十二 练习题

1. 下列微分方程的阶数为二阶的是 ()。

A. $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$

B. $x^2 y'' - xy' + y = 0$

C. $xy''' - 2y'' + x^2 y = 0$

D. $(7x - 6y)dx + (x + y)dy = 0$

2. 求微分方程 $xdy + 2ydx = 0$, $y|_{x=2} = 1$ 的特解。

3. 求微分方程 $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0$ 的通解。

4. 求微分方程 $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$ 的通解。

5. 求微分方程 $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ 的通解。

6. 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} + y = xe^x$ 满足 $y|_{x=1} = 0$ 的特解。

7. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x) \cos x + 2 \int_0^x \varphi(t) \sin t dt = x + 1$, 求 $\varphi(x)$ 。

8. 求微分方程 $y'' + 6y' + 9y = 0$ 的通解。

9. 求微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 满足 $y|_{x=0} = 6$, $y'|_{x=0} = 10$ 的特解。

10. 求微分方程 $y'' - 4y' + 5y = 0$ 的通解。

11. 求微分方程 $y'' - 2y' + y = 4xe^x$ 的通解。

12. 求微分方程 $y'' - 5y' + 4y = 3 - 4x$ 的通解。

13. 求微分方程 $y'' - y = e^x \cos 2x$ 的通解。



课时十三 中值定理

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 罗尔中值定理	★★★★★	0 ~ 8	大题
2. 拉格朗日中值定理	★★★★★		
3. 柯西中值定理	★★★		

1. 罗尔中值定理

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 内可导; (3) $f(a) = f(b)$ 。

则 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

题 1. 设函数在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 1, f(1) = 0$, 证明: 存在一点 $\xi \in (0, 1)$

使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ 。

证: 令 $F(x) = xf(x)$, $F(0) = 0 \times f(0) = 0$, $F(1) = 1 \times f(1) = 0$

$F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $F(0) = F(1)$

由罗尔定理得 $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$

即 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$, 移项得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$

题 2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

证: 令 $F(x) = x^2 f(x)$, $F(0) = 0^2 \cdot f(0) = 0$, $F(1) = 1^2 \cdot f(1) = 0$

$F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(0) = F(1)$

由罗尔定理得 $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$

得证: $2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$



2. 拉格朗日中值定理

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 内可导;

则 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ 或 $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$

题 1: 设 $b > a > 0$, 证明不等式: $\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$

证明: 令 $f(x) = \ln x$

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理知:

存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = f'(\xi)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $f'(x)$ 在 (a, b) 上单调递减

$\frac{1}{b} < f'(x) < \frac{1}{a}$, 即 $\frac{1}{b} < f'(\xi) < \frac{1}{a}$, $\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$

又 $b > a$, $\therefore \frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$, 原不等式得证

3. 柯西中值定理

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 内可导; (3) $g'(x) \neq 0$ 。

那么存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, $(a < \xi < b)$



题 1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导 ($0 < a < b$), 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = \xi \ln \frac{b}{a} f'(\xi).$$

证: 令 $g(x) = \ln x$, $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导

由柯西中值定理得: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, 即 $\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}} = \xi f'(\xi)$

得证: $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi)(\ln b - \ln a) = \xi \ln \frac{b}{a} f'(\xi)$

课时十三 练习题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可微, 且 $f(1) = 0$, 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ ,

使 $f'(\xi) \arctan \xi + \frac{f(\xi)}{1 + \xi^2} = 0$ 。

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$ 。

3. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 至少存在一个 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$

4. 证明: 当 $b > a > 0, n > 1$ 时有不等式 $na^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b - a} < nb^{n-1}$

5. 证明: 对任何实数 a, b 成立 $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$

6. 设 $x_1 x_2 > 0$, 试证: 在 x_1 与 x_2 之间存在一点 ξ , 使得: $x_1 e^{x_2} - x_2 e^{x_1} = (1 - \xi) e^{\xi} (x_1 - x_2)$



课时一 练习题答案

1. $[-2, 0) \cup (0, 1)$.
2. $(-2, -1) \cup (-1, 2]$.
3. A .
4. $f(\cos x) = 2 - 2\cos^2 x$.
5. 不存在.
6. C .
7. C .
8. A .

课时二 练习题答案

1. $\frac{3}{4}$.
2. 1.
3. B .
4. $\frac{2^{10}}{3^{25}}$.
5. D .
6. $\frac{3}{2}$.
7. e^{-2} .
8. $\frac{3}{2}\ln 2$.
9. 1.
10. C .
11. $\frac{3}{2}$.
12. 1.
13. 3.



14. $\frac{1}{2}$.

15. 2.

16. 3.

17. 2.

课时三 练习题答案

1. 1.

2. 0.

3. 1.

4. $-\frac{1}{2}$.

5. 0.

6. e^2 .

7. 1.

8. $e^{\frac{1}{3}}$.

课时四 练习题答案

1. 不连续.

2. 2.

3. A .

4. B .

5. C .

6. 跳跃间断点



课时五 练习题答案

1. 2.
2. $a=2; b=2$.
3. C.
4. 3.
5. A.
6. $\cos 2x$.
7. $\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}$.
8. $\arctan \sqrt{x^2+2x} + \frac{x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$.
9. $\frac{f'(\ln x)}{x}$.
10. $\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}} dx$.
11. $y=e^2 x+2$.
12. $y'=x^x(\ln x+1)$.
13. $\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x \ln x\right)x^{\cos x} dx$.
14. $-2+\sqrt{3}$.
15. $\frac{\sin t}{1-\cos t}; -\frac{1}{a(\cos t-1)^2}$.

课时六 练习题答案

1. 单调递减区间为 $(-\infty, 0]$, 单调递增区间为 $[0, +\infty)$.
2. 1.
3. C.



4. 证明:

$$\text{令 } F(x) = e^x - (1+x) - (1 - \cos x) = e^x + \cos x - x - 2$$

$$F'(x) = e^x - \sin x - 1 \text{ 不容易判断正负} \quad \text{所以继续求 } F''(x) = e^x - \cos x$$

因为 $x > 0$ 时, $e^x > 1$, $\cos x \leq 1$, 所以 $F''(x) > 0 \Rightarrow F'(x) = e^x - \sin x - 1$ 是单调递增的

则 $F' = e^x - \sin x - 1$ 有最小值 $F'(0) = 0$ 所以 $F'(x) > F'(0) = 0$

可以得到 $F(x) = e^x + \cos x - x - 2$ 是单调递增的 故有最小值 $F(0) = 0$

$$F(x) = e^x + \cos x - x - 2 > 0 \quad \text{得证: } e^x - (1+x) > 1 - \cos x.$$

$$5. y' = 3ax^2 + 2bx, y'' = 6ax + 2b$$

$$\text{由题意知 } \begin{cases} a+b=3 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ b=\frac{9}{2} \end{cases}.$$

6. 单调递减区间为 $(-\infty, 0]$, 单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 极小值 $y(0) = 0$;

凸区间为 $(-\infty, -1]$, 凹区间为 $[-1, +\infty)$, 拐点 $(-1, 1 - \frac{2}{e})$.

课时七 练习题答案

1. $e^x - \sin x$.

2. A .

3. D .

4. 1) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$;

2) $x - \arctan x + C$;

3)

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + C;$$

4) $\frac{1}{2}(\sin x + x) + C$;

5) $-4 \cot x + C$;

6) $\tan x - x + C$;

7) $-\frac{1}{8}(3-2x)^4 + C$;

8) $\frac{3}{4}(2x+1)^{\frac{2}{3}} + C$;

9) $-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\ln 3} + C$;



$$10) 2e^{\sqrt{x}} + C;$$

$$11) \arctan e^x + C;$$

$$12) \ln |\ln(\ln x)| + C;$$

$$13) -\frac{1}{x \ln x} + C;$$

$$14) 2(\sin x)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}} + C;$$

$$15) \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C;$$

$$16) \frac{1}{2} e^{\arctan x^2} + C.$$

课时八 练习题答案

$$1. \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$2. \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C.$$

$$3. \arccos \frac{1}{x} + C.$$

$$4. 2[\sqrt{x+2} - \ln(\sqrt{x+2} + 1)] + C.$$

$$5. \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1+e^x} + 1) + C.$$

$$6. \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

$$7. x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$8. \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

$$9. x \sin x + \cos x + C.$$

$$10. \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

课时九 练习题答案

$$1. 1 - \ln 2.$$

$$2. e^{\frac{\pi}{4}} - 1.$$

$$3. \frac{\pi}{4}.$$

$$4. \frac{8}{9} e^3 + \frac{4}{9}.$$



5. $\frac{59}{2} + 3\ln 2.$

6. 1.

7. $\pi.$

8. $2 - \frac{2}{e}.$

9. $\frac{1}{2}(1 - e) + \frac{\pi}{4}.$

10. $C.$

11. $0 < p < 1.$

12. $A.$

课时十 练习题答案

1. $-2\pi.$

2. $\ln 2.$

3. $I_3 > I_1 > I_2$

4. (1) $>$; (2) $<$.

5. $4\sin 16x^2 - \sin x^2.$

6. $e.$

课时十一 练习题答案

1. $\frac{9}{2}.$

2. $b - a.$

3. $2; \frac{\pi^2}{2}.$

4. ① $\frac{e}{2}$; ② $\frac{1}{6}\pi e^2.$



5. 1) $\frac{e}{2} - 1$; 2) $\frac{\pi}{6}e^2 - \frac{\pi}{2}$.

课时十二 练习题答案

1. B.

2. $x=0$ 时, $y=0$; $x \neq 0$ 时, $\ln|yx^2| = 2\ln 2$.

3. $\left(1 - 2\frac{y^3}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}} = C_1x$.

4. $y = e^{-\sin x}(x + C)$.

5. $\frac{1}{x}(\arcsin x + C)$.

6. $y = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ e^x - \frac{e^x}{x} & , x \neq 0 \end{cases}$.

7. $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} & x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x(\tan x + 1) & x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

8. $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$.

9. $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

10. $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

11. $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{2}{3}x^3e^x$.

12. $y = C_1e^x + C_2e^{4x} - x - \frac{1}{2}$.

13. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + \frac{1}{8}e^x(-\cos 2x + \sin 2x)$.



课时十三 练习题答案

1. 证明:

$$\text{令 } F(x) = f(x) \arctan x$$

$$F(0) = f(0) \times \arctan 0 = 0, \quad F(1) = f(1) \times \arctan 1 = 0$$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 可导, 且 $F(0) = F(1)$,

由罗尔中值定理可得 $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) \arctan \xi + \frac{f(\xi)}{1+\xi^2} = 0$.

2. 证明:

$$\text{令 } F(x) = e^x f(x)$$

$$F(a) = e^a f(a) = 0, \quad F(b) = e^b f(b) = 0$$

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可导, 且 $F(a) = F(b)$,

由罗尔中值定理可得 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$,

即 $e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) = 0$ 得证 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

该步骤在草稿纸上进行

$$f(x) + f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow \int \left(1 + \frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx = 0 \Rightarrow x + \ln f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \ln e^x + \ln f(x) = 0 \Rightarrow \ln e^x f(x) = 0$$

3. 证明: 设 $F(x) = f(x)e^{g(x)}$

$$\because f(a) = f(b) = 0 \quad \therefore F(a) = F(b) = 0$$

由罗尔定理知: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$.

$$\text{即 } f'(\xi)e^{g(\xi)} + e^{g(\xi)}f(\xi)g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$$

该步骤在草稿纸上进行

$$f'(x) + f(x)g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) = 0 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + \int g'(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \ln f(x) + g(x) = 0 \Rightarrow \ln f(x) + \ln e^{g(x)} = 0 \Rightarrow \ln f(x)e^{g(x)} = 0$$



4. 证明: 令 $f(x) = x^n$

由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{b^n - a^n}{b - a}$

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$n > 1$, $x > 0$ 时: $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 单调递增

又 $\xi \in (a, b)$, $\therefore f'(a) < f'(\xi) < f'(b)$, 即 $na^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b - a} < nb^{n-1}$, 不等式得证.

5. 证明: 令 $f(x) = \arctan x$

由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

等式两边取绝对值: $|f(b) - f(a)| = |f'(\xi)|(b - a)|$

又 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \in [0, 1]$, 故 $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$

即 $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$, 不等式得证.

6. 证明:

$$\frac{x_1 e^{x_2} - x_2 e^{x_1}}{x_1 - x_2} = (1 - \xi)e^\xi, \quad \frac{\frac{e^{x_2}}{x_2} - \frac{e^{x_1}}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = (1 - \xi)e^\xi,$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad F(x) = \frac{1}{x}$$

$x_1 x_2 > 0$, 则区间 $[x_1, x_2]$ 不含原点, 故 $f'(x)$, $F'(x)$ 总存在且不为零.

$$\text{由柯西中值定理得: 存在 } \xi \in (x_1, x_2), \text{ 使得 } \frac{\frac{e^{x_2}}{x_2} - \frac{e^{x_1}}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\left(\frac{e^x}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \bigg|_{x=\xi} = (1 - \xi)e^\xi$$

化简整理: $x_1 e^{x_2} - x_2 e^{x_1} = (1 - \xi)e^\xi(x_1 - x_2)$, 不等式得证.

