# 4.2　超几何分布

例1 某班有学生20名, 其中有5名女同学, 今从班上任选4名学生去参观展览, 被选到的女同学数$\xi$是一个随机变量, 求$\xi$的分布.

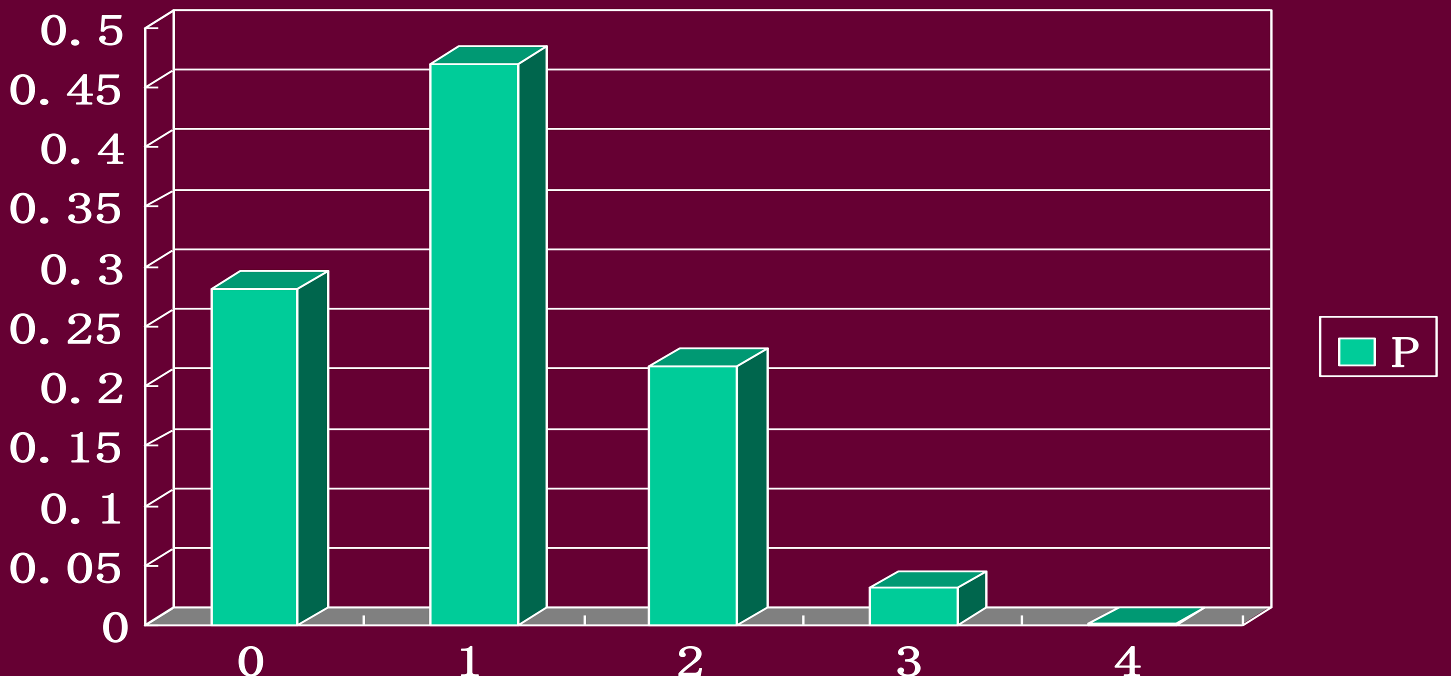
解 $\xi$可取0,1,2,3,4这5个值, 相应概率为

$$P(\xi = k) = \frac{C_5^k C_{15}^{4-k}}{C_{20}^4} \quad (k = 0,1,2,3,4)$$

# 概率分布表为

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $P$ | 0.2817 | 0.4696 | 0.2167 | 0.0310 | 0.0310 |

概率分布图为:



定义 设$N$个元素分为两类, 有$N_1$个元素属于第一类, $N_2$个元素属于第二类($N_1+N_2=N$). 从中按不重复抽样取$n$个, 令$\xi$表示这$n$个中第一(或二)类元素的个数, 则$\xi$的分布称为超几何分布. 其概率函数为:

$$P(\xi=m)=\frac{C_{N_1}^{m}C_{N_2}^{n-m}}{C_N^n}\quad (m=0,1,\cdots,n)$$

规定,如果$n<r$,则$C_n^r=0$

## 在实际应用中

元素的个数$N$是相当大的, 例如, 从中国人民中任抽几千个人观察, 从一个工厂的几十万件产品中任抽几千件观察, 等等.

而在$N$非常大的情况下, 放回抽样和不放回抽样的结果几乎是相同的.

因此有, 当$N$很大的时候, 超几何分布可用二项分布来近似.

或者换句话说, 当$N$趋于无穷时, 超几何分布的极限是二项分布.

例3 一大批种子的发芽率为90%, 今从中任取10粒, 求播种后, (1) 恰有8粒发芽的概率; (2) 不少于8粒发芽的概率.

解 设10粒种子中发芽的数目为$\xi$. 因10粒种子是由一大批种子中抽取的, 这是一个$N$很大, $n$相对于$N$很小的情况下的超几何分布问题, 可用二项分布近似计算.其中$n$=10, $p$=90%, $q$=10%, $k$=8

$$(1)\ P\{\xi=8\}=C_{10}^{8}\times 0.9^{8}\times 0.1^{2}=0.1937$$

$$(2)\ P\{\xi\geq 8\}=0.1937+9\times 0.9^{9}\times 0.1+0.9^{10}\approx 0.9298$$

# 4.3　普哇松分布（Poisson泊松分布）

定义 4.3 如果随机变量$\xi$的概率函数是

$$P_\lambda(m)=P(\xi=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\quad(m=0,1,\cdots)$$

其中$\lambda>0$,则称$\xi$服从普哇松($Poisson$)分布.

利用级数$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$,

易知$\sum_{m=0}^{\infty}P_\lambda(m)=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$

普哇松分布常见于所谓稠密性的问题中，如一段时间内，电话用户对电话台的呼唤次数，候车的旅客数，原子放射粒子数，织机上断头的次数，以及零件铸造表面上一定大小的面积内砂眼的个数等等.

# 普哇松分布的数学期望

$$E\xi=\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}$$

令$k=m-1$，则

$$E\xi=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

# 普哇松分布的方差

$$E\{\xi(\xi-1)\}=\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!}=\lambda^2$$

则$E\xi^2=\lambda^2+E\xi=\lambda^2+\lambda$

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

$$E\xi=D\xi=\lambda,\ \ \sigma_{\xi}=\sqrt{D\xi}=\sqrt{\lambda}$$

通常在$n$比较大, $p$很小时, 用普哇松分布近似代替二项分布的公式, 其中$\lambda=np$.

普哇松分布的方便之处在于有现成的分布表可查(见附表1)

例1 $\xi$服从普哇松分布, $E\xi=5$, 查表求$P(\xi=2)$, $P(\xi=5)$, $P(\xi=20)$

解 因普哇松分布的参数$\lambda$就是它的期望值, 故 $\lambda=5$, 查书后附表一, 有

$P_5(2)=0.084224$,

$P_5(5)=0.175467$,

$P_5(20)=0$

例2 一大批产品的废品率为$p$=0.015, 求任取一箱(有100个产品), 箱中恰有一个废品的概率.

解 所取一箱中的废品个数$\xi$服从超几何分布, 由于产品数量$N$很大, 可按二项分布公式计算, 其中$n$=100, $p$=0.015.

$$P(\xi=1)=C_{100}^{1}\times 0.015\times 0.985^{99}\approx 0.335953$$

但由于$n$较大而$p$很小, 可用普哇松分布公式近似代替二项分布公式计算. 其中$\lambda=np$=1.5, 查表得:

$$P_{1.5}(1)=0.334695$$

误差不超过1%.

例3 检查了100个零件上的疵点数, 结果如下表:

| 疵点数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 频数 | 14 | 27 | 26 | 20 | 7 | 3 | 3 |

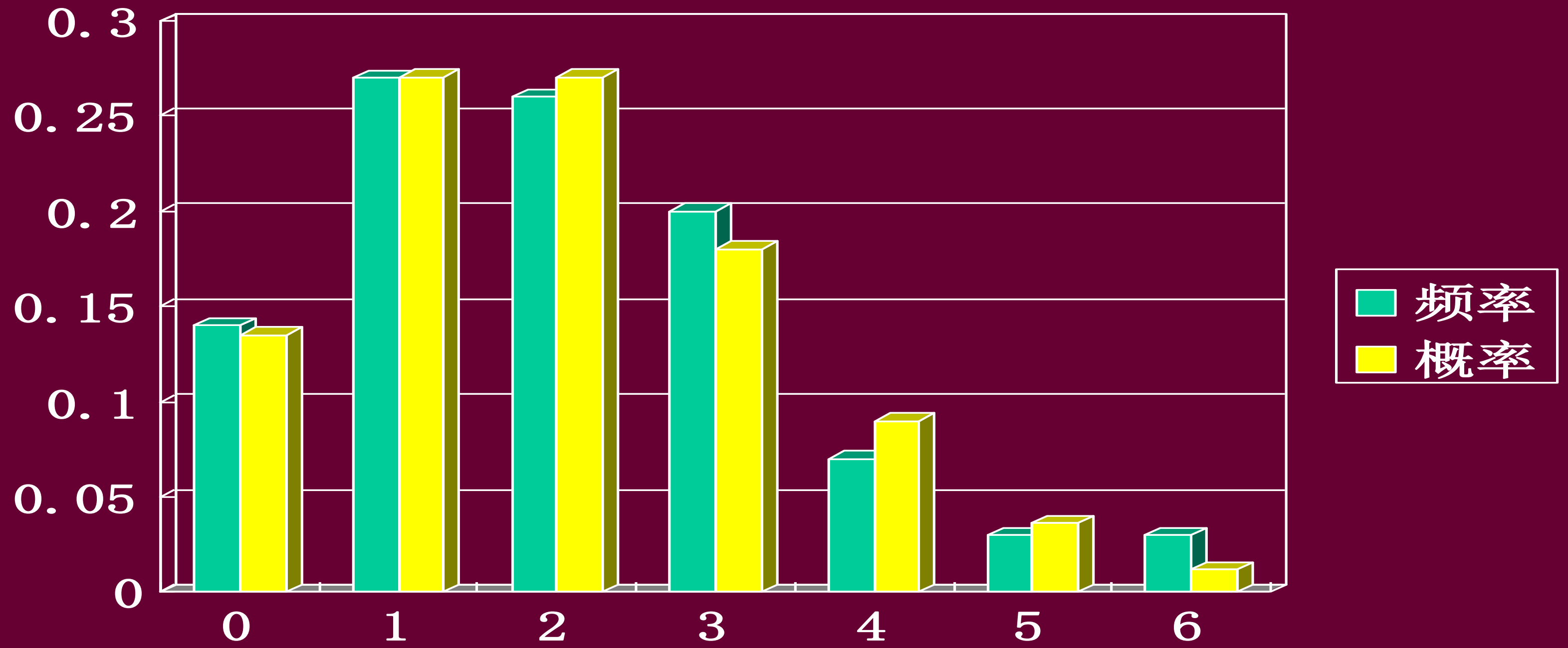
试用普哇松分布公式计算疵点数的分布, 并与实际检查结果比较.

解

$$\lambda = \frac{1}{100}(14\times 0 + 27\times 1 + \cdots + 3\times 6) = 2$$

# 计算出来的图表如下所示:

| 疵点数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 14 | 27 | 26 | 20 | 7 | 3 | 3 |
| 频率 | 0.14 | 0.27 | 0.26 | 0.20 | 0.07 | 0.03 | 0.03 |
| 概率 | 0.135 | 0.271 | 0.271 | 0.18 | 0.09 | 0.036 | 0.01 |



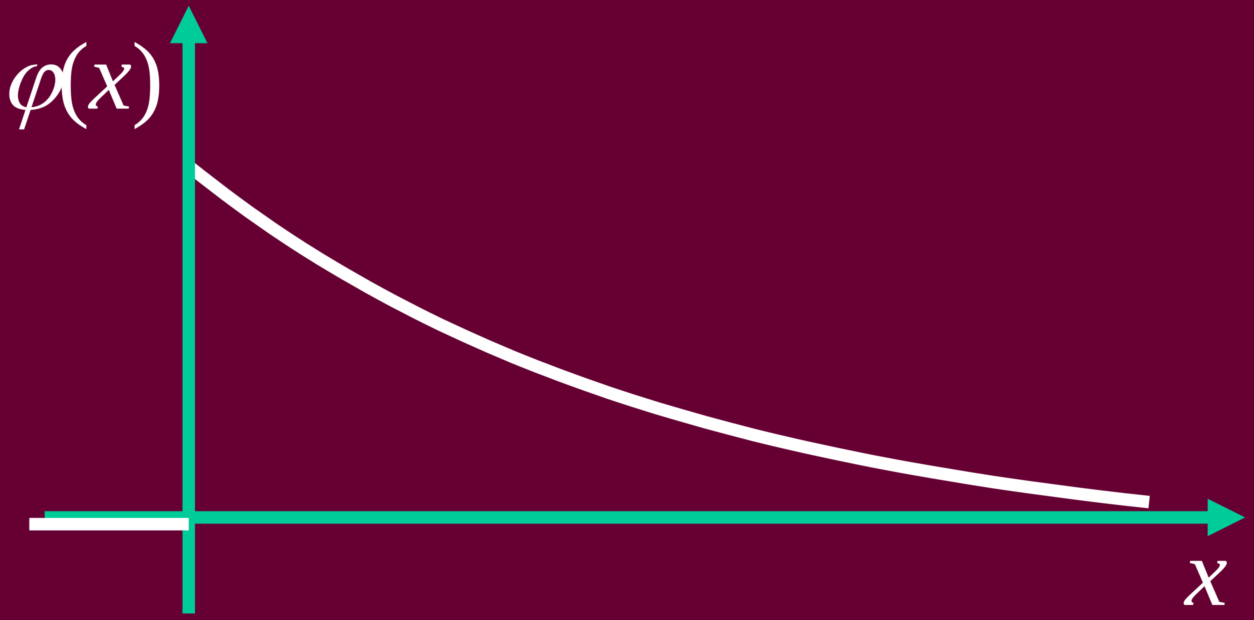
# 4.4　指数分布

指数分布

定义 如随机变量$\xi$的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & 当x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中$\lambda>0$,则称$\xi$服从参数为$\lambda$的指数分布



# 指数分布的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt, 当x\le 0时, F(x)=0$$

当$x>0$时,

$$F(x)=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-\lambda x}$$

因此

$$F(x)=\begin{cases}0 & 当x\le 0时\\ 1-e^{-\lambda x} & 当x>0时\end{cases}$$

对任何实数$a,b(0 \le a<b)$, 有

$$P(a<\xi<b)=\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$$

在习题三第12题中已经算出它的期望和方差:

$$E\xi=\lambda^{-1}$$

$$D\xi=\lambda^{-2}$$

指数分布经常用来作各种“寿命”分布的近似.

如随机服务系统中的服务时间, 某些消耗性产品(电子元件等)的寿命等等, 都常被假定服从指数分布. 假苦产品的失效率为$\lambda$, 则产品在$t(t>0)$时间失效的分布函数为

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}$$

而产品的可靠度为

$$R(t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}$$

例1 某元件寿命$\xi$服从参数为$\lambda$($\lambda^{-1}$=1000小时)的指数分布, 3个这样的元件使用1000小时后, 都没有损坏的概率是多少?

解 参数为$\lambda$的指数分布的分布函数为

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{1000}} \quad (x > 0)$$

$$P(\xi>1000)=1-P(\xi\le 1000)=1-F(1000)=e^{-1}$$

各元件寿命相互独立, 因此3个这样的元件使用1000小时都未损坏的概率为$e^{-3}$(约为0.05).