姓名：________ 线

订

学号：________ 装

班级：________

杭州师范大学2020-2021学年第一学期期末考试

《线性代数A3》试卷（A）

题号	一	二	三	四	总分
得分					

得分	

一、单选题（共18分，每小题3分）.

1、设n阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$满足关系式$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵，则必有 【　】

(A) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$.　(B) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.　(C) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.　(D) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$.

2、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是向量空间$\mathbb{R}^2$的两组基，并且$\boldsymbol{\beta}_1=-5\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$到$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$的过渡矩阵是 【　】

(A) $\begin{bmatrix}0&-4\\1&-6\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&-3\\2&-5\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}5&2\\-3&-1\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}$.

3、设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,-2,b,-2)^{\mathrm{T}}$，已知$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，则 【　】

(A) $b=2$.　(B) $b\neq 2$.　(C) $a=1$.　(D) $a\neq 1$.

4、设$\boldsymbol{A}$是3阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=-4$，且$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$的特征值为【　】

(A) $-2,-2,4$.　(B) $-2,4,4$.　(C) $2,2,-4$.　(D) $2,-4,-4$.

5、设A为n阶可逆矩阵，则下述说法不正确的是 【　】.

(A) $|A|\neq 0$　(B) $|A^{-1}|\neq 0$　(C) $r(A)=n$　(D) A的列向量组线性相关

6、设$\boldsymbol{A}_{4\times 4}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\xi}_1=(-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，$\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值2的特征向量，则以下命题中错误的是 【　】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关.　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}$线性无关.　(D) $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\eta}$线性无关.

二、填空题（共 18 分，每小题 3 分）.

得分	

1、设 $A=\begin{bmatrix}1 & k & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$，行列式 $|3\boldsymbol{A}|=27$，则参数 $k=$________.

2、矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的逆矩阵为__________________.

3、向量空间 $V=\left\{x=(x_1,x_2,0)\middle| x_1,x_2\in R\right\}$ 的维数为_____.

4、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2bx_2x_3$ 可通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$，则 $b^2=$__________.

5、已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ},\boldsymbol{P}=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Q}=(2,-1,2)$，则矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的秩是____________.

6、若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,2,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,\lambda,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,4,-1)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $\lambda=$____.

三、计算题（共 50 分，每小题 10 分）

得分	

1. 计算 n 阶行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

2. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABA} = -2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{AB}$，又已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

3.设向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩及最大线性无关组.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量，求 $\boldsymbol{A}^n$，其中 n 为正整数.

5. 已知向量 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}4\\5\\-3\\11\end{bmatrix}$ 是方程组 $\begin{cases}a_1x_1+2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1,\\4x_1+b_2x_2+3x_3+b_4x_4=d_2,\\3x_1+c_2x_2+5x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$ 的三个解，求该方程组的通解

四、证明题（共 14 分，每小题 7 分）

得分	

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量，证明：

（1）$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$；

（2）线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 必有解.