连续型随机变量的分布

一随机变量的分布函数是描述任何类型的随机变量的变化规律的最一般的形式，但由于它不够直观，往往不常用。

比如，对离散型随机变量，用概率函数来描述即简单又直观。

对于连续型随机变量也希望有一种比分布函数更直观的描述方式。

这就是今天要讲的“概率密度函数”

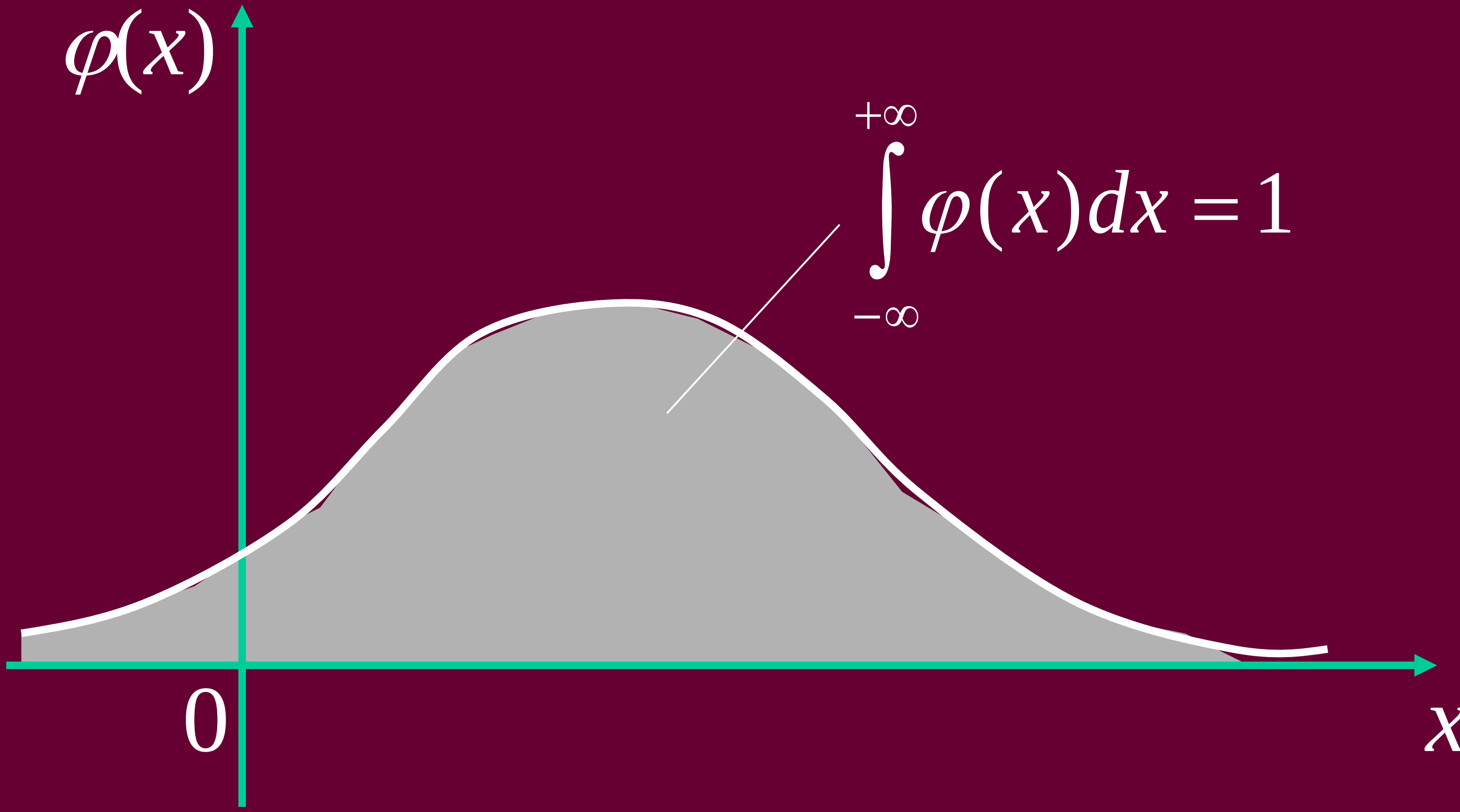
定义　对于任何实数x, 如果随机变量ξ存在的分布函数$F(x)$可以写成

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

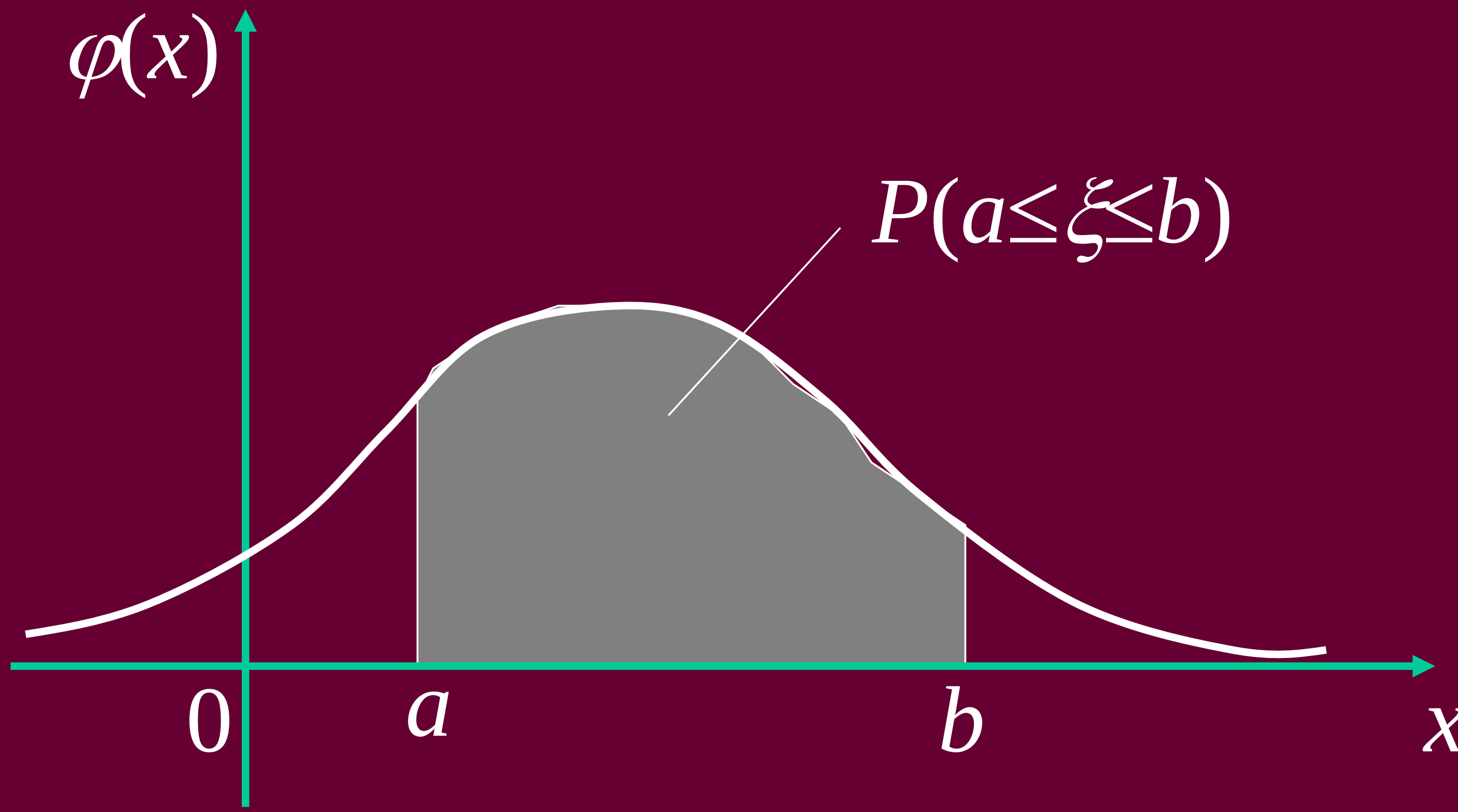
则称ξ为连续型随机变量；$\varphi(x)$为ξ的概率密度函数

概率密度函数的两个性质

一个是$\varphi(x)\geq 0$, 另一个则是

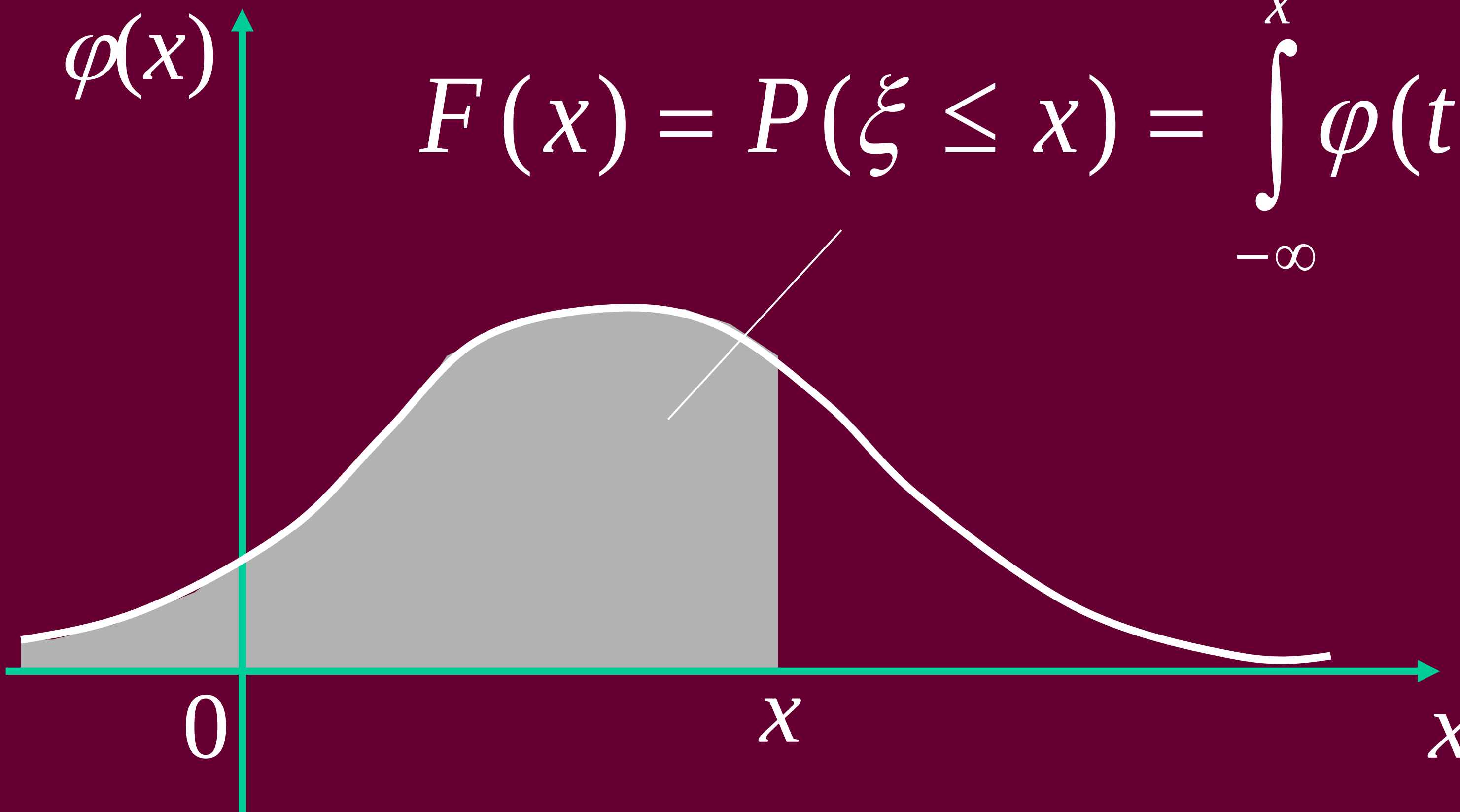


用概率密度函数计算ξ落在任何区间内的概率如下图所示意.



概率密度函数$\varphi(x)$与分布函数$F(x)$的关系为

$$F(x) = P(\xi \le x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

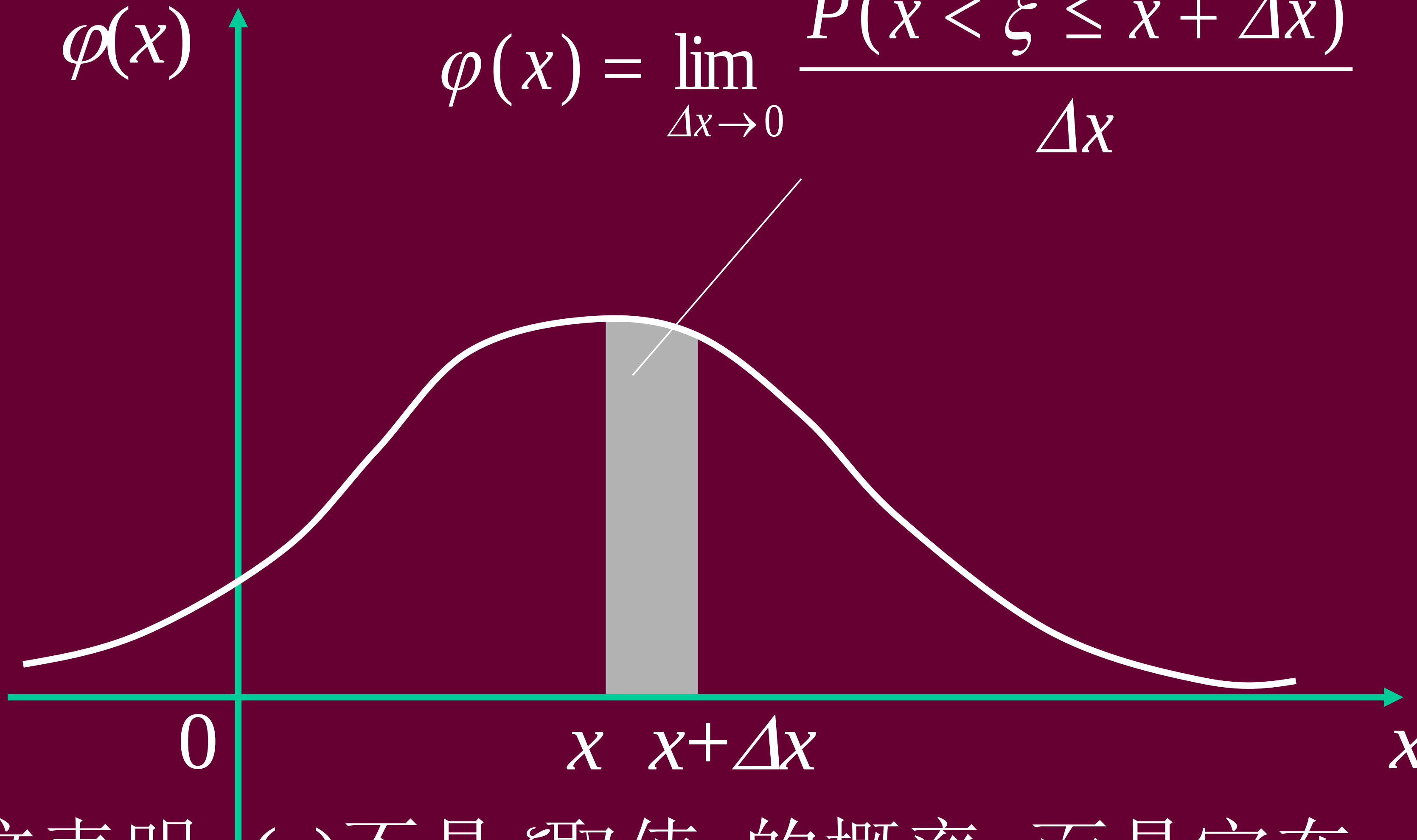


因此对于$\varphi(x)$的一切连续点有

$$\varphi(x) = F'(x)$$

进一步剖析可得

$$\varphi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<\xi\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$



这表明$\varphi(x)$不是ξ取值x的概率, 而是它在x点概率分布的密集程度.

例9 若ξ有概率密度

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda & a\le x\le b\ (a<b)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

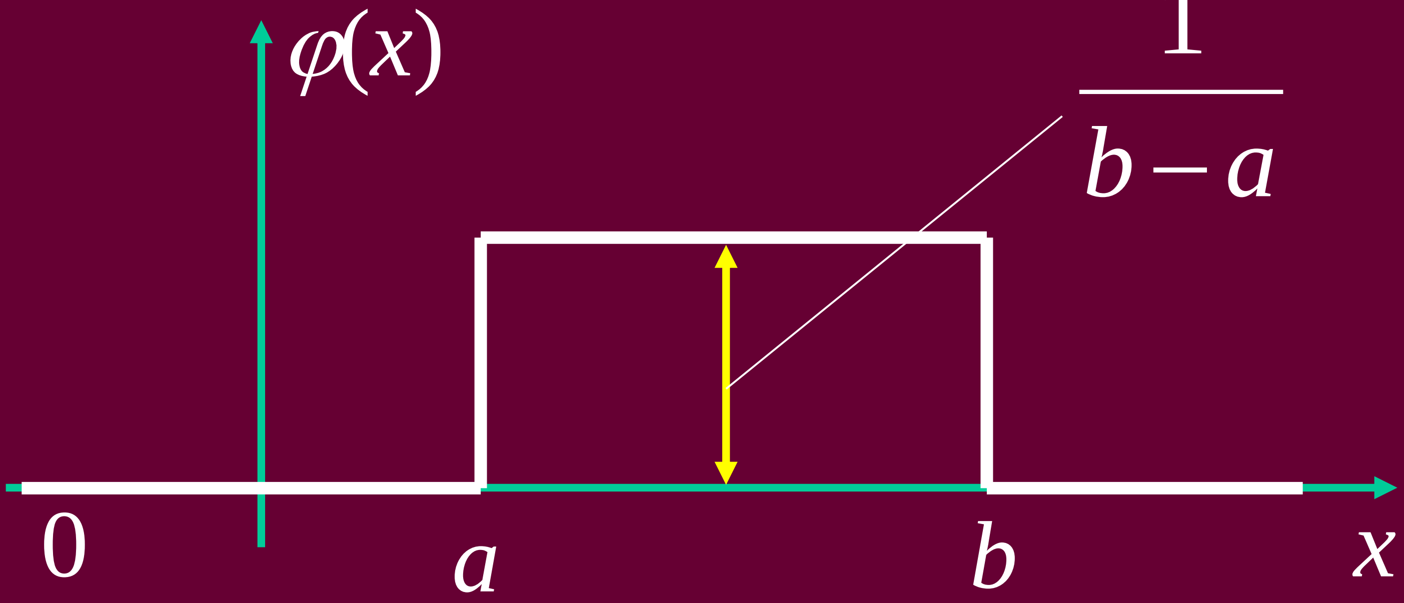
则称ξ服从区间$[a,b]$上的均匀分布, 试求$F(x)$.

解 因为 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{b}\lambda dx+\int_{b}^{+\infty}0dx=\lambda(b-a)=1$$

则$\lambda=\dfrac{1}{b-a}$

因此$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\,(a<b)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

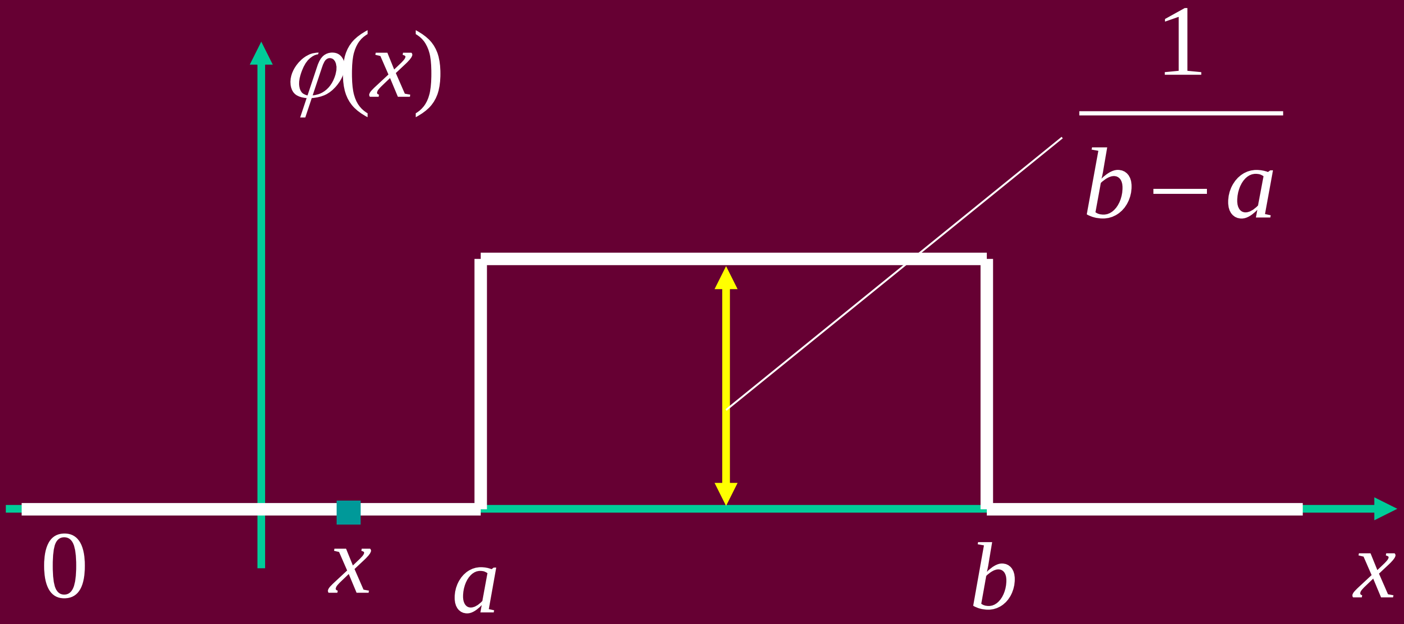
$\varphi(x)$的图形为



求分布函数$F(x)$则是根据公式

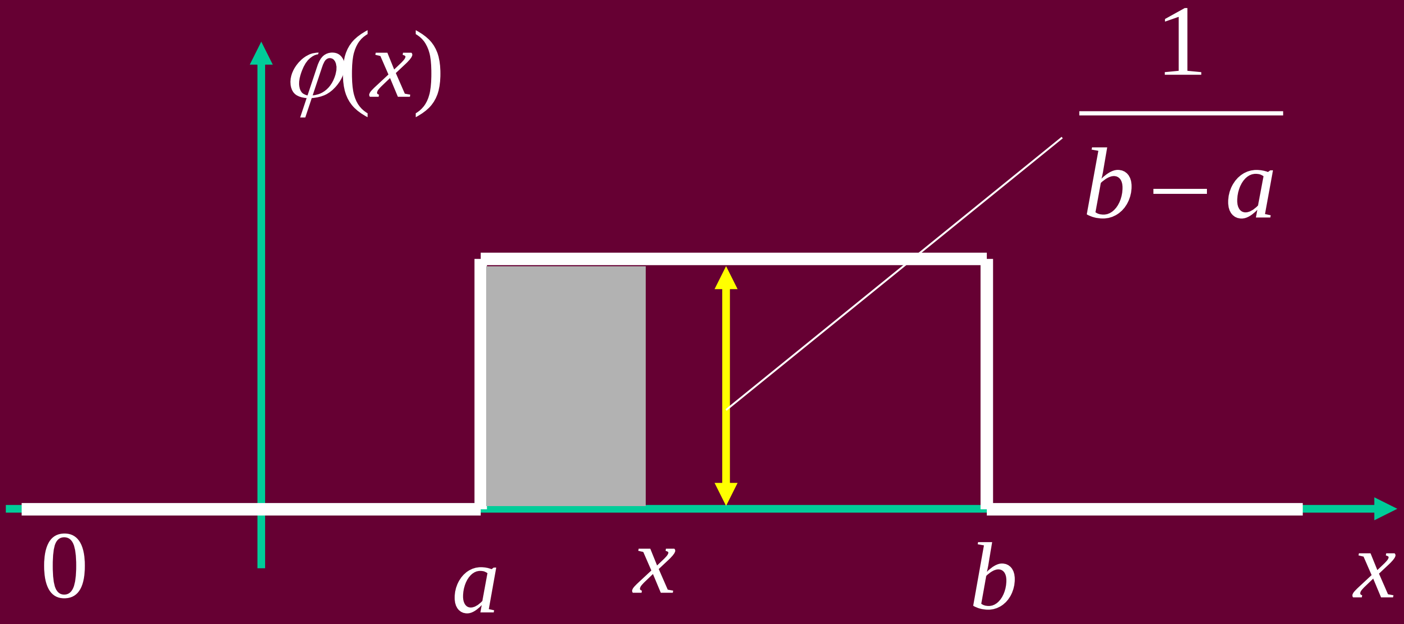
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$$

当$x<a$时



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$$

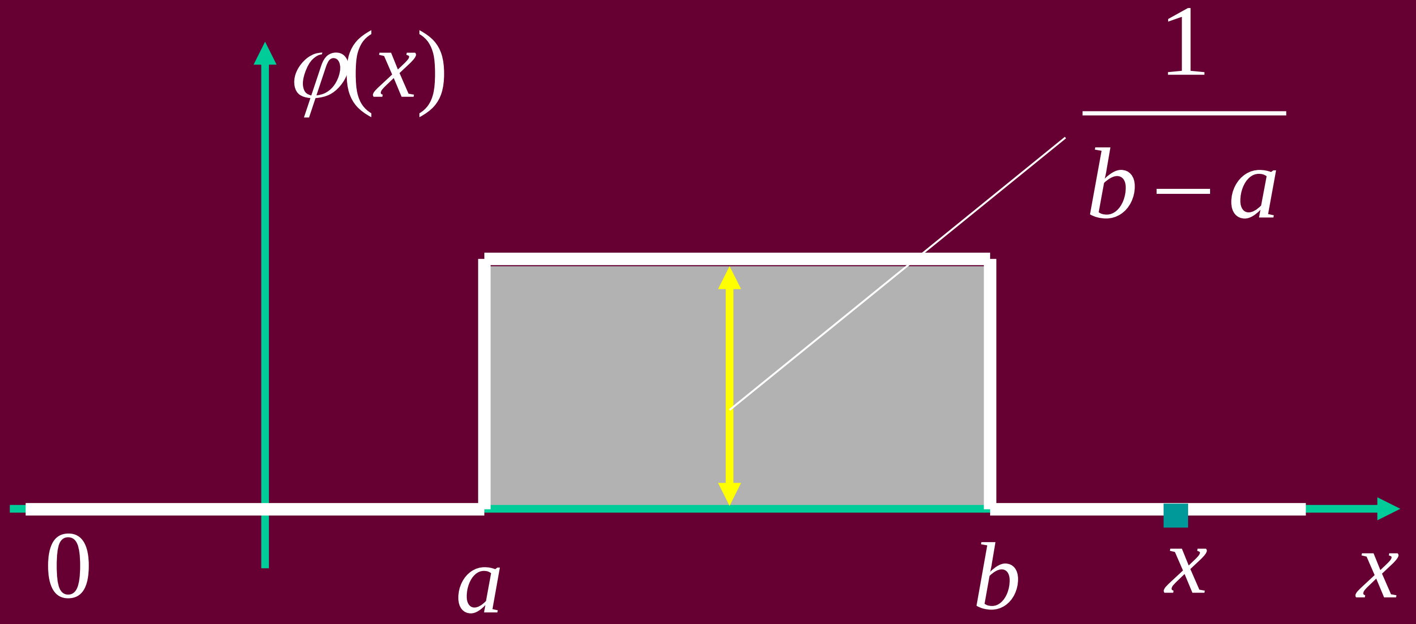
当$a<x<b$时



$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=$$

$$=\frac{1}{b-a}t\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}$$

当$x>b$时



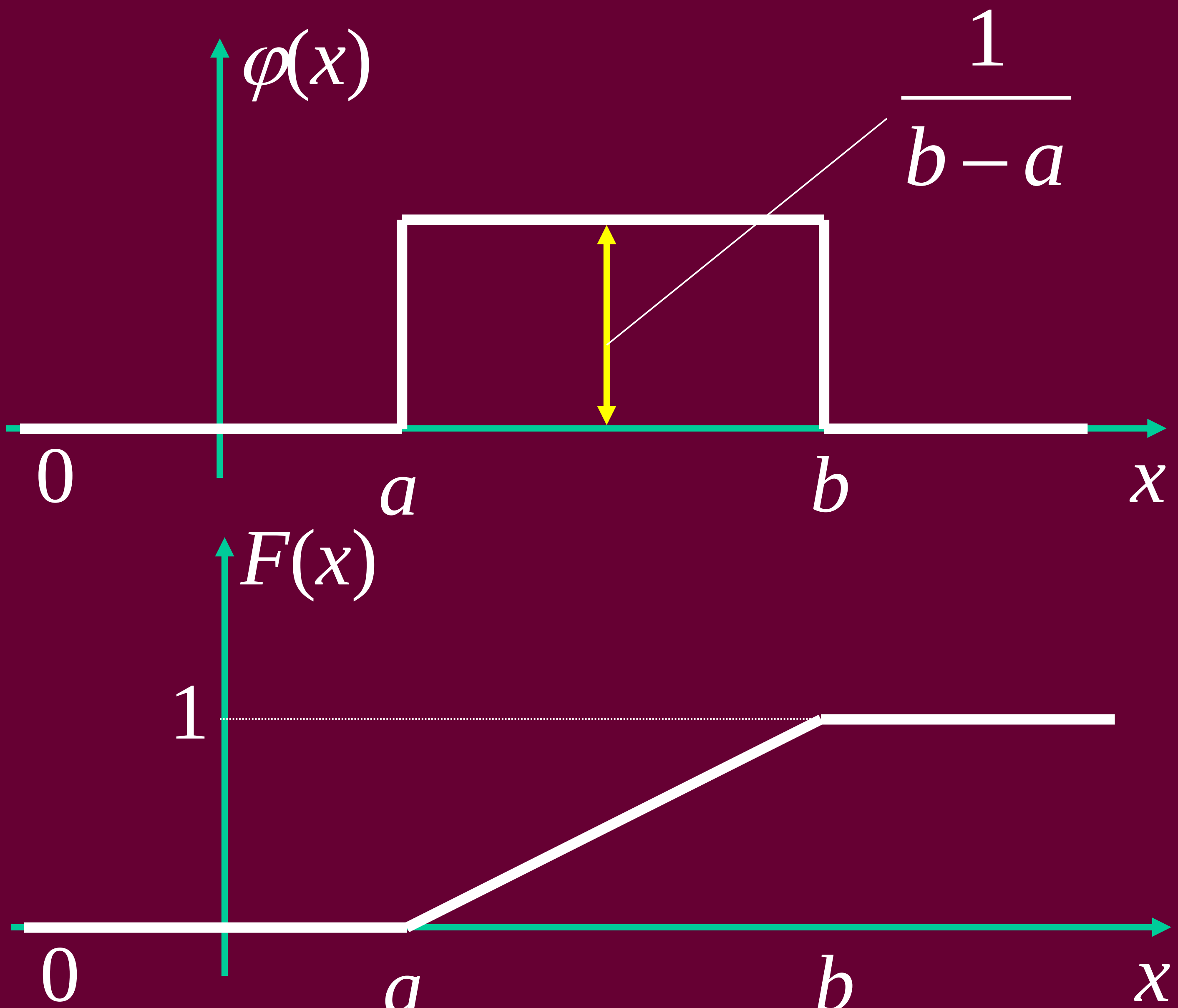
$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt+\int_{b}^{x}0dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\Big|_{a}^{b}=\frac{b-a}{b-a}=1$$

综上所述, 最后得分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b \\ 1 & x\ge b \end{cases}$$

$F(x)$与$\varphi(x)$的图形对照如下:



例10 已知连续型随机变量ξ有概率密度

$$\varphi(x)=\begin{cases} kx+1 & 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求系数k及分布函数$F(x)$, 并计算$P(1.5<\xi<2.5)$

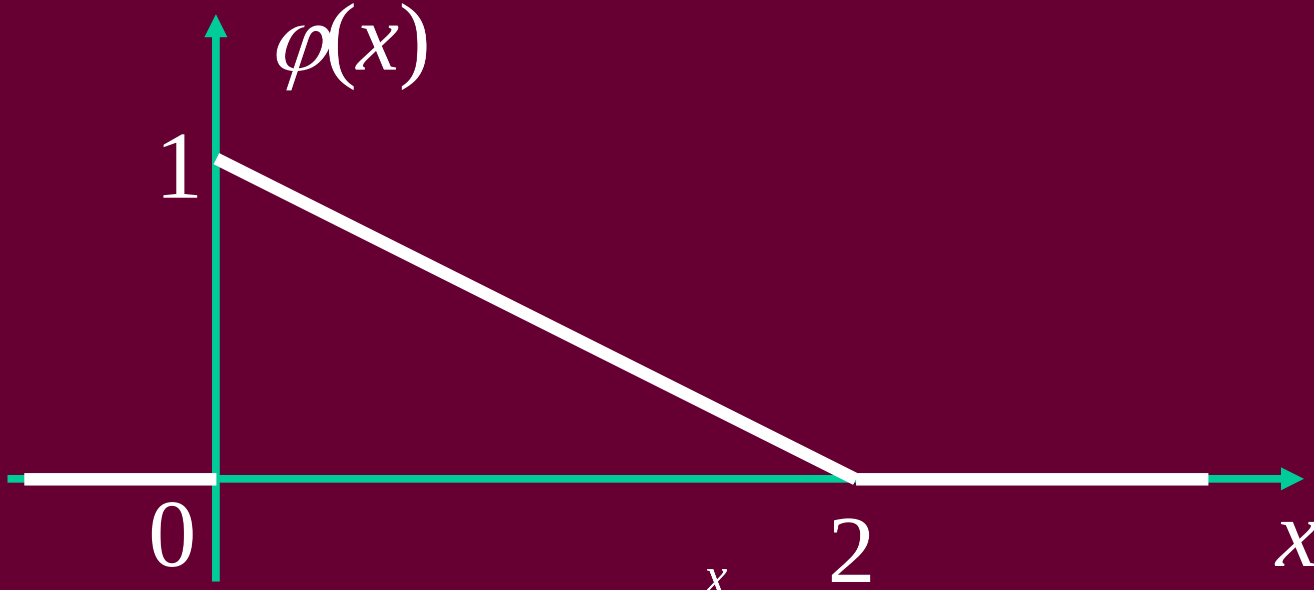
解 因

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}(kx+1)dx+\int_{2}^{+\infty}0dx$$

$$=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^2+x\Big|_0^2=2k+2=1 \quad \text{解得 } k=-\frac{1}{2}$$

则$\varphi(x)$及其图形如下

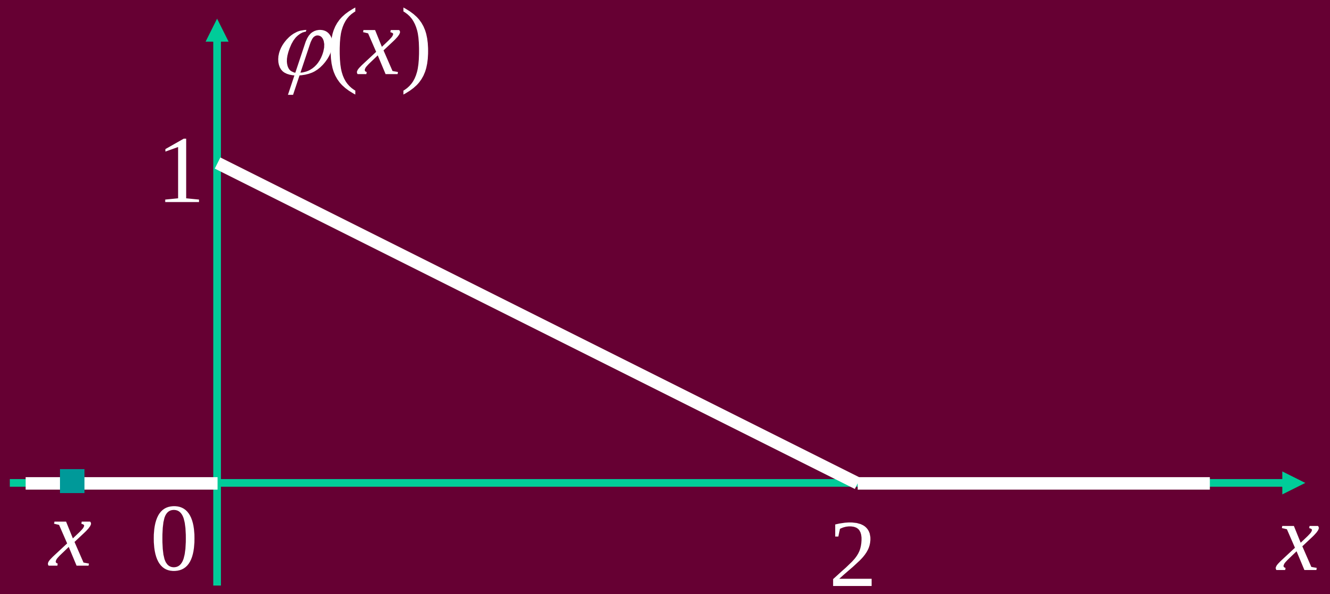
$$\varphi(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2}+1 & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



下面用公式$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$计算分布函数

当$x<0$时,

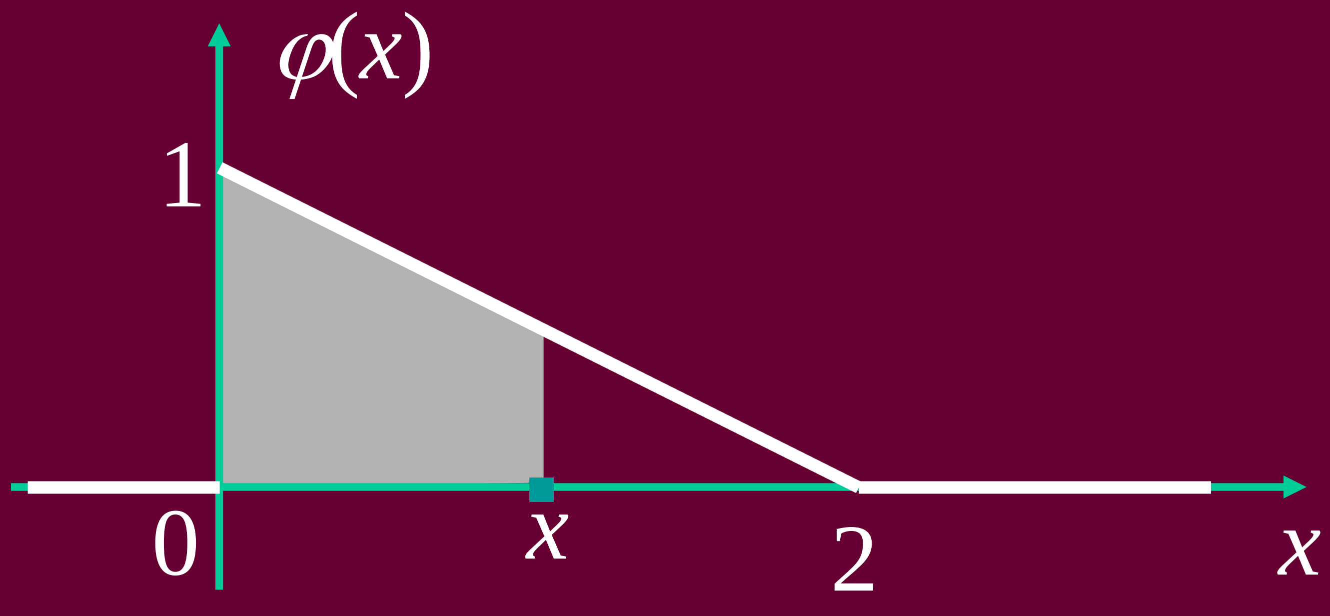
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\,dt=0$$



当0<x<2时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}(-\frac{t}{2}+1)dt=-\frac{t^2}{4}\Big|_0^x+t\Big|_0^x$$

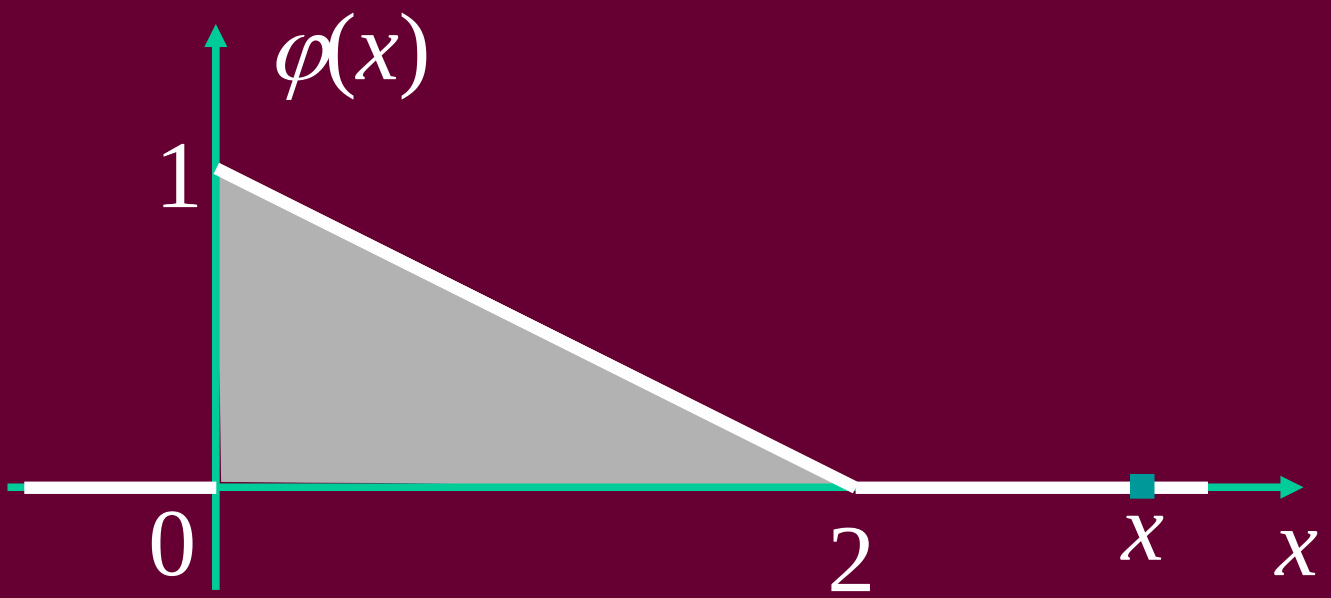
$$=-\frac{x^2}{4}+x$$



当$x>2$时，

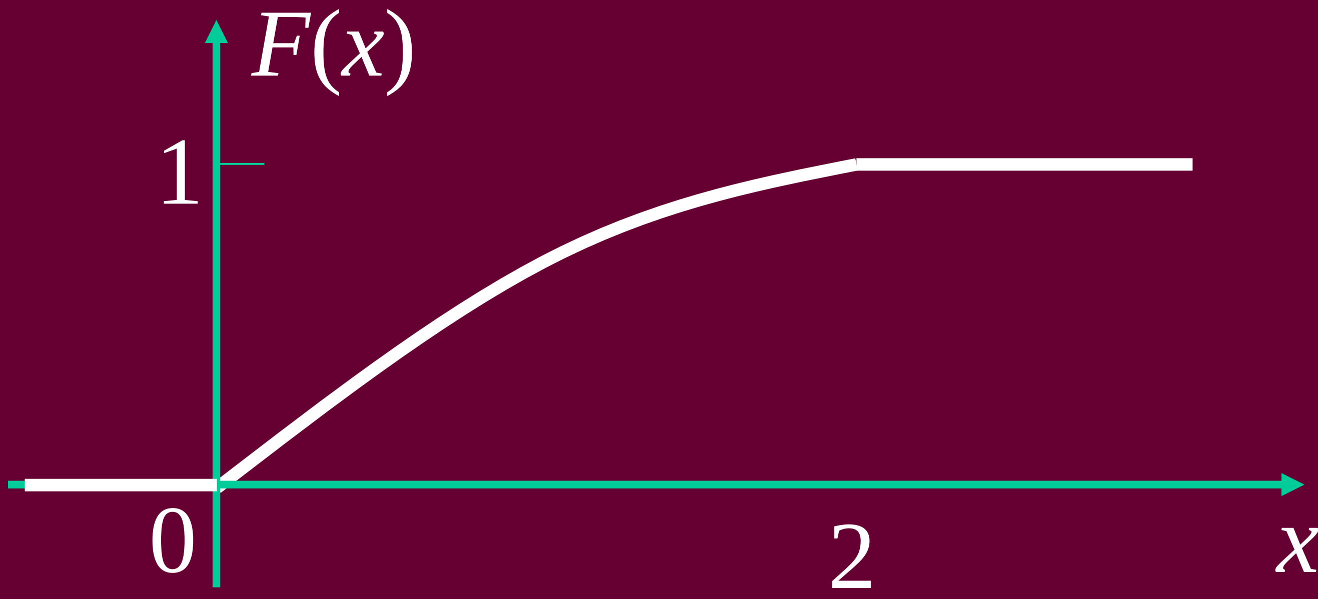
$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{2}\left(-\frac{t}{2}+1\right)dt+\int_{2}^{x}0dt$$

$$=-\frac{t^2}{4}\Big|_0^2+t\Big|_0^2=-1+2=1$$

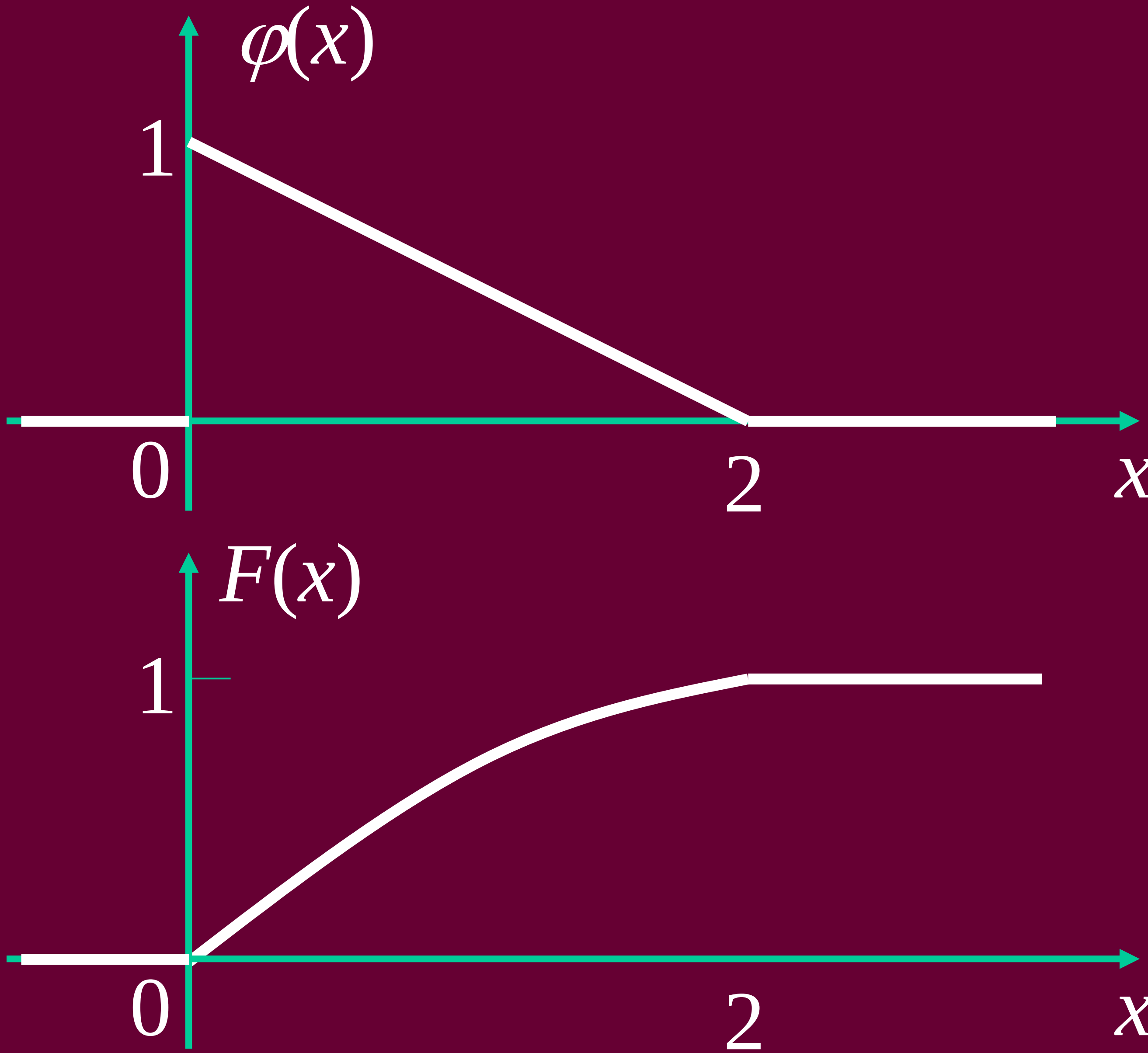


综合前面最后得

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ -\dfrac{1}{4}x^2+x & 0\le x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$$



将概率密度函数$\varphi(x)$与分布函数$F(x)$对照



现根据概率密度函数和分布函数分别计算概率$P\{1.5<\xi<2.5\}$

根据分布函数计算:

$$P\{1.5<\xi<2.5\}=P\{1.5<\xi\le 2.5\}-P(\xi=2.5)$$

$$=F(2.5)-F(1.5)-0$$

$$=1-[-(1.5^2/4)+1.5]=1-0.9375=0.0625$$

根据概率密度函数进行计算则是

$$P\{1.5<\xi<2.5\}=\int_{1.5}^{2.5}\phi(x)dx=\int_{1.5}^{2}(-\frac{x}{2}+1)dx+\int_{2}^{2.5}0dx$$

$$=-\frac{x^2}{4}\Big|_{1.5}^{2}+x\Big|_{1.5}^{2}= =-1+0.5625+0.5=0.0625$$

用两种方法计算$P\{1.5<\xi<2.5\}$的示意图