第四章 几种重要的分布

§1 重要的离散型分布

(一)0-1分布

ξ	0	1
P	$1-p$	p

$$E\xi = p \qquad D\xi = p(1-p)$$

(二)离散型均匀分布

ξ	1	2	…	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

$$E\xi = 1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+\dots+n\times\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$E\xi^2 = 1^2\times\frac{1}{n}+2^2\times\frac{1}{n}+\dots+n^2\times\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\times\frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$D\xi = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

(三)几何分布

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p \qquad k = 1,2,\dots$$

$$E\xi = \frac{1}{p} \qquad\qquad D\xi = \frac{1-p}{p^2}$$

(四)二项分布

做n重贝努里试验，以ξ表示某事件A发生的次数，则

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k=0,1,\ldots,n$$

其中0<p<1,q=1-p

称ξ服从参数为n, p的二项分布。

简记为$\xi \sim B(n,p)$

由二项展开公式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1$$

例1 某工厂每天用水量保持正常的概率为$\frac{3}{4}$，求最近6天内用水量正常的天数的分布。

解：设最近6天内用水量保持正常的天数为ξ

它服从二项分布，其中n＝6，$p=0.75$

$$P(\xi=0)=\left(\frac{1}{4}\right)^{6}=0.0002$$

$$P(\xi=1)=C_6^1\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{5}=0.0044$$

……

$$P(\xi = 6) = \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0.1780$$

列成分布表为

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	0.0002	0.0044	0.0330	0.1318	0.2966	0.3560	0.1780

例2 10部机器各自独立地工作，因修理调整等原因，每部机器停车的概率为0.2，求同时停车数目ξ的分布。

解：ξ服从二项分布

$n=10 \quad p=0.2$

$$P(\xi=k)=C_{10}^{k}0.2^{k}0.8^{10-k} \qquad k=0,1,\ldots,10$$

将计算结果列成分布表

ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0.11	0.27	0.30	0.20	0.09	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

- 例3 一批产品的废品率p=0.03，进行20次重复抽样，每次抽取一个, 求出现废品的频率为0.1的概率。

解：ξ表示20次重复抽样中废品出现的次数，

ξ服从二项分布

n=20 p=0.03

$$P(\xi=k)=C_{20}^{k}(0.03)^{k}0.97^{20-k}$$

$$P\left(\frac{\xi}{20}=0.1\right)=P(\xi=2)$$

$$=C_{20}^{2}(0.03)^{2}0.97^{18}$$

=0.0988

直接计算二项分布的期望与方差较麻烦。

若ξ服从二项分布

则 $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$

其中ξ_1，. . . . , ξ_n相互独立，且服从同一0−1分布

即

ξ_i	0	1
P	$1-p$	p

因$E\xi_i = p$ $\quad D\xi_i = pq \quad q = 1-p$

$$E\xi = E\xi_1 + \ldots + E\xi_n = np$$

$$D\xi = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n = npq$$

$$\sqrt{D\xi} = \sqrt{npq}$$

二项分布中使概率P(ξ=k)取最大值的k，

称为二项分布的最可能值，记为k_0

若$P(\xi=k_0)$为最大，则

$$P(\xi=k_0)\ge P(\xi=k_0-1) \qquad (1)$$

$$P(\xi=k_0)\ge P(\xi=k_0+1) \qquad (2)$$

由(1)式

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!}p^{k_0}q^{n-k_0}\ge\frac{n!}{(k_0-1)!(n-k_0+1)!}p^{k_0-1}q^{n-k_0+1}$$

化简得 $(n-k_0+1)p\ge k_0q$

$$k_0\le(n+1)p$$

由(2)式

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!}p^{k_0}q^{n-k_0} \geq \frac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!}p^{k_0+1}q^{n-k_0-1}$$

化简得 $(k_0+1)q \geq (n-k_0)p$

$$k_0 \geq (n+1)p-1$$

所以 $(n+1)p-1 \leq k_0 \leq (n+1)p$

即

$$k_0 = \begin{cases} (n+1)p\text{或}(n+1)p-1 & \text{当}(n+1)p\text{是整数时} \\ [(n+1)p] & \text{其它} \end{cases}$$

其中[(n+1)p]表示(n+1)p的整数部分。

例4 某批产品80％的一等品，对它们进行重复抽样检验，共取出4个样品，求其中一等品数ξ的最可能值k_0, 并用贝努里公式验证。

解：ξ服从二项分布，n=4, p=0. 8

$$(n+1)p=(4+1)\times 0.8 \quad =4$$

k_0=4或3

用贝努里公式算出ξ的分布表

ξ	0	1	2	3	4
P	0.0016	0.0256	0.1536	0.4096	0.4096

$\xi=3$或$\xi=4$时，概率最大。

将不等式

$$(n+1)p-1 \le k_0 \le (n+1)p$$

改写为

$$p+\frac{p-1}{n} \le \frac{k_0}{n} \le p+\frac{p}{n}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p & p & p \end{array}$$

n充分大时，$\frac{k_0}{n} \approx p$

频率为概率的可能性最大

(五)超几何分布

- 例5 袋中有20个小球，其中5个白球,15个黑球，任取4球，求取到的白球数ξ的分布。

解：ξ可取0，1，2，3，4等5个值。

$$P(\xi = k) = \frac{C_5^k C_{15}^{4-k}}{C_{20}^4}$$

k=0,1,2,3,4

经计算列出概率分布表。

ξ	0	1	2	3	4
P	0.2817	0.4696	0.2167	0.0310	0.0010

例6 一批灯泡有8只，其中6只是合格的，任取4只，求取到的合格灯泡数ξ的分布。

解：ξ的取值不能为0与1

$$P(\xi=2)=\frac{C_6^2C_2^2}{C_8^4}=\frac{15}{70}\approx 0.2143$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_6^3C_2^1}{C_8^4}=\frac{40}{70}\approx 0.5714$$

$$P(\xi=4)=\frac{C_6^4}{C_8^4}=\frac{15}{70}\approx 0.2143$$

即

ξ	2	3	4
P	0.2143	0.5714	0.2143

设N个元素分为两类，有N_1个属于第一类，N_2个属于第二类($N_1+N_2=N$)。从中不重复抽取n个，用ξ表示取到第一(第二)类元素的个数，则

$$P(\xi=k)=\frac{C_{N_1}^{k}C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n} \qquad k=0,1,\ldots,n$$

约定当$m>n$时 $\quad C_n^m=0$

称ξ服从超几何分布。

利用组合数的性质

$$\sum_{k=0}^{n}C_{N_1}^{k}C_{N_2}^{n-k}=C_{N_1+N_2}^{n}$$

可以验证 $\quad \sum_{k=0}^{n}P(\xi=k)=1$

当$N \to \infty$时，超几何分布以二项分布为极限。

其中 $$p = \frac{N_1}{N}$$

- 例7 一大批种子的发芽率为90％，从中任取10粒，求播种后，(1)恰有8粒发芽的概率(2)不少于8粒发芽的概率

解：ξ表示10粒种子中发芽的种子数目。

ξ服从超几何分布

N很大，n很小，可用二项分布近似计算。

n＝10 p=0.9 q=0.1

$$(1)P(\xi=8)=C_{10}^{8}0.9^{8}0.1^{2}\approx 0.1937$$

$$(2)P(\xi\geq 8)=C_{10}^{8}0.9^{8}0.1^{2}+C_{10}^{9}0.9^{9}0.1+0.9^{10}$$

$$\approx 0.9298$$

(六)Poisson分布

如果随机变量ξ的概率函数为

$$P_\lambda(k) = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

其中$\lambda > 0$，称ξ服从Poisson分布。

利用级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$，易知$\sum_{k=0}^{\infty}P_\lambda(k) = 1$

Poisson分布常见于稠密性问题，如：

候车室旅客数目，

原子放射粒数

织机上的断头数

印刷错误。

$$E\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

记k-1=m,则

$$E\xi=\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda}=\lambda$$

$$E\xi^{2}=\sum_{k=0}^{\infty}k^{2}\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda}+\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda}=\lambda^{2}+\lambda$$

故 $D\xi=\lambda$

例8 已知ξ服从Poisson分布, 且$P(\xi=1)=P(\xi=2)$, 求$P(\xi=4)$

解: 需要确定参数λ

$$P(\xi=1)=P(\xi=2)$$

即 $$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$$

由于$\lambda>0$, 可求出$\lambda=2$

故 $$P(\xi=4)=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=\frac{2}{3}e^{-2}$$

$$\approx 0.090224$$

实际计算时，可查Poisson分布表。

- 例9 ξ服从参数λ＝0.5的Poisson分布， 查表求出 $p(\xi=2), P(\xi=6), P(\xi=30)$

  解： 直接查表可得

  $$P(\xi=2)=0.075816, P(\xi=6)=0.000013$$

  $$P(\xi=30)=0$$

- 例10 ξ服从Poisson分布， Eξ＝5， 查表求$P(\xi=3)$ $P(\xi=5)$

  解： 因λ＝$E\xi=5$,查表得

  $$P(\xi=3)=0.140374$$

  $$P(\xi=5)=0.175467$$

通常在n比较大，p很小时，可以用Poisson分布近似代替二项分布，其中$\lambda = np$

- 例12 一大批产品的废品率为p=0.015,求任取一箱(有100个产品)，箱中恰好有一个废品的概率。

解：所取一箱中废品个数ξ服从超几何分布，

产品数量很大，可用二项分布计算，$n = 100$，

$$P(\xi = 1) = C_{100}^{1} 0.015 \times 0.985^{99} \approx 0.335953$$

由于n较大，p很小，可用Poisson分布代替二项分布。

$\lambda = np = 1.5$,查表可得

$P(\xi = 1) = 0.334695$ 误差不超过1%

§2 重要的连续型分布

(一)连续型均匀分布

$$\xi \sim \varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{当}a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$E\xi=\frac{a+b}{2} \qquad D\xi=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

(二)指数分布

$$\xi \sim \varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{当}x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中$\lambda>0$,称ξ服从参数为λ的指数分布。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1$$

指数分布常用来作为各种“寿命”分布的近似。

如：随机服务系统中的服务时间。

产品的寿命

λ有时称为失效率。

产品在t时间(t>0)失效的概率为

$$P(\xi \le t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

而产品的可靠度为

$$R(t) = P(\xi > t)$$

$$= 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

- 例1　某元件寿命服从参数为λ($\lambda^{-1}=1000$小时)的指数分布。3个这样的元件使用1000小时后，都没有损坏的概率是多少？

解：参数为λ的指数分布的分布函数为

$$F(x)=1-e^{-\frac{x}{1000}} \qquad (x>0)$$

$$P(\xi>1000)=1-P(\xi\le 1000)$$

$$=1-F(1000)=e^{-1}$$

各元件寿命相互独立

3个元件使用1000小时后都未损坏的概率为
$e^{-3}\approx 0.05$

(三)Γ一分布

关于Γ函数的复习：　　$r>0$时

$$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx$$

它有性质：

$$\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$$

特别地

$$\Gamma(n+1)=n!\Gamma(1)\quad=n!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

$$\xi \sim \varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

其中$\lambda>0, r>0$

称ξ服从Γ一分布，记作$\xi \sim \Gamma(\lambda, r)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$\overset{\lambda x = t}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} t^{r-1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \Gamma(r) = 1$$

因此，λ，r是两个参数

$$E\xi = \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$\overset{\lambda x = t}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{\lambda \Gamma(r)} \int_0^{+\infty} t^r e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda \Gamma(r)} \Gamma(r+1) \quad = \frac{r}{\lambda}$$

$$E\xi^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$\overset{\lambda x = t}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(r)} \int_0^{+\infty} t^{r+1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(r)} \Gamma(r+2) \quad = \frac{(r+1)r}{\lambda^2}$$

$$D\xi = \frac{(r+1)r}{\lambda^2} - \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 = \frac{r}{\lambda^2}$$

Γ一分布在概率论、数理统计等方面有很多应用。

当r=1时，

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

即为指数分布。

当r为正整数时，

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{r}}{(r-1)!}x^{r-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

这是排队论中常用的爱尔朗分布

当$r=\frac{n}{2}$, n是正整数，$\lambda=\frac{1}{2}$时

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

这是具有n个自由度的χ^2一分布，记作$\chi^2(n)$

- 定理1 如果ξ_1，. . . ，ξ_n相互独立，且ξ_i服从参数为λ，r_i的Γ一分布（i=1, . . . , n），则$\xi_1+\ldots+\xi_n$服从参数为λ，$r_1+\ldots+r_n$的Γ一分布。

推论1 若$\xi_1\sim\chi^2(n_1),\xi_2\sim\chi^2(n_2),\xi_1$与$\xi_2$相互独立，则$\xi_1+\xi_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

(四)正态分布

$$\xi \sim \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中σ，μ为常数，且$\sigma>0$

称ξ服从正态分布，记作$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$

这是最重要、最常见的分布。

许多微小的，独立的随机因素作用的总后果，一般可以认为服从正态分布。

例如人的身高、零件长度，考试成绩等。

特点为“中间大，两头小”。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = t$$

$$=\!=\!= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = t$$

$$=\!=\!= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sqrt{2}\sigma t) e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} + 0 \ = \mu$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 \varphi(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = t$$

$$\overline{\overline{\qquad\qquad}} \quad \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \times 2\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \quad = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \sigma^2$$

当$\mu=0$，$\sigma=1$时

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \varphi_0(x)$$

称为标准正态分布，记作$\xi \sim N(0,1)$

$\varphi_0(x)$除具有概率密度的性质之外，还有如下性质：

(1)$\varphi_0(x)$具有各阶导数

(2)$\varphi_0(-x)=\varphi_0(x)$

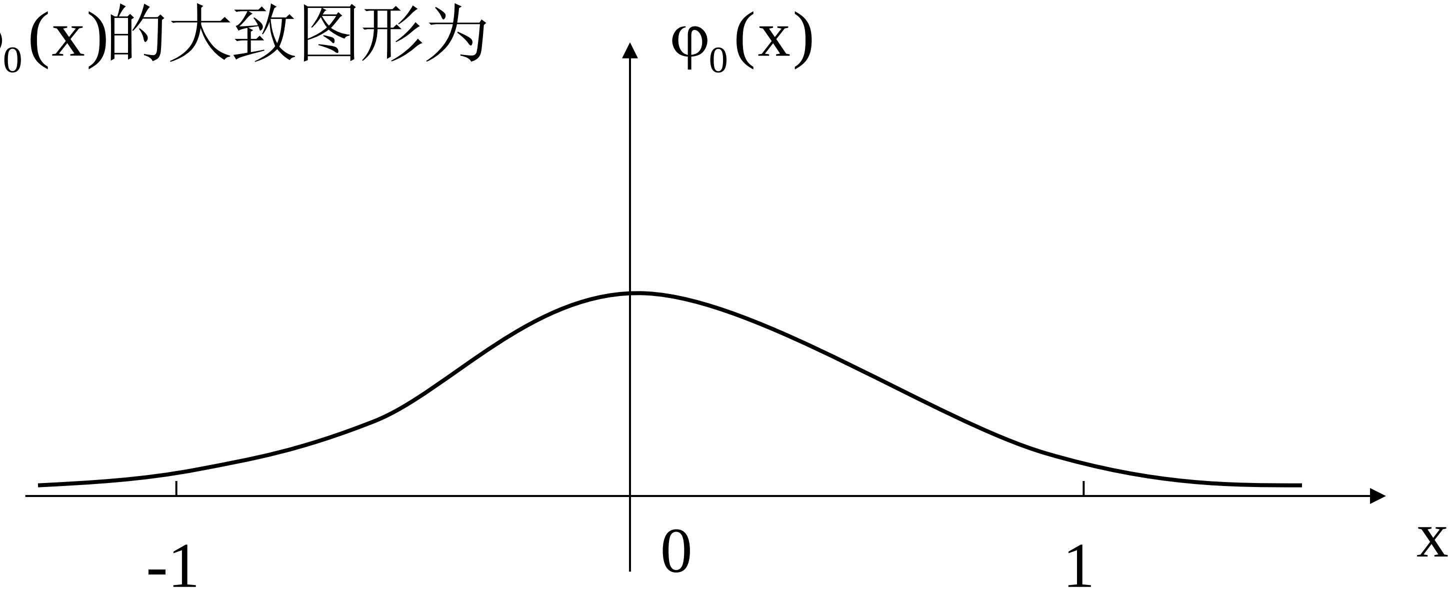
(3) $\varphi_0(x)$ 在x=0左右分别单调上升和单调下降

在$x=0$达到最大值：$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0.3989$

(4) $\varphi_0(x)$ 在$x=\pm 1$处有两个拐点。

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi_0(x)=0$

$\varphi_0(x)$的大致图形为



对于任给的x值，

可以利用标准正态分布的概率密度函数表查出$\varphi_0(x)$的值。

样表如下：

x	0.00	0.03	0.04	0.05	0.08	0.09
0.0	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3956	0.3951	0.3945	0.3925	0.3918
...						
1.5	0.1295	0.1238	0.1219	0.1200	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1057	0.1040	0.1023	0.09728	0.09566
...						
3.0	$0.0^{2}4432$	$0.0^{2}4049$	$0.0^{2}3928$	$0.0^{2}3810$	$0.0^{2}3475$	$0.0^{2}3370$
3.1	$0.0^{2}3267$	$0.0^{2}2975$	$0.0^{2}2884$	$0.0^{2}2794$	$0.0^{2}2541$	$0.0^{2}2461$
...						
4.9	$0.0^{5}2439$	$0.0^{5}2105$	$0.0^{5}2003$	$0.0^{5}1907$	$0.0^{5}1643$	$0.0^{5}1563$

- 例2 已知$\xi \sim N(0,1)$,查表求出$\varphi_0(1.63)$

$\varphi_0(0.18), \varphi_0(-3), \varphi_0(7), \varphi_0(0)$

解：$\varphi_0(1.63) = 0.1057$　　$\varphi_0(0.18) = 0.3925$

$\varphi_0(-3) = \varphi_0(3) = 0.004432$

$\varphi_0(7) = 0$　　$\varphi_0(0) = 0.3989$

标准正态分布的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

一般记为$\Phi_0(x)$

其函数值也要通过标准正态分布的分布函数表查出。样表如下：

例3 已知$\xi \sim N(0,1)$，求$P(\xi \le 1.96), P(\xi \le -1.96)$, $P(|\xi| \le 1.96), P(-1.6 < \xi \le 2.5), P(\xi \le 5.9)$

解： $P(\xi \le 1.96) = \Phi_0(1.96) = 0.975$

$$P(\xi \le -1.96) = \Phi_0(-1.96)$$

$$= 1 - \Phi_0(1.96) = 0.025$$

$$P(|\xi| \le 1.96) = P(-1.96 \le \xi \le 1.96)$$

$$= \Phi_0(1.96) - \Phi_0(-1.96)$$

$$= 2\Phi_0(1.96) - 1 = 0.95$$

$$P(-1.6 < \xi \le 2.5) = \Phi_0(2.5) - \Phi_0(-1.6)$$

$$= \Phi_0(2.5) - (1 - \Phi_0(1.6))$$

$$= 0.99379 - (1 - 0.94520) = 0.93899$$

$$P(\xi \le 5.9) = \Phi_0(5.9) \approx 1$$

概括起来，如果$\xi \sim N(0,1)$,则

$$P(\xi \le x) = \begin{cases} \Phi_0(x) & x > 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1 - \Phi_0(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$P(|\xi| \le x) = 2\Phi_0(x) - 1 \qquad (x > 0)$$

$$P(a < \xi \le b) = \Phi_0(b) - \Phi_0(a)$$

当$x \ge 5$时，$\Phi_0(x) \approx 1$

当$x \le -5$时，$\Phi_0(x) \approx 0$

定理2 若$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$,则$a\xi+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$, $(a \neq 0)$

证：记η＝aξ+b, 可以求出

$$\varphi_\eta(x) = \frac{1}{|a|}\varphi_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{x-b}{a}-\mu\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-\frac{1}{2a^2\sigma^2}[x-(a\mu+b)]^2}$$

故η是参数为aμ+b, $a^2\sigma^2$的正态分布

推论2 若$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$,则$\frac{\xi-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

证：在定理中取$a=\frac{1}{\sigma}, b=-\frac{\mu}{\sigma}$即可。

- 定理3 若$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$,则

$$(1)\Phi(x)=\Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$(2)\varphi(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

证： (1) $\Phi(x)=P(\xi\le x)$

$$=P\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

(2) 在(1)两边对x求导即得。

这样可利用标准正态分布计算一般正态分布。

例4 设$\xi \sim N(6, 2^2)$，求$P(\xi \le 10)$及$P(4 \le \xi \le 8)$

解：$P(\xi \le 10) = P\left(\frac{\xi - 6}{2} \le \frac{10-6}{2}\right)$

$$= P\left(\frac{\xi - 6}{2} \le 2\right)$$

$$= \Phi_0(2) = 0.97725$$

$$P(4 \le \xi \le 8) = P(|\xi - 6| \le 2)$$

$$= P\left(\left|\frac{\xi - 6}{2}\right| \le 1\right)$$

$$= 2\Phi_0(1) - 1$$

$$= 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826$$

例5 设$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, $P(\xi \le -5) = 0.045$,

$P(\xi \le 3) = 0.618$, 求μ及σ

解：$P(\xi \le -5) = P\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma} \le \frac{-5-\mu}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{-5-\mu}{\sigma}\right) = 0.045$

$$\Phi_0\left(\frac{5+\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi_0\left(\frac{-5-\mu}{\sigma}\right) = 0.955$$

$$P(\xi \le 3) = P\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma} \le \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0.618$$

查表可得$\begin{cases} \dfrac{5+\mu}{\sigma} = 1.7 \\ \dfrac{3-\mu}{\sigma} = 0.3 \end{cases}$ 求解得 $\mu = 1.8$, $\sigma = 4$

定理4 若$\xi \sim N(0,1)$,则$\xi^2 \sim \chi^2(1)$

证：$\varphi_\xi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\eta = \xi^2$,已求出，x>0时

$$\varphi_\eta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\varphi_\xi\left(\sqrt{x}\right) + \varphi_\xi\left(-\sqrt{x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} \qquad = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

$x < 0$时， $\varphi_\eta(x) = 0$

故$\eta = \xi^2$服从$r = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$的$\Gamma$分布

即 $\xi^2 \sim \chi^2(1)$

- 定理5 若$\xi_1, \ldots,$ ξ_n相互独立，且$\xi_i \sim N(0,1),$ $(i = 1, \ldots, n),$则$\xi_1^{\ 2} + \ldots + \xi_n^{\ 2} \sim \chi^2(n)$

证： 由定理4，可知

$$\xi_i^{\ 2} \sim \chi^2(1) \qquad i = 1, \ldots, n$$

再由推论1

$$\xi_1^{\ 2} + \ldots + \xi_n^{\ 2} \sim \chi^2(n)$$