《线性代数》

课时一 行列式（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 逆序数	★★★	0～3	选择/填空
2. 行列式性质与计算	必考	6～15	大题

1. 逆序数

题 1: 排列 5 2 6 1 4 5 的逆序数为______，是______（奇/偶）排列。

解：逆序 0 1 0 3 2 1 逆序数 0+1+0+3+2+1=7，为奇排列

题 2: 在四阶行列式中，项 $a_{11}a_{23}a_{44}a_{32}$ 的符号应取_______。

解：行排列 1 2 4 3 逆序数 $t_1=0+0+0+1=1$

列排列 1 3 4 2 逆序数 $t_2=0+0+0+2=2$

$t=1+2=3$，符号为负。

2. 行列式的性质与计算

①互换行（列），变号

$$\begin{vmatrix}3&1&4\\2&-1&-2\\1&0&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&-1&-2\\3&1&4\\1&0&2\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}3&1&4\\2&-1&-2\\1&0&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&4&1\\2&-2&-1\\1&2&0\end{vmatrix}$$

②提公因子

$$\begin{vmatrix}3&-6&4\\2&6&-2\\1&0&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&-6&4\\1&3&-1\\1&0&2\end{vmatrix}=2\times3\begin{vmatrix}3&-2&4\\1&1&-1\\1&0&2\end{vmatrix}$$

③倍加

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\overset{r_2+3r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+3a_{11}&a_{22}+3a_{12}&a_{23}+3a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\overset{c_2+2c_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}+2a_{13}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}+2a_{23}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}+2a_{33}&a_{33}\end{vmatrix}$$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

④拆分

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+d_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+d_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

⑤对应成比例值为零

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

题 1：行列式 $\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = 0$，则 $k =$________。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

解：$(1-k)(k-1)-(-2)\times 2 = 0$　得 $k=-1$ 或 3

题 2：计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$。

上三角行列式公式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

解：$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_2-2r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2-2\times1 & 1-2\times(-1) & 0-2\times0 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_3-3r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3-3\times1 & 7-3\times(-1) & 2-3\times0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3-2r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0-0 & 10-2\times5 & 2-2\times2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\times5\times(-2) = -10$$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

题 3：计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&1&1&3\\1&-1&0&2\\1&-2&3&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}$。

解：$D=\begin{vmatrix}0&1&1&3\\1&-1&0&2\\1&-2&3&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&1&1&3\\1&-2&3&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3-r_1}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&1&1&3\\0&-1&3&-2\\0&3&1&-4\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3+r_2}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&1&1&3\\0&0&4&1\\0&0&-2&-13\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&1&1&3\\0&0&-2&-13\\0&0&4&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+2r_3}\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&1&1&3\\0&0&-2&-13\\0&0&0&-25\end{vmatrix}=50$$

题 4： $D=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}$。

解：$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}8&8&8&8\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=8\times4^3=512$

题 5：简型 $D=\begin{vmatrix}1&4&6&9\\4&1&0&0\\6&0&2&0\\9&0&0&3\end{vmatrix}$。

解：$D=\begin{vmatrix}1&4&6&9\\4&1&0&0\\6&0&2&0\\9&0&0&3\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-4c_2}\begin{vmatrix}-15&4&6&9\\0&1&0&0\\6&0&2&0\\9&0&0&3\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-3c_3}\begin{vmatrix}-33&4&6&9\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\9&0&0&3\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-3c_4}\begin{vmatrix}-60&4&6&9\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-360$

哔哩哔哩 扫一扫 2小时速成课程

课时一 练习题

1. 排列2 1 7 9 8的逆序数为_____。

2. 五阶行列式D中$a_{12}a_{25}a_{34}a_{41}a_{53}$的符号是_____。

3. 设A为三阶矩阵，且$\det(A)=-2$，若将A按列分块$A=(A_1,A_2,A_3)$，其中A的第j列$(j=1,2,3)$，求$\left|A_3-2A_1,3A_2,A_1\right|$。

4. 计算下列行列式的值。

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ （2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}$ （3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ （4）$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

注：练习题答案在文档最后

哔哩哔哩 扫一扫 2小时速成课程

课时二 行列式（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 行列式展开	★★★★★	4～6	填空/大题
2. 范德蒙行列式	★★★	0～6	大题

1. 行列式展开

余子式 M_{ij}：去掉 a_{ij} 所在的行与列

代数余子式：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

题 1：$D=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&1&7\\3&2&1\end{vmatrix}$，求 M_{12}，M_{23}，A_{12}，A_{23}。

解：$M_{12}=\begin{vmatrix}1&7\\3&1\end{vmatrix}=1\times1-7\times3=-20$，　　$M_{23}=\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}=2\times2-3\times3=-5$

$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=20$，　　$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=5$

题 2：用行列式展开计算 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&3&2\end{vmatrix}$。

解：按第一行展开：

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&3&2\end{vmatrix}=1A_{11}+2A_{12}+3A_{13}=1\times(-1)^{1+1}M_{11}+2\times(-1)^{1+2}M_{12}+3\times(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$=M_{11}-2M_{12}+3M_{13}=\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=-1-6+15=8$$

按第二列展开：

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&3&2\end{vmatrix}=2A_{12}+A_{22}+3A_{32}=8$$

题 3：$D=\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\0&1&2&4\\2&-4&6&-8\\1&3&5&7\end{vmatrix}$，求：①$2A_{11}-4A_{12}+6A_{13}-8A_{14}$，②$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$，③$M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}$。

哔哩哔哩 扫一扫 2小时速成课程

解：①$2A_{11}-4A_{12}+6A_{13}-8A_{14}=0$

②$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=1\times A_{11}+1\times A_{12}+1\times A_{13}+1\times A_{14}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&4\\2&-4&6&-8\\1&3&5&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_3-2r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&4\\0&-6&4&-10\\0&2&4&6\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_2]{r_3+6r_2}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&4\\0&0&16&14\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-32$$

③$M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&2&4\\2&-4&6&-8\\1&3&5&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_3-2r_1}\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&2&4\\0&-2&4&-6\\0&4&4&8\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-4r_2]{r_3+2r_2}\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&2&4\\0&0&8&2\\0&0&-4&-8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&2&4\\0&0&-4&-8\\0&0&8&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+2r_3}-\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&2&4\\0&0&-4&-8\\0&0&0&-14\end{vmatrix}=-56$$

2. 范德蒙行列式

题 1. 求 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$ 的值。

解：$D=(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$

题 2. 求 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&4&5\\1&9&16&25\\1&27&64&125\end{vmatrix}$。

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&4&5\\1&9&16&25\\1&27&64&125\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&4&5\\1&3^2&4^2&5^2\\1&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}=(5-4)(5-3)(5-1)(4-3)(4-1)(3-1)=48$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时二 练习题

1. 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，已知 $A_{21}=-2$，$A_{22}=3$，$A_{23}=x$，$A_{24}=2$，$A_{25}=-1$，试求常数 x 和行列式 D。

2. 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$________，$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=$________。

3. 求 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$。

哔哩哔哩 扫一扫 2小时速成课程

课时三 矩阵

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 矩阵的运算	★★★	3~8	填空/大题
2. 常见矩阵	★★★	6~8	选择/填空/大题
3. 方阵的行列式计算	必考	3~5	选择/填空

1. 矩阵的运算

	行列式	矩阵
形式	$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&5&4\\2&3&5\end{vmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&5&4\\2&3&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\7&9&6\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&5\\6&4\\5&3\end{pmatrix}$
区别	1）行列式是数值，矩阵是数表 2）行列式是 $n\times n$ 阶，矩阵是 $m\times n$ 阶（m，n 可等，可不等） 3）$\lambda\lvert A\rvert$ 是将行列式某行（列）乘以 λ；而 λA 是矩阵每个元素都乘以 λ 4）矩阵如果是方阵（$m=n$），才有行列式值 5）行列式加减是数值运算；矩阵加减只能是同型矩阵，对应元素加减	

题 1：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-3&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 $A+B$，$2A$。

解：$$A+B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-3&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&2+1&3+0\\1+0&1-3&1+2\\1+0&1+0&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&3\\1&-2&3\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$2A=2\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1&2\times2&2\times3\\2\times1&2\times1&2\times1\\2\times1&2\times1&2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

题 2：$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\-1&1\end{pmatrix}$，求 AB，BA。

前行乘后列：

$A_{m\times n}\cdot B_{n\times s}=C_{m\times s}$

解：$$AB=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+(-1)\times1+0\times(-1)&1\times3+(-1)\times(-2)+0\times1\\0\times2+2\times1+0\times(-1)&0\times3+2\times(-2)+0\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\2&-4\end{pmatrix}$$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

$$BA=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+3\times0&2\times(-1)+3\times2&2\times0+3\times0\\1\times1+(-2)\times0&1\times(-1)+(-2)\times2&1\times0+(-2)\times0\\(-1)\times1+1\times0&(-1)\times(-1)+1\times2&(-1)\times0+1\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&0\\1&-5&0\\-1&3&0\end{pmatrix}$$

$AB\neq BA\Rightarrow(A\pm B)^2\neq A^2+B^2\pm2AB$，$A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$

题 3： $\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}\right)^n$。

解：原式 $=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\times1\times\cdots\times1\times\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\-6&-3&-3\\4&2&2\end{pmatrix}$$

2. 转置矩阵、伴随矩阵、单位矩阵、逆矩阵

1）转置矩阵：A^T　　若 $A=\begin{pmatrix}2&4&0\\1&-5&0\\-1&3&0\end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&-5&3\\0&0&0\end{pmatrix}$　　行变列，列变行

2）伴随矩阵：$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$

3）单位矩阵：E

$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$|E|=1$ 且 $AE=EA=A$

4）逆矩阵：A^{-1}　　若 $AB=BA=E$，则称 B 为 A 的逆矩阵，记 $B=A^{-1}$；即 $AA^{-1}=E$。

公式：$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，A 可逆 $\Leftrightarrow|A|\neq0$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

题 1：设方阵 A 满足 $A^2+5A+7E=0$，求出 $(A+3E)^{-1}$。

解：$A^2+5A+6E=-E \quad \Rightarrow (A+3E)(A+2E)=-E$

$\Rightarrow (A+3E)(-A-2E)=E \quad \Rightarrow (A+3E)^{-1}=-A-2E$

3. 方阵的行列式计算

1. 转置矩阵：A^{T}

①$(AB)^T=B^TA^T$　②$(A^T)^T=A$　③$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$　④$(\lambda A)^T=\lambda A^T$

2. 伴随矩阵：A^*

①$(AB)^*=B^*A^*$　②$|A^*|=|A|^{n-1}$　③$A^*=|A|A^{-1}$（若 A 可逆）　④$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

3. 可逆矩阵：A^{-1}

①$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　②$(A^{-1})^{-1}=A$　③$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$　④$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$

4. 矩阵的行列式计算

①$|kA|=k^n|A|$　②$|AB|=|A||B|$　③$|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$　④$|A^{\mathrm{T}}|=|A|$

题 1：设 A 为三阶方阵，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $|-2A|=$______，$|(2A)^{-1}|=$______，$|A^*|=$______。

解：$|-2A|=(-2)^3|A|=-8\cdot\dfrac{1}{2}=-4$

$$|(2A)^{-1}|=\left|\frac{1}{2}A^{-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{|A|}=\frac{1}{4}$$

$$|A^*|=|A|^{3-1}=|A|^2=\frac{1}{4}$$

题 2：设 A，B 为三阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|2A^*B^{-1}|=$______。

解：$|2A^*B^{-1}|=2^3|A^*B^{-1}|=2^3|A^*||B^{-1}|=2^3|A|^{3-1}\cdot\dfrac{1}{|B|}=8\cdot2^2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{32}{3}$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

题 3. 设 A 为三阶方阵，且 $|A|=-2$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $\left|4A^{-1}+A^*\right|=$_______。

解：$\left|4A^{-1}+A^*\right|=\left|4A^{-1}+|A|A^{-1}\right|=\left|4A^{-1}-2A^{-1}\right|=\left|2A^{-1}\right|=2^3\left|A^{-1}\right|=2^3\cdot\dfrac{1}{|A|}=2^3\cdot\dfrac{1}{-2}=-4$

课时三　练习题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$，则 $(A-2B)^T=$_______，$AB^T=$_______，$BA=$_______。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&3&0\\0&1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 $AB-BA$。

3. 设 A，B 为 n 阶方阵，$|A|=2$，$|B|=3$，则 $\left|\dfrac{1}{2}A^*B^{-1}\right|=$_______。

4. 设 A 为三阶方阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，求 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$_______。

5. 设 A 为二阶方阵，B 为三阶方阵，$|A|=\dfrac{1}{|B|}=\dfrac{1}{2}$，则 $\begin{vmatrix}B&0\\0&(2A)^{-1}\end{vmatrix}=$_______。

6. 已知 A 为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位阵，且 $A^2+A-3E=0$，证明 $A-E$ 可逆，并求 $(A-E)^{-1}$。

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时四 初等行变换

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 初等行变换	必考	基础知识	大题
2. 求逆矩阵		6～10	
3. 矩阵的秩	★★★	3～6	选择/填空

1. 初等行变换

题 1：用初等行变换将矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&4&-12&2\\3&-1&-6&-2\\-1&-1&6&2\\2&-2&0&0\end{pmatrix}$ 化成阶梯形和最简形。

解：

$$A=\begin{pmatrix}0&4&-12&2\\3&-1&-6&-2\\-1&-1&6&2\\2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}-1&-1&6&2\\3&-1&-6&-2\\0&4&-12&2\\2&-2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_1}\begin{pmatrix}1&1&-6&-2\\3&-1&-6&-2\\0&4&-12&2\\2&-2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&-6&-2\\0&-4&12&4\\0&4&-12&2\\0&-4&12&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&-6&-2\\0&-4&12&4\\0&0&0&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div 6]{r_2\div(-4)}\begin{pmatrix}1&1&-6&-2\\0&1&-3&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-3&-1\\0&1&-3&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&-3&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

阶梯形

①若有全零行，则全零行位于最下方

②每个阶梯首项为主元，主元依次往右

③阶梯形不唯一

最简形

①主元为 1

②主元所在列的其他元素都为 0

③最简形是唯一

2. 求逆矩阵

题 1：若 $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}。

解：$A^{-1}=\dfrac{1}{2\times3-5\times1}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 主对调，次反号，除以值

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

题 2：$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&3\\2&3&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，(1)若矩阵 X 满足 $AX=E$，求 X；(2)若矩阵 Y 满足 $BY=B+2Y$，求 Y。

解：(1) $$(A\vdots E)=\left(\begin{array}{ccccccc}1&2&2&\vdots&1&0&0\\1&0&3&\vdots&0&1&0\\2&3&4&\vdots&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccccccc}1&2&2&\vdots&1&0&0\\0&-2&1&\vdots&-1&1&0\\0&-1&0&\vdots&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccccccc}1&2&2&\vdots&1&0&0\\0&1&0&\vdots&2&0&-1\\0&-2&1&\vdots&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{ccccccc}1&2&2&\vdots&1&0&0\\0&1&0&\vdots&2&0&-1\\0&0&1&\vdots&3&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccccccc}1&0&2&\vdots&-3&0&2\\0&1&0&\vdots&2&0&-1\\0&0&1&\vdots&3&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccccccc}1&0&0&\vdots&-9&-2&6\\0&1&0&\vdots&2&0&-1\\0&0&1&\vdots&3&1&-2\end{array}\right)\to(E\vdots A^{-1})$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}=\begin{pmatrix}-9&-2&6\\2&0&-1\\3&1&-2\end{pmatrix}$$

(2) $BY=B+2Y \quad \Rightarrow BY-2Y=B \quad \Rightarrow (B-2E)Y=B$

$$B-2E=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$(B-2E\vdots B)=\left(\begin{array}{ccccccc}2&2&3&\vdots&4&2&3\\1&-1&0&\vdots&1&1&0\\-1&2&1&\vdots&-1&2&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{ccccccc}1&-1&0&\vdots&1&1&0\\2&2&3&\vdots&4&2&3\\-1&2&1&\vdots&-1&2&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccccccc}1&-1&0&\vdots&1&1&0\\0&4&3&\vdots&2&0&3\\0&1&1&\vdots&0&3&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccccccc}1&-1&0&\vdots&1&1&0\\0&1&1&\vdots&0&3&3\\0&4&3&\vdots&2&0&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-4r_2}\left(\begin{array}{ccccccc}1&-1&0&\vdots&1&1&0\\0&1&1&\vdots&0&3&3\\0&0&-1&\vdots&2&-12&-9\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccccccc}1&0&1&\vdots&1&4&3\\0&1&1&\vdots&0&3&3\\0&0&-1&\vdots&2&-12&-9\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccccccc}1&0&0&\vdots&3&-8&-6\\0&1&0&\vdots&2&-9&-6\\0&0&-1&\vdots&2&-12&-9\end{array}\right)\xrightarrow{-r_3}\left(\begin{array}{ccccccc}1&0&0&\vdots&3&-8&-6\\0&1&0&\vdots&2&-9&-6\\0&0&1&\vdots&-2&12&9\end{array}\right)\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$$

哔哩哔哩 扫一扫 2小时速成课程

3. 矩阵的秩

题 1：用初等变换求下列矩阵的秩：$A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-2&4&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}$。

秩＝主元个数

解：$A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-2&4&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&4&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&6&-4\\0&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-3&3\\0&6&-4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-3&3\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow R(A)=3$

题 2：设 A，B 为三阶方阵，若 A 可逆，$R(B)=2$，$R(AB)=$________。

解：若 A 可逆，不妨取 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow R(AB)=2$

题 3：设 A 是 4 阶方阵，$R(A)=2$，则 $R(A^*)=$______。

解：$R(A)=2<4-1=3\Rightarrow R(A^*)=0$

①若 $R(A)=n$，则 $R(A^*)=n$

②若 $R(A)=n-1$，则 $R(A^*)=1$

③若 $R(A)<n-1$，则 $R(A^*)=0$

矩阵秩的性质

① $0\le R(A_{m\times n})\le\min\{m,n\}$　　②若矩阵 P，Q 可逆，则 $R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)$

③ $\max\{R(A),R(B)\}\le R(A,B)\le R(A)+R(B)$　　④ $R(A+B)\le R(A)+R(B)$

⑤设 A，B 分别是 $m\times n$ 矩阵与 $n\times s$ 矩阵，

则 $R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}$，$R(AB)\ge R(A)+R(B)-n$。

若 $AB=0$，则 $R(A)+R(B)\le n$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时四 练习题

1. 将矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&3&1&-3\\1&2&0&-2\\3&-2&8&3\\2&-3&7&4\end{pmatrix}$ 化为最简形。

2. 若 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$，求 A^{-1}。

3. 若 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&3&0\\0&1&2\end{pmatrix}$，求 A^{-1}。

4. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 且 $AB-E=A+B$，求 B。

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&3\\2&1\end{pmatrix}$，$4X=B+2AX$，求 X。

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&\lambda&-1\\5&6&3&\mu\end{pmatrix}$，已知 $R(A)=2$，求 λ 与 μ 的值。

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时五 向量组

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 向量组 2. 线性相关与线性无关	必考	6～15	大题

1. 向量组

$a=(1,1)^T$ 是二维向量，$b=(1,2,3)^T$ 是三维向量，$c=(1,2,3,4)^T$ 为四维向量

$a_1=(1,0,1)^T$ $a_2=(1,2,0)^T$ $a_3=(0,2,3)^T$ $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\1&0&3\end{pmatrix}$ 是向量组

题 1：$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,2,1)^T$，$\beta=(4,4,3)^T$，用 α_1，α_2，α_3 线性表示 β。

解：设 k_1，k_2，k_3 满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$

$$\Rightarrow k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_3=4\\k_2+2k_3=4\\k_3=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=1\\k_2=-2\\k_3=3\end{cases}\Rightarrow\beta=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$$

2. 线性相关与线性无关

①若存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots k_m$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m=0$，

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关，否则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关。

② $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)<m\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关；

$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)=m\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关。

③极大无关组

例：三维坐标中 $a_1=(1,0,0)^T,a_2=(0,1,0)^T,a_3=(0,0,1)^T$

任给一个三维向量 $a_4=(2,3,6)^T$，$a_4=2a_1+3a_2+6a_3$

向量组 a_1,a_2,a_3 是任意一组三维向量 $a_1,a_2,a_3\cdots a_m$ 的一个极大无关组

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

题 1：已知 $a_1=(1,1,1)^T$，$a_2=(1,0,2)^T$，$a_3=(-1,-4,a)^T$，则 a 为何值时，该向量组 a_1,a_2,a_3 线性相关。

解：$$(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&-4\\1&2&a\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&-3\\0&1&a+1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&-3\\0&0&a-2\end{pmatrix}$$

$$R(a_1,a_2,a_3)<3\Rightarrow a-2=0\Rightarrow a=2$$

题 2：求向量组 $a_1=(2,4,2)^T$，$a_2=(1,1,0)^T$，$a_3=(2,3,1)^T$，$a_4=(3,5,2)^T$ 的秩及一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示。

解：$$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}2&0&1&2\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&0&1/2&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=2$，　极大无关组为 a_1,a_2，　$a_3=\dfrac{1}{2}a_1+a_2$，$a_4=a_1+a_2$

题 3：已知向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，$b_1=a_1-2a_2$，$b_2=a_2-2a_3$，$b_3=a_3-2a_1$，求证：向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关。

证：若向量组 b_1,b_2,b_3 线性相关，则存在一组不全为 0 的 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=0$，

$$k_1(a_1-2a_2)+k_2(a_2-2a_3)+k_3(a_3-2a_1)=0$$

$$(k_1-2k_3)a_1+(k_2-2k_1)a_2+(k_3-2k_2)a_3=0$$

又 a_1,a_2,a_3 线性无关，故 $\begin{cases}k_1-2k_3=0\\k_2-2k_1=0\\k_3-2k_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$　与假设矛盾

故向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关。

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时五 练习题

1. 判断向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}$的线性相关性。

2. 设向量组$a_1=(1,1,0)^T$，$a_2=(1,3,-1)^T$，$a_3=(5,3,k)^T$线性相关，则$k=$____。

3. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1&-2&1\\-1&3&-4&-1&2\\2&-1&4&2&-3\\2&3&1&3&-3\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的秩，并给出一个极大无关组。

4. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\2&-3&1&-1\\-1&1&-1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的一个极大无关组，并将其余列向量用极大无关组线性表示。

5. 已知向量组a_1,a_2,a_3线性无关，$b_1=a_1-a_2$，$b_2=a_2-a_3$，$b_3=a_1+a_3$，证明：b_1，b_2，b_3线性无关。

哔哩哔哩 扫一扫 2小时速成课程

课时六　解方程组

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 齐次线性方程组	必考	6～12	大题
2. 非齐次线性方程组			

1. 齐次线性方程组 $AX=0$

解的判定：系数矩阵 A

$R(A)=n$　只有零解

$R(A)<n$　无穷多解且有 $n-R(A)$ 个解向

题 1. 求下列线性方程组的基础解系及通解。

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4=0 \\ 3x_1-x_2-4x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+4x_2-5x_3-6x_4=0 \end{cases}$$

解：写出系数矩阵 A，并进行初等行变换，直至转化为最简形矩阵。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=2<4$,方程有无穷多解，$n-R(A)=4-2=2$个解向量

$$由\begin{cases} x_1-\dfrac{3}{2}x_3+x_4=0 \\ x_2-\dfrac{1}{2}x_3-2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3}{2}x_3-x_4 \\ x_2=\dfrac{1}{2}x_3+2x_4 \end{cases}$$

令$x_3=1, x_4=0 \Rightarrow x_1=\dfrac{3}{2}, x_2=\dfrac{1}{2}$

令$x_3=0, x_4=1 \Rightarrow x_1=-1, x_2=2$

得基础解系：$\xi_1=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},1,0\right)^T$　$\xi_2=(-1,2,0,1)^T$

故通解为$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},1,0\right)^T+k_2(-1,2,0,1)^T \quad k_1,k_2\in R$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

2. 非齐次线性方程组 $AX=\beta$

题 1. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1-x_3+x_4=2 \\ 3x_1-x_2+3x_4=5 \end{cases}$ 的通解。

判定：增广矩阵 $(A:\beta)$

$R(A)=R(A:\beta)=n$ 方程组有唯一解

$R(A)=R(A:\beta)<n$ 方程组有无穷解

$R(A)\neq R(A:\beta)$ 方程组无解

解：写出增广矩阵 $(A:\beta)$，并进行初等行变换

$$(A:\beta)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_4-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=R(A:\beta)=3<4 \quad \Rightarrow$ 该方程组有无穷多解。

①齐通:由 $\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2-3x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=3x_3 \\ x_4=0 \end{cases}$

非齐次方程通解 X

$X=$（齐次通解+非齐次特解）

令 $x_3=1$，得基础解系：$\xi=(1,3,1,0)^T$ 齐通：$x=k(1,3,1,0)^T$

②非特：$x=(2,1,0,0)^T$ 方程通解：$X=k(1,3,1,0)^T+(2,1,0,0)^T \quad k\in R$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

题 2. 非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda^2 \end{cases}$，当 λ 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解时，求出它的通解。

解：对增广矩阵 $(A\vdots\beta)$ 作初等行变换把它变成行阶梯形矩阵：

$$(A:\beta)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & \vdots & \lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \vdots & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & \vdots & \lambda^2-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \vdots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \vdots & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & \vdots & (\lambda-1)(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

1）无解：$R(A)\neq R(A:\beta)$，则 $\begin{cases} -(\lambda+2)(\lambda-1)=0 \\ (\lambda-1)(\lambda+1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=-2$

2）有唯一解：$R(A)=R(A:\beta)=3$，则 $\begin{cases} -(\lambda+2)(\lambda-1)\neq 0 \\ \lambda-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda\neq -2 \text{且} \lambda\neq 1$

3）有无穷多解：$R(A)=R(A:\beta)<3$，则 $\begin{cases} -(\lambda+2)(\lambda-1)=0 \\ (\lambda-1)(\lambda+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=1$

将 $\lambda=1$ 代入 $(A:\beta)$ 阶梯型得：$(A:\beta)\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

①齐通：由 $x_1+x_2+x_3=0 \quad \Rightarrow x_1=-x_2-x_3$

令 $x_2=1, x_3=0 \Rightarrow x_1=-1$

令 $x_2=0, x_3=1 \Rightarrow x_1=-1$

得基础解系：$\xi_1=(-1,1,0)^T$，$\xi_2=(-1,0,1)^T$

②非特：$x=(1,0,0)^T$，　　方程通解为 $X=k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T+(1,0,0)^T$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时六 练习题

1. 求齐次线性方程组的基础解系及通解。

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+17x_3-6x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+x_2+x_3+5x_4=0 \\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=0 \end{cases}$$

2. 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$。

3. 非齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$，当$\lambda$取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解时，求出它的通解。

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时七　特征值、特征向量、对角化

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 求特征值，特征向量	必考	6～15	大题
2. 相似对角化			
3. 正交相似对角化			
4. 特征值的性质	★★★★	3～6	选择/填空

1. 求特征值、特征向量

题 1：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值。

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)=0$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=4$

题 2：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

特征值、特征向量求解步骤：

1. 求特征值 λ_i
2. 求 $(A-\lambda_i E)x=0$ 对应的基础解系

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)A_{11}$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)=(2-\lambda)^2(1-\lambda)=0$$

故特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$

当 $\lambda_1=1$时，解 $(A-E)x=0$：$A-E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=x_3\end{cases}$

令 $x_3=1\quad\Rightarrow\quad x_1=0,\ x_2=1$　　得基础解系：$a_1=(0,1,1)^T$

$\lambda_1=1$ 对应的全部特征向量为 $k_1(0,1,1)^T\ (k_1\neq 0)$

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解 $(A-2E)x=0$：$A-2E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=x_3$

令 $x_2=1,x_3=0\quad\Rightarrow x_1=0$，　令 $x_2=0,x_3=1\quad\Rightarrow x_1=1$

得基础解系：$a_2=(0,1,0)^T$，$a_3=(1,0,1)^T$

则 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的全部特征向量为 $k_2(0,1,0)^T+k_3(1,0,1)^T$（$k_2,k_3$不全为零）

哔哩哔哩 扫一扫　2 小时速成课程

2. 相似对角化

题 1：矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 P，使 $P^{-1}AP$ 对角化。

解：①特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$

② $a_1=(0,1,1)^T\quad a_2=(0,1,0)^T\quad a_3=(1,0,1)^T$

③ $P=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$

解题方法：

①求特征值 λ_1，$\lambda_2\cdots\lambda_m$

②求基础解系 a_1，$a_2\cdots a_m$

③ $P=(a_1,\ a_2\cdots a_m)$

使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_m\end{pmatrix}$

题 2: 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&3&4\end{pmatrix}$, 判断 A 能否对角化？若能，求相似变换矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 对角化

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\0&1-\lambda&0\\0&3&4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(4-\lambda)=0$　　得特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=4$ 时，解 $(A-4E)X=0$：$A-4E=\begin{pmatrix}-3&1&1\\0&-3&0\\0&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}x_3\\x_2=0\end{cases}$

令 $x_3=3\ \Rightarrow x_1=1$，$x_2=0$，得基础解系 $a_1=(1,0,3)^T$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解 $(A-E)X=0$：$A-E=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow x_2=-x_3$

令 $x_1=1,x_3=0\ \Rightarrow x_2=0$，　令 $x_1=0,x_3=1\ \Rightarrow x_2=-1$

得基础解系 $a_2=(1,0,0)^T$，$a_3=(0,-1,1)^T$

因为矩阵有三个线性无关的特征向量，所以 A 能相似对角化

$P=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&-1\\3&0&1\end{pmatrix}$　　使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

3. 正交相似对角化

题 1：设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵。

解题步骤：
1. 求特征值
2. 求基础解系
3. 正交化
4. 单位化

解：由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$，

得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1\quad\lambda_3=-2$

$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow x_1=-x_2+x_3$

得基础解系 $a_1=(-1,1,0)^T\qquad a_2=(1,0,1)^T$

$\lambda_3=-2$ 时，$A+2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$

得基础解系 $a_3=(-1,-1,1)^T$

正交化：

施密特正交化：$a_1\ \ a_2$

$b_1=a_1$

$b_2=a_2-\dfrac{[a_2,\ b_1]}{[b_1,\ b_1]}b_1$

$b_1=a_1=(-1,1,0)^T$

$b_2=a_2-\dfrac{[a_2,b_1]}{[b_1,b_1]}\cdot b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$

$b_3=a_3=(-1,-1,1)^T$（a_3 和 a_1，a_2 已经正交，不用再正交化）

单位化：

单位化：$e=\dfrac{b}{\|b\|}$

$e_1=\left(-\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{1}{\sqrt2},0\right)^T$，$e_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6}\right)^T$，$e_3=\left(-\dfrac{1}{\sqrt3},-\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right)^T$

$P=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

4. 特征值的性质

①$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ ②$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

③若 A 的特征值为 λ，则：

矩阵	kA	A^2	$aA+bE$	A^m	A^{-1}	A^*
特征值	$k\lambda$	λ^2	$a\lambda+b$	λ^m	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{\vert A\vert}{\lambda}$

题 1：已知 A 的三个特征值为 $1,2,3$, 则 $|A|=$__________。

解：$|A|=1\times2\times3=6$

题 2：设三阶方阵 A 的特征向量为 $1,-2,3$, 则 $|A^2+A-E|=$__________。

解：$A^2+A-E\rightarrow\lambda^2+\lambda-1$

$$\lambda^2+\lambda-1=\begin{cases}1, & \lambda=1\text{时}\\ 1, & \lambda=-2\text{时}\\ 11, & \lambda=3\text{时}\end{cases}\quad\Rightarrow A^2+A-E\text{ 的特征值为 }1,1,11$$

故 $|A^2+A-E|=1\times1\times11=11$

课时七 练习题

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-2&-2&2\\3&6&-1\end{pmatrix}$ ①求特征值、特征向量； ②判断 A 能否对角化，若能对角化，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵。

3. 已知 A 的特征值为 $1,-1,2$, 求 $|A^{-1}+2A-E|=$__________。

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时八　二次型

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 二次型及其矩阵表示	★★	0～3	大题
2. 求正交变换、化标准形	必考	8～10	
3. 顺序主子式	★★★★	3～6	填空

1. 二次型及其矩阵表示

题 1：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ 所对应的矩阵 A 为________，该二次型的秩为________。

解：$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&4\\-2&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&6\\0&6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&6\\0&0&8\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=3$

2. 求正交变换，化标准型

题 1：用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+7x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型。

解：二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-4\\2&1&-4\\-4&-4&7\end{pmatrix}$

解题步骤：
1. 写二次型矩阵
2. 求特征值
3. 求基础解系
4. 正交化
5. 单位化

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-4\\2&1-\lambda&-4\\-4&-4&7-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-11)=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=11$

$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$A+E=\begin{pmatrix}2&2&-4\\2&2&-4\\-4&-4&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=-x_2+2x_3$

令 $x_2=1$，$x_3=0\ \Rightarrow x_1=-1$，　令 $x_2=0$，$x_3=1\ \Rightarrow x_1=2$

得基础解系：$a_1=(-1,1,0)^T$，$a_2=(2,0,1)^T$

$\lambda_3=11$时，$A-11E=\begin{pmatrix}-10&2&-4\\2&-10&-4\\-4&-4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1/2\\0&1&1/2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_3\\x_2=-\dfrac{1}{2}x_3\end{cases}$

令 $x_3=-2\ \Rightarrow x_1=1$，$x_2=1$得基础解系：$a_3=(1,1,-2)^T$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

正交化

$$b_1 = a_1 = (-1,1,0)^T \quad b_2 = a_2 - \frac{[a_2,b_1]}{[b_1,b_1]}b_1 = (1,1,1)^T \quad b_3 = a_3 = (1,1,-2)^T$$

单位化

$$e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T, \quad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T, \quad e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)^T$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}，标准型\ f = -y_1^2 - y_2^2 + 11y_3^2$$

3. 顺序主子式

> 顺序主子式：
> 设 A 为 n 阶方阵，依次取前 k 行与前 k 列构成的子式，称为顺序主子式，例如：
>
> $$\Delta_1 = |a_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

题 1：求参数 t 的值，使 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 为正定二次型。

解：$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$\Delta_1 = |2| = 2 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 2 - t^2 > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3t^2 + 5 > 0$

$$\Rightarrow t^2 < \frac{5}{3}，得\ t \in \left(-\frac{\sqrt{15}}{3},\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$$

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时八 练习题

1. 二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2-4x_1x_2$ 所对应的矩阵是________。

2. 求一个正交变换 $x=Py$，使二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 化为标准型，并判定是否为正定二次型。

3. 若二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 正定，求 t 的取值范围

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时一 练习题答案

1. 2.

2. 正.

3. 6.

4. -5；26； -2；189.

课时二 练习题答案

1. -10； -12.

2. 0；0.

3. 12.

课时三 练习题答案

1. $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$； $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$； $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\frac{1}{6}$.

4. $-\frac{16}{27}$.

5. 1.

6. 证明： $A^2+A-3E=0 \Rightarrow (A-E)(A+2E)=E$

等式两边取行列式： $|(A-E)(A+2E)|=|A-E||A+2E|=1$

$\Rightarrow |A-E| \neq 0 \Rightarrow A-E$ 可逆 $\Rightarrow (A-E)^{-1}=A+2E$.

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

课时四 练习题答案

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

4. $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

6. $\begin{cases} \lambda=5 \\ \mu=1 \end{cases}$.

课时五 练习题答案

1. $R(A)=2<3 \Rightarrow$ 线性相关.

2. 1.

3. $R(A)=3$； $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

4. 一个极大无关组为α_1,α_2； $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$， $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$.

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程

5. 证明：假设b_1，b_2，b_3线性相关，则存在一组不全为0的常数k_1,k_2,k_3使得

$k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=0$，

则$k_1(a_1-a_2)+k_2(a_2-a_3)+k_3(a_1+a_3)=0$

又a_1,a_2,a_3线性无关 $\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_2-k_1=0\\k_3-k_2=0\end{cases}$， 得$\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}\Rightarrow$与假设矛盾

向量组b_1，b_2，b_3线性无关，故得证。

课时六　练习题答案

1. 基础解系：$\xi_1=(-3,7,2,0)^T$，　$\xi_2=(-1,-2,0,1)^T$

通解：$X=k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1(-3,7,2,0)^T+k_2(-1,-2,0,1)^T$（$k_1$，$k_2$为任意常数）

2. 方程通解：$X=k_1(3,3,2,0)^T+k_2(-3,7,0,4)^T+\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4},0,0\right)^T$（$k_1$，$k_2$为任意常数）

3. $\lambda=-2$时无解；$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq1$时有唯一解；$\lambda=1$时有无穷多解，通解：

$X=k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T+(-2,0,0)^T$（$k_1$，$k_2$为任意常数）

课时七　练习题答案

1. (1) $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-4$;　$a_1=(-2,1,0)^T,a_2=(1,0,1)^T,a_3=(1,-2,3)^T$;

(2) $P=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$.

2. $P=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{-2\sqrt{5}}{15}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{-2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

3. -28.

哔哩哔哩 扫一扫 2小时速成课程

课时八　练习题答案

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $Q=\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$，容易得出标准型为正定的，由于可逆线性变换不改变正定性，则原二次型也是正定的.

3. $t\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

哔哩哔哩 扫一扫 2 小时速成课程