2.4 随机变量函数的分布

随机变量的函数的分布

我们常常遇到一些随机变量, 它们的分布往往难于直接得到(如滚珠体积的测量值等), 但是与它们有关系的另一些随机变量,其分布却是容易知道的(如滚珠直径的测量值). 因此, 要研究随机变量之间的关系, 从而通过它们之间的关系, 由已知的随机变量的分布求出与之有关的另一个随机变量的分布.

定义 2.10

设$f(x)$是定义在随机变量ξ的一切可能值x的集合上的函数. 如果对于ξ的每一可能取值x, 有另一个随机变量η的相应取值$y=f(x)$. 则称η为ξ的函数, 记作$\eta=f(\xi)$.

我们的任务是, 如何根据ξ的分布求出η的分布, 或由$(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$的分布求出$\eta=f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$的分布.

(一) 离散型随机变量函数的分布

如果相应的函数$f(x)$在给定的试验范围内是单调函数或者存在反函数, 则$\eta=f(\xi)$的分布是很容易从ξ的分布中求出来的, 即当$P(\xi=x_i)=p_i$时, $P(\eta=f(x_i))=p_i$, $i=1,2,\ldots$

例1 测量一个正方形的边长, 其结果是一个随机变量ξ(为简便起见把它看成是离散型的), ξ的分布如下表所示, 求周长η和面积ζ的分布律.

ξ	9	10	11	12
P	0.2	0.3	0.4	0.1

解: 根据题意知η和ζ都是ξ的函数,

$\eta=4\xi$, $\zeta=\xi^2$,因此而计算出如下的结果

ξ	9	10	11	12
P	0.2	0.3	0.4	0.1

η	36	40	44	48
P	0.2	0.3	0.4	0.1

ζ	81	100	121	144
P	0.2	0.3	0.4	0.1

例2 ξ的分布如下表所示, 求ξ^2的分布

ξ	-1	0	1	1.5	3
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

解 此题与上题的不同在于ξ存在着取负数的可能, 而-1的平方与1的相同, 因此, $\{\xi^2=1\}$的事件是$\{\xi=1\}$和$\{\xi=-1\}$两个互斥事件的和, 则$P\{\xi^2=1\}=P\{\xi=1\}+P\{\xi=-1\}$, 最后结果如下表:

ξ^2	0	1	2.25	9
P	0.1	0.5	0.3	0.1

例3 一个仪器的长度由两个主要部件构成, 其总长度为此二部件之和, 这两个部件的长度x和h为两个相互独立的随机变量, 其分布律如下二表所示. 求此仪器长度的分布律.

ξ	9	10	11
P	0.3	0.5	0.2

η	6	7
P	0.4	0.6

解 设仪器的总长度为ζ, ξ,η的可能取值的数对及概率与相应的和如下面的表所示

ξ	9	10	11
P	0.3	0.5	0.2

η	6	7
P	0.4	0.6

ξ	9	9	10	10	11	11
η	6	7	6	7	6	7
$\zeta=\xi+\eta$	15	16	16	17	17	18
P	0.12	0.18	0.2	0.3	0.08	0.12

由此可计算出ζ的分布率如下表所示.

ξ	9	9	10	10	11	11
η	6	7	6	7	6	7
$\zeta=\xi+\eta$	15	16	16	17	17	18
P	0.12	0.18	0.2	0.3	0.08	0.12

ζ	15	16	17	18
P	0.12	0.38	0.38	0.12

例4 求§2.3例2中两个邮筒内信的数目之和$\xi_1+\xi_2$的分布律.

解 ξ_1和ξ_2的联合分布律如下表所示

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2
0	4/16	4/16	1/16
1	4/16	2/16	0
2	1/16	0	0

按斜线计算:

$\xi_1+\xi_2=0$ $\xi_1+\xi_2=1$ $\xi_1+\xi_2=2$ $\xi_1+\xi_2=3$ $\xi_1+\xi_2=4$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2
0	4/16	4/16	1/16
1	4/16	2/16	0
2	1/16	0	0

$\xi_1+\xi_2$	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

用斜线法计算$\xi_1-\xi_2$的分布

$\xi_1-\xi_2=0$ $\xi_1-\xi_2=-1$ $\xi_1-\xi_2=-2$

$\xi_1-\xi_2=1$

$\xi_1-\xi_2=2$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2
0	4/16	4/16	1/16
1	4/16	2/16	0
2	1/16	0	0

$\xi_1-\xi_2$	-2	-1	0	1	2
P	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

(二)连续型

例5 已知ξ的概率密度是$\varphi_\xi(x)$, $\eta=4\xi-1$, 求η的概率密度$\varphi_\eta(x)$.

解 首先求η的分布函数$F_\eta(x)$. 依题意, 有

$$F_\eta(x) = P\{\eta \le x\} = P\{4\xi - 1 \le x\}$$

$$= P\left\{\xi \le \frac{x+1}{4}\right\} = F_\xi\left(\frac{x+1}{4}\right)$$

其中$F_\xi(x)$为ξ的分布函数. 然后对上式两边求导即得ξ和η的概率密度函数的关系.

对

$$F_\eta(x) = F_\xi\left(\frac{x+1}{4}\right)$$

两边求导得

$$\varphi_\eta(x) = \frac{1}{4}\varphi_\xi\left(\frac{x+1}{4}\right)$$

例6 设随机变量ξ的分布函数为$F_\xi(x)$, 求ξ^2的分布函数.

解:

当$x<0$时, $F_{\xi^2}(x)=P(\xi^2\le x)=0$

设$x\ge 0$,

$$F_{\xi^2}(x)=P(\xi^2\le x)=P(-\sqrt{x}\le\xi\le\sqrt{x})$$

$$=P(-\sqrt{x}<\xi\le\sqrt{x})+P(\xi=-\sqrt{x})$$

$$=F_\xi(\sqrt{x})-F_\xi(-\sqrt{x})+P(\xi=-\sqrt{x})$$

特别地, 如果ξ是具有概率密度为$\varphi_\xi(x)$的连续型随机变量,

$P(\xi=-\sqrt{x})=0$, 则ξ^2的概率密度为

$$\varphi_{\xi^2}(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_\xi(\sqrt{x})+\varphi_\xi(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$