《高数/微积分下》

课时一　多元函数与重极限

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 多元函数定义域	★★★	0～3	选择、填空
2. 多元函数重极限			

1. 多元函数定义域

题 1. 函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(5-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域为________。

解：$\begin{cases}-1\le 5-x^2-y^2\le 1\\ x-y^2>0\end{cases}\quad\Rightarrow\left\{(x,y)\,|\,4\le x^2+y^2\le 6, x>y^2\right\}$

2. 多元函数重极限

题 1. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+9}-3}{xy}=$________ 。

解：
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+9}-3}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(\sqrt{xy+9}-3)(\sqrt{xy+9}+3)}{xy(\sqrt{xy+9}+3)}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{xy(\sqrt{xy+9}+3)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+9}+3}=\frac{1}{6}$$

题 2. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sqrt{1+x^2y}-1}{e^{xy}-1}$。

解：
$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sqrt{1+x^2y}-1}{e^{xy}-1}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\frac{1}{2}x^2y}{xy}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{1}{2}x=1$$

等价无穷小公式：

$x\to 0$ 时

1） $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$

2） $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ ，$1-\cos^a x\sim\dfrac{a}{2}x^2$

3） $(1+x)^a-1\sim ax$ ，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$

题 3. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$ ________ 。

解： $(x,y)\to(0,0)$， $x^2+y^2\to 0$， $\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 有界，故原式 $=0$

题 4. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{5x-2y}$ 不存在。

证明：取路径： $y=\dfrac{5}{2}x$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{5x-2y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{5}{2}x}}\dfrac{3x-\frac{5}{2}x}{5x-5x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{5}{2}x}}\dfrac{\frac{1}{2}x}{0}$ 不存在

沿一条路径趋近，极限不存在，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{5x-2y}$ 不存在

题 5. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$，问 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在？

解：取路径： $y=x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

取路径： $y=-x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x\cdot(-x)}{x^2+(-x)^2}=-\frac{1}{2}$$

沿不同路径趋近，极限值不相等，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在

> 判断极限不存在的方法通常有两个：
>
> ①找一条路径，极限不存在。
>
> ②找两条路径，极限不相等

课时一 练习题

1. 函数 $z=\ln(y^2-2x+1)$ 的定义域为________。

2. 二元函数 $z=\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$ 的定义域为________。

3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}=$________。

4. 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$________。

5. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}}\frac{\tan(xy)}{y}=$________

6. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\ln(1+xy^2)}{x}=$________

$A.0$　　$B.1$　　$C.2$　　$D.4$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}[\frac{\sin(xy)}{y}+\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}]=$________

8. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+xy}{1+xy}$________

$A.$ 存在但不等于 0　　$B.$ 存在且等于 0　　$C.$ 不存在　　$D.$ 以上结论都不正确

9. 下列选项中极限存在的是（　）

$A.\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$　　$B.\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$　　$C.\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$　　$D.\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$

注：练习题答案在文档最后

课时二 偏导数与全微分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 偏导数	必考	6～10	选择、填空、大题
2. 高阶导数			
3. 全微分			
4. 偏导、连续、可微之间的关系	★★★	0～3	选择、填空

1. 偏导数【$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$，$f_x(x,y)$，$f_x'(x,y)$】

求导公式：

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

$(e^x)'=e^x$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

题 1. $z=3x^2y^3+4x^2-2y+6$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^3+8x$

$\frac{\partial z}{\partial y}=9x^2y^2-2$

题 2. 设 $f(x,y)=x^2e^y+\arctan\frac{y}{x}$，则偏导数 $f_x(1,0)=$________

法一：$f_x=2xe^y+\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})=2xe^y-\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}=2$

法二：$f(x,0)=x^2$，$f_x=2x\big|_{x=1}=2$

题 3. $\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = (\quad)$

$A.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ $B.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$C.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta x}$ $D.\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0)}{\Delta x}$

答案：B

偏导数定义公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

题 4. 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=$ ________

$A.\ f_x'(x_0,y_0)$ $B.\ 2f_x'(x_0,y_0)$ $C.\ f_y'(x_0,y_0)$ $D.\ 2f_y'(x_0,y_0)$

答案：B 解析：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\dfrac{x_0+2h-x_0}{h}f_x'(x_0,y_0)=2f_x'(x_0,y_0)$

2. 高阶偏导数

题 1. $z=x^4+y^4-4x^2y^2$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8yx^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-16xy$

注意：

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，

则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

3. 全微分

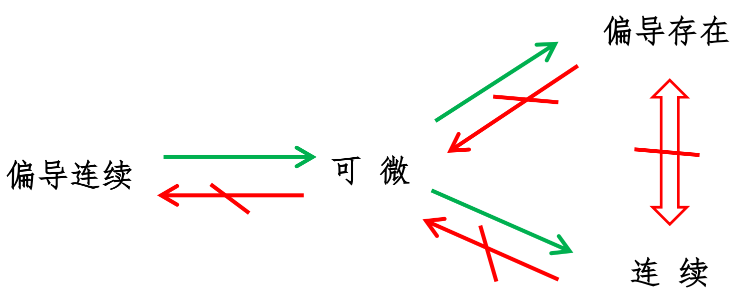
题 1. $z=\arctan\frac{y}{x}$，求 $dz|_{(1,1)}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}\Bigg|_{(1,1)}=-\frac{1}{2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{(1,1)}=\frac{1}{2}$

$dz=-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$

4. 偏导、连续、可微之间的关系



题 1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质：

（1） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续

（2） $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续

（3） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微

（4） $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则下列四个选项中正确的是（ ）

$A.\ (2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$ $B.\ (3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$ $C.\ (3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$ $D.\ (3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

答案：A

课时二 练习题

1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在对 x,y 偏导数，则 $f_x'(x_0,y_0)=(\quad)$

$A.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)-f(x_0-\Delta x,y_0)}{\Delta x}$　　$B.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$C.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$　　$D.\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

2. 函数 $z=y^x$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

3. 设 $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$_______

4. 函数 $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $z_x(1,1),z_y(1,1)$

5. 设 $z=xy+\dfrac{x}{y}$，则 $dz=$_______

6. 设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz

7. 设 $u=e^{xy^2z^3}$，则 $du=$_______

8. 函数 $z=\ln(2+x^2+y^2)$ 在 $x=2,y=1$ 时的全微分。

9. 设 $z=e^x\sin(x+y)$，则 $dz|_{(0,\pi)}=(\quad)$

$A.-dx+dy$　　$B.dx-dy$　　$C.-dx-dy$　　$D.dx+dy$

10. 求函数 $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 的全微分。

11. 已知函数 $f_x'(a,b)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+a,b)-f(a-x,b)}{x}=(\quad)$

$A.-f_x'(a,b)$　　$B.2f_x'(a,b)$　　$C.\ f_x'(a,b)$　　$D.\dfrac{1}{2}f_x'(a,b)$

12. 函数 $f(x,y)$ 偏导数存在，且 $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=-2$ ，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=$ ______

13. 求函数 $z=4x^3-xy+e^y$ 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

14. 求函数 $z=e^x\ln y+\sin y\cdot\ln x$ 的二阶偏导数

15. 设二元函数 $z=y^2\cos 2x$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______

16. 下列有关多元函数命题错误的是（　　）

A. 函数可微是连续的充分条件　　*B.* 函数可微则偏导数必定存在

C. 偏导数存在是可微的必要条件　　*D.* 偏导数存在是连续的充分条件

17. 若用 “$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 5 条性质：

$f(x,y)$ 在点 x_0,y_0 处：①连续；②两个偏导数存在；③可微；④两个偏导数连续；⑤极限存在，则有（　　）

A. ④⇒③⇒②⇒⑤　　*B.* ②⇒③⇒⑤⇒①

C. ③⇒②⇒⑤⇒①　　*D.* ④⇒③⇒①⇒⑤

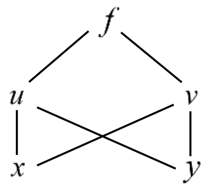
课时三 复合函数、隐函数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 复合函数求偏导	必考	6～10	大题
2. 隐函数求偏导			

1. 复合函数求偏导

题 1. 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\dfrac{x}{y}$， $v=3x-4y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$



$$=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3=\frac{2u}{y}\ln v+\frac{3u^2}{v}$$

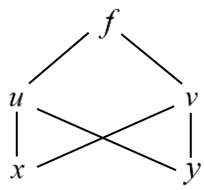
$$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-4y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-4y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=2u\ln v\cdot(-\frac{x}{y^2})+\frac{u^2}{v}\cdot(-4)$$

$$=-\frac{xu}{y^2}\ln v-\frac{4u^2}{v}=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-4y)-\frac{4x^2}{y^2(3x-4y)}$$

题 2. $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$



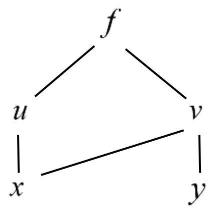
解：$u=x^2-y^2,\ v=e^{xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot ye^{xy}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\cdot(-2y)+f_2'\cdot xe^{xy}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$$

题 3. 设 $z=f(x,\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

法一：$z=f(u,v)\qquad u=x,\ v=\frac{x}{y}$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2'$$

f、f_1'、f_2' 具有相同的关系链

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=\frac{\partial f_1'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+(-\frac{1}{y^2})f_2'+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})+(-\frac{1}{y^2})\cdot f_2'+\frac{1}{y}f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})$$

$$=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

法二：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_2'\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{x}{y^2}f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}\cdot(\frac{\partial f_2'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}\cdot(f_{21}''+f_{22}''\cdot\frac{1}{y})$$

$$=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

2. 隐函数求偏导

隐函数解题方法：

1）构造函数 $F(x,y,z)$；

2）求 $F_x \quad F_y \quad F_z$

3）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z} \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

别忘了负号

题 1. $\sin x+3y-z^3-e^z=6$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：令 $F=\sin x+3y-z^3-e^z-6$

$F_x=\cos x$，$\quad F_y=3$，$\quad F_z=-3z^2-e^z$

由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\cos x}{3z^2+e^z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{3}{3z^2+e^z}$$

题 2. 设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求 $dz\big|_{(0,1)}$

解：将 $(0,1)$ 点代入方程得 $z=1$，得这个点 $(0,1,1)$

令 $F=\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=\dfrac{x}{z}-\ln z+\ln y$

$$F_x=\frac{1}{z}\bigg|_{(0,1,1)}=1，\quad F_y=\frac{1}{y}\bigg|_{(0,1,1)}=1，\quad F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}=-\frac{x+z}{z^2}\bigg|_{(0,1,1)}=-1$$

由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=1，$$

则 $dz=dx+dy$

课时三　练习题

1. $z=e^{u}\ln v$，且 $u=xy, v=x^2+y^2$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

2. 设$z=u\cos v$，而$u=x+y, v=xy$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

3. $z=f(\dfrac{y}{x},x)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

4. 设$z=xf(y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

5. $z=f(x^2+y^2, e^{xy})$，其中 $f(u,v)$ 一阶偏导数连续，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

6. 设$z=xy+xf(\dfrac{y}{x})$，且 $f(u)$ 可微，试证：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$

7. 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2+y^2=\ln x-\ln z$确定的隐函数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

8. 设函数$z=z(x,y)$由方程$e^{x+2y+3z}+xyz=1$确定，计算$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$。

9. 设$e^{xy+z}=\sin(xyz)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

10. 设$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

11. 设$z=f(x,y)$是由方程$\sin(xyz)-\dfrac{1}{z-xy}=1$所确定，求$dz|_{(0,1)}$。

课时四 梯度、方向导数、多元函数极值

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 梯度、方向导数	★★	0～5	选择、填空
2. 多元函数极值	必考	6～10	大题

1. 梯度、方向导数

题 1. $u=xy^2+yz^3+3$ 在点 $(2,-1,1)$ 处的梯度。

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2\big|_{(2,-1,1)}=1$

$\frac{\partial u}{\partial y}=(2xy+z^3)\big|_{(2,-1,1)}=-3$

$\frac{\partial u}{\partial z}=3yz^2\big|_{(2,-1,1)}=-3$

$gradf(2,-1,1)=(1,-3,-3)$

> 1. 梯度 $gradf(x_0,y_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0)$
>
> $gradf=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})$
>
> （注：各偏导数组成的向量）

题 2. 函数 $u=xy-z^2$ 在点 $P(3,2,-1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(2,3,1)$ 的方向导数为________，在点 P 处方向导数的最大值为________。

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=y\big|_{(3,2,-1)}=2$

$\frac{\partial u}{\partial y}=x\big|_{(3,2,-1)}=3$　　　$gradf=(2,3,2)$

$\frac{\partial u}{\partial z}=-2z\big|_{(3,2,-1)}=2$

$|\vec{l}|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$　　$\vec{e_l}=(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}})$

$\frac{\partial f}{\partial l}=gradf\cdot\vec{e_l}=(2,3,2)\cdot(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}})=\frac{15}{\sqrt{14}}$

最大值 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{max}=|gradf|=\sqrt{2^2+3^2+2^2}=\sqrt{17}$

> 2. 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}$
>
> ①求 P 点的梯度；
>
> ②求 l 的单位向量 $\vec{e_l}$；
>
> ③$\frac{\partial f}{\partial l}=gradf\cdot\vec{e_l}$
>
> 3. 方向导数最大值
>
> $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{max}=|gradf|$

2. 多元函数极值

一般极值求解方法：

① 求驻点：$\begin{cases} f_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0)$

驻点：
满足 一阶偏导 同时 为 0 的点

② 求 $A=f_{xx}''$ $\quad B=f_{xy}''$ $\quad C=f_{yy}''$

③ 对每一个驻点 (x_0,y_0) 判定：

$AC-B^2>0$，有极值，且 $A\begin{cases} >0，有极小值 \\ <0，有极大值 \end{cases}$

$AC-B^2<0$，无极值

$AC-B^2=0$，无法判定

题 1：$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值 (一般极值)

解：$\begin{cases} f_x'=3x^2+6x-9=0 \\ f_y'=-3y^2+6y=0 \end{cases}$ 得驻点：$(1,0)$，$(1,2)$，$(-3,0)$，$(-3,2)$

$A=f_{xx}''=6x+6 \qquad B=f_{xy}''=0 \qquad C=f_{yy}''=-6y+6$

在 $(1,0)$ 点，$AC-B^2=12\times6=72>0$，有极值，且 $A=12>0$，有极小值 $f(1,0)=-5$

在 $(1,2)$ 点，$AC-B^2<0$，无极值

在 $(-3,0)$ 点，$AC-B^2<0$，无极值

在 $(-3,2)$ 点，$AC-B^2=72>0$，有极值，且 $A=-12<0$，有极大值 $f(-3,2)=31$

选择题中常考知识点：

1. 驻点一定是极值点（×）　　（若 $AC-B^2<0$，则无极值）
2. 极值点一定是驻点（×）　　（极值点存在：1. 驻点　2. 一阶导数不存在的点）
3. 可导函数的极值点一定是驻点（√）　　（去掉了一阶导数不存在的情况）

题 2. 将正数 a 分为三个非负数之和，使它们乘积最大。（条件极值）

解：设三个数分别为 x,y,z

目标函数： $f=xyz$

条件函数： $x+y+z=a$

注意把 a 移项

构造拉格朗日函数：

$L=xyz+\lambda\left(x+y+z-a\right)$

$$\begin{cases} L_x=yz+\lambda=0 \\ L_y=xz+\lambda=0 \\ L_z=xy+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y+z-a=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=\frac{a}{3}$$

因为 $(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ 为唯一极值点

故所求乘积最大： $f(x,y,z)=\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^3}{27}$

条件极值求法：

① 确定目标函数 $f(x,y,z)$

② 确定条件函数 $g(x,y,z)$

③ 构造拉格朗日函数

$L=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$

$$\begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ L_z=0 \\ L_\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0,z_0)$$

即为所求极值点。

课时四 练习题

1. 求函数 $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $(1,2,-2)$ 处梯度 $gradf(1,2,-2)=$________。

2. 函数 $u=3x^2y^2-2y+4x+6z$ 在原点沿方向 $l=(2,3,1)$ 的方向导数为________。

3. $z=xe^{2y}$ 在 $P(1,0)$ 到 $K(2,1)$ 的方向导数________。

4. 求函数 $u=e^{xyz}$ 在点 $P_0(1,0,-1)$ 处由 $P_0(1,0,-1)$ 指向 $P_1(2,1,-1)$ 方向的方向导数，并求函数 $u=e^{xyz}$ 在点 $P_0(1,0,-1)$ 处的方向导数的最大值。

5. 求函数 $f(x,y)=4xy-x^2-y^2$ 的极值。

6. 函数 $f(x,y)$ 在开区域 D 内有二阶连续偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$。记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则下列为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极大值的充分条件是（　　）

   $A.$ $A<0$, $AC-B^2>0$　　　　$B.$ $A>0$, $AC-B^2>0$

   $C.$ $A<0$, $AC-B^2<0$　　　　$D.$ $A>0$, $AC-B^2<0$

7. 判断题：多元函数的极值点一定是驻点。（　　）

8. 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内偏导数存在，则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ 是 $y=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极值的（　　）

   $A.$ 必要但非充分条件　　　　$B.$ 充分但不必要条件

   $C.$ 充分必要条件　　　　$D.$既非充分也非必要条件

9. 某工厂要做一个体积为 $8m^3$ 的无盖长方体容器，已知底面材料的单位造价是侧面材料单价的 2 倍，问怎样设计才能使该长方体容器的造价最低？

10. 周长为 $2P$ 矩形，绕一边旋转一周得到圆柱，求圆柱的体积何时最大？

11. $z=x^3-3x^2-3y^2$ 在 $D: x^2+y^2\le 16$ 上的最大值和最小值。

课时五　向量与空间几何（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 向量的点乘	★★★	0～3	选择、填空
2. 向量的叉乘	必考	1～3	选择、填空
3. 空间平面方程	★★★★★	0～7	大题
4. 空间直线方程			

1. 向量的点乘

向量点乘公式：

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$　　$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

$\vec{e}_a=\dfrac{1}{|\vec{a}|}(x_1,y_1,z_1)$

平行：$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

垂直：$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

$\cos\theta=\cos 90°=0$

题 1. 点 $P_1(2,-1,1)$ 和点 $P_2(-4,-1,-7)$ 之间的距离______。

解：$d=\sqrt{(-4-2)^2+(-1+1)^2+(-7-1)^2}=10$

题 2. 向量 $\vec{a}=(0,1,-1)$ 与 $\vec{b}=(1,0,-1)$ 的夹角 $\theta=$______。

解：$|\vec{a}|=\sqrt{0+1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+0+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\times1+1\times0+(-1)\times(-1)=1$

由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

题 3. 向量 $\vec{c}=(1,-1,1)$，则与向量 $\vec{c}$ 同向的单位向量为______。

解：$|\vec{c}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$　　$\vec{e}_c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)=(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$

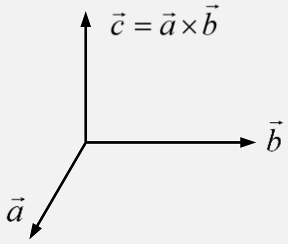
题 4. 给定向量 $\vec{a}=(-1,2,x)$，$\vec{b}=(1,y,-2)$，若 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则 $x+y=$______。

解：$\vec{a}\,//\,\vec{b}$ 可得，$\dfrac{-1}{1}=\dfrac{2}{y}=\dfrac{x}{-2}\Rightarrow x=2$，$y=-2$　　故 $x+y=0$

题 5. 若向量 $\vec{a}=(4,0,2)$，$\vec{b}=(\lambda,2,2)$ 相互垂直，则 $\lambda=$______。

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\lambda+4=0\quad\Rightarrow\lambda=-1$

2. 向量的叉乘



① $\vec{c}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{c}\perp\vec{b}$ （即垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所在平面）

② $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

③ $\vec{a}\times\vec{b}$ 经常用于求平面法向量

题 1. 计算 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，求 $\vec{a}\times\vec{b}$

解：$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-2\\2&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}\vec{k}=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}=(5,1,7)$

题 2. 已知三个点 $A(1,2,3)$，$B(2,3,4)$，$C(3,4,6)$，则 ΔABC 的面积为__________。

解：$\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$　　$\overrightarrow{AC}=(2,2,3)$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2+1\times2+1\times3=7$$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{7}{\sqrt{3}\times\sqrt{17}}=\frac{7}{\sqrt{51}}$$

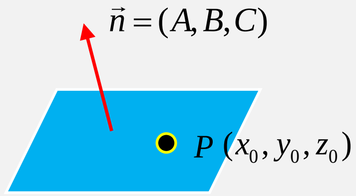
$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{17}\times\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{51}}{2}\times\sqrt{1-\left(\frac{7}{\sqrt{51}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. 空间平面方程

$$\begin{cases} P(x_0,y_0,z_0) \\ \vec{n}=(A,B,C) \end{cases} \Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$ （点法式方程）



化简得 $Ax+By+Cz\underline{-Ax_0-By_0-Cz_0}=0$

$Ax+By+Cz\underline{+D}=0$（一般式）

题 1. 求过点 $(1,2,4)$，且平行于平面 $3x+2y+z-7=0$ 的平面方程____________。

解： $\vec{n}=(3,2,1)$ ， $P(1,2,4)$

$3(x-1)+2(y-2)+(z-4)=0$

$3x+2y+z-11=0$

题 2. 求过 3 个点 $A(1,1,1)$， $B(-2,-2,2)$ 和 $C(1,-1,2)$ 的平面方程。

解： $\overrightarrow{AB}=(-3,-3,1)$ $\overrightarrow{AC}=(0,-2,1)$ 故 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 就是该平面的一个法向量。

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,3,6)$$

平面方程为: $-(x-1)+3(y-1)+6(z-1)=0$

即 $x-3y-6z+8=0$

题 3. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离。

点到平面的距离公式：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

解： 由距离公式知:

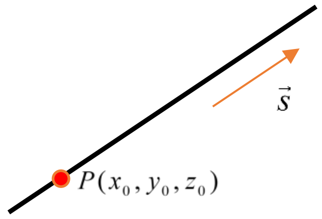
$$d=\frac{|1\times1+2\times2+2\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$$

4. 空间直线方程

1）对称式方程

对称式方程

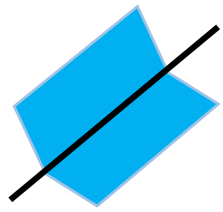
$$\left.\begin{matrix} P(x_0,y_0,z_0) \\ \vec{s}=(A,B,C) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$



2）一般式：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

两个平面的交线



3）参数方程

$$\begin{cases} x=At+x_0 \\ y=Bt+y_0 \\ z=Ct+z_0 \end{cases}$$

题 1. 已知平面 $x-y+z+5=0$ 和 $5x-8y+4z+36=0$，求其交线的对称式方程和参数方程。

解：$\begin{cases} x-y+z+5=0 \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1=(1,-1,1) \\ \vec{n}_2=(5,-8,4) \end{cases}$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \end{vmatrix}=4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$$

求出方向向量

令 $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x+z+5=0 \\ 5x+4z+36=0 \end{cases}$ 解方程得 $\begin{cases} x=-16 \\ z=11 \end{cases} \Rightarrow (-16,0,11)$

求出一点

直线方程：$\dfrac{x+16}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-11}{-3}$

令：$\dfrac{x+16}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-11}{-3}=t$，得参数方程为 $\begin{cases} x=4t-16 \\ y=t \\ z=-3t+11 \end{cases}$

题 2. 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ 与平面 $x+y+3z=0$ 的交点坐标。

解： $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}=t$

得 $\begin{cases} x=t+2 \\ y=3t \\ z=-t-1 \end{cases}$ 代入平面方程得 $t+2+3t+3(-t-1)=0 \quad \Rightarrow t=1$

故交点为 $(3,3,-2)$

课时五　练习题

1. 空间两点 $P(2,0,-1)$，$Q(0,5,1)$ 的距离为__________。

2. 已知向量 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=($　　$)$

$A.0$　　　　$B.\sqrt{7}$　　　　$C.7$　　　　$D.1$

3. 设 $\vec{a}=(1,1,-1)$，$\vec{b}=(-1,-1,1)$，则有 $($　　$)$

$A.\vec{a}//\vec{b}$　　　　$B.\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$　　　　$C.\vec{a}\perp b$　　　　$D.a,b$ 夹角为 $\frac{2\pi}{3}$

4. 设向量 $\vec{a}=(\lambda,-3,2)$ 和 $\vec{b}=(1,2,-\lambda)$ 垂直，则 $\lambda=$__________。

5. 设 $\vec{a}=(3,-1,-2)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________，$\vec{a}\times\vec{b}=$__________。

6. 已知两点 $A(1,0,3)$ 和 $B(2,-1,4)$，O 为坐标原点，则 ΔAOB 的面积为 $($　　$)$

$A.\sqrt{6}$　　　　$B.\frac{\sqrt{14}}{2}$　　　　$C.\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　$D.\frac{\sqrt{6}}{2}$

7. 平面 $x+\sqrt{26}y+3z-3=0$ 与 xoy 面夹角为 $($　　$)$

$A.\frac{\pi}{4}$　　　　$B.\frac{\pi}{3}$　　　　$C.\frac{\pi}{6}$　　　　$D.\frac{\pi}{2}$

8. 求通过 $M(1,2,3)$，$N(1,1,1)$，$O(1,0,2)$ 三点的平面方程。

9. 点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离为_________。

10. 求直线 $\begin{cases} x-5y+2z-1=0 \\ z=2+5y \end{cases}$ 的点向式方程和参数方程。

11. 求过点 $M_1(1,2,1)$ 且平行直线 $\begin{cases} x-5y+2z=1 \\ 5y-z=2 \end{cases}$ 的直线方程为_________。

12. 过点 $M_1(1,1,1)$ 与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程为_________。

13. 直线 $L:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$ 与平面 $\pi:6x-2y+8z=7$ 的位置关系是(　　)

$A.$ 直线 L 与平面 π 平行　　　　$B.$ 直线 L 与平面 π 垂直

$B.$ 直线 L 在平面 π 上　　　　$D.$ 直线 L 与平面 π 只有一个交点，但不垂直

14. 设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$，则 L_1 与 L_2 夹角为(　　)

$A.\dfrac{\pi}{2}$　　$B.\dfrac{\pi}{3}$　　$C.\dfrac{\pi}{4}$　　$D.\dfrac{\pi}{6}$

15. 求直线 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=z$ 与平面 $x+2y+2z+6=0$ 的交点。

课时六 向量与空间几何（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 空间曲面及其方程	★★	0～3	选择、填空
2. 空间曲面的法线与切平面	★★★★	3～5	大题
3. 空间曲线的切线与法平面			

1. 空间曲面及其方程

题 1. 将 xoy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面方程______________。

解：$4x^2-9(y^2+z^2)=36$

题 2. 方程 $x^2+y^2=4$ 在空间直角坐标系中表示（　　）

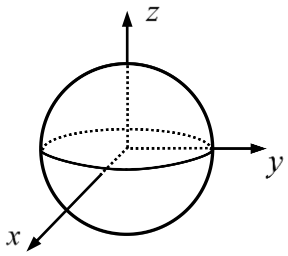
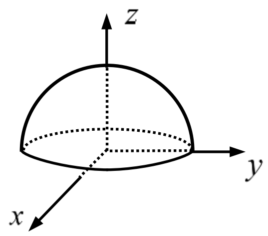
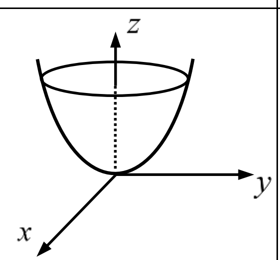
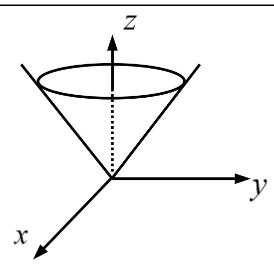
A. 圆　　*B.* 圆柱面　　*C.* 点　　*D.* 旋转抛物面

答案：*B.*

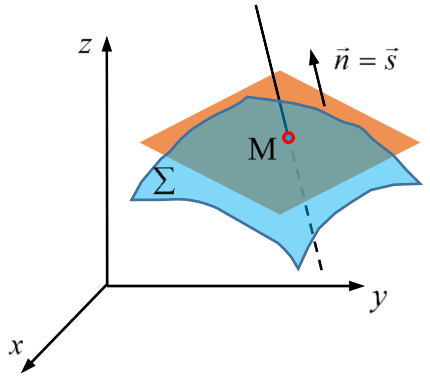
题 3. 曲线 $\Gamma:\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影方程是____________。

解：联立 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 消 z 可得 $2-x^2=x^2+2y^2$

整理 $x^2+y^2=1$

★常用空间曲面（必考，必须记住，而且要会画）			
$x^2+y^2+z^2=R^2$	$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$	$z=x^2+y^2$	$z=\sqrt{x^2+y^2}$
			

2. 空间曲面的法线与切平面



M 点求出的切平面的<u>法向量</u> $\vec{n}$ 即是法线的<u>方向向量</u> $\vec{s}$

题 1. 求 $2e^z-z+xy=4$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面与法线

法向量和方向向量求法：

① 构造 F

② 求 F_x,F_y,F_z

③ $\vec{n}=\vec{s}=(F_x,F_y,F_z)$

解：设 $F=2e^z-z+xy-4$

$$\text{则}\begin{cases}F_x=y=1\\F_y=x=2\\F_z=2e^z-1=1\end{cases}\quad\Rightarrow\vec{s}=\vec{n}=(1,2,1)$$

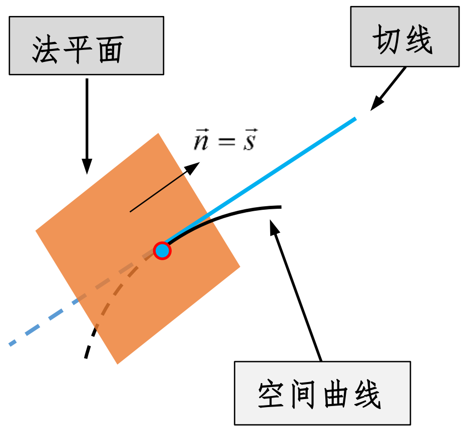
即切平面为 $(x-2)+2(y-1)+z=0$　　法线为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=z$

3. 空间曲线的切线与法平面

题 1. 求曲线 $x=t,y=2t^2,z=3t^2+t$ 在 $t=1$ 处的切线和法平面

解：当 $t=1$ 时，得点 $P(1,2,4)$

$$\begin{cases}x'=1\\y'=4t=4\\z'=6t+1=7\end{cases}\qquad\text{则 }\vec{s}=\vec{n}=(1,4,7)$$



故切线为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-4}{7}$

法平面为 $(x-1)+4(y-2)+7(z-4)=0$

题 2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3x \\ 2x-4y+6z=-4 \end{cases}$ 在 $M_0(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程。

解：$F=x^2+y^2+z^2-3x$

$$F_x=2x-3\big|_{(1,1,1)}=-1$$

$$F_y=2y\big|_{(1,1,1)}=2$$

$$F_z=2z\big|_{(1,1,1)}=2$$

$$\vec{n}_1=(-1,2,2)$$

$$\vec{n}_2=(2,-4,6)$$

$$\vec{s}=\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix}=(20,10,0)$$

切线方程：$\begin{cases} \dfrac{x-1}{20}=\dfrac{y-1}{10} \\ z-1=0 \end{cases}$

法平面方程：$20(x-1)+10(y-1)=0$

整理　$2x+y-3=0$

课时六 练习题

1. 将 xoy 坐标面上的椭圆 $x^2+4y^2=9$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面方程为_________。

2. 面 yoz 的抛物线 $y^2=3z$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面为__________。

3. 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 是由（　　）

   $A.$ xoz 平面上曲线 $z=x$ 绕 z 轴旋转而成

   $B.$ yoz 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 z 轴旋转而成

   $C.$ xoz 平面上曲线 $z=x$ 绕 x 轴旋转而成

   $D.$ yoz 平面上曲线 $z=|y|$ 绕 y 轴旋转而成

4. 空间直角坐标系中，方程 $y=x^2$ 表示（　　）

   $A.$ 椭球面　　$B.$ 圆柱面　　$C.$ 抛物线　　$D.$ 抛物柱面

5. 方程 $x^2+y^2=4$ 在空间解析几何中表示__________。

6. 曲线 r：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1\\ x-2z+3=0\end{cases}$，关于 xoy 面的投影柱面方程为（　　）

   $A.$ $x^2+20y^2-24x-116=0$　　$B.$ $4y^2+4z^2-16z-9=0$

   $C.$ $\begin{cases}x^2+20y^2-24x-116=0\\ z=0\end{cases}$　　$D.$ $\begin{cases}4y^2+4z^2-16z-9=0\\ x=0\end{cases}$

7. 求曲面 $x^2-y^2-z^2+1=0$ 在点 $M(4,2,1)$ 处的切平面与法线方程。

8. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程。

9. 过曲线 $\begin{cases}x=t^2+2t-2\\ y=e^t+t\\ z=2t-1\end{cases}$ 上对应 $t=0$ 的点切线与法平面方程。

10. 求曲线 $\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $M_0(1,-1,2)$ 处的切线及法平面方程。

课时七 二重积分—直角坐标系

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算 2. 极坐标下计算	必考	10～15	大题

1. 直角坐标系下计算

记作：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 　$f(x,y)$ 被积函数 $d\sigma=dxdy$ 面积元素 D 为积分区域

直角坐标系下计算二重积分步骤：

1）画出区域 D 的图形

2）写出 x，y 的范围（重点）

3）代入计算（注：被积函数保留至第三步计算）

x 型

x：$x_{左}\to x_{右}$ (常数 → 常数)

y：$y_{下}\to y_{上}$ (函数 → 函数)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{x_{左}}^{x_{右}}dx\int_{y_{下}=f(x)}^{y_{上}=f(x)}f(x,y)dy$$

y 型

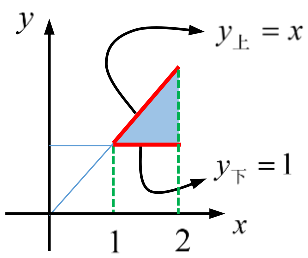
y：$y_{下}\to y_{上}$ (常数 → 常数)

x：$x_{左}\to x_{右}$ (函数 → 函数)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{y_{下}}^{y_{上}}dy\int_{x_{左}=f(y)}^{x_{右}=f(y)}f(x,y)dx$$

题 1. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 的 $y=1$，$x=2$，$y=x$ 围成.

1. 画出区域 D　　2. 写范围　　3. 代入计算

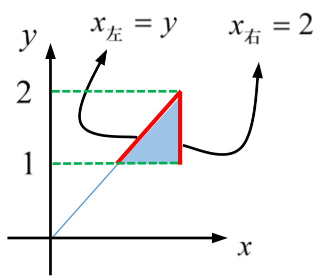


x 型：

$x:1\to 2$

$y:1\to x$

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_1^2dx\int_1^x xydy=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x\right)dx\ =\frac{9}{8}$$



y 型：

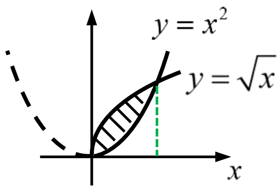
$y:1\to 2$

$x:y\to 2$

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_1^2dy\int_y^2 xydx=\int_1^2\left(2y-\frac{1}{2}y^3\right)dy\ =\frac{9}{8}$$

题 2. 写区域范围专项练习：计算 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

（1） D 为 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 围成

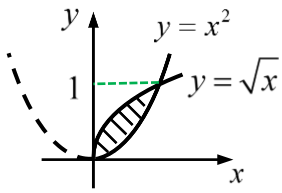


x 型：

$x:0\to1$

$y:x^2\to\sqrt{x}$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$



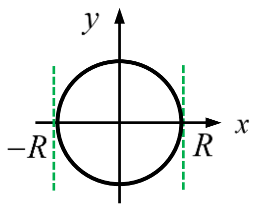
y 型：

$x:y^2\to\sqrt{y}$

$y:0\to1$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

（2） D 为 $x^2+y^2=R^2$ 围成

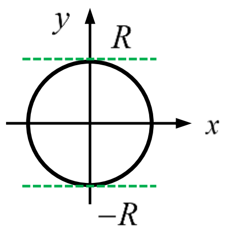


x 型：

$x:-R\to R$

$y:-\sqrt{R^2-x^2}\to\sqrt{R^2-x^2}$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-R}^{R} dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$$



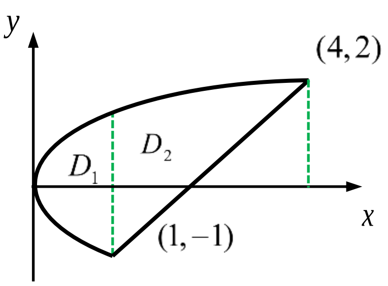
y 型：

$y:-R\to R$

$x:-\sqrt{R^2-y^2}\to\sqrt{R^2-y^2}$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-R}^{R} dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$$

（3） D 为 $y^2=x$， $y=x-2$ 围成



x 型：

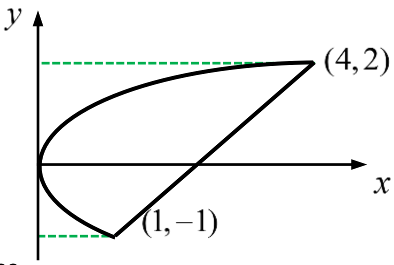
$$D_1:\begin{cases}x:0\to1\\ y:-\sqrt{x}\to\sqrt{x}\end{cases}$$

$$D_2:\begin{cases}x:1\to4\\ y:x-2\to\sqrt{x}\end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$



y 型：

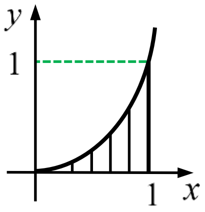
$$D:\begin{cases}y:-1\to2\\ x:y^2\to y+2\end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{2} dy\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx$$

题 3. 交换下列二次积分的积分次序.

① $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$　　　② $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$

解：①

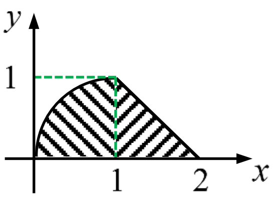


$y:0\to 1$

$x:\sqrt{y}\to 1$

原式 $=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$

②



$y:0\to 1$

$x:1-\sqrt{1-y^2}\to 2-y$

原式 $=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$

题 4. 计算 $\iint\limits_D(\frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2)dxdy$，其中 D 由 $x^2+y^2=1$ 围成.

解：$\iint\limits_D(\frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2)dxdy=\iint\limits_D\frac{xy^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+\iint\limits_D 2dxdy$

$$=\iint\limits_D 2dxdy=2\iint\limits_D dxdy=2\cdot\pi\cdot 1^2=2\pi$$

1）若被积函数 $f(x,y)=1$，则 $\iint\limits_D dxdy=A$（区域 D 的面积）

2）$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}0 & D\text{关于}x/y\text{轴对称，}f(x,y)\text{关于}y/x\text{为奇}\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy & D\text{关于}x/y\text{轴对称，}f(x,y)\text{关于}y/x\text{为偶}\end{cases}$

题 5. 环形区域 $D\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$，设 $I_1=\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D(x^2+y^2)^2d\sigma$，则（　）

$A.\ I_1<I_2$　　　$B.\ I_1>I_2$　　　$C.\ I_1=I_2$　　　$D.\ I_1\ge I_2$

答案：A.　　若在区域 D 上，$f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy\le\iint\limits_D g(x,y)dxdy$

课时七 练习题

1. 求 $\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma$，$D$是由 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的封闭区域.

2. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由 $y=x$, $xy=1, x=3$ 所围成的封闭区域.

3. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由 $y^2=x$, $y=x-2$ 所围成的封闭区域.

4. 交换下列积分次序：

①$\int_1^3 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy$　　②$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$　　③$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

5. 求 $I=\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$，其中 D 是由 $y=2x$, $x=2y$ 及 $x=2$ 所围成的封闭区域.

6. 求 $\iint\limits_D e^y dxdy$，其中 D 是由 $y=x$, $y=1$ 及 y 轴所围成的封闭区域.

7. 设区域 D 为 $|x|\le 2, |y|\le 1$，则 $\iint\limits_D (1+x^2y)dxdy=$________

8. 设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 4x\right\}$，则二重积分 $\iint\limits_D 2dxdy=$_________

9. 设 D 是 xoy 面上以 $(1,1), (-1,1), (-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 中在第一象限的部分，则积分 $\iint\limits_D (x^3y+\cos^3 x\sin y)d\sigma=($　　$)$

$A. 2\iint\limits_{D_1}\cos^3 x\sin yd\sigma$　　$B. 2\iint\limits_{D_1}x^3yd\sigma$　　$C. 4\iint\limits_{D_1}(\cos^3 x\sin y+x^3y)d\sigma$　　$D. 0$

10. 设 $I_k=\iint\limits_D (x+y)^k d\sigma$ $(k=1,2,3)$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+(y-1)^2\le 1\right\}$，则 I_1, I_2, I_3 间的大小关系是（　　）

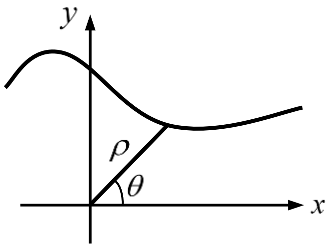
$A. I_1<I_2<I_3$　　$B. I_2<I_1<I_3$　　$C. I_2<I_3<I_1$　　$D. I_3<I_2<I_1$

课时八 二重积分—极坐标

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算 2. 极坐标下计算	必考	10～15	大题

2. 极坐标系下计算

补充知识点：极坐标



1）什么是极坐标？

② 用 θ 和 ρ 表示的函数

② ρ 是原点到函数上点的长度

③ θ 是和 x 轴的夹角

2）直角坐标转化极坐标

令 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 例 $x^2+y^2=4$

$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=4$

得 $\rho=2$（极坐标）

极坐标求解：

① 画出区域 D —— 根据直角坐标方程画图

②写出 θ 和 ρ 范围： —— θ 的范围覆盖且只能覆盖区域 D

θ：$\theta_1\to\theta_2$（常数）

ρ： $\rho_1(\theta)\to\rho_2(\theta)$（函数） —— ρ 必须从原点出发

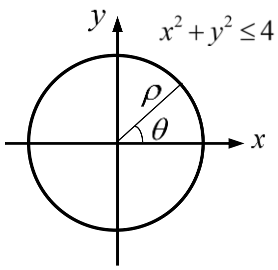
② 代入公式 —— 被积函数 x,y 用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 替换

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\underline{\rho\cos\theta,\rho\sin\theta})\underline{\rho}d\rho$$

不要忘了这里的 ρ 因子

题 1：求 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2\le4$

解：①画出区域 D



②写出 θ 和 ρ 范围

$\theta:0\to2\pi$

（覆盖整个圆区域）

$\rho:0\to2$

（任意角度 θ，画出 ρ）

③利用公式带入计算

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

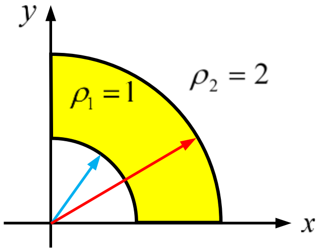
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}d\theta$$

$$=\frac{16\pi}{3}$$

题 2. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$， D 为 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 围成的第一象限的部分.

解：①画出区域 D　　②写出 θ 和 ρ 范围　　③代入公式计算



$$\theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$$

$$\rho: 1 \to 2$$

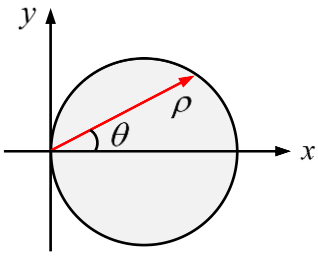
$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho \ =\frac{7\pi}{6}$$

题 3. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，$D$ 为 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的区域.

解：①画出区域 D　　②写出 θ 和 ρ 范围　　③代入公式计算



$$\theta: -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$$

$$\rho: 0 \to 2\cos\theta$$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

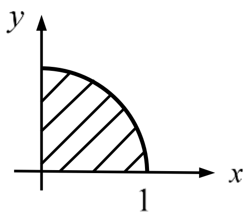
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\cdot\rho d\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{32}{9}$$

题 4. 积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$ 化为极坐标形式为____________.

解：①画出区域 D　　②写出 θ 和 ρ 范围　　③化为极坐标形式



$$\theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$$

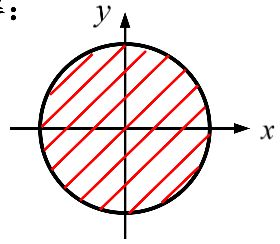
$$\rho: 0 \to 1$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho\cdot\rho d\rho$$

题 5. 设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_D (y^2-3x+6y+9)d\sigma=$ ________.

解：



$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$

$\rho:0\to 1$

$$原式=\iint\limits_D y^2 d\sigma+9\iint\limits_D d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma+9D$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho+9\pi=\frac{37}{4}\pi$$

若 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(y,x)dxdy$，

故 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D [f(x,y)+f(y,x)]dxdy$

课时八　练习题

1. 求 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2\le a^2$ 围成的区域.

2. 计算 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2=4$, $y=0$ 及 $y=x$ 所围成的封闭区域.

3. 计算 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆环形闭区域：$\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| 0\le x\le 2a, 0\le y\le\sqrt{2ax-x^2}\right\}$.

5. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+(y-1)^2=1$ 围成的区域.

6. 设有区域 $D=\left\{(x,y)\middle| 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$，则 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=$（　　）

   $A.\ 2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr$　　　　$B.\ 2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr-2\pi\int_1^2 rf(r)dr$

   $C.\ 2\pi\int_1^2 rf(r)dr$　　　　$D.\ 2\pi\int_1^2 rf(r)dr-2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr$

7. 设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_D (x^2-y)dxdy=$ ________

8. 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (x^2+5y^2-3xy+2x-y)dxdy=$ ________

课时九　三重积分

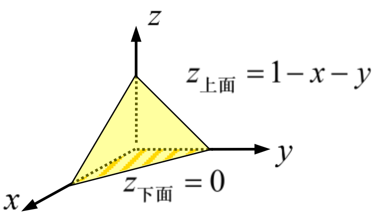
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直角坐标下计算	必考	10～15	大题
2. 柱坐标下计算			
3. 球坐标下计算	★★★	0～8	大题

1. 直角坐标下计算

记作：$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$　　$f(x,y,z)$是被积函数，Ω为积分区域，$dv=dxdydz$

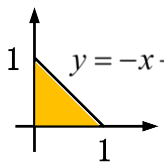
题 1. 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv$，其中$\Omega$为平面，$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$在第一象限部分.

①画出立体图，确定 z 的范围



$z:0\to 1-x-y$

②投影到 xoy 面，确定 x 和 y 的范围



$x:0\to 1$

$y:0\to 1-x$

③代入计算

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)dv=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y)dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)(1-x-y)dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x-x^2-2xy+y-y^2)dy$$

$$=\int_0^1(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6})dx$$

$$=\frac{1}{12}$$

直角坐标下计算：

① 画立体图

确定 z 的范围（$z_{下}\to z_{上}$）

② 投影图

确定区域 D 的范围（同二重积分）

③ 代入公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=$$

$$\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1=f(x)}^{y_2=f(x)}dy\int_{z_1=z(x,y)}^{z_2=z(x,y)}f(x,y,z)dz$$

2. 柱坐标下计算

柱坐标下计算：

① 画立体图

确定 z 的范围 $(z_{下} \to z_{上})$

② 投影图确定区域 D

θ 和 ρ 的范围

被积函数 x,y 用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 替换

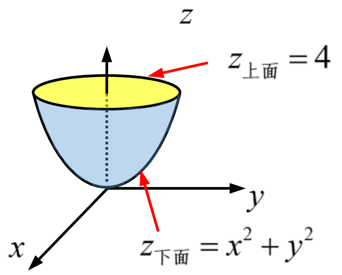
③ 代入公式

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \underline{\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho} \int_{z_{下}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_{上}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$$

二重积分极坐标

题 1. 计算 $\iiint_\Omega zdxdydz$. 其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与曲面 $z=4$ 围成.

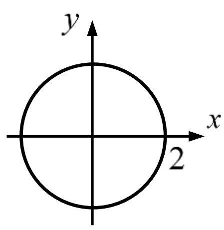
① 画出立体图，确定 z 的范围



z： $x^2+y^2 \to 4$

z： $\rho^2 \to 4$

②投影到 xoy 面，确定 θ 和 ρ 的范围



$\theta: 0 \to 2\pi$

$\rho: 0 \to 2$

③代入公式

$$\iiint_\Omega zdxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 z\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{1}{2}(16-\rho^4)\rho d\rho$$

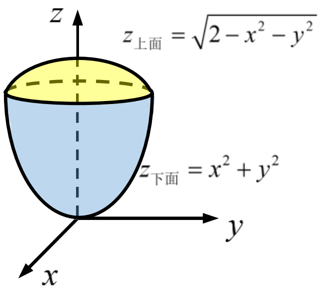
$$= \frac{64}{3}\pi$$

求投影区域的方法：<u>消去 z</u>

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=4$$

题 2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$. 其中 Ω 是由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 围成.

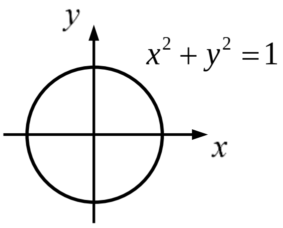
① 画出立体图，确定 z 的范围



z: $x^2+y^2 \to \sqrt{2-x^2-y^2}$

z: $\rho^2 \to \sqrt{2-\rho^2}$

② 投影到 xoy 面，确定 θ 和 ρ 的范围



$\theta: 0 \to 2\pi$

$\rho: 0 \to 1$

③ 代入公式

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$$

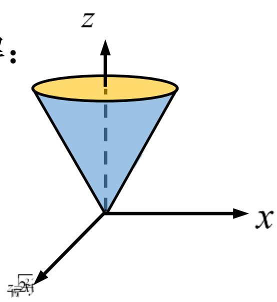
$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} zdz$$

$$=2\pi\int_0^1 \frac{1}{2}\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho$$

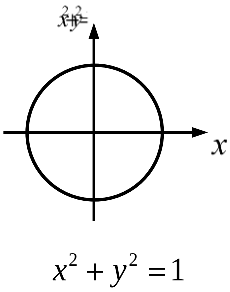
$$=\frac{7\pi}{12}$$

题 3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+xy+3)dv$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 围成.

解：



z: $\rho \to 1$



$\theta: 0 \to 2\pi$

$\rho: 0 \to 1$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+xy+3)dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} x^2dv+\iiint\limits_{\Omega} xydv+3\iiint\limits_{\Omega} dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} x^2dv+3V$$

$$=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv+\pi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho d\rho\int_{\rho}^1 \rho^2\,dz+\pi$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\pi\times\int_0^1 \rho(\rho^2-\rho^3)d\rho+\pi$$

$$=\frac{21}{20}\pi$$

①若 $f(x,y,z)=1$，则 $\iiint\limits_{\Omega} dv=V$（区域Ω的体积）

②$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\begin{cases}0 & 若\Omega关于xoy/yoz/xoz对称，f(x,y,z)关于z/x/y为奇\\ 2\iiint\limits_{\Omega'} f(x,y,z)\,dv & 若\Omega关于xoy/yoz/xoz对称，f(x,y,z)关于z/x/y为偶\end{cases}$

③若积分区域Ω关于 x,y,z 具有轮换对称性（即 x 换 y，y 换 z，z 换 x，Ω不变）

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(y)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$。

3. 球坐标下计算

球坐标下解题步骤：

① 画立体图

确定 φ 和 r 的范围。（$0\le\varphi\le\pi$）

② 投影图确定 θ 的范围

③ 代入公式

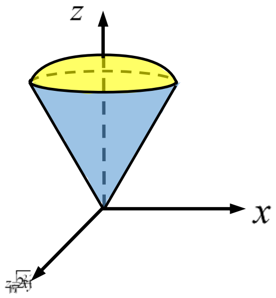
$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{r_{1(\varphi,\theta)}}^{r_{2(\varphi,\theta)}} f(r,\varphi,\theta)\,r^2\sin\varphi dr$$

题 1. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中Ω由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成.

解：



$\varphi:0\to\frac{\pi}{4}$

$\theta:0\to2\pi$

$r:0\to\sqrt{2}$

$$I=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\,r^2\sin\varphi dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin2\varphi d\varphi$$

$$=2\pi\times\frac{1}{4}\ =\frac{\pi}{2}$$

课时九　练习题

1. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，其中$\Omega$为三个坐标平面与$x+y+\frac{z}{3}=2$围成.

2. 计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中$\Omega$为平面$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$围成.

3. 求三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中$\Omega$是曲面$2z=x^2+y^2$与平面$z=2$所围成的立体.

4. 设空间区域Ω是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=\sqrt{8-x^2-y^2}$所围成，计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} zdv$.

5. 求曲面$z=2x^2+y^2$和$z=3-x^2-2y^2$所围成的几何体体积.

6. 已知区域Ω：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(1+xy)dv=$________.

7. 设空间区域$V_1: x^2+y^2+z^2\le R^2$，$z\ge 0$，$V_2: x^2+y^2+z^2\le R^2$，$x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$，则有（　）

$A.\iiint\limits_{V_1} xyzdv=4\iiint\limits_{V_2} xyzdv$　　　　$B.\iiint\limits_{V_1} xdv=4\iiint\limits_{V_2} xdv$

$C.\iiint\limits_{V_1} ydv=4\iiint\limits_{V_2} ydv$　　　　$D.\iiint\limits_{V_1} zdv=4\iiint\limits_{V_2} zdv$

课时十 曲线积分（一）

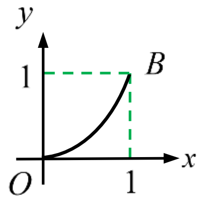
考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★	0～5	选择、填空、大题
2. 第二类曲线积分			
3. 格林公式	必考	6～10	大题

1. 第一类曲线积分 记作：$\int_L f(x,y)ds$

①画图确定 L 的函数	②计算 ds	③代入公式计算 $\int_L f(x,y)ds$
$y=f(x)$	$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}dx$	$=\int_{x_1}^{x_2} f[x,f(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}dx \quad (x_1<x_2)$
$x=f(y)$	$ds=\sqrt{1+x'^2(y)}dy$	$=\int_{y_1}^{y_2} f[f(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}dy \quad (y_1<y_2)$
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$	$=\int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \quad (t_1<t_2)$

题 1. L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 之间的一段弧，则 $\int_L \sqrt{y}ds=$______.

①画图确定 L



$L: y=x^2$

②计算 ds

$y'=2x$

$ds=\sqrt{1+(2x)^2}dx$

$=\sqrt{1+4x^2}dx$

③代入公式计算

$$\int_L \sqrt{y}ds=\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+4x^2}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4x^2)$$

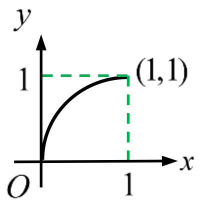
$$=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

注：积分区间只论大小，不论起点和终点

题 2. $\int_L \sqrt{x}ds$，其中 L 为抛物线 $x=y^2$ 所从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧

①画图确定 L



$L: x=y^2$

②计算 ds

$L: x'=2y$

$ds=\sqrt{1+(2y)^2}dy$

$=\sqrt{1+4y^2}dy$

③代入公式计算

$$\int_L \sqrt{x}ds=\int_0^1\sqrt{y^2}\sqrt{1+4y^2}\,dy$$

$$=\int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

题 3. 设 L 为周长为 a 的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds=(\quad)$.

$A.12a$ $\qquad$ $B.6a$ $\qquad$ $C.12$ $\qquad$ $D.0$

答案：A $\quad \oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds=\oint_L (3x^2+4y^2)ds=12\oint_L ds=12a$

第一类曲线积分的性质

1）若 $f(x,y)=1$，则 $\int_L f(x,y)ds=L$（积分曲线的长度）

2）$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0 & L\text{关于}x/y\text{轴对称，}f(x,y)\text{关于}y/x\text{为奇函数.}\\ 2\int_{L_{正}} f(x,y)\,ds & L\text{关于}x/y\text{轴对称，}f(x,y)\text{关于}y/x\text{为偶函数.}\end{cases}$

题 4. 计算 $\oint_L x^2 ds$，其中 L 为圆周：$x^2+y^2=4$.

解：$\oint_L x^2 ds=\frac{1}{2}\oint_L (x^2+y^2)ds=\frac{1}{2}\oint_L 4ds=2\oint_L ds=2\times 2\pi\times 2=8\pi$

若积分曲线 L 具有轮换对称性：x 换 y，y 换 x，L 不变，

则 $\int_L f(x)ds=\int_L f(y)ds$，即 $\int_L f(x)ds=\frac{1}{2}[\int_L f(x)ds+\int_L f(y)ds]$

课时十　练习题

1. 设 $I=\int_L y^2 ds$，其中 L 为 $y=2x$，$0\le x\le 1$，则 $I=$____________.

2. 计算曲线积分 $I=\oint_L xds$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界。

3. 设平面曲线 $L:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$，则 $\oint_L (4x+3y)^2 ds=$____________（设曲线长为 a）

4. $L=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=1\}$，则由 $\oint_L (xy+|x|)ds=$____________

课时十一　曲线积分（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分 2. 第二类曲线积分	★★★	0～5	选择、填空、大题
3. 格林公式	必考	6～10	大题

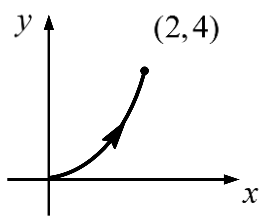
2. 第二类曲线积分

记作：$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

①画图确定 L 的函数	②化变量为统一，计算 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$
$y=f(x)$	将 y 换成 x：　$=\int_{x_{起}}^{x_{终}}\{P[x,f(x)]+Q[x,f(x)]\cdot f'(x)\}dx$
$x=f(y)$	将 x 换成 y：　$=\int_{y_{起}}^{y_{终}}\{P[f(y),y]\cdot f'(y)+Q[f(y),y]\}dy$
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	将 x,y 换成 t：　$=\int_{t_{起}}^{t_{终}}\{P[x(t),y(t)]\cdot x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$

题 1. 计算 $\int_L (x-y)dx+(x+y)dy$，其中 L 从 $(0,0)$ 沿 $y=x^2$ 到 $(1,1)$

解：①画图确定 L



$L: y=x^2$

$x: 0\to 1$

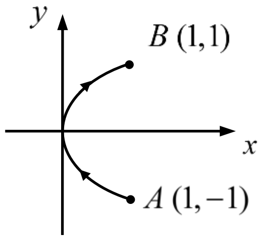
②统一变量代入公式计算

$$\int_L (x-y)dx+(x+y)dy$$
$$=\int_0^1 (x-x^2)dx+(x+x^2)2xdx$$
$$=\int_0^1 \left[(x-x^2)+(x+x^2)2x\right]dx$$
$$=\int_0^1 (x+x^2+2x^3)dx$$
$$=\frac{4}{3}$$

注：积分区间只论起点和终点，不论大小

题 2. 计算$\int_L xydx$，其中 L 是抛物线 $y^2=x$ 上从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 上的一段弧

解：①画图确定 L



$L: x=y^2$

$y:-1\to 1$

②统一变量代入公式计算

$$\int_L xydx=\int_{-1}^{1} y^2\cdot y\cdot 2ydy=2\int_{-1}^{1} y^4dy=\frac{4}{5}$$

注：没有 $Q(x,y)dy$ 项，默认为 0，不用管

课时十一 练习题

1. 计算曲线积分$\int_L (2xy-x^2)dx+(x^2+y)dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

2. 计算$\int_L (x^2-\sqrt{y})dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧.

3. 计算$\int_L ydx+xdy$，其中 L 为圆周 $x=R\cos\varphi$，$y=R\sin\varphi$ 上由 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 的一段弧.

课时十二　格林公式

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲线积分	★★★	0～5	选择、填空、大题
2. 第二类曲线积分			
3. 格林公式	必考	6～10	大题

3. 格林公式（可以看做第二类曲线积分的简便算法）

若积分弧段 L 为 <u>*封闭*</u> 的曲线，则 $\int_L Pdx+Qdy=\pm\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

1) D 是 L 围成的区域

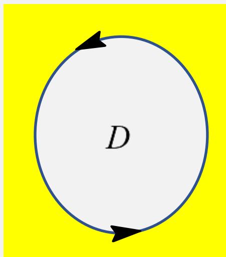
2) 注意 P 和 Q 对应的位置

3) 积分路径有正负

① 人沿 L 方向走，区域 D 在左手一侧则为正，反之为负

② 对于单连通区域（无洞的），逆时针为正，顺时针为负

③ 若积分路径为负，则 $\int_L Pdx+Qdy=-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$



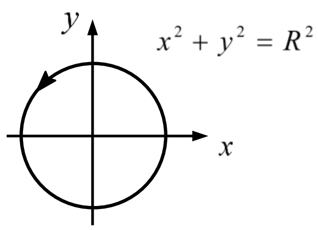
题型 1：常规型

例：计算曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=R^2$，L 为逆时针

解：L 为封闭圆周曲线

$P=2xy-2y$　　$Q=x^2-4x$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4$　　$\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2$



由格林公式得

$$\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D[(2x-4)-(2x-2)]dxdy$$

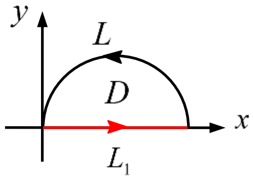
$$=-2\iint_D dxdy=-2A=-2\pi R^2$$

题型 2：缺线补线型

例：计算 $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$. 其中 L 为逆时针上半圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$，

$y \geq 0$.

解：补齐有向线段 L_1 ，构成封闭曲线。



$P = e^x \sin y - 2y$　　　$Q = e^x \cos y - 2$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y$　　　$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - 2$

在 $L + L_1$ 上：

$$\oint_{L+L_1} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 2)dxdy$$

$$= \iint_D 2dxdy = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi a^2 = \pi a^2$$

在 L_1 上：

代入 $y = 0$，被积函数为 0

$L_1 : y = 0$， $x : 0 \to 2a$

$$\int_{L_1} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy = 0$$

代入 0　为常数，故 $dy = 0$，含 dy 的项为 0

在 L 上：

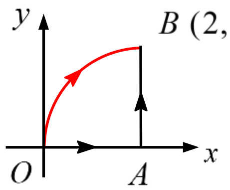
$$\int_L = \oint_{L+L_1} - \int_{L_1} = \pi a^2 - 0 = \pi a^2$$

题型 3：积分与路径无关型

（若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，则 $\int_L Pdx + Qdy$ 与积分路径无关，只与起点和终点有关）

例：设 L 为圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段弧，求 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin y)dy$.

解：



$P=x^2-y \qquad Q=-(x+\sin y)$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$ 　故积分与路径无关

取 $O\to A\to B$ 路径

在 OA 上积分 　$OA:\begin{cases}y=0\\ x:0\to 2\end{cases}$ 　$\Rightarrow \int_{OA}(x^2-y)dx-(x+\sin y)dy=\int_0^2 x^2dx=\dfrac{8}{3}$

在 AB 上积分 　$AB:\begin{cases}x=2\\ y:0\to 2\end{cases}$ 　$\Rightarrow \int_{AB}(x^2-y)dx-(x+\sin y)dy=\int_0^2 -(2+\sin y)dy=\cos 2-5$

则 $\int_L=\int_{OA}+\int_{AB}=\dfrac{8}{3}+\cos 2-5=\cos 2-\dfrac{7}{3}$

课时十二　练习题

1. 计算曲线积分 $\oint_L (xy^2+e^y)dy-(x^2y+e^x)dx$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2\,(a>0)$，取逆时针.

2. 计算 $\oint_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$，其中 L 由 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 围成，取逆时针方向.

3. 用格林公式计算 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是上半圆 $x^2+y^2=2x$ 上从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的一段有向弧.

4. 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$ 的一段弧，求曲线积分 $\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$（取逆时针方向为正方向）.

5. 计算 $\int_L (6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$，其中 L 为 $(1,2)$ 到 $(3,4)$ 的直线.

6. 计算 $\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(3x^2y^2-2y\sin x)dy$，其中 L 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由 $(0,0)$ 到 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 的一段弧.

课时十三 第一类曲面积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★★	0～5	选择、填空
2. 第二类曲面积分	必考	6～15	大题
3. 高斯公式			

1. 第一类曲面积分

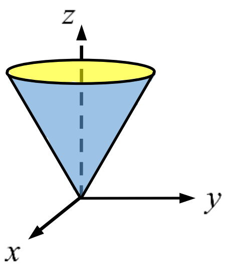
记作：$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$

题 1. $\iint\limits_{\Sigma} zdS$．其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上对应 $0\le z\le 1$ 的部分

解：

①积分面函数

Σ: $z=\sqrt{x^2+y^2}$



②计算 ds

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

第一类曲面积分解题步骤：

① 确定积分曲面 Σ： $z=z(x,y)$

② 计算 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

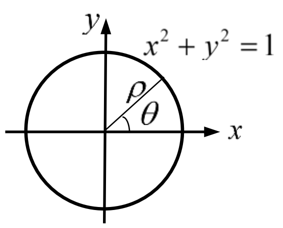
③ 投影确定区域 D_{xy}

④ 代入公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds=$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

③投影确定区域 D_{xy}



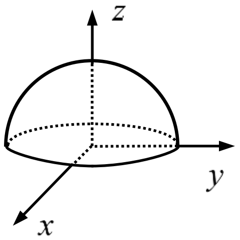
$$\theta:0\to 2\pi$$
$$\rho:0\to 1$$

④代入公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma} zdS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{2}\ dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\cdot\rho d\rho=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

题 2. 设曲面$\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$，则求$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+yz)dS=$________.

解：



$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+yz)dS=\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}a^2dS=\frac{a^2}{3}\cdot S=\frac{a^2}{3}\cdot\frac{1}{2}\times 4\pi a^2=\frac{2}{3}\pi a^4$$

第一类曲面积分的性质

1）若$f(x,y,z)=1$时，$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=S$（积分曲面的面积）.

2）$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\begin{cases}0 & \text{若}\Sigma\text{关于}xoy/yoz/xoz\text{对称，}f(x,y,z)\text{关于}z/x/y\text{为奇}\\ 2\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS & \text{若}\Sigma\text{关于}xoy/yoz/xoz\text{对称，}f(x,y,z)\text{关于}z/x/y\text{为偶}\end{cases}$$

3）若Σ具有轮换对称性（即x换y，y换z，z换x，Σ不变），

则$\iint\limits_{\Sigma}f(x)dS=\iint\limits_{\Sigma}f(y)dS=\iint\limits_{\Sigma}f(z)dS$

课时十三　练习题

1. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$所截得的部分.

2. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}zdS$，其中Σ为上半球面$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

3. 求旋转抛物面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于$z=0$与$z=\frac{1}{2}$之间的面积.

4. 设S为平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一象限的部分，则曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=$__________.

5. 设曲面Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，则$\oiint\limits_{\Sigma}(2x^2+y^2)dS=$__________.

课时十四 第二类曲面积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★★	0～5	选择、填空
2. 第二类曲面积分	必考	6～15	大题
3. 高斯公式			

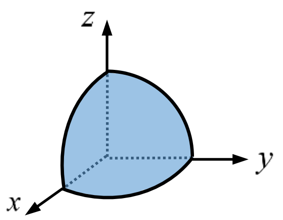
2. 第二类曲面积分（一般不会单独考，在高斯公式中涉及）

记作：$\iint\limits_{\Sigma} \underline{P(x,y,z)dydz} + \underline{Q(x,y,z)dzdx} + \underline{R(x,y,z)dxdy}$

> 要在积分曲面上对以上三部分分别计算，三部分解题思路和步骤是一样的，因为过程太过麻烦，所以基本不考，即使考到，也只考其中一部分。

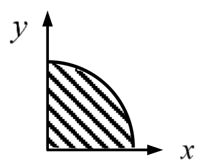
题 1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上侧在 $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 部分.

解：



1) 积分曲面

$\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



2) 投影确定 D_{xy}

$\theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$

$\rho: 0 \to 1$

3) 代入计算

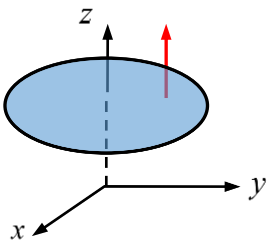
$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho \;= \frac{\pi}{6}$$

> 解题步骤：
>
> 例：$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$
>
> ① 确认积分曲面 Σ：$z=z(x,y)$
>
> ② 投影，将 $\Sigma \to xoy$ 面，确定 D_{xy}
>
> ③ 代入公式计算
>
> $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$
>
> （注：若沿 Σ 的上、前、右方积分，为正反之为负）

题 2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} 2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+zdxdy$，其中$\rho:0\to1$是沿曲面$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=4\end{cases}$上侧.

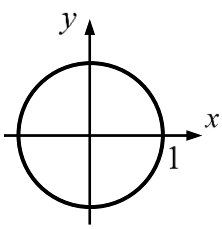
解：



①积分曲面$\rho:0\to1$： $z=4$

（因为 $z=4$ 为常数，所以 $dz=0$）

$$I=\iint\limits_{\Sigma} 2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$$



②将曲面$\rho:0\to1$投影到 xoy 面确定 D_{xy}

③代入计算

$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=\iint\limits_{D} 4dxdy=4\cdot\pi\cdot1^2=4\pi$$

课时十五　高斯公式

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 第一类曲面积分	★★★★	0～5	选择、填空
2. 第二类曲面积分	必考	6～15	大题
3. 高斯公式			

3. 高斯公式（可以看做第二类曲面积分的简单算法，经常考）

若积分曲面Σ为 封闭曲面 的 外侧

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

1)　Ω是封闭曲面Σ围成的空间区域

2)　高斯公式是把第二类曲面积分转化成了三重积分计算其结果

3)　注意D、Q、R对应的位置

4)　沿曲面外侧为正，内侧为负（一般都是外侧）

题型一：常规型

例：计算$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中$\Sigma$是$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧

解：积分曲面Σ为封闭的

$P = x \qquad Q = y \qquad R = z$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = 1$

球的体积公式：$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

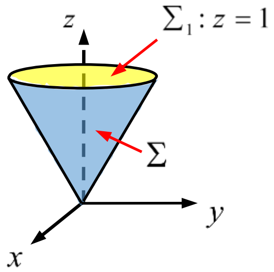
由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_{\Omega} (1+1+1)dxdydz$$

$$= 3\iiint_{\Omega} dxdydz = 3V = 3 \times \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

题型二：缺面补面型

例：设Σ是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=0$和$z=1$所截得部分的下侧，利用高斯公式计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} xdzdy+ydzdx+(z^2-2z)dxdy$



解：补齐Σ_1面形成封闭曲面

$P=x \qquad Q=y \qquad R=z^2-2z$

$\dfrac{\partial P}{\partial x}=1 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial y}=1 \qquad \dfrac{\partial R}{\partial z}=2z-2$

在$\Sigma+\Sigma_1$上的积分

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdzdy+ydzdx+(z^2-2z)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+2z-2)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}2zdxdydz$$

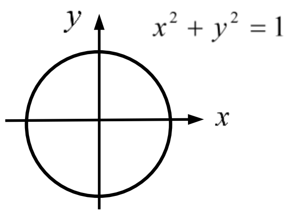
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 2zdz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=\frac{\pi}{2}$$

在Σ_1上的积分

Σ_1： $z=1$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xdzdy+ydzdx+(z^2-2z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2-2z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(1-2)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(-1)dxdy$$

将Σ_1投影到xoy面上



根据第二类曲面积分公式计算：

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(-1)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(-1)dxdy=-\pi$$

在Σ上的积分

$$\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$$

课时十五 练习题

1. 计算Σ是球面$x^2+y^2+z^2=9$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma} xdydz+ydxdz+zdxdy=$__________.

2. 计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+x(y-z)dydz$，其中闭曲面$\Sigma$由$x^2+y^2=1$，$z=0$，$z=3$所围成的外侧。

3. 计算第二类曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+yz^2)dydz+(4y+1)dzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$的下侧。

4. 计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2+1$ $(1\le z\le 2)$，取下侧。

5. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$，设其中$\Sigma$为曲面$x^2+y^2=2z$被平面$z=2$所截得部分的下侧。

6. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$，其中$\Sigma$是抛物面$z=2-x^2-y^2$位于$z\ge 0$部分的上侧。

课时十六　常数项级数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 级数概念	★★	0~3	选择、填空
2. 审敛法	必考	3~5	选择、填空、大题
3. 交错级数	★★★★★	0~3	
4. 绝对/条件收敛	★★★	0~6	

1.1 认识级数

记作：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$　　　展开式：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$

令 $S(n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim_{n\to\infty} S(n) = A$ 有极限，则级数收敛。反之发散。

题 1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 的和为________.

解：$S(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\cdots \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

题 2. 级数 $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$ 的和 $S =$________.

解：$S(n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

1.2 无穷级数的性质

1）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；但 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定是收敛的

2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} kU_n$ 和级数 $k\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 具有相同敛散性

3）

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} V_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} (U_n + V_n)$
收	收	收
收	发	发
发	发	不确定

题 1. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+n}$ 的敛散性.

解：$u_n = \frac{2n^2}{n^2+n}$　　$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+n} = 2 \neq 0$　　故级数发散

题 2. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = (\quad)$

A. 收敛　　*B.* 发散　　*C.* 敛散性不确定　　*D.* 绝对收敛

答案：*B.*

1.3 两个常用的参照级数

1）几何级数：$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ $\begin{cases} |q| < 1 & \text{级数收敛} \\ |q| \geq 1 & \text{级数发散} \end{cases}$

2）调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$　是发散　　扩展：对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p > 1 & \text{级数收敛} \\ p \leq 1 & \text{级数发散} \end{cases}$

两种参照级数，经常用到，可以作为结论，直接使用

2. 正项级数审敛法

题 1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$ 的敛散性.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & \text{收敛}\\ \rho>1 & \text{发散}\\ \rho=1 & \text{不确定}\end{cases}$$

解：$u_n=\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{2^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 3^n}{2^n}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{n+1})=\frac{2}{3}<1$$

故级数收敛.

题 2. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$ 的敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & \text{收敛}\\ \rho>1 & \text{发散}\\ \rho=1 & \text{不确定}\end{cases}$$

解：$u_n=(\frac{n}{2n+1})^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n+1)}=\frac{1}{2}<1$$

故级数收敛.

题 3. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 的敛散性

如果可以用等价无穷小替换，

则他们有相同的敛散性

解：$n\to\infty$ 时，$\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$ （等价无穷小）

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 有相同的敛散性

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数，发散　　故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 也是发散的

3. 交错级数

记作：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots\cdots + (-1)^n u_n \cdots$（正负项交错）

题 1. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 敛散性

解：$u_n = \frac{1}{n}$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$　且 $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} = u_n$

故交错级数是收敛的

> 交错级数判定方法：
>
> $\begin{cases}\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \\ u_{n+1} \le u_n\end{cases} \Rightarrow$ 收敛
>
> 注：u_n 不包括 (-1) 项

4. 绝对收敛和条件收敛

1）若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定也收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

2）若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛

题 1. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是绝对收敛还是条件收敛.

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$　是调和级数　发散

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为交错级数，满足 $\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\end{cases}$　收敛

故级数为条件收敛

课时十六　练习题

1. 求级数的和：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=$________.

2. 级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$的和等于________.

3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{q^n}$收敛（$a$为常数），则$q$满足的条件是（　　）.

$A.\ q=1$　　$B.\ |q|<1$　　$C.\ q=-1$　　$D.\ |q|>1$

4. 当（　　）时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ (p>0)$是收敛的.

$A.\ p=1$　　$B.\ p<1$　　$C.\ p>1$　　$D.\ p\neq 1$

5. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=2$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(3u_n-\frac{5}{2^n})$________

$A.$收敛到-4　　$B.$收敛到1　　$C.$发散　　$D.$无法求和

6. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$的敛散性.

7. 判定正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^n}$的敛散性.

8. 判定正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$的敛散性.

9. 判断正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2\tan(\frac{\pi}{3^n})$的敛散性.

10. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$的敛散性为________.

11. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$的敛散性.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{n}$的收敛性为__________（绝对收敛、条件收敛、发散）.

13. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(e^{\frac{1}{n}}-1)$的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛。（写出判别过程）

14. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\cdot 6^{n}}$是否收敛，若收敛，指出绝对收敛还是条件收敛。

课时十七　幂级数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 收敛域	必考	6~10	大题
2. 和函数			
3. 幂级数展开	★★★★★	0~8	
4. 傅里叶级数	★★	0~3	选择、填空

1. 收敛域

幂级数记作：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

展开式：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$（含 x 项，且敛散性随 x 的取值不同而不同）

题 1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

解：$u_n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}\right| = |x| < 1$$

$\Rightarrow -1 < x < 1$

收敛半径：$R = 1$

收敛区间：$x \in (-1,1)$

当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为交错级数，

满足 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \end{cases}$，故收敛

则收敛域为 $x \in (-1,1]$

收敛域解题步骤：

1） $u_n = a_n x^n$

2） $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$

3） $a < x < b$

收敛半径：$R = \frac{b-a}{2}$

收敛区间：$x \in (a,b)$

收敛域：验证端点 $x=a$，$x=b$ 的敛散性。

题 2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$ 的收敛域.

解：$u_n=\frac{(x-2)^n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}|x-2|<1$$

$\Rightarrow\ 0<x<4$

收敛半径：$R=2$　　　收敛区间：$x\in(0,4)$

$x=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散

$x=4$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散

则收敛域为 $x\in(0,4)$

题 3. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n}$ 的收敛域.

解：$u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)x^{2n+2}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}x^2<1$$

$\Rightarrow\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

收敛半径：$R=\sqrt{2}$　　　收敛区间：$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$x=-\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)$ 发散

$x=\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)$ 发散　　　则收敛域为 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

2. 和函数

记作：$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ （对幂级数求和）

性质 1：可导并逐项可导 $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$

性质 2：可积并逐项可积 $\int_0^x S(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\,dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$

✧ 麦克劳林公式，最常考 $\dfrac{1}{1-x}$

$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n$	$(-1<x<1)$
$\dfrac{1}{1+x}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2+\ldots\ldots+(-1)^nx^n$	$(-1<x<1)$
$\ln(1+x)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$(-1<x\le 1)$
e^x	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$	$(-\infty<x<+\infty)$
$\sin x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty<x<+\infty)$
$\cos x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\dfrac{x^2}{2}+\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(-\infty<x<+\infty)$

题 1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数

和函数 $S(x)$ 解题步骤:

①先求收敛域

②先积后导/先导后积

③利用麦克劳林公式

解: $u_n = nx^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{n}\cdot x\right| = |x| < 1$$

$\Rightarrow -1 < x < 1$

收敛区间: $x \in (-1,1)$

$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散

$x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散

则收敛域为 $x \in (-1,1)$

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

先积: $\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x} - 1$

后导: $S(x) = \left[\int_0^x S(x)dx\right]' = \left[\frac{1}{1-x} - 1\right]' = \frac{1}{(1-x)^2}$

题 2. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n}$的和函数

解：$u_n=\frac{x^{2n+1}}{2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+2}\cdot\frac{2n}{x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n}{2n+2}\cdot x^2\right|=x^2<1$$

$\Rightarrow\ -1<x<1$

收敛区间：$x\in(-1,1)$

$x=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n}$发散

$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散

则收敛域为$x\in(-1,1)$

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$

再令$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$

$$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^{n-1}=x\left[1+x^2+(x^2)^2+\dots+(x^2)^n\right]=\frac{x}{1-x^2}$$

$$S_1(x)=\int_0^x S_1'(x)dx=\int_0^x\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

$$S(x)=x\cdot S_1(x)=-\frac{x}{2}\ln(1-x^2)$$

题 3. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$ 的和.

解：先求 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

$$u_n=(n+1)x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\cdot x\right|=|x|<1$$

$$\Rightarrow\ -1<x<1$$

$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ 发散

$x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)$ 发散

则收敛域为 $x\in(-1,1)$

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=x+x^2+...+x^n=\frac{1}{1-x}-1$$

$$S(x)=\left(\int_0^x S(x)dx\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=4$$

3. 幂级数展开

题 1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2+(x-1)}-\dfrac{1}{3+(x-1)}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{3}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+\cdots(-1)^n x^n+\cdots}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{3})^n$$

$$\frac{(x-1)}{2}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(-1,3)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^n$$

$$\frac{(x-1)}{3}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(-2,4)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n\qquad x\in(-1,3)$$

4. 傅里叶级数

题 1. 设有周期为 2π 的函数，它在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$，其傅里叶级数在点 $x=\pi$ 收敛到__________.

解：$\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}(1+x^2)=1+\pi^2$

$\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-\pi^+}(-1)=-1$

$$\frac{\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)+\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)}{2}=\frac{1+\pi^2-1}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

则傅里叶级数在点 $x=\pi$ 收敛到 $\dfrac{\pi^2}{2}$

课时十七 练习题

1. 求无穷级数的和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n}$的收敛半径和收敛域.

2. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$的收敛半径与收敛域.

3. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n^2}$的收敛域.

4. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}\cdot x^{2n}$的收敛半径是________.

5. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的收敛域及和函数.

6. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$的收敛域与和函数.

7. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$的收敛域与和函数.

8. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的和函数.

9. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$的收敛域及和函数$S(x)$，并计算数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}$的和.

10. 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$展开成关于$(x+4)$的幂级数.

11. 将函数$f(x)=\ln(3+x)$展开成关于$(x-1)$的幂级数.

12. 已知$f(x)$是周期为 2 的周期函数，且$f(x)=\begin{cases}3x^2+2 & (0<x<1)\\ x & (-1\le x\le 0)\end{cases}$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=0$处收敛于__________.

13. 设$f(x)$为周期为2π的函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}x^2, & -\pi\le x<0\\ \pi-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=2\pi$处收敛于______.

课时一 练习题答案

1. $\{(x,y)\,|\,y^2-2x>-1\}$.

2. $\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.

3. $-\dfrac{1}{6}$.

4. $-\dfrac{1}{4}$.

5. 2.

6. D.

7. 2.

8. B.

9. D.

课时二 练习题答案

1. A.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$； $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$.

3. 1.

4. $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $\left(y+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(x-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$.

6. $\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $\dfrac{y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{x}{x^2+y^2}dy$.

7. $y^2z^3e^{xy^2z^3}dx+2xyz^3e^{xy^2z^3}dy+3xy^2z^2e^{xy^2z^3}dz$.

8. $\dfrac{4}{7}dx+\dfrac{2}{7}dy$.

9. C.

10. $\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{y}{x}}dx-\frac{x}{2y^2}\sqrt{\frac{y}{x}}dy$.

11. B.

12. $f_y(0,0)$.

13. $24x$；e^y；-1；-1.

14. $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\ln y+\frac{\sin y}{x}$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\ln y-\frac{\sin y}{x^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{e^x}{y}+\frac{\cos y}{x}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^x}{y}+\ln x\cos y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{e^x}{y}+\frac{\cos y}{x}$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}-\ln x\sin y$.

15. $-4y\sin 2x$.

16. D.

17. D.

课时三　练习题答案

1. $ye^{xy}\ln(x^2+y^2)+\frac{2xe^{xy}}{x^2+y^2}$；$xe^{xy}\ln(x^2+y^2)+\frac{2ye^{xy}}{x^2+y^2}$.

2. $\cos(xy)-y(x+y)\sin(xy)$；$\cos(xy)-x(x+y)\sin(xy)$.

3. $-\frac{yf_1'}{x^2}+f_2'$；$\frac{f_1'}{x}$；$-\frac{f_1'}{x^2}-\frac{yf_{11}''}{x^3}+\frac{f_{21}''}{x}$.

4. $f(y,xy)+xyf_2'$；$f_1'+2xf_2'+xy(f_{21}''+xf_{22}'')$.

5. $2xf_1'+ye^{xy}f_2'$；$2f_1'+2x(2xf_{11}''+ye^{xy}f_{12}'')+y^2e^{xy}f_2'+ye^{xy}(2xf_{21}''+ye^{xy}f_{22}'')$.

6. 证明：$\frac{\partial z}{\partial x}=y+f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{yf'\left(\frac{y}{x}\right)}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x+f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)-yf'\left(\frac{y}{x}\right)+xy+yf'\left(\frac{y}{x}\right)=2xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)=xy+z.$$

7. $-2xz+\frac{z}{x}$； $-2yz$.

8. $-\frac{1}{3}$； $-\frac{2}{3}$.

9. $\frac{yz\cos(xyz)-ye^{xy+z}}{e^{xy+z}-xy\cos(xyz)}$； $\frac{xz\cos(xyz)-xe^{xy+z}}{e^{xy+z}-xy\cos(xyz)}$.

10. $\frac{-z^2}{(x+z)^3}$.

11. $2dx$.

课时四　练习题答案

1. $\frac{2}{9}$； $\frac{4}{9}$； $-\frac{4}{9}$.

2. $\frac{8}{\sqrt{14}}$.

3. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

4. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$； 1.

5. 无极值.

6. A.

7. ×.

8. D.

9. 当长宽高都是 2m 时，造价最低.

10. 当相邻两边长分别为 $\frac{2p}{3},\frac{p}{3}$ 时最大.

11. 16；-112.

课时五 练习题答案

1. $\sqrt{33}$.

2. B.

3. A.

4. -6.

5. 3;(5,1,7).

6. B.

7. B.

8. $x=1$.

9. $\sqrt{3}$.

10. $\frac{x+3}{-5}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{5}$; $\begin{cases} x=-5t-3 \\ y=t \\ z=5t+2 \end{cases}$.

11. $\frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{5}$.

12. $x-3y-z+3=0$.

13. B.

14. B.

15. $(0,-4,1)$.

课时六 练习题答案

1. $x^2+z^2+4y^2=9$.

2. $x^2+y^2=3z$.

3. B.

4. D.

5. 圆柱面.

6. A.

7. $4x-2y-z-11=0$； $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

8. $2x+4y-z-5=0$.

9. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$； $x+y+z+2=0$.

10. $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$； $8x+10y+7z-12=0$.

课时七　练习题答案

1. $\dfrac{6}{55}$.

2. $10-\dfrac{1}{2}\ln 3$.

3. $\dfrac{45}{8}$.

4. ①$\int_0^2 dy\int_{y+1}^3 f(x,y)dx$； ②$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$； ③$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

5. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\cos 2$.

6. 1.

7. 8.

8. 8π.

9. A.

10. A.

课时八　练习题答案

1. $\pi(e^{a^2}-1)$.

2. π.

3. $-6\pi^2$.

4. $\frac{16}{9}a^3$.

5. $\frac{32}{9}$.

6. C.

7. $\frac{\pi}{4}$.

8. 24π.

课时九 练习题答案

1. 2.

2. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$.

3. $\frac{16\pi}{3}$.

4. 8π.

5. $\frac{3\pi}{2}$.

6. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

7. D.

课时十 练习题答案

1. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

2. $\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1}{12}$.

3. $144a$.

4. $2\sqrt{2}$.

课时十一 练习题答案

1. $\frac{7}{6}$.

2. $\frac{8}{3}$.

3. 0.

课时十二 练习题答案

1. $\frac{\pi a^4}{2}$.

2. $\frac{1}{30}$.

3. $-\frac{8}{3}$.

4. $-\frac{\pi}{2}$.

5. 236.

6. $\frac{\pi^2}{4}-1$.

课时十三 练习题答案

1. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

2. 27π.

3. $\frac{(4\sqrt{2}-2)\pi}{3}$.

4. $4\sqrt{61}$.

5. $4\pi a^4$.

课时十五 练习题答案

1. 108π.

2. $-\frac{9\pi}{2}$.

3. π.

4. $-\frac{\pi}{2}$.

5. 8π.

6. -5π.

课时十六　练习题答案

1. $\frac{3}{2}$.

2. $\frac{3}{4}$.

3. D.

4. C.

5. B.

6. 收敛.

7. 收敛.

8. 收敛.

9. 收敛.

10. 收敛.

11. 收敛.

12. 条件收敛.

13. 条件收敛.

14. 绝对收敛.

课时十七　练习题答案

1. $R=3$; $[-3,3)$.

2. $R=1$; $[4,6)$.

3. $[0,2]$.

4. $R=2$.

5. $(-1,1)$; $\dfrac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$.

6. $(-1,1)$; $S(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}, x\in(-1,1)$.

7. $[-2,4)$; $S(x)=\ln 3-\ln(4-x),\ x\in[-2,4)$.

8. $S(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x}+1 & ,x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

9. $(-1,1)$; $S(x)=\dfrac{x(x+1)}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$; $\dfrac{1}{9}$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$; $x\in(-6,-2)$.

11. $\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}4^{-n}}{n}(x-1)^n, x\in(-3,5]$.

12. 1.

13. $\dfrac{\pi}{2}$.