全概率定理和贝叶斯定理

例5 市上供应灯泡中, 甲厂产品(A)占70%, 乙厂($\bar{A}$)占30%, 甲,乙厂的产品合格率分别为95%, 80%, B表示产品合格, 求总合格率$P(B)$

解　由于$B=AB+\bar{A}B$为二互斥事件之和

$$P(A)=70\% \qquad P(\bar{A})=30\%$$

$$P(B\,|\,A)=95\% \qquad\qquad P(B\,|\,\bar{A})=80\%$$

则$P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=0.7\times0.95=0.665$

$$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B\,|\,\bar{A})=0.3\times0.8=0.24$$

$$P(B)=P(AB+\bar{A}B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$$

$$=P(A)P(B\,|\,A)+P(\bar{A})P(B\,|\,\bar{A})$$

$$=0.7\times0.95+0.3\times0.8=0.665+0.24=0.905$$

还可以进一步计算, 如果买到一合格品, 此合格品是甲厂生产的概率$P(A|B)$:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{0.7\times0.95}{0.7\times0.95+0.3\times0.8}=\frac{0.665}{0.905}\approx0.735$$

例4 10个考签中有4个难签, 3人参加抽签(不放回), 甲先, 乙次, 丙最后,设事件A,B,C分别表示甲乙丙各抽到难签, 求乙抽到难签的概率$P(B)$

解 利用$B=AB+\bar{A}B$, 且AB与$\bar{A}B$互斥, 得

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{10},\ P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{12}{90}$$

$$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{24}{90}$$

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=\frac{12}{90}+\frac{24}{90}=\frac{36}{90}=\frac{4}{10}=0.4$$

从形式上看事件B是比较复杂的,

仅仅使用加法法则或乘法法则无法计算其概率. 于是先将复杂的事件B分解为较简单的事件AB与$\overline{A}B$; 再将加法法则与乘法法则结合起来, 计算出需要求的概率. 把这个想法一般化, 得到全概率定理, 又称全概率公式.

<u>全概率定理</u> 如果事件$A_1,A_2,\ldots$构成一个完备事件组，并且都具有正概率，则对任意一事件B有

$$P(B)=\sum_i P(A_i)P\left(B\mid A_i\right)$$

证 由于$A_1,A_2,\ldots$两两互不相容，因此，$A_1B,A_2B,\ldots$也两两互不相容。且

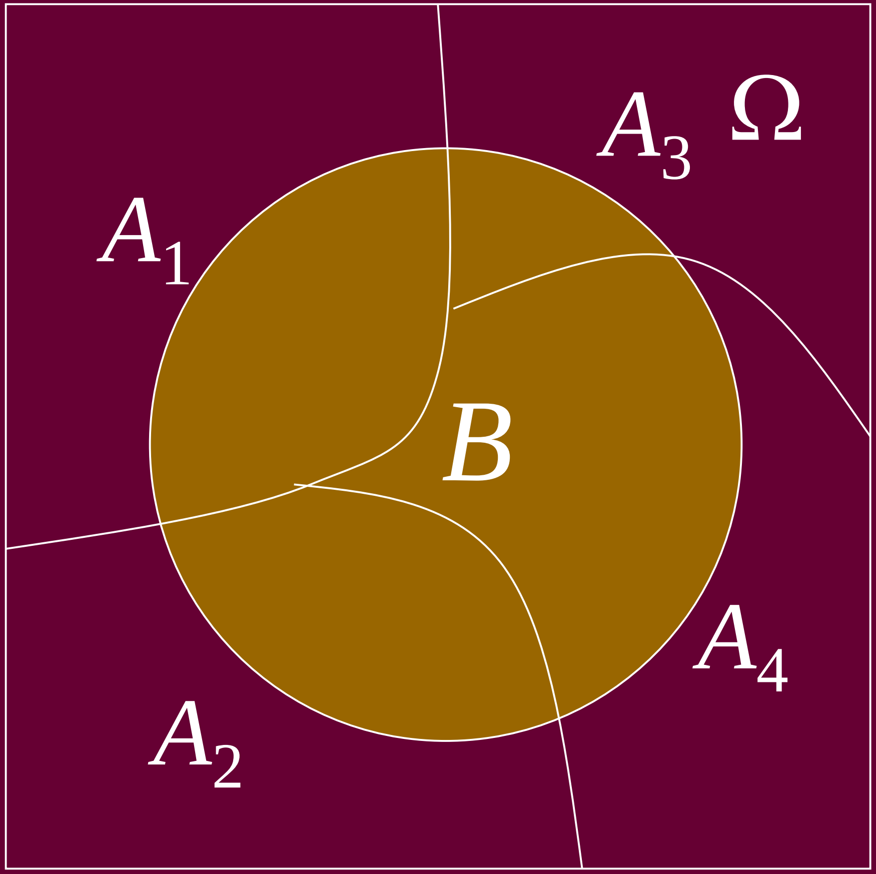
$$B=B\Omega=B(\sum_i A_i)=\sum_i BA_i$$

由加法法则和乘法法则得

$$P(B)=\sum_i P(A_iB)=\sum_i P(A_i)P(B\mid A_i)$$

全概率定理的图形理解

如图所示, 事件B的面积为B与各个事件A_i相交的面积之和.



例6 12个乒乓球都是新球, 每次比赛时取出3个用完后放回, 求第3次比赛时取到的3个球都是新球的概率

解 假设A_0,A_1,A_2,A_3为第一次取到0个,1个,2个,3个新球, 当然, 因为一开始都是新球, 因此第一次只能取到3个新球, 即A_3为必然事件, 而A_0,A_1,A_2都是不可能事件.

再假设B_0,B_1,B_2,B_3为第二次取到0个,1个,2个3个新球, 当第二次取球的时候, 12个乒乓球中必然有3个旧球, 而B_0,B_1,B_2,B_3构成完备事件组, 并能够求出它们的概率, 再假设C_3为最后取到3个新球,则针对C_3使用全概率公式.

则有:

$$P(B_0)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220},P(B_1)=\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}=\frac{27}{220},$$

$$P(B_2)=\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{108}{220},P(B_3)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{84}{220},$$

综合就是$P(B_i)=\dfrac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3}\quad(i=0,1,2,3)$

$$P(C_3\mid B_0)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{84}{220},P(C_3\mid B_1)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}$$

$$P(C_3\mid B_2)=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{35}{220},P(C_3\mid B_3)=\frac{C_6^3}{C_{12}^3}=\frac{20}{220}$$

综合就是

$$P(C_3 \mid B_i) = \frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3} \quad (i = 0,1,2,3)$$

最后套用全概率公式得

$$P(C_3) = \sum_{i=0}^{3} P(B_i)P(C_3 \mid B_i)$$

$$= \frac{1}{220} \cdot \frac{84}{220} + \frac{27}{220} \cdot \frac{56}{220} + \frac{108}{220} \cdot \frac{35}{220} + \frac{84}{220} \cdot \frac{20}{220}$$

$$\approx 0.146$$

贝叶斯定理 若$A_1,A_2,\ldots,$构成一个完备事件组,并且它们都具有正概率,则对于任何一个概率不为零的事件B, 有

$$P(A_m \mid B) = \frac{P(A_m)P(B \mid A_m)}{\sum_i P(A_i)P(B \mid A_i)} \quad (m = 1,2,\ldots)$$

证 由条件概率的定义得

$$P(A_m \mid B) = \frac{P(A_m B)}{P(B)}$$

再对分子用乘法法则,对分母用全概率公式得定理之公式,即贝叶斯公式

例7 假定某工厂甲乙丙3个车间生产同一种螺钉, 产量依次占全厂的45%,35%,20%. 如果各车间的次品率依次为4%, 2%, 5%. 现在从待出厂产品中检查出1个次品, 试判断它是由甲车间生产的概率

解 设事件B表示"产品为次品", A_1,A_2,A_3分别表示"产品为甲,乙,丙车间生产的", 显然, A_1,A_2,A_3构成一完备事件组. 依题意, 有

$P(A_1)=45\%$ $P(A_2)=35\%$ $P(A_3)=20\%$

$P(B|A_1)=4\%$ $P(B|A_2)=2\%$ $P(B|A_3)=5\%$

则由贝叶斯公式得

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

$$=\frac{45\% \times 4\%}{45\% \times 4\% + 35\% \times 2\% + 20\% \times 5\%}$$

$$\approx 0.514$$

有两个箱子, 第一个箱子有3个白球2个红球, 第二个箱子有4个白球4个红球. 现从第1个箱子中随机地取1个球放到第2个箱子里, 再从第2个箱子中取1个球, 此球是白球的概率为________, 已知上述从第2个箱子中取出的球是白球, 则从第1个箱子中取出的球是白球的概率为________.

解 假设事件A为从第1个箱子取出的是白球，B为从第2个箱子取出的是白球，第一步试验中的A与$\overline{A}$构成完备事件组，则

$$P(A)=\frac{3}{5}, P(\overline{A})=\frac{2}{5}, P(B\mid A)=\frac{5}{9}, P(B\mid \overline{A})=\frac{4}{9}$$

则$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{23}{45}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}\Big/\frac{23}{45}=\frac{15}{23}$$