独立试验序列概型

独立试验概型

在概率论中, 把在同样条件下重复进行试验的数学模型称为独立试验序列概型.

进行n次试验, 若任何一次试验中各结果发生的可能性都不受其它各次试验结果发生情况的影响, 则称这n次试验是相互独立的.

而多个独立试验可以在多个场景同时进行, 也可以按时间顺序进行.

例4 一批产品的废品率为0.1, 每次取一个, 观察后放回去, 下次再取一个, 共重复3次, 求这3次中恰有0,1,2,3次取到废品的概率.

解 用事件A,B,C分别表示第1,2,3次取到废品的事件, 则A,B,C相互独立,

并且$P(A)=P(B)=P(C)=0.1$. 将A,B,C的所有最小项列出来为

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\ \overline{A}\,\overline{B}C,\ \overline{A}B\overline{C},\ \overline{A}BC$$

$$A\overline{B}\,\overline{C},\ A\overline{B}C,\ AB\overline{C},\ ABC$$

假设B_0,B_1,B_2,B_3为恰抽到0,1,2,3个废品的事件, 则根据所列出的最小项可得

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\ \overline{A}\,\overline{B}C,\ \overline{A}B\overline{C},\ \overline{A}BC,\ A\overline{B}\,\overline{C},\ A\overline{B}C,\ AB\overline{C},\ ABC$$

000 001 010 011 100 101 110 111

$$P(B_0)=P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0.9^3$$

$$P(B_1)=P(A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C)$$

$$=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}\,B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}\,C)=3\times0.1\times0.9^2$$

$$P(B_2)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}\,BC)=3\times0.1^2\times0.9$$

$$P(B_3)=P(ABC)=0.1^3$$

总结写成$P(B_k)=C_3^k\times0.1^k\times0.9^{3-k},(k=0,1,2,3)$

例5 在例4中废品率若为$p(0<p<1)$, 重复地抽取n次, 求有k次取到废品的概率.

解: 假设$A_1,A_2,\ldots,A_n$为第1,2,…,n次取到废品的事件. 则这n个事件可以组成2^n个最小项, 每一个最小项对应于一个n位的二进制数.假设B_k为有k次取到废品的概率. 则

B_k由C_n^k个最小项构成,相当于所有n位二进制数中有k个1的数的个数.而且每个最小项的概率都一样,均为$p^k(1-p)^{n-k}=p^kq^{n-k}$,其中$q=1-p$.因此

$$P(B_k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,2,\ldots,n)$$

上面例子的共同特点是

在每次试验中某事件A或者发生或者不发生, 假设每次试验的结果与其它各次试验结果无关, 即在每次试验中A出现的概率都是$p(0<p<1)$, 这样的一系列重复试验(比如n次), 称为n重贝努里试验.

因此, n重贝努里试验共有两个关键参数, 一个是每次试验A发生的概率, 一个是试验次数n.

注意A并非n重试验的样本空间的事件, 它只是一次试验中的事件, 而在n重试验中, 它转化为$A_1,A_2,\ldots,A_n$

定理1.31(贝努里定理) 设一次试验中事件A发生的概率为$p(0<p<1)$, 则n重贝努里试验中, 事件A恰好发生k次的概率用$p_n(k)$表示, 则

$$p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,\ldots,n)$$

其中$q=1-p$

我们知道代数中有二项式定理

即

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$$

用贝努里定理中的p和$q=1-p$代入上式

可得

$$(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=1$$

可见事件A发生k次的概率为$(p+q)^n$

展开后的p的k次项.

例6 一条自动生产线上产品的一级品率为0.6, 现检查了10件, 求至少有两件一级品的概率.

解 设B为事件至少有两件一级品. 此为n=10重贝努里试验, 事件A(抽到一级品)的概率p=0.6

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-p_{10}(0)-p_{10}(1)$$

$$=1-0.4^{10}-10\times0.6\times0.4^{9}\approx0.998$$

1999年MBA试题 设A_1,A_2,A_3为3个独立事件，且$P(A_k)=p$ (k=1,2,3, $p>0$). 则3个事件不全发生的概率是

(A) $(1-p)^3$ (B) $3(1-p)$

(C) $(1-p)^3+3p(1-p)$

(D) $3p(1-p)^2+3p(1-p)$ (E) $3p(1-p)^3$

解 此题为3重贝努里试验, 设事件B为3个事件不全发生, 则B的逆为3个事件全发生的概率为p^3, 因此$P(B)=1-p^3$, 而上面的选项(C)为

$(1-p)^3+3p(1-p)=1-p^3$ 满足要求, 因此应选(C)

1999年MBA试题 进行一系列独立试验, 每次试验成功的概率为p, 则在成功2次之前已经失败了3次的概率为( )

(A) $4p^2(1-p)^3$ (B) $4p(1-p)^3$ (C) $10p^2(1-p)^3$

(D) $p^2(1-p)^3$ (E) $(1-p)^3$

解 成功2次之前已经失败了3次的事件一定已经进行了5次试验, 第5次是成功的, 且前4次一定还有一次成功. 前4次有一次成功的概率是$p_4(1)=4p(1-p)^3$, 则再考虑第5次的成功, 成功2次前失败3次的概率为$4p^2(1-p)^3$

因此, 应填选项(A)

1987年理工科考研题 设在一次试验中A发生的概率为p, 现进行n次独立试验, 则事件A至少发生一次的概率为____; 而事件A至多发生一次的概率为______.

解 假设B为至少发生一次的事件,由贝努里概型的概率计算公式,

$$P(\overline{B}) = (1-p)^n,$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1-(1-p)^n$$

假设C为至多发生一次的事件,则

$$P(C) = p_n(0) + p_n(1) = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$$

1988年理工科考研题 设三次独立试验中，事件A出现的概率相等，若已知A至少出现一次的概率等于19/27，则事件A在一次试验中出现的概率为__________

这是贝努里概型试验，试验次数$n=3$为已知，但每次试验A出现的概率p未知，假设事件B为3次试验A至少出现一次，则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-(1-p)^3=\frac{19}{27}$$

$\frac{8}{27}=(1-p)^3$，开立方得$\frac{2}{3}=(1-p)$，解得$p=\frac{1}{3}$