杭州师范大学《概率与统计 》练习题（1）参考答案

命题教师 **杨益民**

题目	一	二	三	四	五	总分
分值	30	10	16	32	12	100
得分						

一、单选题（在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案，并将正确答案的序号填入题后的括号内。每小题 5 分，共 30 分。）

得分	

一、填空（共 30 分，每空格 5 分）

1．两封信随机地投入到四个邮筒，则前两个邮筒没有信的概率是： （ A ）

A.0．25　　B.0.3　　C.0.45　　D.0.98

2．袋内装有两个 5 分、三个 2 分、五个 1 分的硬币，任意取出 5 个，求总数超过 1 角的概率。（ B ）

A.0．25　　B.0.5　　C.0.45　　D.0.6

3．有两个口袋，甲袋中盛有两个白球，一个黑球，乙袋中盛有一个白球，两个黑球。由甲袋任取一个球放入乙袋，再从乙袋中取出一个球，求取到白球的概率。 （ A ）

A. $\frac{5}{12}$　　B.0.3　　C.0.45　　D.0.55

4．已知随机变量ξ只能取－1，0，1，2 四个值，相应概率依次为$1/2c$，

$\frac{3}{4c},\frac{5}{8c},\frac{7}{16c},$，则常数$c$的值是 （ A ）

A. $\frac{37}{16}$　　B.1　　C.2　　D. $\frac{1}{2}$

5、已知某炼铁厂的铁水含碳量在正常生产情况下服从正态分布，其方差$\sigma^2=0.108^2$。现在测定了 9 炉铁水，其平均碳含量为 4.484。，若要求有 95%的可靠性，则该厂铁水平均碳含量的置信区间是 （ A ）

A. $4.484-\frac{0.108}{\sqrt{9}}\times1.96<\mu<4.484+\frac{0.108}{\sqrt{9}}\times1.96$

B. $4.484-\frac{0.108}{\sqrt{9}}\times 2.58<\mu<4.484+\frac{0.108}{\sqrt{9}}\times 2.58$

C. $4.484-\frac{0.108^2}{\sqrt{9}}\times 1.96<\mu<4.484+\frac{0.108^2}{\sqrt{9}}\times 1.96$

D. $4.484-\frac{0.108^2}{\sqrt{9}}\times 2.58<\mu<4.484+\frac{0.108^2}{\sqrt{9}}\times 2.58$

6. 某商店为了了解居民对某种商品的需要，调查了 100 家住户，得出每户每月平均需要量为 10kg, 方差为 9。如果这个商店供应 1000 户，试就居民对该种商品的平均需求量进行区间估计（$\alpha=0.01$）, 并依此考虑最少要准备多少这种商品才能以 0.99 的概率满足需要。（ B ）

A. $(10-\frac{3}{\sqrt{100}}\times 1.96, 10+\frac{3}{\sqrt{100}}\times 1.96)$

B. $(10-\frac{3}{\sqrt{100}}\times 2.58, 10+\frac{3}{\sqrt{100}}\times 2.58)$

C. $(10-\frac{9}{\sqrt{100}}\times 1.96, 10+\frac{9}{\sqrt{100}}\times 1.96)$

D. $(10-\frac{9}{\sqrt{100}}\times 2.58, 10+\frac{9}{\sqrt{100}}\times 2.58)$

二、名词解析（每小题 5 分，共 10 分。）

得分	

7．全概率定理：如果事件 $A_1, A_2, \cdots$ 构成一个完备的事件组，并且都具有正概率，则对任何一个事件 B,有：

$$P(B)=\sum_i P(A_i)P(B/A_i)$$

8．李雅普诺夫定理：设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是互相独立的随机变量，有期望值 $E\xi_i=a_i$ 及方

差 $D\xi_i=\sigma_i^2<+\infty(i=1,2,\cdots)$，若每个 ξ_i，对总和 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 影响不大，令 $S_n=\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{1}{S_n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a_i)\ \le x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi_0(x)$$

三、填空题（每空 4 分，共 16 分。）

得分	

9．若 ξ 有概率密度：

$\varphi(x)=\{_{0\quad 其\ 它}^{\lambda\quad \alpha\le x\le b(a<b)}$ 　**则称 ξ 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布。试求 $\lambda=\dfrac{1}{b-a}$**

10 、 设 随 机 变 量 ξ 的 概 率 密 度 是 $F_\xi(x)$,则 ξ^2 的分布函数是 $\underline{F_\xi(\sqrt{x})-F_\xi(-\sqrt{x})}$____。

11、设 ξ 是区间 $[a,b]$ 上均匀分布的随机变量，则 $D\xi=\dfrac{1}{12}(a-b)^2$

12、设 ξ 是参数为 λ 的指数分布则：$E\xi=\lambda^{-1}$,______$D\xi=\underline{\lambda^{-2}}$

四、计算题（每小题 8 分，共 32 分。）

得分	

13．假定某工厂甲、乙、丙 3 个车间生产统一中螺钉，产量依次占全厂的 45%、35%、20%。如果各车间的次品率依次为 4%、2%、5%。现从待出厂的产品中检查出 1 个次品，试计算它是甲车间生产的概率。

解：设事件 B 表示“产品为次品”，A_1、A_2、A_3 分别表示“产品为甲、乙、丙车间生产的”。显然，A_1、A_2、A_3 构成一个完备事件组。依题意有：

$P(A_1)$=45%　　$P(A_2)$=35%　　$P(A_3)$=20%　　(2 分)

$P(B|A_1)=4\%$　　$P(B|A_2)=2\%$　　$P(B|A_3)=5\%$　　(2 分)

于是由贝叶斯公式有：

$$P(|A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}$$ (2 分)

$$=\frac{45\%\times4\%}{45\%\times4\%+35\%\times2\%+20\%\times5\%}\approx0.514 \qquad (2 分)$$

14、同一品种的 5 个产品中，有 2 个正品。每次从中取 1 个检验质量，不放回地抽取，连续 2 次。用"$\xi_k=0$"表示第 k 次取到正品，而"$\xi_k=1$" 为第 k 次取到次品（k=1,2）。写出(ξ_1,ξ_2)的联合分布律。

解：试验结果共由 4 个基本事件组成，相应概率可按公式计算：

$$P\{\xi_1=0,\xi_2=0\}=P\{\xi_1=0\}P\{\xi_2=0|\xi_1=0\}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=0.1 \quad (2 分)$$

$$P\{\xi_1=0,\xi_2=1\}=P\{\xi_1=0\}P\{\xi_2=1|\xi_1=0\}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=0.3 \quad (2 分)$$

$$P\{\xi_1=1,\xi_2=0\}=P\{\xi_1=1\}P\{\xi_2=0|\xi_1=1\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=0.3 \quad (2 分)$$

$$P\{\xi_1=1,\xi_2=1\}=P\{\xi_1=1\}P\{\xi_2=1|\xi_1=1\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=0.3$$

具体分布如下表： (2 分)

ξ_1 \ ξ_2	0	1
0	0.1	0.3
1	0.3	0.3

15．根据长期经验和资料分析，某砖瓦厂生产砖的“抗断强度”ξ服从正态分布，方差$\sigma^2=1.21$。现从该厂产品中随机抽取 6 块，测得抗断强度的平均值为$\overline{X}=31.13kg/cm^2$ 若设α＝0.05,试检验这批砖的平均抗断强度为 32.50kg/cm^2是否成立？

解：$H_0:\mu=32.50$.如果H_0是正确的，即样本$(X_1,X_2,\cdots,X_6)$

来自正态总体 N（32.50,1.1^2）,于是有：

$\dfrac{\overline{X}-32.50}{1.1/\sqrt{6}} \sim N(0,1)$，因而选取统计量

$$U=\frac{\overline{X}-32.50}{1.1/\sqrt{6}},\qquad\qquad （4 分）$$

对于给定的α =0.05,可以确定u_α =1.96,其中满足：$P(|U|>u_\alpha)=\alpha$.这就是说，对于H_0拒绝与否的临界值u_α =1.96,再由取定的样本观察值实际计算得到 U 的值，

$$|u|=\left|\frac{31.13-32.50}{1.1/\sqrt{6}}\right|\approx 3.05>1.96$$

最后结论是否定H_0。（4 分）

16、某炼铁厂的铁水含碳量在正常情况下服从正态分布。现对操作工艺进行了某些改进，从中抽取 5 炉铁水测得含碳量数据$S^2=0.228^2$.若设α =0.05,据此是否可以认为新工艺炼出的铁水含碳量的方差仍为 0.108^2？

解：$H_0:\sigma^2=0.108^2$;.如果H_0是正确的，即样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的函数

$\chi^2 \overset{\triangle}{=} (n-1)S^2/0.108^2$ 作为统计量于是有样本

来自正态总体 N（μ,0.108^2）,于是有：

$$\chi^2 \overset{\triangle}{=} (n-1)S^2/0.108^2 \sim \chi^2(n-1),\qquad （4 分）$$

对于给定的α =0.05,可以确定$\chi^2{}_\alpha$及χ_b^2使

$$P((n-1)S^2/0.108^2>\chi_b^2)=\frac{\alpha}{2},\quad P((n-1)S^2/0.108^2<\chi_a^2)=\frac{\alpha}{2}$$

其中 ：$\chi_a^2=\chi_{0.975}^2(4)=0.484, \chi_b^2=\chi_{0.275}^2(4)=11.1$

具体计算统计量χ^2的值有：

$$\chi^2=\frac{4\times 0.228^2}{0.108^2}\approx 17.827>11.1$$

因而拒绝H_0 (4 分)

五、证明题（每小题 12 分，共 12 分。）

得分	

1．从总体ξ中取一样本$\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$，E$\xi=\mu$，D$\xi=\sigma^2$,

试证明样本平均数$\overline{X}$及样本方差S^2分别是μ及σ^2的无偏估计。

证：$E\overline{X}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\frac{1}{n}n\mu$ （3 分）

$$\mathrm{D}\,\overline{X}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{1}{n}\sigma^2$$ （3 分）

$$\mathrm{E}\,S^2=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}\ \left[x-\mu-\left(\overline{X}-\mu\right)\right]^2$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-\frac{n}{n-1}E\left(\overline{X}-\mu\right)^2$$ （6 分）

证明完毕