1.2　概率

每一个事件都有它的发生概率

即给定事件A, 存在着一个正数P 与之对应, 称之为事件A的概率, 记作$P(A)$或$P\{A\}$.

最高的发生概率为1, 表示必然发生.

最低的概率为0, 表示不可能发生.

而一般的随机事件的概率介于0与1之间.

这里只是概率的数学上的规定, 其实就是任何一个事件到实数轴上的[0,1]区间的映射.

但怎样获得切合实际的一个事件的概率呢?

概率的统计定义

概率的统计定义并非严格的数学上的定义, 而只是大数定律的一个描述.

在n次重复试验中, 如果事件A发生了m次, 则m/n称为事件A发生的频率. 同样若事件B发生了k次, 则事件B发生的频率为k/n. 如果A是必然事件, 有$m=n$, 即必然事件的频率是1, 当然不可能事件的频率为0. 如果A与B互不相容, 则事件$A+B$的频率为$(m+k)/n$, 它恰好等于两个事件的频率的和$m/n+k/n$, 这称之为频率的可加性.

定义1.1

在不变的条件下，重复进行n次试验，事件A发生的频率稳定地某一常数p附近摆动，且一般说来，n越大，摆动幅度越小，则称常数p为事件A的概率，记作$P(A)$.

但这不是概率的数学上的定义，而只是描述了一个大数定律.

历史上的掷硬币试验

试验者	抛掷次数 n	正面出现次数 m	正面出现频率 m/n
德.摩尔根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

频率的稳定性是概率的经验基础

但并不是说概率决定于经验. 一个事件发生的概率完全决定于事件本身的结构, 指试验条件, 是先于试验而客观存在的.

概率的统计定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的, 但并不能用这个定义计算P(A). 实际上, 人们是采取一次大量试验的频率或一系列频率的平均值作为P(A)的近似值的. 例如,对一个妇产医院6年出生婴儿的调查中, 可以看到生男孩的频率是稳定的, 约为0.515

新生儿性别统计表

出生年份	新生儿总数n	新生儿分类数		频率(%)	
		男孩数m_1	女孩数m_2	男孩	女孩
1977	3670	1883	1787	51.31	48.69
1978	4250	2177	2073	51.22	48.78
1979	4055	2138	1917	52.73	47.27
1980	5844	2955	2889	50.56	49.44
1981	6344	3271	3073	51.56	48.44
1982	7231	3722	3509	51.47	48.53
6年总计	31394	16146	15248	51.48	48.52

概率的古典定义(概率的古典概型)

有一类试验的特点是:

1,每次试验只有有限种可能的试验结果

2,每次试验中,各基本事件出现的可能性完全相同.

具这两个特点的试验称为古典概型试验.

在古典概型的试验中, 如果总共有n个可能的试验结果, 因此每个基本事件发生的概率为$1/n$, 如果事件A包含有m个基本事件, 则事件A发生的概率则为m/n.

定义 1.2

若试验结果一共由n个基本事件$E_1,E_2,\ldots,E_n$组成, 并且这些事件的出现具有相同的可能性, 而事件A由其中某m个基本事件$E_1,E_2,\ldots,E_m$组成, 则事件A的概率可以用下式计算:

$$P(A)=\frac{\text{有利于}A\text{的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

例1 袋内装有5个白球, 3个黑球, 从中任取两个球, 计算取出的两个球都是白球的概率.

解: 组成试验的基本事件总数$n = C_{5+3}^{2}$,

假设事件$A = \{$取到两个白球$\}$,则A的

基本事件数$m = C_{5}^{2}$,则

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5\times 4}{1\times 2}\cdot\frac{1\times 2}{8\times 7}$$

$$= \frac{5}{14} \approx 0.357$$

例2 一批产品共200个, 废品有6个, 求(1)这批产品的废品率; (2)任取3个恰有一个是废品的概率;(3)任取3个全非废品的概率

解 设$P(A)$, $P(A_1)$, $P(A_0)$分别表示(1),(2),(3)中所求的概率,则

$$(1)\ P(A)=\frac{6}{200}=0.03$$

$$(2)\ P(A_1)=\frac{C_6^1C_{194}^2}{C_{200}^3}=6\cdot\frac{194\times193}{1\times2}\cdot\frac{1\times2\times3}{200\times199\times198}\approx0.0855$$

$$(3)\ P(A_0)=\frac{C_{194}^3}{C_{200}^3}=\frac{194\times193\times192}{1\times2\times3}\cdot\frac{1\times2\times3}{200\times199\times198}\approx0.9122$$

例3 两封信随机地向标号为1,2,3,4的4个邮筒投寄,求第二个邮筒恰好被投入1封信的概率及前两个邮筒中各有一封信的概率.

解 设事件A={第二个邮筒恰有一封信}

事件B={前两个邮筒中各有一封信}

两封信投入4个邮筒共有4×4种投法, 而组成事件A的投法有2×3种, 组成事件B的投法则只有2种, 因此

$$P(A)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8},\ P(B)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$