第二章　导数与微分

第一节　导数概念　习题 2.1

1、下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按导数的定义观察下列极限，并指出 a 表示什么：

（**1**）$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a$；

（**2**）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = a$，其中 $f(0) = 0$，且 $f'(0)$ 存在;

（**3**）$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 - h) - f(x_0 + h)}{h} - = a$.

2、求下列函数的导数：

（**1**）$y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

（**2**）$y = \dfrac{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x^3}}$

3、求曲线 $y = \cos x$ 上点 $(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程。

4、讨论下列函数在$x=0$处的连续性与可导性：

（**1**） $y=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$；

（**2**） $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$。

5、设函数 $f(x)=\begin{cases} x^3, x\leq 1 \\ ax+b, x>1 \end{cases}$

为了使函数$f(x)$在$x=1$处连续且可导，a,b应取什么值？

6、已知 $f(x)=\begin{cases} x^3, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$，求 $f'_+(0)$及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$是否存在？

7、已知$\begin{cases} \sin x, x<0 \\ x^2, x\geq 0 \end{cases}$， $f'(x)$

第二节　函数的求导法则　习题 2.2

1、求下列函数的导数：

（**1**）$y=\frac{1}{3}x^3-4^x+e^{2x}$；

（**2**）$y=-\cot x+\csc x-5$；

（**3**）$y=x\ln x\cdot\sin x$

（**4**）$y=(\arcsin 2x)^2$；

（**5**）$y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$

（**6**）$y=\ln(\cos x+\tan x)$；

（**7**）$y=\ln(\sec x-\cot x)$；

（**8**）$y=e^{2\arctan\sqrt{x}}$；

（**9**）$y=\frac{\arccos x}{\arcsin x}$

2、设 $f(x)$ 可导，求函数 $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$：

3、求下列函数的导数：

（1） $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$；

（2） $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$；

（3） $y=\ln\cos\frac{1}{x}$；

（4） $y=\ln\tan\frac{x}{2}-\sin x\cdot\ln\cot x$

第三节　高阶导数 习题 2.3

1、求下列函数的二阶导数：

（**1**）$y=\tan^2 x$；

（**2**）$y=(1+x^2)\arctan x$

（**3**）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

2、设 $f''(x)$ 存在，求函数 $y=f(x^3)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

3、求下列函数的 n 阶导数的一般表达式：

（**1**）$y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$（$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 都是常数）；

（**2**）$y=\cos^2 x$；

（**3**）$y=xe^{2x}$.

4、已知 $y=x^2\cos 5x$，求 $y^{(50)}$.

第四节　隐函数及参数方程的求导法 习题 2.4

1、求由方程 $xy^2 - e^y = 0$ 所确定的隐函数的导数：

2、求由方程 $y = \tan(x+y)$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

3、用对数求导法求下列函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

（**1**） $y = (\dfrac{x}{1+x})^x$；

（**3**） $y = \dfrac{\sqrt{x+3}(4-x)^4}{(x+2)^2}$.

4、写出曲线 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$，在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程：

5、求参数方程$\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$：

6、落在平静水面上的石头，产生同心波纹。若最外一圈波半径的增大率总是 6 m/s，问在 2 s 末扰动水面面积的增大率为多少？

第五节　函数的微分 习题 2.5

1、求下列函数的微分：

（**1**） $y=e^{-2x}\cdot\sin(5-2x)$；

（**2**） $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$ ；

（**3**） $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

2、将适当的函数填入下列括号内，使等式成立：

（**1**）**d**（　　　　　）=**4** $x^2\,dx$；　　　　（**2**）**d**（　　　　）$=\sin x\ dx$；

（**3**）**d**（　　　　　　）$=\cos\omega x\ dx$；　　（**4**）**d**（　　　　　）$=\dfrac{1}{2+x}\,dx$；

（**5**）**d**（　　　　　　）$=e^{-3x}\ dx$.;　　　（**6**）**d**（　　　　）$=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$；

（**7**）**d**（　　　　　）$=\cot^2 5x\ dx$.

3、计算 $\sqrt[6]{65}$ 的近似值：