《高等数学 A1》试卷答案(B)

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、单项选择题：BBACD

二、填空题（共 18 分，每小题 3 分）

6．$[1, e]$ 7．$\frac{\pi}{6}$ 8．$e^{e^{-1}}$ 9．$2e^{-1}-1$ 10．$e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+C$ 11．1

三、解答题：（共 42 分，每小题 6 分）

12．设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(\frac{x+t}{x-t})^x$，求 $f'(t)$。

解:

$$f(t)=t\lim_{x\to\infty}(\frac{x+t}{x-t})^x=t\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2t}{x-t})^x=t\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2t}{x-t})^{\frac{x-t}{2t}\cdot\frac{2xt}{x-t}}=te^{2t}$$ （4 分）

$$f'(t)=e^{2t}(1+2t)$$ （6 分）

13．求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线和法线方程。

解:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0\Rightarrow y'=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}=-\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$$ （2 分）

$$y'|_{(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)}=-1$$ （4 分）

因此：切线方程为：$y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}a$，法线方程为：$y=x$ （6 分）

14. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，$f(1)=2$，$f'(e^x+1)=e^{2x}+2$，求 $f(x)$。

解： 由 $f'(e^x+1)=e^{2x}+2=(e^x+1)^2-2(e^x+1)+3$

$$\Rightarrow f'(x)=x^2-2x+3$$ （2 分）

$$f(x)=\int(x^2-2x+3)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+C$$ （4 分）

由 $f(1)=2$ 得 $C=-\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-\frac{1}{3}$ （6分）

15．计算定积分 $\int_{-1}^{1}(x^2\tan x+\sqrt{1-x^2})dx$。

解： $\int_{-1}^{1}(x^2\tan x+\sqrt{1-x^2})dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$ （6分）

16．设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\frac{d^3y}{dx^3}$。

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$ （3分）

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{4t}+\frac{t}{4}$ （6分）

17．求微分方程 $xy'-2y=x^3$ 的通解。

解： $y'-\frac{2}{x}y=x^2$

$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}(\int x^2\cdot e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C)=x^3+Cx^2$ （6分）

18．求微分方程 $y''+y'=2x^2-3$ 的通解。

解: 特征方程为 $r^2+r=0\Rightarrow\quad r_1=0,\ r_2=-1$ （2分）

由 $\lambda=0$ 为单根，所以设特解为 $y^*=x(b_0x^2+b_1x+b_2)$ 代入方程得

$b_0=\frac{2}{3}$，$b_1=-2$，$b_2=1$， （4分）

所以通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}+(\frac{2}{3}x^2-2x+1)x$ （6分）

四、分析与应用题（共20分，每小题10分）

19. 设 $f(x)=x^2-a\int_0^2 f(x)dxx+b\int_0^1 f(x)dx$，其中 a,b 为参数，求 a,b 的值使得

$\int_0^1 f(x)dx=1$ 和 $\int_0^2 f(x)dx=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin(2x)}\frac{\sin t}{t}dt}{\ln(1+x)}$。

解： （4分）

$\int_0^2 f(x)dx=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin(2x)}\frac{\sin t}{t}dt}{\ln(1+x)}=2$

因此 $f(x)=x^2-2ax+b$，把它代入上面的式子中得

$$\begin{cases} b-a=\dfrac{2}{3} \\ b-2a=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$ （8 分）

解得 $a=1,b=\dfrac{5}{3}$ （10 分）

20. 设 S_1 为曲线 $y=x^2\ (x\ge 0)$，直线 $y=t^2$（t 为参数，$t\in[0,1]$），及 y 轴所围图形的面积，S_2 为曲线 $y=x^2$，直线 $y=t^2$ 及 x=1 所围图形的面积，记 $S=S_1+S_2$，

1). 求 $S(t)$ 的凹凸性及拐点；2). 问 t 为何值时 S 取得最大值，最小值。

解： $S(t)=\int_0^t(t^2-x^2)dx+\int_t^1(x^2-t^2)dx=\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3}$ （3 分）

由 $S'(t)=4t^2-2t, S''(t)=8t-2$ 得 $S(t)$ 在 $t<\dfrac{1}{4}$ 为凸的，$t>\dfrac{1}{4}$ 为凹的，

拐点为 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{7}{24}\right)$ （6 分）

由 $S'(t)=0$ 得 $t_1=0$，$t_2=\dfrac{1}{2}$

由 $S(0)=\dfrac{1}{3}$，$S(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$，$S(1)=\dfrac{2}{3}$ 故 $S_{\max}=S(1)=\dfrac{2}{3}$，$S_{\min}(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$

所以 t=1 时 S 最大，$t=\dfrac{1}{2}$ 时 S 最小。 （10 分）

五、证明题：（共 5 分，每小题 5 分）

21．设函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\dfrac{dt}{f(t)}$，试证明 $F(x)$ 在 $(a，b)$ 内有且仅有一个零点。

证明：由 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\ge 2$

因此：$F(x)$ 单调增加。 （2 分）

而 $F(a)=\int_b^a\dfrac{dt}{f(t)}<0$ $F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$

$F(x)=0$ 在 $(a，b)$ 内存在唯一零点。 （5 分）