第二章　随机变量及其分布

§2.1 随机变量的概念

随机事件可以采取数量的标识。如：

抽样检查产品时废品的个数。

掷骰子出现的点数。

对没有数量标识的事件，可以人为加上数量标志。如

产品为优质品记为1，次品记为2，废品记为3。

天气下雨记为1，不下雨记为0。

定义1 对于随机试验，每个样本点w都对应着一个实数$\xi(w)$，而$\xi(w)$是随试验结果变化的一个变量，称之为随机变量。

一般用希腊字母ξ，η，ζ或大写英文字母X、Y、Z表示。

例如：

(1)射击击中目标记为1分，未中目标记0分。用ξ表示射击的得分，它是随机变量，可取0和1两个值。

(2)抛一枚硬币，ξ表示正面出现的次数，它是随机变量，可取0和1两个值。

(3)某段时间内候车室旅客数目记为ξ，它可取0及一切不大于最大容量M的自然数。

(4)一块土地上农作物的产量ξ是随机变量，它可以取区间[0，T]的一切值。

(5)沿数轴运动的质点，它的位置ξ是随机变量，可以取任何实数，即$\xi \in (-\infty,+\infty)$

随机变量按取值情况分为两类：

(1)离散型随机变量

只可能取有限个或无限可列个值。

(2)非离散型随机变量

可以在整个数轴上取值，或至少有一部分值取某实数区间的全部值。

非离散型随机变量中最常用的是连续型随机变量。

即取值于一个连续区间全部数值的随机变量。

以后，只研究离散型与连续型随机变量。

§ 2.2 随机变量的分布

(一)离散型随机变量的分布

定义1 如果随机变量ξ只取有限个或可列个可能值，而且以确定的概率取这些不同的值，则称ξ为离散型随机变量。

一般列成概率分布表：

ξ	x_1	x_2	$\dots x_k$	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots p_k$	$\dots$

也可写成 $P(\xi=x_k)=P_k \quad (k=1,2,\dots)$
称之为概率函数。

$\xi=x_1, \xi=x_2, \dots, \xi=x_k, \dots$构成完备事件组。

离散型随机变量的分布是指概率分布表或概率函数。

性质： $P_k \geq 0, k=1,2,\dots$

$$\sum_k P_k = 1$$

例1 一批产品的废品率为5％，从中任意抽取一个进行检验，用随机变量描述废品出现的情况。

解：用ξ表示废品的个数。

ξ＝1表示产品的废品，ξ＝0表示产品的合格品。

ξ	0	1
P	0.95	0.05

或$P(\xi=k)=(0.05)^k(0.95)^{1-k}$, (k=0,1)

- 例2：从生产线上随机抽产品进行检测，设产品的次品率为p，0<p<1，若查到一只次品就得停机检修，设停机时已检测到X只产品，试写出X的概率分布律。

解：设A_i={第i次抽到正品}，i=1, 2, …

则$A_1, A_2, \cdots$相互独立。

$$P(X=k)=P(A_1A_2\cdots A_{k-1}\overline{A}_k)=(1-p)^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots$$

亦称X为服从参数p的**几何分布**。P35 例4

例3：某人独立射击n次，设每次命中率为p，

0<p<1，设命中X次，（1）求X的概率分布律；（2）求至少有一次命中的概率。

解：这是n重贝努利试验 $\Rightarrow X \sim b(n, p)$

$$(1)\quad P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}，\ k = 0, 1, \cdots, n$$

$$(2)\quad P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$$

同时可知： $\lim\limits_{n\to\infty} P(X \geq 1) = 1$

上式的意义为：若p较小，$p \neq 0$, 只要n充分大，至少有一次命中的概率很大。即“小概率事件”在大量试验中“至少有一次发生”几乎是必然的。

例4 盒内装有外型与功率均相同的15个灯泡,其中10个螺口,5个卡口,灯口向下放着.现在需要1个螺口灯泡,从盒中任取一个,如果取到卡口灯泡就不在放回去.求在取到螺口灯泡之前取出的卡口灯泡数X的分布.(P36例5)

(二)随机变量的分布函数

- 定义2.2 若ξ是一个随机变量，对任何实数x，令
- $F(x)=P(\xi \le x)$
- 称为F(x)是随机变量ξ的分布函数。

对任意实数a<b,有

$$P(a<\xi \le b)=P(\xi \le b)-P(\xi \le a)$$

$$=F(b)-F(a)$$

分布函数完整地描述了随机变量的变化情况。

注意 $P(a \le \xi \le b) = P(\xi = a) + P(a < \xi \le b)$

$= P(\xi = a) + F(b) - F(a)$

$P(a < \xi < b) = P(a < \xi \le b) - P(\xi = b)$

$= F(b) - F(a) - P(\xi = b)$

例: 求0-1分布的分布函数并画出其图形

分布函数具有如下的性质：

(1)对一切$x \in (-\infty, +\infty)$成立$0 \le F(x) \le 1$

$F(x)$是概率，取值在0与1之间

(2)$F(x)$是x的不减函数。

$\xi \le x$所含基本事件个数不会随x增大而减少

(3)$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(4)右连续性. $F(x-0) = F(x)$.

反之,满足这几条的函数一定也是某个随机变量的分布函数.

例1 用随机变量描述掷骰子的试验情况。

解：令ξ表示掷一颗骰子出现的点数。

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

或写为$P(\xi=k)=\frac{1}{6}$，$k=1,2,\ldots,6$

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{k}{6} & k\le x<k+1,(k=1,2,3,4,5) \\ 1 & x\ge 6 \end{cases}$$

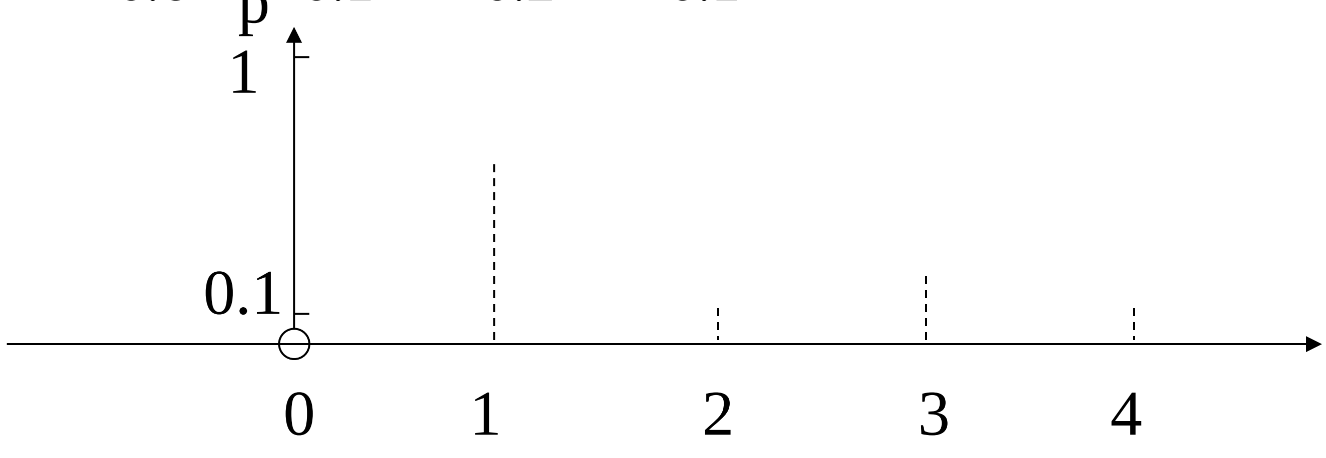
例2 产品有一、二、三等品及废品4种，其一、二、三等品率和废品率分别为60％，10％，20％，10％，任取一个产品检验其质量，用随机变量ξ描述检验结果。

解：用$\xi=k$表示产品为k等品，k＝1，2，3

$\xi=4$表示产品为废品

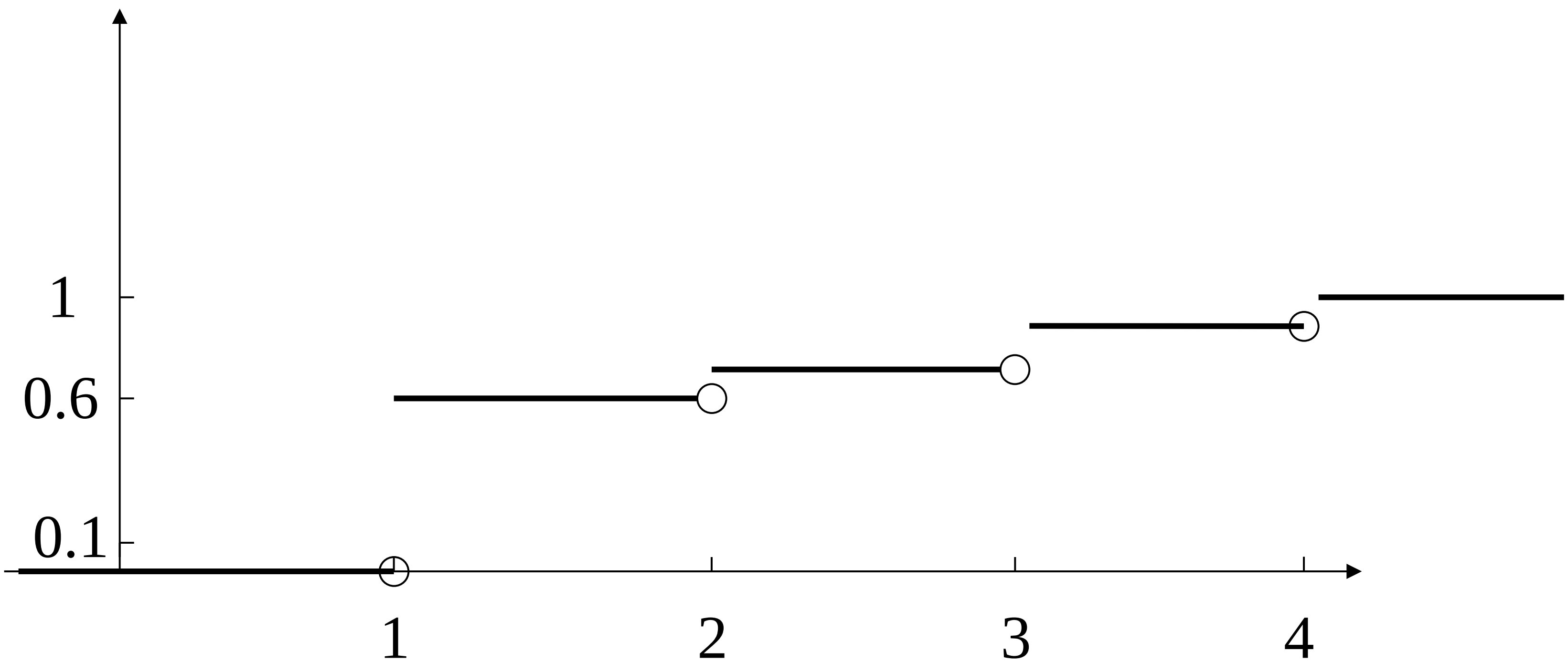
概率分布表为

ξ	1	2	3	4
P	0.6	0.1	0.2	0.1



分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 0.6 & 1\le x<2 \\ 0.7 & 2\le x<3 \\ 0.9 & 3\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$



(三) 连续型随机变量的分布

例3 在区间[4，10]上任意抛掷一个质点，用ξ表示这个质点与原点的距离，则ξ是一个随机变量。若这个质点落在[4,10]上任一子区内的概率与这个区间长度成正比，求ξ的分布函数。

解：若$[c,d]\subset[4,10]$

则 $P(c\le\xi\le d)=\lambda(d-c)$

其中λ是比例常数。

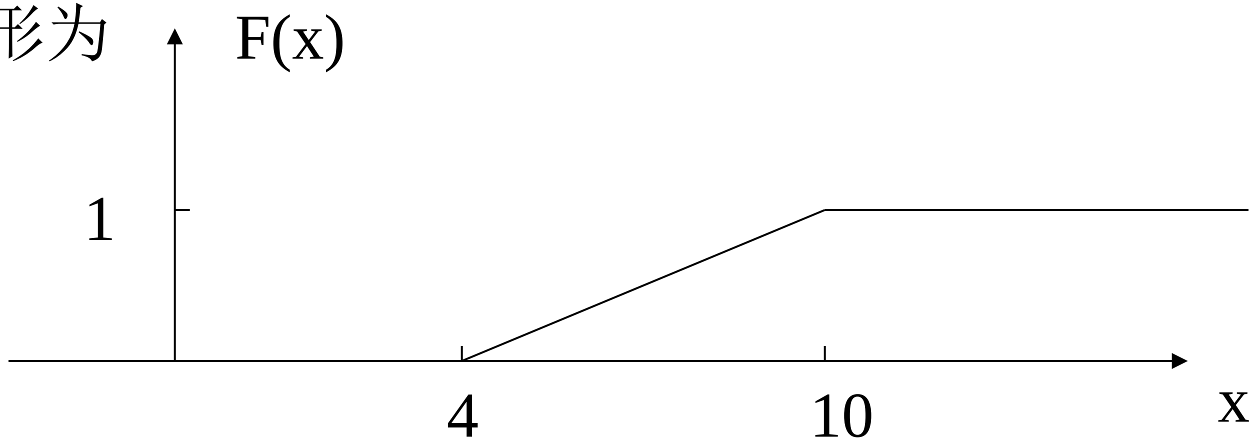
若取$c=4, d=10$，则$P(4\le\xi\le10)=6\lambda$

而 $P(4\le\xi\le10)=1$

故 $\lambda=\dfrac{1}{6}$

F(x)=? P39

图形为



$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，没有间断点。

ξ取任何一个具体值的概率都是零。

比例系数$\lambda=\dfrac{1}{6}$反映了概率分布在任一子区间

$[c, d]$上的密集程度，记作$\varphi(x)$.

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & 4<x<10\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$

定义2.3 对任何实数x，若随机变量ξ的分布函数F(x)

可以写成 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$

其中$\varphi(x)\geq 0$,则称ξ为连续型随机变量。

称$\varphi(x)$为ξ的概率密度，常写为$\xi\sim\varphi(x)$

概率密度的基本性质：

(1) $\varphi(x)\geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$

由于P(ξ =a)=P(ξ=b)=0,故对连续型随机变量。

P(a< ξ<b)=P(a⩽ξ≤b)=P(a< ξ≤b)

$$=F(b)-F(a)$$

$$=\int_a^b \varphi(x)dx$$

由$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$可见

$$F(x)'=\varphi(x)$$

$$\therefore \varphi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<\xi\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

φ(x)不是ξ取值为x的概率，

φ(x)反映出ξ在x附近取值的概率大小。

例4 若ξ有概率密度

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda & a\le x\le b \quad (a<b)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则称ξ服从区间[a,b]上的均匀分布。求F(x)

解:$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \int_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)$

故 $\lambda=\dfrac{1}{b-a}$

当x<a时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x}0dt = 0$

当$a\le x<b$时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}$$

当$x\ge b$时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt+\int_{b}^{x}0dt=1$$

故 $$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b \\ 1 & x\ge b \end{cases}$$

例5 已知连续随机变量的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 3x^2-2x^3 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

求概率密度$\varphi(x)$

解：$\varphi(x)=F'(x)$

故 $$\varphi(x)=\begin{cases} 6x-6x^2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

例6 已知连续型随机变量ξ有概率密度

$$\varphi(x)=\begin{cases} kx+1 & 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求系数k及分布函数F(x), 并求P(1.5<ξ<2.5)

解:$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_0^2(kx+1)dx=2k+2$

$$\therefore k=-\frac{1}{2}$$

x<0时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$$

0≤x<2时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^x\left(1-\frac{1}{2}t\right)dt=x-\frac{1}{4}x^2$$

x>2时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^2\left(1-\frac{1}{2}t\right)dt+\int_2^x0dt=1$$

故 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x-\frac{1}{4}x^2 & 0\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$

$P(1.5<\xi<2.5)=F(2.5)-F(1.5)$

$$=1-\left(1.5-\frac{1}{4}\times 1.5^2\right) = 0.0625$$

或者

$$P(1.5<\xi<2.5)=\int_{1.5}^{2.5}\varphi(x)dx$$

$$=\int_{1.5}^{2}\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_{2}^{2.5}0dx$$

$$=\left(x-\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_{1.5}^{2} = 0.0625$$

例7 已知连续型随机变量ξ有概率密度

$$\varphi(x)=\begin{cases} Axe^{-2x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

求:(1)系数A　　(2)分布函数F(x)

(3)$P\left(-\frac{1}{2}\leq\xi<1\right)$及$P\left(\xi=\frac{3}{2}\right)$

解:$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{0}^{+\infty}Axe^{-2x}dx=\frac{A}{4}$

$\therefore A=4$

x<0时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$$

x≥0时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}4e^{-2}dt$$

$$=1-2xe^{-2x}-e^{-2x}$$

故分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-(2x+1)e^{-2x} & x\ge 0\end{cases}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\le\xi<1\right)$$

$$=F(1)-F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$=1-(2+1)e^{-2}-0 \quad =1-3e^{-2}$

$$P\left(\xi=\frac{3}{2}\right)=0$$

实际上，对任意一点x

$P(\xi=x)=0$

§2.3 二元随机变量

- 定义2.5 若每次试验的结果对应着一组确定的实数 $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$,它们是随着试验结果不同而变化的n个变量，并且对任何一组实数 $x_1,\ldots,x_n$，事件"$\xi_1 \le x_1,\ldots,\xi_n \le x_n$"有确定的概率，则称为n个随机变量的整体 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 为一个n元随机变量。

  也称为n元随机向量。

- 定义2 称 $F(x_1,\ldots,x_n)=P(\xi_1 \le x_1,\ldots,\xi_n \le x_n)$ 为n元随机变量的分布函数。

  其中 $(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$

  以下只研究二元随机变量。

(一)离散型

- 定义3 如果二元随机变量(ξ，η)所有可能取的数对为有限或可列个，并且以确定的概率取各个不同的数对，则称(ξ，η)为二元离散型随机变量。

把(ξ，η)的所有可能取值与相应概率列成表，称为(ξ，η)的联合概率分布表。

ξ \ n	y_1	y_2	…	y_j	…
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{ij}	…
⋮	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…
⋮	…	…	…	…	…

也可用一系列等式来表示

$P(\xi=x_i,\eta=y_j)=p_{ij},(i,j=1,2,\dots)$

称为ξ与η的联合分布律。

联合分布有如下性质：

(1) $p_{ij}\geq 0$

(2) $\sum_{i,j} p_{ij}=1$

- 例1 同一品种的5个产品中，有2个正品。每次从中取1个检验质量，不放回地抽取，连续2次。令“$\xi_k=0$”表示第k次取到正品，而“$\xi_k=1$”为第k次取到次品。(k=1,2) 写出(ξ_1, ξ_2)的联合分布律。

解：试验结果由4个基本事件组成。

$$P(\xi_1=0,\ \xi_2=0) = P(\xi_1=0)P(\xi_2=0|\ \xi_1=0) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = 0.1$$

$$P(\xi_1=0,\ \xi_2=1) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{4} = 0.3$$

$$P(\xi_1=1,\ \xi_2=0) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4} = 0.3$$

$$P(\xi_1=1,\ \xi_2=1) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4} = 0.3$$

列成联合概率分布表：

ξ_1 \ ξ_2	0	1
0	0.1	0.3
1	0.3	0.3

二元随机变量(ξ，η)中，分量ξ(或η)的概率分布称为(ξ，η)的关于ξ(或η)的边缘分布。

若已知联合分布，则

$$P(\xi=x_i) = \sum_j P(\xi = x_i, \eta = y_j)$$

$$= \sum_j p_{ij} \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} p_i^{(1)} \quad i=1,2,\ldots$$

$$P(\eta=y_j) = \sum_i p_{ij} \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} p_j^{(2)} \quad j=1,2,\ldots$$

$p_i^{(1)}$均为非负，且$\sum_i p_i^{(1)} = \mathbf{1}$

$p_i^{(1)}$表示联合概率表中第i行各概率之和。

它表示，不论η取何值，ξ取值x_i的概率　　$p_j^{(2)}$的含义类似。

- 例2 将两封信随机地往编号为I、II、III、IV的4个邮筒内投。ξ_i表示第i个邮筒内信的数目(i=1,2)写出(ξ_1， ξ_2)的联合分布以及ξ_1， ξ_2的边缘分布。

解： 试验共有4^2种不同的等可能结果。

$$p_{00}=P(\xi_1=0,\xi_2=0)=\frac{4}{16}$$

$$p_{\mathbf{01}}=P(\xi_{\mathbf{1}}=\mathbf{0},\xi_{\mathbf{2}}=\mathbf{1})=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{16}}$$

$$p_{10}=p_{01}=\frac{4}{16}$$

$$p_{\mathbf{11}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{16}} \quad p_{02}=p_{20}=\frac{1}{16}$$

$$p_{12}=p_{21}=p_{22}=0$$

列成联合分布表：

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2	$p_i^{(1)}$
0	$4/16$	$4/16$	$1/16$	$9/16$
1	$4/16$	$2/16$	0	$6/16$
2	$1/16$	0	0	$1/16$
$p_j^{(2)}$	$9/16$	$6/16$	$1/16$	

即边缘分布为

ξ_1	0	1	2
	$9/16$	$6/16$	$1/16$

ξ_2	0	1	2
	$9/16$	$6/16$	$1/16$

对于二元随机变量(ξ，η)，若P $(\eta=y_j)>0$，称$p_{ij}/p_j^{(2)}(i=1,2,\ldots)$为在$\eta=y_j$条件下关于ξ的条件分布。 记为

$$P(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_j^{(2)}} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

显然P $(\xi=x_i|\eta=y_j)$是非负的，且对所有i，它们的和为1

同样，若$p_i^{(1)}>0$

$$P(\eta = y_j \mid \xi = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i^{(1)}} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

称为在$\xi=x_i$条件下关于η的条件分布。

$p(\eta=y_j|\xi=x_i)$是非负的，且对所有j，它们的和为1

例3 求出例2中在ξ_2＝1条件下关于ξ_1的条件分布。

解：

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2
0	$4/16$	$4/16$	$1/16$
1	$4/16$	$2/16$	0
2	$1/16$	0	0
$p_j^{(2)}$	$9/16$	$6/16$	$1/16$

$$P(\xi_1 = 0 \mid \xi_2 = 1) = \frac{p_{01}}{p_1^{(2)}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(\xi_1 = 1 \mid \xi_2 = 1) = \frac{p_{11}}{p_1^{(2)}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\xi_1 = 2 \mid \xi_2 = 1) = \frac{p_{21}}{p_1^{(2)}} = 0$$

故ξ_2＝1时，ξ_1的条件分布为

ξ_1	0	1
$P(\xi_1 \mid \xi_2 = 1)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

- 例4 反复掷一颗骰子，直到出现小于5点为止。ξ表示最后一次掷出的点数，η表示投掷次数。求(ξ, η)的联合分布律，边缘分布律及条件分布。

解：ξ的取值是1，2，3，4

η的取值是1，2，…

"$\xi=i,\eta=j$"表示掷了j次，而最后一次掷出i点。

前j-1次掷出5点或6点。

由于各次掷骰子是相互独立的。

$$P(\xi=i,\eta=j)=\left(\frac{2}{6}\right)^{j-1}\frac{1}{6}$$

故联合分布表为

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	$\cdots$	j	$\cdots$	$p_i^{(1)}$
1	$\frac{1}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)\frac{1}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)^2\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{2}{6}\right)^{j-1}\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)\frac{1}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)^2\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{2}{6}\right)^{j-1}\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)\frac{1}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)^2\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{2}{6}\right)^{j-1}\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)\frac{1}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)^2\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{2}{6}\right)^{j-1}\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$
$p_j^{(2)}$	$\frac{4}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)\frac{4}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)^2\frac{4}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{2}{6}\right)^{j-1}\frac{4}{6}$	$\cdots$	

条件分布为：

ξ	1	2	3	4		
$P(\xi \mid \eta = j)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
η	1	2	...	j	...	
$P(\eta \mid \xi = i)$	$\frac{4}{6}$	$\left(\frac{2}{6}\right)\frac{4}{6}$	...	$\left(\frac{2}{6}\right)^{j-1}\frac{4}{6}$	...	

(二)连续型

- 定义4 若存在一个非负函数$\varphi(x,y)$,使得二元随机变量(ξ,η)的分布函数$F(x,y)$,对任意x,y都有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(s,t)\,dt\,ds$$

则称(ξ,η)是二元连续型随机变量。

$\varphi(x,y)$称为ξ与η的联合概率密度。它有性质:

(1)对一切实数x,y,$\varphi(x,y)\ge 0$

(2)$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dxdy=1$

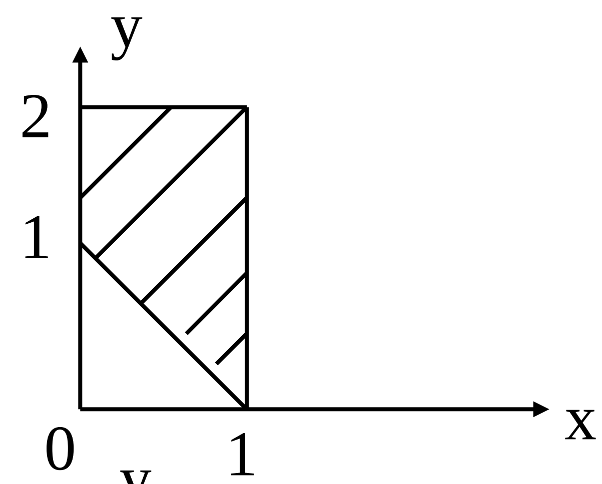
对任意平面区域D,

$$P((\xi,\eta)\in D)=\iint_{D}\varphi(x,y)dxdy$$

特别地,$P(a<\xi\le b,c<\eta\le d)=\int_{a}^{b}\int_{c}^{d}\varphi(x,y)dydx$

例5 已知$(\xi,\eta)\sim\varphi(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3} & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

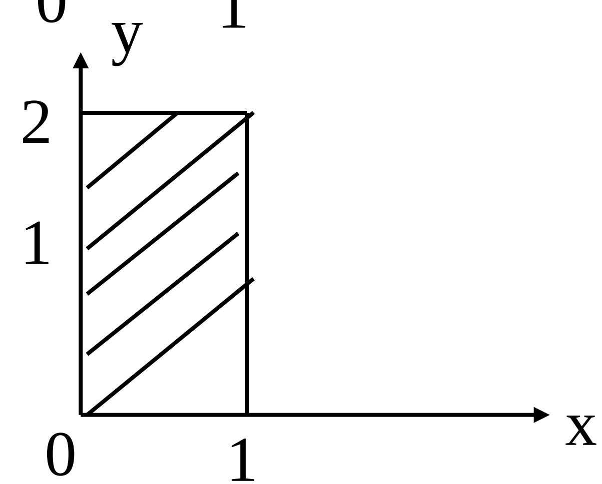
求$P(\xi+\eta>1)$及$P(\eta>\xi)$



解：$P(\xi+\eta>1) \quad = \iint\limits_{x+y>1}\varphi(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2 (x^2+\frac{xy}{3})dy \quad = \frac{65}{72}$$

同样地



$$P(\eta>\xi) \quad = \iint\limits_{y>x}\varphi(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^2 (x^2+\frac{xy}{3})dy \quad = \frac{17}{24}$$

$$F_\xi(x)=F(x,+\infty)=P(\xi\le x,-\infty<\eta<+\infty)=\int_{-\infty}^{x}ds\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s,t)dt$$

$$F_\eta(y)=F(+\infty,y)=P(-\infty<\xi<+\infty,\eta\le y)=\int_{-\infty}^{y}dt\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s,t)ds$$

分别称为二元随机变量(ξ，η)中关于ξ及关于η的边缘分布函数。

求导可得相应的概率密度：

$\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy$ 是关于ξ的边缘概率密度。

$\varphi_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dx$ 是关于η的边缘概率密度。

而 $$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_1(s)ds$$

$$F_\eta(y)=\int_{-\infty}^{y}\varphi_2(t)dt$$

例6 已知$(\xi,\eta)\sim\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a<x<b,c<y<d\\ 0 & 其它\end{cases}$

称为二元连续型均匀分布。求边缘概率密度。

解：当a<x<b时

$$\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy=\int_{-\infty}^{c}0dy+\int_{c}^{d}\frac{1}{(b-a)(d-c)}dy+\int_{d}^{+\infty}0dy$$

$$=\frac{1}{b-a}$$

在其它点

$$\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$$

故 $\varphi_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & 其它\end{cases}$

同理 $\varphi_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c} & c<y<d\\ 0 & 其它\end{cases}$

(三)随机变量的相互独立性

- 定义5 对于任何实数x, y, 如果二元随机变量(ξ, η)的联合分布函数$F(x, y)$等于ξ和η的边缘分布函数的乘积，即

$$F(x,y)=F_{\xi}(x)F_{\eta}(y)$$

则称随机变量ξ与η相互独立。

判断独立的充要条件：

离散型 ξ与η独立$\Leftrightarrow$对一切$i, j=1,2,\ldots$

$$p_{ij}=p_i^{(1)}p_j^{(2)}$$

连续型 ξ与η独立$\Leftrightarrow$对任何实数x, y

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$$

例7 在例2中ξ_1与ξ_2是否相互独立？

解：已经得到

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2	$p_i^{(1)}$
0	$4/16$	$4/16$	$1/16$	$9/16$
1	$4/16$	$2/16$	0	$6/16$
2	$1/16$	0	0	$1/16$
$p_j^{(2)}$	$9/16$	$6/16$	$1/16$	

由于 $$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{16}\neq 0$$

即 $$p_2^{(1)}p_2^{(2)}\neq p_{22}$$

故ξ_1与ξ_2不是相互独立的。

例8 掷两颗骰子，用ξ与η分别表示第一颗与第二颗的点数。ξ与η是否独立。

ξ \ η	1	2	3	4	5	6	$p_i^{(1)}$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$p_j^{(2)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

可见对所有i,j有$p_{ij}=p_i^{(1)}p_j^{(2)}$

故ξ与η是相互独立的。

例9 例6中的随机变量ξ与η是否相互独立？

解：由
$$\varphi(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a<x<b, c<y<d \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases} \qquad \varphi_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c} & c<y<d \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

可见，对任何x,y有

$$\varphi(x, y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$$

故ξ与η相互独立。

§2.4 随机变量函数的分布

- 定义1 设f(x)是定义在随机变量ξ的一切可能值x集合上的函数。如果对于ξ的每一可能取值x，有另一个随机变量η的相应取值$y=f(x)$。称η为ξ的函数，记作$\eta=f(\xi)$。

也有多元函数$\eta=f(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 等。

(一)离散型随机变量函数的分布

- 例1 已知一个正方形的边长ξ的分布表为

ξ	6	7	8	9
P	0.2	0.4	0.1	0.3

求周长η和面积ξ的分布律。

解： $\eta=4\xi$， $\zeta=\xi^2$

$$P(\eta=24)=P(4\xi=24)=P(\xi=6)=0.2$$

$$P(\eta=28)=P(\xi=7)=0.4$$

$$P(\eta=32)=P(\xi=8)=0.1$$

$$P(\eta=36)=P(\xi=9)=0.3$$

故η的分布表为

η	24	38	32	36
P	0.2	0.4	0.1	0.3

同样ζ的分布表为

ζ	36	49	64	81
P	0.2	0.4	0.1	0.3

例2 已知ξ的概率分布为

ξ	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.2	0.1	0.4

求$\eta=\xi^2$的分布

解:$P(\eta=0)=P(\xi=0)=0.2$

$P(\eta=1)=P(\xi=-1)+P(\xi=1)$

$=0.2+0.1=0.3$

$P(\eta=4)=P(\xi=-2)+P(\xi=2)$

$=0.1+0.4=0.5$

故η的分布为

η	0	1	4
P	0.2	0.3	0.5

例3 已知(ξ,η)的联合分布表为

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	0.1	0.15
1	0.25	0.2
2	0.15	0.15

求$\xi+\eta$与$\xi\eta$的分布律。

解：$P(\xi+\eta=1)=P(\xi=0,\ \eta=1)+P(\xi=1,\eta=0)=0.4$

故

$\xi+\eta$	0	1	2	3
P	0.1	0.4	0.35	0.15

而$P(\xi\eta=1)=P(\xi=1,\eta=1)=0.2$

故

$\xi\eta$	0	1	2
P	0.65	0.2	0.15

例4 已知ξ与η相互独立，其分布为

ξ	4	5	6
P	0.2	0.5	0.3

η	2	3
P	0.4	0.6

求$\xi-\eta$的分布。

解：ξ-η的取值可以为1，2，3，4

$$P(\xi-\eta=2)=P(\xi=4,\eta=2)+P(\xi=5,\eta=3)$$

$$=P(\xi=4)P(\eta=2)+P(\xi=5)P(\eta=3)$$

$$=0.2\times0.4+0.5\times0.6=0.38$$

类似可算出其它概率。

ξ-η的概率分布表为

$\xi-\eta$	1	2	3	4
	0.12	0.38	0.38	0.12

(二)连续型随机变量函数的分布

- 例5 已知ξ的概率密度$\varphi_\xi(x)$。$\eta=4\xi-1$求η的概率密度$\varphi_\eta(x)$。

解：$F_\eta(x)=P(\eta\le x)=P(4\xi-1\leqslant x)=P(\xi\le\frac{x+1}{4})=F_\xi(\frac{1+x}{4})$

两边求导 $\varphi_\eta(x)=\varphi_\xi\left(\frac{x+1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}$

若 $\varphi_\xi(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

则 $\varphi_\eta(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & -1<x<3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

例6 已知ξ的概率密度$\varphi_\xi(x)$，求$\eta=\xi^2$的概率密度。

解：当$x<0$时

$$F_\eta(x)=P(\eta\le x)=P(\xi^2\le x)=0 \quad \therefore \varphi_\eta(x)=0$$

当$x\ge 0$时，

$$F_\eta(x)=P(\eta\le x)=P(\xi^2\le x)$$

$$=P\left(-\sqrt{x}\le\xi\le\sqrt{x}\right)=F_\xi\left(\sqrt{x}\right)-F_\xi\left(-\sqrt{x}\right)$$

两边对x求导。

$$\varphi_\eta(x)=\varphi_\xi\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\varphi_\xi\left(-\sqrt{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$故\quad \varphi_\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\varphi_\xi\left(\sqrt{x}\right)+\varphi_\xi\left(-\sqrt{x}\right)\right) & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$