

## 概率论与数理统计(经管类)试题

### 一、单项选择题(本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 设  $A$ 、 $B$  是任意两个随机事件, 则  $P(A \cup B)$  为

A.  $P(A) + P(\bar{B}) - P(AB)$

B.  $P(A) + P(B) - P(\bar{A}\bar{B})$

C.  $P(A) + P(B) - P(AB)$

D.  $P(A) + P(B)$

解: 本题考查的是和事件的概率公式, 答案为 C.

2. 已知随机事件  $A$ 、 $B$  满足  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.5$ ,  $P(AB) = 0.15$ , 则

A.  $P(B|AB) = P(B)$

B.  $P(B|\bar{A}) = P(B)$

C.  $P(AB|B) = P(AB)$

D.  $P(A|\bar{A}\bar{B}) = P(A)$

解:  $P(B|AB) = \frac{P(B \cap AB)}{P(AB)} = \frac{P(AB)}{P(AB)} = 1$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{0.5 - 0.15}{0.7} = 0.5 = P(B)$$

$$P(AB|B) = \frac{P(B \cap AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.5} = 0.3 = P(A)$$

$$P(A|\bar{A}\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}\bar{B})} = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}\bar{B})} = 1$$

故选 B.

3. 以下函数中能成为某随机变量分布函数的是

A.  $F(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

B.  $F(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

C.  $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2 + 1}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

D.  $F(x) = \begin{cases} 1 - xe^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

解: 本题考查的是分布函数的性质。

由  $F(+\infty) = 1$  可知, A、B 不能作为分布函数。

再由分布函数的单调不减性, 可知 D 不是分布函数。

所以答案为 C.

4. 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ,  $X$  的分布函数为  $\Phi(x)$ , 则  $P(|X| > 2)$  的值为

A.  $2[1 - \Phi(2)]$

B.  $2\Phi(2) - 1$

C.  $2 - \Phi(2)$

D.  $1 - 2\Phi(2)$

解:

$$\begin{aligned}P\{|X| > 2\} &= P\{X > 2\} + P\{X < -2\} \\&= 1 - P\{X \leq 2\} + P\{X < -2\} = 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) \\&= 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2 - 2\Phi(2)\end{aligned}$$

故选 A。

5. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的分布律与边缘分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	0.08	0.16	0.56	0.8
2	0.02	$c$	$d$	
$p_{\cdot j}$		0.2		

则

A.  $c=0.04, d=0.16$

B.  $c=0.02, d=0.14$

C.  $c=0.08, d=0.14$

D.  $c=0.04, d=0.14$

解: 因为  $P(Y=2)=0.2=0.16+c$ , 所以  $c=0.04$

又  $P(X=2)=1-0.8=0.2=0.02+c+d$ , 所以  $d=1-0.02-0.04=0.14$

故选 D。

6. 设随机变量  $X$  服从参数为 4 的泊松分布, 则下列结论中正确的是

A.  $E(X)=0.5, D(X)=0.5$

B.  $E(X)=0.5, D(X)=0.25$

C.  $E(X)=2, D(X)=4$

D.  $E(X)=4, D(X)=4$

解: 若  $X \sim P(\lambda)$ , 则  $E(X)=D(X)=\lambda$ , 故 D。

7. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X \sim B(36, \frac{1}{6})$ ,  $Y \sim B(9, \frac{1}{3})$ , 则  $D(X-Y+1)=$

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

解: 由方差的性质和二项分布的期望和方差:

$$D(X-Y+1) = D(X) + D(Y) = 36 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + 9 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 5 + 2 = 7$$

选 A。

8. 设随机变量  $X$  的  $E(X)=8000$ ,  $D(X)=1600$ , 利用切比雪夫不等式估计

$P\{7800 < X < 8200\}$  的值为

A. 0.04

B. 0.20

C. 0.96

D. 1.00

解: 由切比雪夫不等式  $P\{|X-E(X)| < \varepsilon\} > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ , 可得

$$P\{7800 < X < 8200\} = P\{|X-8000| < 200\} > 1 - \frac{1600}{200^2} = 0.96$$

选 C。

9. 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本,  $\bar{X}$  是样本均值, 那么

$E(\bar{X}^2) =$

A.  $\mu^2 + \sigma^2$

B.  $\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

C.  $\mu^2$

D.  $\frac{\mu^2}{n}$

解：由方差的计算公式  $D(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - E(\bar{X})^2$ ,

可得  $E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

选 B。

10. 置信度  $(1 - \alpha)$  表达了置信区间的

A. 准确性

B. 精确度

C. 显著性

D. 可靠度

解：置信度表达了置信区间的可靠度，选 D。

二、填空题(本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分)

请在每小题的空格中填上正确答案。错填、不填均无分。

11. 某射手射击的命中率为 0.6，在 4 次射击中有且仅有 3 次命中的概率是\_\_\_\_\_。

解：本题为贝努利概型。

4 次射击中命中 3 次的概率为  $C_4^3(0.6)^3 \cdot (0.4) = 4 \times (0.6)^3 \times (0.4) = 0.3456$

12. 设 A 与 B 是两个相互独立随机事件， $P(A) = 0.2$ ， $P(B) = 0.7$  则  $P(A - B) =$ \_\_\_\_\_。

解：  $p(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = 0.2 - 0.14 = 0.06$

13. 设 A, B 是两个随机事件，若  $P(A) = 0.8$ ， $P(A - B) = 0.5$ ，则  $P(B|A) =$ \_\_\_\_\_。

解：因为  $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ ，所以可得  $P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.3$

所以  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.8} = \frac{3}{8}$

14. 设随机变量 X 的分布律为  $P(X=k) = k/a (k=1,2,3)$ ，则  $a =$ \_\_\_\_\_。

解：可以得到 X 的分布律为

$P(X=1) = \frac{1}{a}, P(X=2) = \frac{2}{a}, P(X=3) = \frac{3}{a}$

由分布律的性质，可得  $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \frac{3}{a} = \frac{6}{a} = 1$ ，故  $a = 6$ 。

15. 设  $X$  的概率密度  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$   $\lambda$  为正参数

若  $P\{X < 1\} = 0.3$  则  $P\{X < 2\} =$  \_\_\_\_\_.

解:  $P\{X < 1\} = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^1 = 1 - e^{-\lambda} = 0.3 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0.7$

所以  $P\{X < 2\} = \int_0^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^2 = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - (e^{-\lambda})^2 = 0.51$

16. 设随机变量  $X$  的分布律为:

$X$	-2	-1	0	1
$p_i$	0.3	0.2	0.4	0.1

则  $P\{-2 < X < 1\} =$  \_\_\_\_\_.

解:  $P\{-2 < X < 1\} = P\{X = -1\} + P\{X = 0\} = 0.2 + 0.4 = 0.6$

17. 设  $f(x, y)$  为二维随机变量  $(X, Y)$  的密度函数, 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy =$  \_\_\_\_\_.

解: 此题为二维随机变量密度函数的性质, 答案为 1.

18. 二维随机变量  $(X, Y)$  的分布律为

$X \backslash Y$			
	1	2	3
1	0.2	0.1	0.1
2	0.3	0.3	0

则  $P\{XY = 2\} =$  \_\_\_\_\_.

解:  $P\{XY = 2\} = P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\} = 0.4$

19. 已知随机变量  $X$  的分布律为

$X$	-2	1	$C$
$P$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

已知  $E(X) = 1$ , 则常数  $C =$  \_\_\_\_\_.

解:  $E(X) = -2 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + C \times \frac{1}{4} = \frac{C}{4} = 1$ , 所以  $C = 4$ .

20. 已知  $E(X) = -1, D(X) = 3$ , 则  $E(3X^2 - 2) =$  \_\_\_\_\_.

解:  $D(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow E(X^2) = D(X) + E(X)^2 = 4$

所以  $E(3X^2 - 2) = 3E(X^2) - 2 = 10$ 。

21. 一个二项分布的随机变量,其数学期望与方差之比为  $4/3$ ,则该分布的参数

$p =$ \_\_\_\_\_.

解: 若  $X \sim B(n, p)$ , 则  $E(X) = np, D(X) = np(1-p)$ ,

由题意, 有  $\frac{E(X)}{D(X)} = \frac{np}{np(1-p)} = \frac{1}{1-p} = \frac{4}{3}$ , 则可得  $p = \frac{1}{4}$ 。

22. 设总体  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为其样本, 则参数  $\sigma^2$  的矩估计值

$\hat{\sigma}^2 =$ \_\_\_\_\_.

解: 矩估计中用样本二阶中心距  $s_n^2$  估计总体方差。

即  $\hat{\sigma}^2 = s_n^2$ 。

23. 设制造某种单件产品所需工时(单位:小时)服从正态分布,为了估计制造这种产品所需的单件平均工时,现制造 4 件,记录每件所需工时如下:

10.5, 11, 11.2, 12.5

若确定置信度为 0.95, 则平均工时的置信区间为\_\_\_\_\_.

( $t_{0.05}(3) = 2.3534$ ,  $t_{0.025}(3) = 3.1824$ )

解: 总体方差未知时, 均值的置信区间为  $\left( \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$

经计算  $\bar{X} = 11.3$ ,  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 1.09, s = 1.04$

所以平均工时的置信区间为

$\left( \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = (11.3 \pm 3.1824 \times \frac{1.04}{2}) = (11.3 \pm 1.65) = (9.65, 12.95)$

24. 设总体  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma_0)$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为其样本, 方差  $\sigma_0$  已知,  $\bar{x}$  为样本均值, 则对于假设检验问题  $H_0: \mu = \mu_0$ ,  $H_1: \mu \neq \mu_0$ , 应选用的统计量是\_\_\_\_\_.



解：总体方差已知，对均值的进行检验时用的统计量为  $U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$

25. 已知一元线性回归方程为  $\hat{Y} = 1 + \hat{\beta}_1 x$ ，且  $\bar{x} = 2$ ， $\bar{y} = 9$ ，则  $\hat{\beta}_1 =$ \_\_\_\_\_.

解：估计回归方程时： $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 1$

$$\text{所以 } \hat{\beta}_1 = \frac{\bar{y} - 1}{\bar{x}} = \frac{9 - 1}{2} = 4$$

### 三、计算题(本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分)

26. 对同一目标进行三次独立射击，第一次、第二次、第三次射击的命中率分别为 0.4，0.5，0.7，求在这三次射击中，恰好有一次击中目标的概率.

解：设  $A_1 = \{\text{第一次命中}\}$ ， $P(A_1) = 0.4$

$A_2 = \{\text{第二次命中}\}$ ， $P(A_2) = 0.5$

$A_3 = \{\text{第三次命中}\}$ ， $P(A_3) = 0.7$

由于三次射击是独立的，所以恰好有一次击中目标的概率为：

$$\begin{aligned} & P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) \\ &= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\ &= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.36 \end{aligned}$$

27. 设随机变量  $X$  在 1, 2, 3, 4 四个整数中等可能的取值，另一随机变量  $Y$  在  $1 \sim X$  中等可能的取值，试求  $X - Y$  的分布律.

解：(X, Y) 的分布律为：

Y \ X	Y			
	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

#### 四、综合题(本大题共 2 小题, 每小题 12 分, 共 24 分)

28. 设连续型随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax^2, & 0 \leq x < 1, \\ Ax, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$

试求:(1)系数  $A$ ;

(2) $X$  的概率密度;

(3)  $P\left\{0 < X \leq \frac{3}{2}\right\}$ .

解: (1)  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2Ax, & 0 \leq x < 1 \\ A, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

由性质  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ , 有  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2Ax dx + \int_1^2 A dx = Ax^2 \Big|_0^1 + A = 2A = 1$

则  $A = \frac{1}{2}$

(2) 所以  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = F'(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(3)  $P\left\{0 < x \leq \frac{3}{2}\right\} = F\left(\frac{3}{2}\right) - F(0) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$

29. 设甲、乙两射手, 他们的射击技术分别如题 29(a)表、题 29(b)表所示. 其中  $X, Y$  分别表示甲、乙两射手射击环数的分布情况:

X	8	9	10
P	0.4	0.2	0.4

题 29(a)表

Y	8	9	10
P	0.1	0.8	0.1

题 29(b)表

现要从中选拔一名射手去参加比赛, 试讨论选派哪位射手参赛比较合理?

解:  $E(X) = 8 \times 0.4 + 9 \times 0.2 + 10 \times 0.4 = 9$

$$E(Y) = 8 \times 0.1 + 9 \times 0.8 + 10 \times 0.1 = 9$$

由此可见甲乙射击的平均环数是相同的。

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 = 1 \times 0.4 + 0 + 1 \times 0.4 = 0.8$$

$$D(Y) = E[Y - E(Y)]^2 = 1 \times 0.1 + 0 + 1 \times 0.1 = 0.2$$

从方差上看, 乙的射击水平更稳定, 所以选派乙去参赛。

## 五、应用题(10 分)

30. 某镇居民日收入服从正态分布, 现随机调查该镇 25 位居民, 得知他们的平均收入  $\bar{x} = 66.4$  元, 标准差  $s = 15$  元, 试问:

(1)  $\alpha = 0.05$  下, 是否可以认为该镇居民日平均收入为 70 元?

(2) 在  $\alpha = 0.05$  下, 是否可以认为该镇居民日收入的方差为  $16^2$ ?

$$t_{0.025}(24) = 2.064, t_{0.05}(24) = 1.7109, u_{0.025} = 1.96, u_{0.05} = 1.65$$

$$\chi^2_{0.025}(24) = 39.4, \chi^2_{0.05}(24) = 36.4$$

$$\chi^2_{0.975}(24) = 12.4, \chi^2_{0.95}(24) = 13.848$$

解: (1) 提出零假设  $H_0: \mu = 70, H_1: \mu \neq 70$ .

$$\text{选择统计量 } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

$$\text{于是 } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{66.4 - 70}{15 / 5} = -1.2$$

由检验水平  $\alpha = 0.05, t_{0.025}(24) = 2.064$

拒绝域为  $|t| \geq t_{0.025}$ , 由于  $|t| = 1.2 < 2.064$ , 从而不能否定  $H_0$ .

所以不能认为该镇居民日平均收入为 70 元.

(2) 提出零假设  $H_0: \sigma^2 = 16^2, H_1: \sigma^2 \neq 16^2$ .

$$\text{选择统计量 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

$$\text{由给定的样本值, 计算得到 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \times 15^2}{16^2} = 21.09$$

由检验水平  $\alpha = 0.05$ ,

拒绝域为  $\chi^2 > \chi^2_{0.025}(24) = 39.4$  或  $\chi^2 < \chi^2_{0.975}(24) = 12.4$

由于  $\chi^2 = 21.09$ , 没有落入拒绝域。

从而不能认为该镇居民日平均收入的方差为  $16^2$ .

## 五、其他常考大题型

例 1. 设某地区地区男性居民中肥胖者占 25%, 中等者占 60%, 瘦者占 15%, 又知肥胖者患高血压



病的概率为 20%，中等者患高血压病的概率为 8%，瘦者患高血压病的概率为 2%，试求：

(1) 该地区成年男性居民患高血压病的概率；（第一章，全概率公式）

(2) 若知某成年男性居民患高血压病，则他属于肥胖者的概率有多大？（第一章，贝叶斯公式）

解：设  $A_1=\{\text{肥胖者}\}$ ,  $A_2=\{\text{中等者}\}$ ,  $A_3=\{\text{瘦者}\}$

$B=\{\text{患高血压病}\}$

已知  $P(A_1)=0.25$ ,  $P(A_2)=0.6$ ,  $P(A_3)=0.15$

$P(B|A_1)=0.2$ ,  $P(B|A_2)=0.08$ ,  $P(B|A_3)=0.02$

(1)  $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.101$

(2)  $P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.25 \times 0.2}{0.101} \approx 0.495$

例 2. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  试求  $E(X)$  及  $D(X)$ .

（第四章，连续型随机变量的期望和方差求法）

解：  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^0 x(1+x)dx + \int_0^1 x(1-x)dx = 0$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 x^2(1+x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}$

$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{6}$

例 3. 设  $(X, Y)$  的分布律如下，求  $\text{cov}(X, Y)$ 。

$Y \backslash X$	1	2
0	0.2	0.1
1	0.3	0.4

（第四章，二维离散型随机变量协方差的计算）

解：  $E(X) = 0.2 \times 0 + 0.1 \times 0 + 0.3 \times 1 + 0.4 \times 1 = 0.7$

$E(Y) = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 2 + 0.3 \times 1 + 0.4 \times 2 = 1.1$

$E(XY) = 0.2 \times 0 \times 1 + 0.1 \times 0 \times 2 + 0.3 \times 1 \times 1 + 0.4 \times 1 \times 2 = 0.7$

$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.7 - 0.7 \times 1.1 = -0.07$

**例 4.** 设  $(X, Y)$  服从在区域  $D$  上的均匀分布, 其中  $D$  由  $x$  轴、 $y$  轴及  $x+y=1$  所围成, 求  $X$  与  $Y$  的协方差  $\text{Cov}(X, Y)$ . (第四章, 二维连续型随机变量协方差的计算)

**解:**  $(X, Y)$  的概率密度为

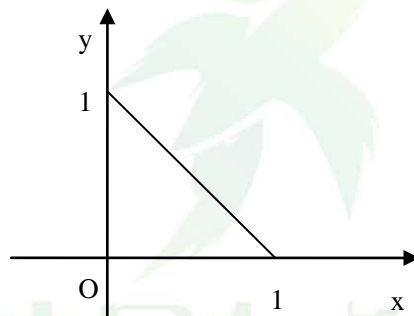
$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

$$E(X) = \iint_D xf(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2xdy = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = \iint_D yf(x, y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} 2ydx = \frac{1}{3}$$

$$E(XY) = \iint_D xyf(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2xydy = \frac{1}{12}$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{36}$$



**例 5** 设某行业的一项经济指标服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu, \sigma^2$  均未知. 今获取了该指标的 9 个数据作为样本, 并算得样本均值  $\bar{x}=56.93$ , 样本方差  $s^2=(0.93)^2$ . 求  $\mu$  的置信度为 95% 的置信区间. (附:  $t_{0.025}(8)=2.306$ ) (第七章, 对  $\mu$  估计, 方差已知)

**解:** 分析: 对  $\mu$  估计, 方差未知, 置信区间为  $\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot S / \sqrt{n}$

计算得  $\bar{x} = 56.93$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $t_{0.025} = 2.306$ ,  $S = 0.93$ ,  $n = 9$

故  $\mu$  的置信度为 95% 的置信区间为:

$$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot S / \sqrt{n} = 56.93 \pm 2.306 \times 0.93 / 3$$

即  $(56.215, 57.645)$ 。

**例 6.** 设总体  $X$  的概率密度  $f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  其中未知参数  $\theta > -1$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是来自该总

体的一个样本, 求参数  $\theta$  的矩估计和极大似然估计. (第七章, 矩估计和极大似然估计)

**解:** (1) 矩估计

$$\text{总体期望 } E(X) = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1} dx = (\theta+1) \cdot \frac{1}{\theta+2} x^{\theta+2} \Big|_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$$\text{建立矩估计方程 } E(X) = \bar{X}, \text{ 即 } \frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X}$$

$$\text{解得 } \theta \text{ 的矩估计量为 } \hat{\theta} = \frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$$

## (2) 极大似然估计

$$\text{似然函数 } L(\theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k, \theta) = \prod_{k=1}^n (\theta+1)x_k^\theta = (\theta+1)^n \cdot \prod_{k=1}^n x_k^\theta$$

$$\text{取对数 } \ln L(\theta) = \ln[(\theta+1)^n \cdot \prod_{k=1}^n x_k^\theta] = n \ln(\theta+1) + \theta \ln \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\text{对 } \theta \text{ 求导 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \ln \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

$$\text{解得 } \theta \text{ 的极大似然估计量为 } \hat{\theta} = -\frac{n}{\ln \sum_{k=1}^n x_k} - 1$$

**例 7.** 设变量  $y$  与  $x$  的观测数据  $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 10)$  大体上散布在某条直线的附近, 经计算得出

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 25, \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 350, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 88700, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 8250.$$

试用最小二乘法建立  $y$  对  $x$  的线性回归方程. (第九章, 线性回归方程)

$$\text{解: } \hat{\beta}_1 = \frac{L_{xy}}{L_{xx}} = \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{88700 - 10 \times 25 \times 350}{8250 - 10 \times 25 \times 25} = \frac{1200}{2000} = 0.6$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 350 - 0.6 \times 25 = 335$$

$$y \text{ 对 } x \text{ 的线性回归方程 } \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = 335 + 0.6x$$