

杭州师范大学 2018-2019 学年第一学期期中考试

《高等数学 A1》试卷 (A)

一、单项选择题 (共 24 分, 每小题 3 分)

1. $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 的 ().
A. 充分条件 B. 充要条件 C. 必要条件 D. 二者无关系
2. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(e^{x \cos x^2} - e^x)$ 与 $\sin^k x$ 是同阶无穷小, 则正整数 k 等于 ().
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
3. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个领域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导的一个充分条件是 ().
A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$ 存在 B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)}{h}$ 存在
C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h}$ 存在 D. $\lim_{h \rightarrow 0} h[f(x_0 + \frac{1}{h}) - f(x_0)]$ 存在
4. 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 ().
A. $f(x)$ 与 x 是等价无穷小 B. $f(x)$ 与 x 是同阶且非等价无穷小
C. $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小 D. $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小
5. 设 $f(x)$ 在区间 I 内可微, 则 $f(x)$ 在 I 内 ().
A. 必有导数为零的点 B. 必有零点 C. 必连续 D. 必有最大值或最小值
6. 设 $f(x) = \frac{e^x - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ().
A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 第二类间断点 D. 连续点
7. 设 $f(x)$ 在区间 I 内连续, 则 $f(x)$ 在 I 内 ().
A. 必有界 B. 必有零点 C. 必有最大值和最小值 D. 以上说法都不对
8. 判断下列说法的正确性 ().
A. 若 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 处也连续;
B. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界;
C. 一切初等函数在其定义域内连续;
D. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, $g(x)$ 在 x_0 处不连续, 则 $f(x) + g(x)$ 在 x_0 处一定不连续。

二、填空题 (共 24 分, 每小题 4 分)

9. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n + 1}}{3n + 1} \sin \sqrt{n^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. $y = \frac{x}{\tan x}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的可去间断点有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个.

11. 曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{-x^2}, & 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. $y = \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题 (共 35 分, 每小题 7 分)

17. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$ ($a > 0, b > 0$)

18. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$, 求 a, b .

19. 设由参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

20. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定, 求 $y''(0)$ 。

21. 设函数 $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

四、应用题 (共 10 分)

22. (10 分) 如图 2-2, 溶液自深 18cm、顶直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中, 开始时漏斗中盛满了溶液。已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时, 其表面下降的速率为 1cm/min。问此时圆柱形筒中溶液中溶液表面上升的速率为多少?

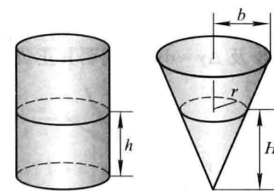


图 2-2

五、证明题 (共 7 分)

23. (7 分) 设 $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$, 又 $f'(0) = 1, g'(0) = 0$, $f(0) = 0, g(0) = 1$, 证明 $\forall x \in R$, 有 $f'(x) = g(x)$ 。