

第四章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质

习题 4.1

1、求下列不定积分：

$$(1) \int \frac{dx}{x^3}$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(3) \int x^3 \cdot \sqrt[5]{x} dx$$

$$(4) \int (x^3 + 1)^2 dx$$

$$(5) \int \frac{(2-x)^3}{\sqrt{x}} dx$$

$$(6) \int \frac{5x^5 + 5x^3 + 3}{x^2 + 1} dx$$

$$(7) \int \frac{3x^2}{1+x^2} dx$$

$$(8) \int (5e^x - \frac{2}{x}) dx$$

$$(9) \int \left(\frac{4}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$(10) \int \frac{3 \cdot 2^x - 7 \cdot 3^x}{2^x} dx$$

$$(11) \int \sec x (\sec x + 2 \tan x) dx$$

$$(12) \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$$

$$(13) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$$

$$(14) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$$

2、一曲线通过点 $(e^2, 3)$ ，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程。

第二节 换元积分法

习题 4.2

1、在下列各等号右边的空白处填入适当的系数，使等式成立（如 $dx = \frac{1}{4}d(4x+3)$ ）

(1) $dx = \underline{\hspace{1cm}} d(bx) (b \neq 0)$

(2) $x dx = \underline{\hspace{1cm}} d(1-x^2)$

(3) $e^{2x} dx = \underline{\hspace{1cm}} d(3e^{2x})$

(4) $\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{1cm}} d(\sqrt{1-x^2})$

(5) $\cos \frac{2}{3} x dx = \underline{\hspace{1cm}} d(\sin \frac{2x}{3})$

(6) $\frac{dx}{x} = \underline{\hspace{1cm}} d(5-4\ln|x|)$

(7) $\frac{dx}{1+4x^2} = \underline{\hspace{1cm}} d(\arctan 2x)$

(8) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{1cm}} d(2-\arcsin x)$

2、求下列不定积分

(1) $\int e^{6t} dt$

(2) $\int (5-3x)^4 dx$

(3) $\int \frac{dx}{2-3x}$

(4) $\int (\cos ax - e^{\frac{x}{b}}) dx$

(5) $\int \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$

(6) $\int 5 \tan^{10} x \cdot \sec^2 x dx$

$$(7) \int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$(9) \int x e^{-2x^2} dx$$

$$(10) \int \frac{x}{\sqrt{3-2x^2}} dx$$

$$(11) \int \frac{x^3}{1-x^4} dx$$

$$(12) \int \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$(13) \int \frac{1-x}{\sqrt{4-9x^2}} dx$$

$$(14) \int \frac{x^3}{4+x^2} dx$$

$$(15) \int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$$

$$(16) \int \cos^3 x dx$$

$$(17) \int \sin 3x \cdot \sin 5x dx$$

$$(18) \int \frac{2 \arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

$$(19) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

$$(20) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(21) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$(22) \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$$

$$(23) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

第三节 分部积分法

习题 4.3

一、求下列不定积分：

1、 $\int x^2 \cos x dx$

2、 $\int x \ln x dx$

3、 $\int \arccos x dx$

4、 $\int x^2 e^{-x} dx$

5、 $\int x^3 \ln x dx$

6、 $\int e^{-2x} \sin x dx$

7、 $\int x^2 \arctan x dx$

8、 $\int t e^{-3t} dt$

9、 $\int (x^2 - 1) \cos 2x dx$

10、 $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$

11、 $\int \sin \ln x dx$

12、 $\int (\arccos x)^2 dx$

二. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin x$, 求 $\int x^2 f''(x) dx$

第四节 有理函数的积分

习题 4.4

求下列积分：

1、 $\int \frac{x^3}{x+2} dx$

2、 $\int \frac{2x+5}{x^2+x-12} dx$

3、 $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$

4、 $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx$

5、 $\int \frac{dx}{x^4+1}$

6、 $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

$$7、 \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$$

$$8、 \int \frac{3\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$9、 \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$$

$$10、 \int \frac{(\sqrt{x})^3 + 1}{\sqrt{x} + 1} dx$$

$$11、 \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$$

$$12、 \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$$