《高等数学 A1》试卷答案(A 卷)

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、单项选择题：CDCDD

二、填空题（共 18 分，每小题 3 分）

6．$[0,\frac{5}{2}]$ 7．2 8. 10! 9. -32/3 10．$e^x(x+2)$ 11．$a>1$

三、解答题：（共 42 分，每小题 6 分）

12．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{(1-\cos x)^2}$。

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{(1-\cos x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{(\frac{1}{2}x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{x^3}=2$$ （6 分）

13．求参数方程 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}(a>0)$ 所确定函数的微分 dy。

解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(a(1-\cos t))'}{(a(t-\sin t))'}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\quad \therefore dy=\frac{\sin t}{1-\cos t}dx$$ （6 分）

14. 已知 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x+\tan^2 x(0<x<1)$，求 $f(x)$。

解： 由 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x+\tan^2 x=1-\sin^2 x+\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$

得 $f'(x)=1-x+\dfrac{x}{1-x}$ （3 分）

$$f(x)=\int(1-x+\frac{x}{1-x})dx=-\int(x+\frac{1}{x-1})dx=-\frac{1}{2}x^2-\ln|1-x|+C$$

（6 分）

15．计算定积分 $\int_0^{63}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$。

解： 令 $x+1=t^6$

$$\int_0^{63}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx=\int_1^2\frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt=6\int_1^2\frac{t^3}{t+1}dt=6\int_1^2(\frac{t^3+1}{t+1}-\frac{1}{t+1})dt$$ （3 分）

$$=6\int_1^2(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt=6[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln(t+1)]\Big|_1^2=11+6\ln\frac{2}{3}$$ （6 分）

16．设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=e^x$ 所确定的隐含数，求 $y''(0)$。

解：x=0 时，y=0.

对方程两边求导得 $y+xy'+e^yy'=e^x$，因此

$$y'=\frac{e^x-y}{x+e^y}\qquad y'(0)=\left.\frac{e^x-y}{x+e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=1$$ （3 分）

再对方程求导得 $y''=\dfrac{e^x-2y'-e^y(y')^2}{x+e^y}$ 因此 $y''(0)=-2$ （6 分）

17．求微分方程 $y'+\dfrac{y}{x}=e^x$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解。

解： $$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int e^xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)=\frac{1}{x}[(x-1)e^x+C]$$ （4 分）

$y(1)=0\Rightarrow\quad C=0$

因此 $y=\dfrac{x-1}{x}e^x$ （6 分）

18．求微分方程 $y''-5y'+6y=8e^x$ 的通解。

解：由特征方程 $\lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$

故齐次线性方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ （3 分）

$\lambda=1$ 不是特征方程的根，故 $\widetilde{y}=Ae^x$ 代入原方程解得

$Ae^x-5Ae^x+6Ae^x=8Ae^x$ 解得 $A=4$

故原方程通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+4e^x$ （6 分）

得分	

四、分析与应用题（共 20 分，每小题 10 分）

19. 若直角三角形的一直边与斜边之和为常数，求有最大面积的直角三角形。

解：设两直角边分别为 x，y，面积 $S=\dfrac{x\cdot y}{2}$

设常数为 C，则 $C=x+\sqrt{x^2+y^2}$　　　得 $x=\dfrac{C^2-y^2}{2C}$　　　（3 分）

所以 $S=\dfrac{(C^2-y^2)y}{4C}(0<y<C)$　　　$S'=0\Rightarrow y=\dfrac{C}{\sqrt{3}}$，此时 $x=\dfrac{C}{3}$　　　（7 分）

由驻点唯一可知直角边为 $\dfrac{C}{\sqrt{3}},\dfrac{C}{3}$ 时直角三角形面积最大。　　　（10 分）

20．求由曲线 $y=x^2+1$，直线 y=0，x=0 和 x=1 所围成的平面图形的面积，以及此图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

解：　$S=\int_0^1(x^2+1)dx=\dfrac{4}{3}$　　　（5 分）

$V=\pi\int_0^1(x^2+1)^2dx=\dfrac{28}{15}\pi$　　　（10 分）

得分	

五、证明题：（共 5 分，每小题 5 分）

21．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$，试证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

证明：设 $F(x)=xf(x)$

$F(1)=1\cdot f(1)=f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}F(x)dx$　　　（2 分）

由积分中值定理 $\exists\eta\in[0,\frac{1}{2}]\quad s.t.\quad \frac{1}{2}F(\eta)=\int_0^{\frac{1}{2}}F(x)dx$

因此 $F(1)=F(\eta)$，由罗尔定理得

$\exists\xi\in(\eta,1)\quad s.t.\quad F'(\xi)=0\quad\Rightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$　　　（5 分）