第三章 微分中值定理和导数的应用

习题 3.1 参考答案

1. B
2. 提示：设 $\varphi(x)=f(x)\sin x$，在 $[0,\pi]$ 上对 $\varphi(x)$ 运用罗尔定理.
3. 提示：证明 $f(0)=0$，在 $[0,1]$ 上对 $f(x)$ 运用罗尔定理.
4. 利用罗尔定理，可得有分别位于区间 $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ 的三个根.
5. 提示：多次运用罗尔定理.
6. 提示：先在 $\left[0,1\right]$ 上利用零点定理证明存在性，再证明唯一性.
7. 提示：（1）函数 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 上利用拉格朗日定理，然后分别放大和缩小.

   （2）函数 $\ln(x+1)$ 在 $[0,x]$ 上利用拉格朗日定理，然后分别放大和缩小.
8. 提示：构造函数并证明函数的导数恒为零。
9. 提示：设 $F(x)=x^2$，然后利用柯西中值定理.

习题 3.2 参考答案

1. （1）$\dfrac{m}{n}a^{m-n}$　（2）2　（3）$\dfrac{1}{3}$　（4）$-\dfrac{1}{8}$　（5）∞

（6）1　（7）$\dfrac{1}{3}$　（8）2　（9）∞　（10）$-\dfrac{1}{2}$

（11）e^{-1}　（12）1　（13）1　（14）e　（15）$e^{\frac{1}{3}}$　（16）$-\dfrac{e}{2}$

2. 连续

习题 3.3 参考答案

1. $\dfrac{1}{x}=-1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}(x+1)^{n+1}\quad(0<\theta<1)$

2. $f(x)=x^2-\dfrac{2^3x^4}{4!}+\dfrac{2^5x^6}{6!}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+0(x^{2n})$

3. （1）$-\dfrac{1}{12}$　（2）$\dfrac{1}{3}$
4. $A=-4,\ B=5$
5. 提示：由泰勒中值定理有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2\to-\infty\quad(x\to+\infty)$$

由零点定理可知方程 $f(x)=0$ 有根，再去证明函数 $f(x)$ 的单调性.

习题 3.4 参考答案

1. B.

2. 提示：利用函数的单调性证明不等式.

3. 提示：设 $\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-f(x)$，证明 $\varphi(x)$ 在 $[0,b]$ 上单调递减.

4. 方程有 2 个实根，分别在 $(-\infty,-1)$ 及 $(1,+\infty)$ 内.

5. 提示： $y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}(4x-1)$，曲线的凹区间为 $(-\infty,0]$ 和 $[\frac{1}{4},+\infty)$，凸区间为 $[0,\frac{1}{4}]$，拐点为(0,0) 和 $(\frac{1}{4},-3\cdot 4^{\frac{-8}{3}})$.

6. $a=-1,b=3$，曲线在 $(-\infty,1)$ 是凹的，曲线在 $[1,+\infty)$ 是凸的.

7. 提示： $y'=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2},y''=\frac{2}{(x+1)^3}$

函数的单调增加区间为 $(-\infty,-2]$ 和 $[0,+\infty)$，单调减少区间为[-2,0]，凸区间 $(-\infty,-1)$，凹区间 $(-1,+\infty)$.

习题 3.5 参考答案

1. 当 $b^2-3ac<0$ 时函数没有极值.

2. （1）极小值 $y(0)=0$；（2）极大值 $y(\frac{15}{2})=\frac{\sqrt{462}}{6}$.

3. $a=-3,b=0,c=1$，当 $x=2$ 时，极小值 $y=-3$.

4. 故当 $x=0$ 时，函数取得极大值 $f(0)=1$，当 $x=\frac{1}{e}$ 时函数取得极小值 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$.

5. $(\frac{3}{8},\frac{9}{64})$.

6. （1）最大值 $y(3)=11$，最小值 $y(2)=-14$；（2）最大值 $y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$，最小值 $y(-5)=-5+\sqrt{6}$.

7. 长为 10 米，宽为 5 米.

8. $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$；$d:h=1:1$.

9. $S_{\max}=\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$

习题 3.6 **参考答案**

1. (1) 铅直渐近线 $x=-1$, 斜渐近线 $y=x-1$.

(2) 铅直渐近线 $x=1, x=2$，斜渐近线 $y=x+3$.

(3) 铅直渐近线 $x=1$，水平渐近线 $y=2$.

(4) 铅直渐近线 $x=1$, 水平渐近线 $y=0$.

(5) 铅直渐近线 $x=0$，斜渐近线 $y=x$.

(6) 铅直渐近线 $x=0$，水平渐近线 $y=1$.

习题 3.7 **参考答案**

1. $K=0$.

2. $K=\dfrac{1}{6}$

3. $K=\left|\dfrac{2}{3asin2t_0}\right|$.

4. 在 $(0,0)$ 点处曲率最大, 最大曲率为 $K=2$.

5. $(\pi,-1)$ 处曲率最小, 最小值 $K=1$.

习题 3.8 **参考答案**

1. $0.18<\xi<0.19$

2. $-0.20<\xi<-0.19$

综合练习题三参考答案

1. (1)B 提示：利用 $f'(x)$ 的单调性

(2)B

(3)B

(4)D 提示：ABC 选项可由左右导数的定义和罗尔定理得到，

D 选项有反例 $f(x)=\cos x, x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

(5)D 提示：由罗尔定理及 $f(0)=0$ 可得.

(6)D 提示：$g(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)$ 表示连接点 $(0,f(0)),(1,f(1))$ 的直线，当 $f''(x)\geq 0$ 时，表示曲线 $f(x)$ 在此直线的下方.

2. 提示：先利用介值定理再利用罗尔定理.

3. 提示：(1) 设 $\varphi(x)=f(x)-x$，在 $[\frac{1}{2},1]$ 上对 $\varphi(x)$ 运用零点定理.

(2) 设 $F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，在 $[0,\eta]$ 上对 $F(x)$ 运用罗尔定理.

4. 提示：设 $\varphi(x)=c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\cdots+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$，在 $[0,1]$ 上对 $\varphi(x)$ 运用罗尔定理.

5. 提示：利用可导函数取得极值的必要条件和拉格朗日中值定理.

6. 提示：依次对 $F(x), F'(x)$ 利用罗尔定理.

7. 利用函数的单调性证明不等式.

8. (1) $\frac{1}{3}$；(2) $(\ln 3)^2$；(3) $\frac{5}{2}$；(4) $\frac{1}{6}$；(5) e^3 (6) e^2

9. 当 $h=\frac{4R}{3}$，$r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$ 时，内接锥体体积的最大.

10. 边际成本函数为 $C'(x)=0.1x+20$，边际利润函数 $L'(x)=-0.1x+10$，当 $x=100$ 时，利润最大.