第三章　微分中值定理与导数的应用

第一节　微分中值定理　习题 3.1

1. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在 $x=a$ 处(　　)

A. $f(x)$ 导数存在且 $f'(a)\neq 0$　B. $f(x)$ 取极大值　C. $f(x)$ 取极小值　D. $f'(a)$ 不存在

2. 设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上连续, 在 $\left(0,\pi\right)$ 上可导, 证明: $\exists\xi\in\left(0,\pi\right)$, 使得 $f\left(\xi\right)\cos\xi+f'\left(\xi\right)\sin\xi=0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, 证明：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

4. 不求出函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数, 说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间.

5. 若 $f(x)$ 在 $\left(a,b\right)$ 内具有二阶导数, 且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$. 证明: 方程 $f''(x)=0$ 在 (a,b) 内必有一实根.

6．设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且当 $x\in\left[0,1\right]$ 时 $0<f(x)<1$，当 $x\in(0,1)$ 时 $f'(x)\neq 1$，证明：在 $\left(0,1\right)$ 内有且仅有一个 ξ，使 $f(\xi)=\xi$．

7．利用拉格朗日定理证明下列不等式：

（1）当 $0<a<b$ 时，$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$；（2）当 $x>0$ 时，$x>\ln(x+1)>\dfrac{x}{x+1}$．

8．证明下列等式：

（1）$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}, x\in R$ ；（2）$\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x\in R$．

9．设 $a,b>0$，$f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，证明：在 $\left(a,b\right)$ 内，方程

$2x\left[f\left(b\right)-f\left(a\right)\right]=\left(b^2-a^2\right)f'\left(x\right)$ 至少存在一个根.

第二节　洛必达法则　习题 3.2

1. 首先指出下列各极限所属未定式类型，然后用洛必达法则求极限.

（1）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{x\ln x}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{1}{\ln x})$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1})$；

(11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$ ；

(12) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$ ；

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$ ；

(14) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$ ；

(15) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ；

(16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}} & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}} & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

第三节　泰勒公式　习题 3.3

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x_0=-1$ 处的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.

2. 求函数 $f(x)=\sin^2 x$ 的带有皮亚诺余项的 $2n$ 阶麦克劳林公式.

3. 利用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ ；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

4. 若 $f(x)=x^{-5}(\sin 3x+A\sin 2x+B\sin x)$ 当 $x\to 0$ 时具有有限极限, 求出常数 A 和 B .

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数， $a\in(0,+\infty)$ 满足 $f(a)>0, f'(a)<0$, 且对任一 $x\in(a,+\infty), f''(x)\le 0$, 证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在唯一实根.

第四节　函数的单调性与曲线的凹凸性　习题 3.4

1. 设 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上连续，在 $(a\,,b)$ 内具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上的图形（　）

A. 上升且为凸的　B. 上升且为凹的　C. 下降且为凸的　D. 下降且为凹的

2. 证明下列不等式：

（1）当 $x\neq 0$ 时，$e^x>1+x$；　（2）当 $x>0$ 时，$(x+1)\ln(x+1)>\arctan x$；

（3）当 $0<x<\pi$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$；　（4）当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}$.

3. 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,c\right]$ 上连续，在 $(0,c)$ 内可导且 $f'\left(x\right)$ 单调下降，$f(0)=0$，证明：对于 $0\le a\le b\le a+b\le c$，恒有 $f\left(a+b\right)\le f\left(a\right)+f\left(b\right)$.

4. 判断 $3x^4-4x^3-6x^2+12x-20=0$ 有几个实根.

5. 求曲线 $y=(x-1)\ x^{\frac{5}{3}}$ 的凹凸区间及拐点.

6. 设点 $(1,2)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点, 计算 a, b 的值并求曲线的凹凸区间.

7．求函数 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的单调区间以及曲线的凹凸区间、拐点.

第五节　函数的极值与最大值最小值 习题 3.5

1．函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a > 0)$ 的系数满足____________时,这个函数没有极值.

2. 求下列函数的极值：

（**1**） $y = x - \ln(x+1)$ ；　　　　　　　　　（**2**） $y = \dfrac{1+5x}{\sqrt{3+2x^2}}$.

3. 试确定 $\boldsymbol{a,b,c}$ 的值, 使 $\boldsymbol{y = x^3 + ax^2 + bx + c}$ 在点 $(1,-1)$ 处有拐点, 且在 $\boldsymbol{x} = 0$ 处有极大值为 1, 并求此函数的极小值.

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x} & x > 0 \\ x+1 & x \le 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的极值.

5. 在抛物线 $y = x^2$ 上找出到直线 $3x - 4y = 2$ 的距离最短的点.

6.求下列函数的最大值、最小值：

（**1**） $y=x^4-8x^2+2,-1\le x\le 3$；　　（**2**） $y=x+\sqrt{1-x},-5\le x\le 1$。

7. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌 20m 长的墙壁。问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

8. 要造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小？这时底直径与高和比是多少？

9. **若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数 a，求有最大面积的直角三角形的面积.**

第六节　函数图形的描绘 习题 3.6

1．求下列曲线的渐近线.

(1) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ ；

(2) $y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$ ；

(3) $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ ；

(4) $y=\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$ ；

(5) $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$ ；

(6) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

2. 作下列函数的图形：

(1) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ ；

(2) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

第七节　曲率 习题 3.7

1. 求 $y = x^3$ 在 $(0,0)$ 点的曲率.

2. 求曲线 $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ 在对应于 $t = 1$ 的点处的曲率.

3. 求曲线 $x = a\cos^3 t,\ x = a\sin^3 t$ 在 $t = t_0$ 处的曲率.

4. 求抛物线 $y = x^2$ 上任一点的曲率, 并指出在哪点曲率最大.

5. 判断曲线弧 $y = \cos x$ 在 $(0, 2\pi)$ 内哪点的曲率最小, 并求该点处的曲率.

*第八节　方程的近似解 习题 3.8

1. 试证明方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内只有唯一的实根, 并用二分法求这个根的近似值, 使误差不超过 0.01.

2. 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有唯一的实根, 并用切线法求这个根的近似值, 使误差不超过 0.01.

综合练习题三

1.选择题

(1)设在$[0,1]$上$f(x)$二阶可导,且$f''(x)>0$,则（　　　　）

A. $f'(0)<f'(1)<f(1)-f(0)$　　　B. $f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$

C. $f'(1)<f'(0)<f(1)-f(0)$　　　D. $f(1)-f(0)<f'(1)<f'(0)$

(2)函数$y=1+\dfrac{12x}{(x+4)^2}$的图形（　　　）

A. 只有水平渐近线　　　B. 有一条水平渐近线和一条铅直渐近线

C. 只有铅直渐近线　　　D. 无渐近线

(3)设函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义,在(a,b)内可导,则（　）

A.当$f(a)f(b)<0$时,存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0$

B.对任何$\xi\in(a,b)$,有$\lim\limits_{x\to\xi}\left[f(x)-f(\xi)\right]=0$

C.对$f(a)=f(b)$时,存在$\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$

D. 存在$\xi\in(a,b)$,使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(4)设$f'(x)$在$[a,b]$上连续,且$f'(a)>0, f'(b)<0$,则下列结论中错误的是(　　)

A.至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)>f(a)$

B. 至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)>f(b)$

C. 至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f'(x_0)=0$

D. 至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=0$

(5)设$f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，$f'(x)$的零点个数是(　)

A.0　　　B.1　　　C.2　　　D. 3

(6)函数$f(x)$具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间[0,1]上（　）

A.当$f'(x)\geq 0$时，$f(x)\geq g(x)$　　　B.当$f'(x)\geq 0$时，$f(x)\leq g(x)$

C.当$f''(x)\geq 0$时，$f(x)\geq g(x)$　　　D.当$f''(x)\geq 0$时，$f(x)\leq g(x)$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$. 证明：必存在 $\xi \in (0,3)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

3. 设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续, 在 $\left(0,1\right)$ 内可导, 且 $f\left(0\right)=f\left(1\right)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 证明：

（1）存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得 $f\left(\eta\right)=\eta$；（2）对任意实数 λ, 必存在 $\xi \in \left(0,\eta\right)$, 使得 $f'\left(\xi\right)-\lambda\left[f\left(\xi\right)-\xi\right]=1$.

4. 已知 $c_0+\frac{c_1}{2}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0$, 证明：方程 $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n=0$ 在 $\left(0,1\right)$ 内至少有一个实根.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，在 (a,b) 内具有二阶导数，$|f''(x)| \le K$（$a < x < b$），且 $f(x)$ 在 (a,b) 内的点 x_0 处取得最大值. 证明：$|f'(a)| + |f'(b)| \le K(b-a)$.

6. 设 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$，其中 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内具有二阶导数，且 $f(2)=0$，证明：存在 ξ（$1<\xi<2$），使得 $F''(\xi)=0$.

7. 证明：当 $x>1$ 时，$\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

8. 计算下列各题的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(3^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}} - 2\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos 2x}{x\tan x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{\ln(1+2x)}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

9. 在半径为 R 的球内作一个内接圆锥体，问此圆锥体的高、底半径为何值时，其体积 V 最大?

10. 设某厂每月生产产品的固定成本为 5000 元. 生产 x 单位产品的可变成本（元）为 $0.05x^2+20x$. 如果每单位产品的售价为 30 元. 要使利润最大，应生产多少件产品?