1.3 概率的加法法则

例1 100个产品中有60个一等品, 30个二等品, 10个废品. 规定一,二等品都为合格品, 考虑这批产品的合格率与一,二等品之间的关系

解 设事件A,B分别表示产品为一,二等品. 则A与B不相容, $AB=\Phi$, $A+B$为合格品, 则

$$P(A)=\frac{60}{100},\quad P(B)=\frac{30}{100}$$

$$P(A+B)=\frac{60+30}{100}=\frac{90}{100}$$

可见$P(A+B)=P(A)+P(B)$

例2 200个产品中有6个废品, 任取3个, 求最多只有一个废品的概率$P(B)$

解 设事件A_0,A_1分别表示3个废品中有0个和1个废品, 则B=A_0+A_1, 且A_0与A_1与互不相容.则有利于B的基本事件数等于有利于A_0与A_1的基本事件数m_1与m_2之和, 因此

$$P(B)=\frac{m_0+m_1}{n}=\frac{m_0}{n}+\frac{m_1}{n}=P(A_0)+P(A_1)$$

其中$P(A_0)=\dfrac{C_{194}^3}{C_{200}^3}\approx 0.9122$ $P(A_1)=\dfrac{C_6^1C_{194}^2}{C_{200}^3}\approx 0.0855$

因此$P(B)\approx 0.9122+0.0855=0.9977$

加法法则

两个互不相容(互斥)事件之和的概率等于它们的概率的和. 即当$AB=\Phi$时,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

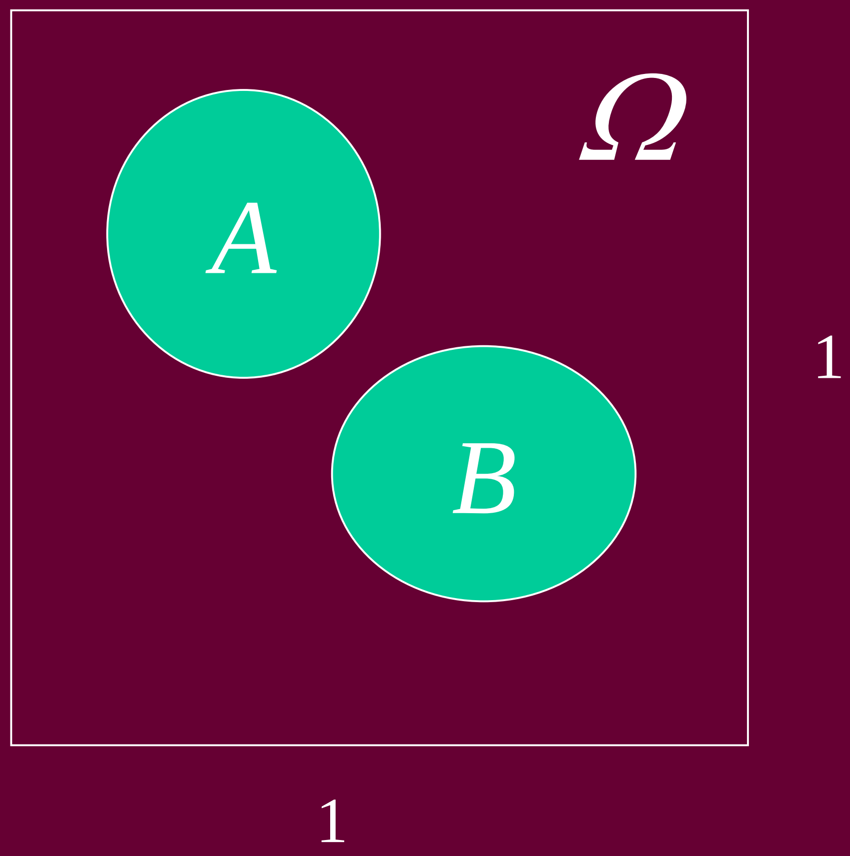
实际上, 只要$P(AB)=0$, 上式就成立.

加法法则的一个形象解释:

将一个边长为1的方形看作是整个样本空间Ω, 而其中的每一区域代表一事件, 这些区域的面积代表此事件发生的概率, 则可以看出加法法则

如下图所示:

如果区域A与区域B不重合, 则它们的总的面积等于各个区域的面积之和

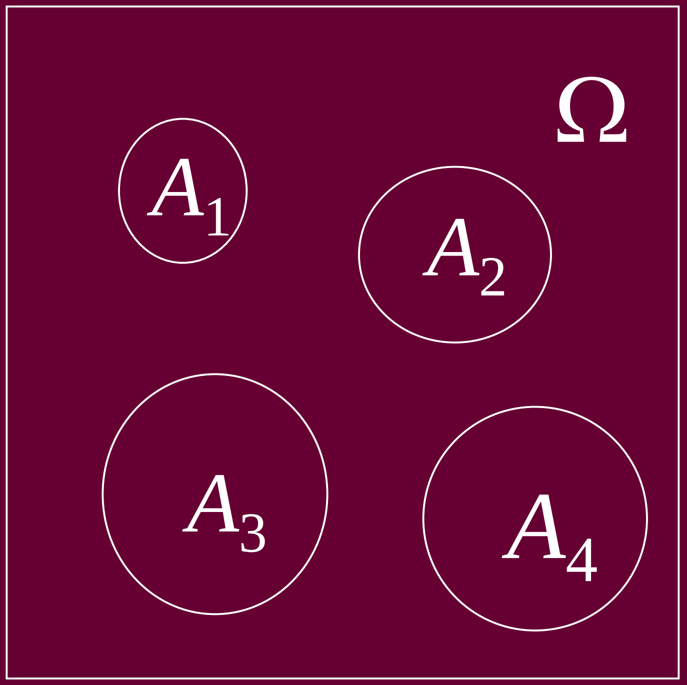


如果n个事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$两两互不相容, 则

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

这个性质称为概率的有限可加性, 但在建立概率概念时需要规定概率应具有完全可加性(又称可列可加性), 即如果可列个事件$A_1,A_2,\ldots$两两互不相容, 则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



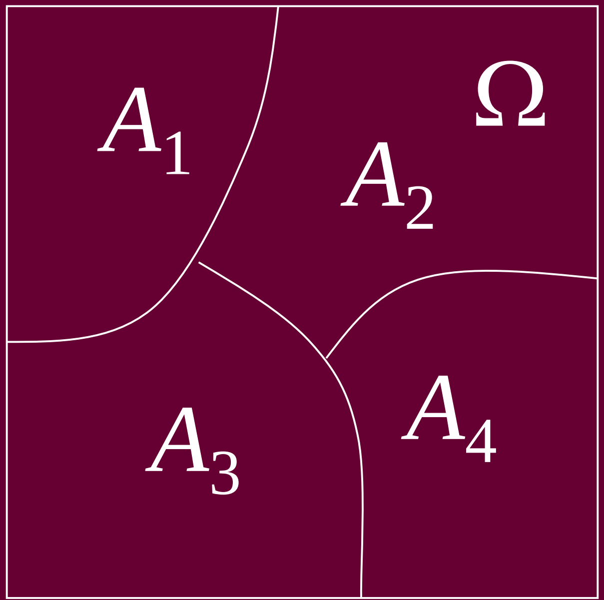
若n个事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$构成一完备事件组, 则它们的概率的和为1, 即

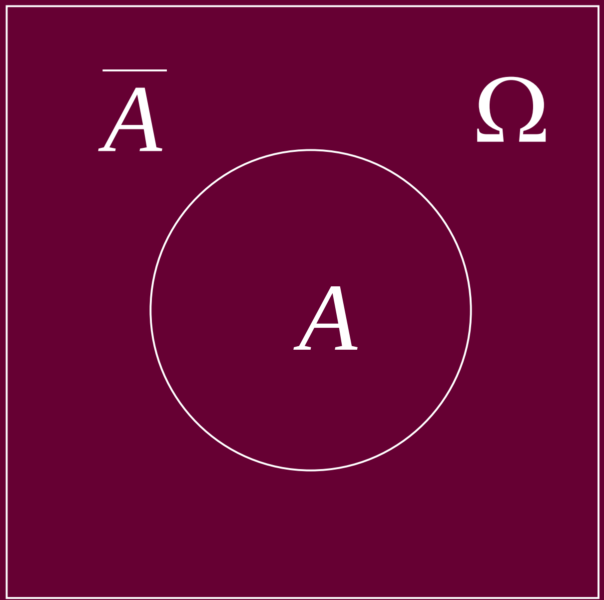
$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

特别地, 两个对立事件概率之和为1, 即

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

经常使用的形式是 $P(A)=1-P(\overline{A})$





经常有一些概率论的较难的题, 直接计算某事件的概率困难, 因此考虑先求此事件的逆事件的概率

例 掷3次硬币, 求至少一次正面朝上的概率.

解: 假设A={至少一次正面}, 则

$\overline{A}$={全是反面}, 只包含一个基本事件.

基本事件总数为$2^3=8$, 因此

$$P(\overline{A})=\frac{1}{8}$$

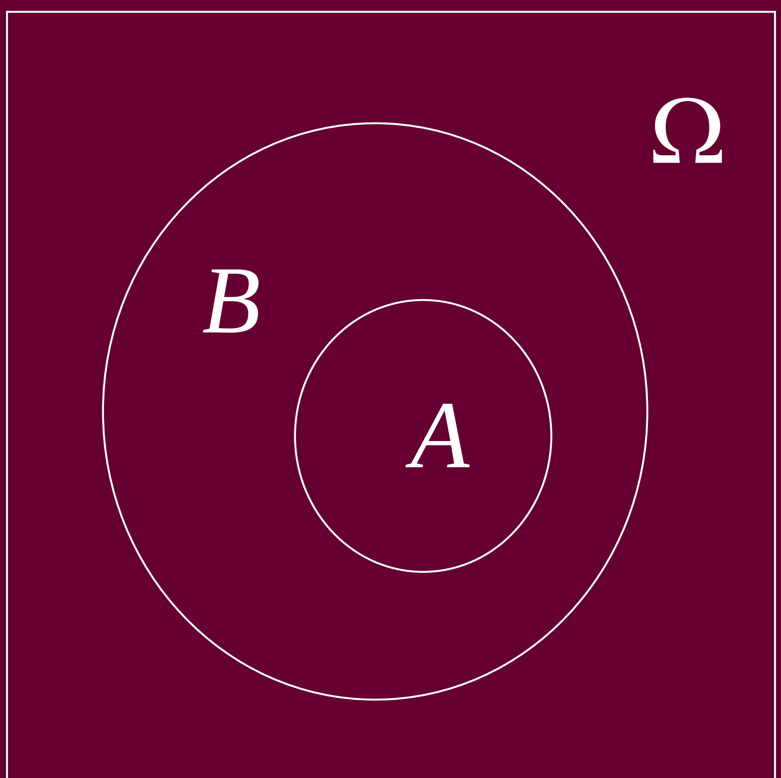
则$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

如果$B \supset A$, 则$P(B-A)=P(B)-P(A)$

这是因为, 如果$B \supset A$, 则必有$B=A+(B-A)$,

而A与$B-A$互不相容, 因此

$P(B)=P(A)+P(B-A)$



对任意两个事件A,B, 有

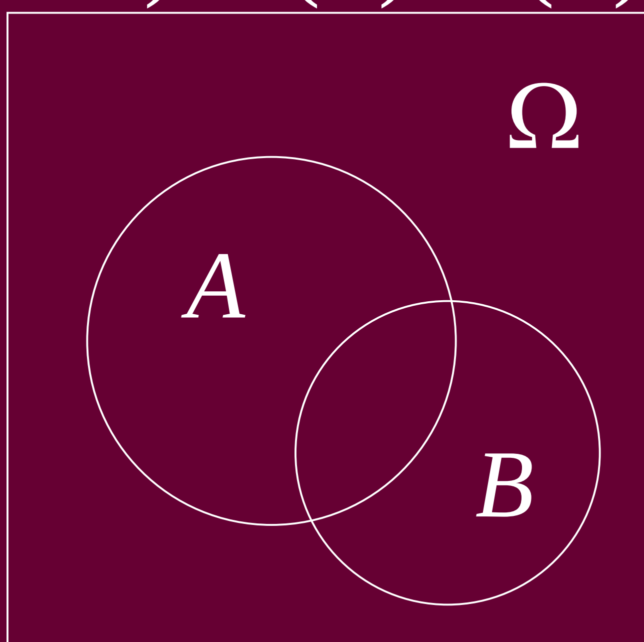
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

这被称为广义加法法则,

这是因为$A+B=A+(B-AB)$, 而A与$B-AB$互斥,

因此$P(A+B)=P(A)+P(B-AB)$, 而因为$B\supset AB$

则$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$



由广义加法法则可以推导出多个事件的和的概率公式

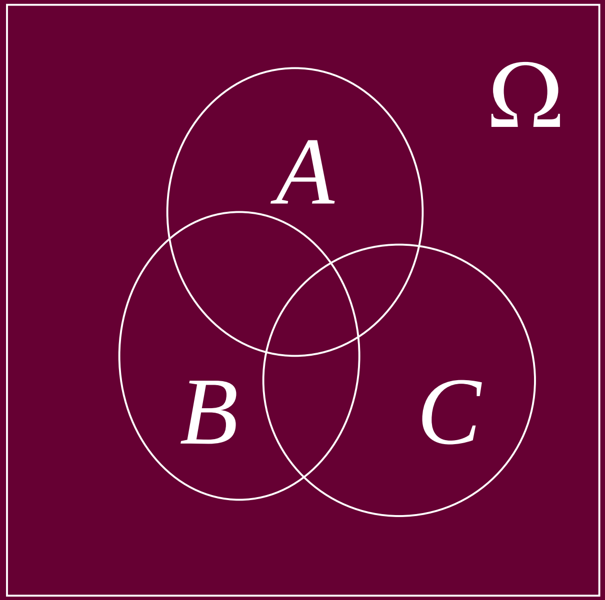
例如, 考虑任意三个事件之和$A+B+C$的概率$P(A+B+C)$, 先将$B+C$看作一个事件, 得

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B+C)-P[A(B+C)]$$

$$=P(A)+P(B+C)-P(AB+AC)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-$$

$$-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$



最后得

$$P(A+B+C)=$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

例3 产品有一, 二等品及废品3种, 若一, 二等品率分别为0.63及0.35, 求产品的合格率与废品率.

解 令事件A表示产品为合格品, A_1,A_2分别表示一,二等品. 显然A_1与A_2互不相容, 并且 $A=A_1+A_2$, 则

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)$$

$$=0.63+0.35=0.98$$

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.98=0.02$$

注意此题并非古典概型题.

例4 一个袋内装有大小相同的7个球, 4个是白球, 3个为黑球. 从中一次抽取3个, 计算至少有两个是白球的概率.

解 设事件A_i表示抽到的3个球中有i个白球(i=2,3), 显然A_2与A_3互不相容, 且

$$P(A_2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{4\times 3}{1\times 2}\cdot 3\cdot\frac{1\times 2\times 3}{7\times 6\times 5}=\frac{18}{35}$$

$$P(A_3)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4\times 3\times 2}{7\times 6\times 5}=\frac{4}{35}$$

根据加法法则得$P(A_2+A_3)=P(A_2)+P(A_3)=\dfrac{22}{35}$

例5 50个产品中有46个合格品与4个废品, 从中一次抽取3个, 求其中有废品的概率.

解 设事件A表示取到的3个中有废品, 则事件A的逆为取到的3个产品中没有废品更好计算一些, 因此有

$$P(\overline{A})=\frac{C_{46}^{3}}{C_{50}^{3}}=\frac{46\times 45\times 44}{50\times 49\times 48}=\frac{23\times 3\times 11}{10\times 49\times 2}$$

$$=\frac{759}{980}\approx 0.7745$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})\approx 1-0.7745=0.2255$$

例4 某市有甲, 乙, 丙三种报纸, 订每种报纸的人数分别占全体市民人数的30%, 其中有10%的人同时定甲, 乙两种报纸. 没有人同时订甲丙或乙丙报纸. 求从该市任选一人, 他至少订有一种报纸的概率.

设A, B, C分别表示选到的人订了甲, 乙, 丙报

则: P(A)=P(B)=P(C)=0.3

P(AB)=0.1　　　　P(AC)=P(BC)=0

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=30\%\times 3-10\%-0-0+0=80\%$$

例5 在1~10这10个自然数中任取一数，求

（1）取到的数能被2或3整除的概率，

（2）取到的数即不能被2也不能被3整除的概率，

（3）取到的数能被2整除而不能被3整除的概率。

解:设A=“取到的数能被2整除”； $P(A)=\frac{1}{2}$ $P(B)=\frac{3}{10}$

B＝“取到的数能被3整除”

故 $(1)P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \quad =\frac{7}{10}$

$(2)P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B) \quad =\frac{3}{10}$ $P(AB)=\frac{1}{10}$

$(3)P(A-B)=P(A)-P(AB) \quad =\frac{2}{5}$

在严格的概率论公理化体系中，把一个随机事件的概率所应具备的三个基本属性作为建立概率的数学理论的出发点，直接规定为三条公理，即：

(1)对任何事件A, $P(A)\geq 0$;

(2)$P(\Omega)=1$

(3) 若可列个事件$A_1, A_2, \ldots$两两不相容，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

而前面的加法法则只是公理(3)的一种特殊情况