杭州师范大学理学院 2015 —2016 学年第二学期期末考试

《概率论与数理统计》试卷（A）

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

班级：

学号：

姓名：

装 订 线

得分	

一、单选题（在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案，并将正确答案的序号填入题后的括号内。每小题 2 分，共 20 分。）

1. 将 5 封信投入四个邮筒之中，则第二个邮筒恰好有 2 封信的概率是（ C ）

   A. 4/5　　B. 2/5　　C. 135/512　　D. 169/256

2. 有一枚不匀称的硬币，假设将该硬币连抛 10 次，至少 1 次正面向上的几率为 19676/19683. 那么该硬币抛掷时每次正面向上的概率是(A)

   A. 2/3　　B. 3/4　　C. 1/3　　D. 1/4

3. 设 ξ,η 是两个随机变量，已知 $E\xi=12$，$E\eta=-6$，$D\xi=4$，$E\eta^2=40, E\xi\eta=-70$，那么，ξ,η 的协方差是(D)

   A. 2　　B. 1/6　　C. 1/3　　D. 1/2

4. 已知 $\mathrm{Cov}(X+Y)=\mathrm{Cov}X+\mathrm{Cov}Y$ 。那么（ D ）

   A. X, Y 互相独立　　B. $P(X|Y)=P(X)$

   C. X, Y 互斥　　D. $\mathrm{Cov}(X-Y)=\mathrm{Cov}X+\mathrm{Cov}Y$

5．设随机变量ξ服从二项分布，$E\xi=4, D\xi=2.4$，那么ξ服从的分布是（C）

A. $B(4,2.4)$　　B. N(4, 2.4)

C. $B(10,0.4)$.　　D. $F(10,0.4)$

6. 设随机变量ξ的期望是 6，方差是 12，那么$P(-4<\xi<16)$至少为（B）

A. 0.5　　B. 0.88　　C. 0.60　　D. 0.12

7.设随机变量$X_1 \sim N(4,7), X_2 \sim N(-1,2), X_3 \sim N(3,1)$，那么$X_1+2X_2-X_3$服从的分布是（A）

A. N(-1, 16)　　B. t(3)

C. N(-1, 14)　　D. $\chi^2(3)$

.

8.设$X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$是来自标准正态总体的一组样本，那么$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$服从的分布是（B）

A. χ^2(n-1)　　B. χ^2(n)　　C. t(n)　　D. t(n−1)

9.设随机变量$\xi \sim \chi^2(7), \eta \sim \mathrm{Exp}(2)$，两者独立. 那么（D）

A. $E(\xi+\eta)=9,\ D(\xi+\eta)=14$　　B. $E(\xi+\eta)=9,\ D(\xi+\eta)=11$

C. $E(\xi+\eta)=7.5,\ D(\xi+\eta)=7.25$　　D. $E(\xi+\eta)=7.5,\ D(\xi+\eta)=14.25$

10. 设$X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$是来自总体 X 的一组样本，$EX=\mu$. 那么以下统计量中，$\mu$的最佳估计是(C)

A. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{a_i} X_i}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{a_i}}$　　B. $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

C. $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} X_i$　　D. $\sqrt[n]{X_1 X_2 \ldots X_n}$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

得分	

1. 已知 $P(A|B)=1/4$， $P(\overline{A}B)=1/6$，则 $P(B)=$ __2/9__， $P(AB)=$ __1/18__. （每空 2 分）

2. 设二维随机向量（X，Y）的联合分布列为

X \ Y	1	2	3
0	1/12	1/24	b
b	1/4	a	3/8

设 X，Y 互相独立. 那么：a=__0.125__，b=__0.125__，（每空 2 分）

3. 设 $X \sim N(7,9)$，则

$P(6 \le X < 9) = \underline{\Phi(\frac{1}{3})+\Phi(\frac{2}{3})-1}$， $P(0 \le X < 10) = \underline{\Phi(1)+\Phi(\frac{7}{3})-1}$，

$P(|X|>10) = \underline{1-\Phi(1)}$， $P(X>25)=\underline{0}$.

(写成正态分布函数 $\Phi(x)$ 的形式)（每空 1 分）

（后两空写 $\underline{2-\Phi(1)-\Phi(\frac{17}{3})}$ 和 $1-\Phi(6)$ 也对）

4. 设随机变量 X 服从泊松分布， $2P(X=0)+3P(X=1)=4P(X=2)$。则 $P(X=4)$ = $\underline{2/3e^2}$

姓名：

线

订

装

学号：

5. 设有来自总体 X 的 8 个样本，其值分别为 0，2, 2. 2, 1, 1. 5, 2. 2, 1. 5, 0. 那么，

样本分布函数为 $F_n(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/4 & 0\le x<1 \\ 3/8 & 1\le x<1.5 \\ 5/8 & 1.5\le x<2 \\ 3/4 & 2\le x<2.2 \\ 1 & x\ge 2.2 \end{cases}$

得分	

三.（10 分）假设市场上的某商品由甲，乙，丙三家公司生产，其占有率分别为 1/5, 2/5, 2/5. 假设三家厂的次品率分别为 0.02, 0.04, 0.05，试求：

（ 1 ） 顾客在市场上买一件产品，该产品是次品的概率；

（ 2 ） 若顾客在市场上买到了一件次品，那么该产品是乙厂生产的概率？

解：令 A, B，C 分别表示产品由甲, 乙，丙厂生产；X 表示产品为次品

则： P(A)=1/5，P(B)=2/5，P(C)=2/5

P(X|A)=0.02，P(X|B)=0.04，P(X|C)=0.05 ---------- 2 分

（1）由全概率公式

P(X)=P（X|A）P(A)+P（X|B）P(B)+P（X|C）P(C)=0.04 --------- 4 分

（2）由贝叶斯公式

$$P(B|X)=\frac{P(X|B)P(B)}{P(X|A)P(A)+P(X|B)P(B)+P(X|C)P(C)}=0.4$$ --------- 4 分

四. （10 分） 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}axe^{1-2x}, & 当0\leqslant x\\ 0, & 当x<0\end{cases}$$

试求：

（1）a 的值

（2）X 的期望

解：（1） $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{\infty} axe^{1-2x}dx=\frac{e}{4}a,$ ------------ 4 分

解得：a=4/e ------------ 1 分

（2） $\mathrm{EX}=\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{xf(x)\,d}x=1$ ---------- 5 分

五.（10 分） 设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-2y}, & 0<x<2,0<y\\ 0\quad, & 其余.\end{cases}$$

（1）求 X 和 Y 的边缘概率密度；

（2）请问 X 与 Y 是否独立。

解：（1）X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}0, & \text{else}\\ \int_0^{+\infty} e^{-2y}dy, & 0<x<2\end{cases}=\begin{cases}1/2\ , & 0\le x\le 2\\ 0, & else.\end{cases}$$ --4 分

同理 $$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \int_0^{2} e^{-y}dx, & y>0\end{cases}=\begin{cases}0\ , & y\le 0\\ 2e^{-y}, & y>0.\end{cases}$$ ----4 分

（2）因为 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 X,Y 独立. -----2 分

七.（8 分）设总体 X 的密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta+4}(\theta x+2), & 0<x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

试利用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 求参数 θ 的矩估计.

解： 记参数 θ 的矩估计与极大似然估计分别为 θ_1 与 θ_2.

（1） $\mathrm{EX}=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(\mathrm{x},\theta)\,\mathrm{dx}=\int_0^{\theta}\frac{2}{\theta+4}(\theta x^2+2\mathrm{x})dx=\frac{2\theta+6}{3\theta+12}$ --------5 分

令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=EX$ ，得 $\hat{\theta}_1=\frac{6\text{-}12\overline{x}}{3\overline{x}-2}$ ---------- 3 分

六. （1）（6 分）已知炼钢时铁水的含碳量服从正态分布。现有 6 炉铁水，经检测其含碳量分别为(单位:千分之一)：

5.7, 4.2, 3.6, 7.4, 8.2, 6, 4

求该批铁水含碳量的 95%置信区间。（答案保留 2 位小数，已知 $t_{0.025}(5)=2.571$）

（2）（6 分）已知某一批电子元件的发光强度满足正态分布，其标准差为 120. 根据技术标准这类元件的发光强度需要为 3000，而测量了 10 个实验元件后发现其平均发光强度为 2800. 判断该批元件是否符合技术标准.

解：（1）根据所给数据可以算得

$\overline{X}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X_i=5.92$ ---------- 1 分

$s^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(X_i-\overline{X})^2=3.20$ ---------- 1 分

记 $\alpha=1-95\%=0.05$

由于总体方差未知，因此用 $T=\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(5)$ 作为枢轴量 --- 1 分

从而所求置信区间为 $\overline{X}\pm t_{\alpha/2}s/\sqrt{6}=5.92\pm 2.571*1.789/\sqrt{6}=5.92\pm 1.878$

--- 2 分

即所求置信区间为(4.04, 7.80) --- 1 分

(2) 记 EX=μ。根据题意建立原假设与备择假设为

$H_0\text{: }\mu=2800 \Leftrightarrow H_1\text{: }\mu\neq 2800$ --- 1 分

由于 X 的方差已知，因此构造统计量为

$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ --- 2 分

代入样本数据算得 Z=−5.270 --- 1 分

由于 $|Z|>Z_{0.025}=1.96$，所以拒绝原假设。

即认为这批灯泡没有达到技术标准。 --- 2 分

八.（10 分） 抛掷一枚均匀的骰子 10000 次，试估计出现 6 点的次数在 1600 至 1700 次之间的概率.（(答案用正态分布函数 $\Phi(x)$ 的形式表示）

解：设出现 6 点的次数为随机变量 ξ，那么 $\xi \sim B(10000,1/6)$ ----2 分

从而 $E\xi = \frac{10000}{6} \approx 1666.67, D\xi = \frac{50000}{36} \approx 1388.89$ ----2 分

由中心极限定理，$\frac{\xi\text{-}E\xi}{\sqrt{D\xi}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ ----2 分

从而

$$P（1600 \le X \le 2510）=P（\frac{1600\text{-}1667.67}{\sqrt{1388.89}} \le \frac{X\text{-}1667.67}{\sqrt{1388.89}} \le \frac{1700\text{-}1667.67}{\sqrt{1388.89}}）$$

$$P(-1.82 \le \frac{X\text{-}1667.67}{\sqrt{1388.89}} \le 0.89)=\Phi(0.89)+\Phi(1.82)-1$$

----4 分