

## 第一章 函数与极限习题解答与提示

### 习题 1.1

1.  $A \cup B = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ ,  $A \cap B = [-9, -6]$ ,  $A \setminus B = (-\infty, -9) \cup (4, +\infty)$ ,

$$A \setminus (A \setminus B) = [-9, -6];$$

2. (略);

3. (1)  $[-\frac{8}{5}, +\infty)$ , (2)  $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ , (3)  $[0, +\infty)$ ,

(4)  $R \setminus \{x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 1 \mid k \in Z\}$ , (5)  $[1, 3]$ , (6)  $(-\infty, 0) \cup (0, 5]$ ;

4. (略);

5.  $\varphi(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi(\frac{\pi}{4}) = \varphi(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\varphi(-2) = 0$ ;

6. (1) 单调增加, (2) 单调增加;

7-8 题(略);

9. (1) 偶函数, (2) 既非偶函数又非奇函数, (3) 奇函数;

10. (1) 是周期函数, 周期  $l = 2\pi$ , (2) 是周期函数, 周期  $l = \frac{\pi}{4}$ , (3) 是周期函数, 周期  $l = \frac{\pi}{2}$ ;

11. (1)  $y = x^3 - 5$ , (2)  $y = \frac{2(1-x)}{1+x}$ , (3)  $y = e^{x-1} - 3$ ;

12. (略);

13. (1)  $y = \sin^2 x, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ , (2)  $y = \sqrt{1+x^2}, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ , (3)  $y = e^{2x}, u = e^x, e^2, e^{-2}$ ;

14. (1)  $[-1, 1]$ , (2)  $[1, e]$ ;

15.  $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ ,  $g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$ ;

16.  $p = \begin{cases} 90, & 0 \leq x \leq 100 \\ 190 - x, & 101 \leq x \leq 115 \\ 75, & x > 115 \end{cases}$ ,  $P = \begin{cases} 30x, & 0 \leq x \leq 100 \\ 130x - x^2, & 101 \leq x \leq 115 \\ 15x, & x > 115 \end{cases}$ ;

$$P(1000) = 15000 \text{ (元)};$$

### 习题 1.2

1. (1) 收敛, 极限为 1; (2) 收敛, 极限为 3; (3) 发散;

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, \quad N = 1000$$

3-5 题(略);

### 习题 1.3

1. (略);

2. 当  $x \rightarrow 2$  时, 不妨设  $|x-2| < 1$ , 则  $|y-4| < 5|x-2| < 0.001$ , 故取  $\delta = 0.0002$ ;

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$ , 故极限  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  不存在;

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, \quad N = 1000;$$

4. (略);

### 习题 1.4

1. 两个无穷小的商不一定是无穷小,  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  不存在;

2. (略);

$$3. 0 < |x| < \frac{1}{10^4 + 3};$$

4. 根据定理 1, 极限为 3;

5. 函数  $y = x \cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内无界, 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 该函数不是无穷大,

对任意正数  $M$ , 存在  $x^* = 2[M]\pi + \frac{\pi}{2} \in (0, +\infty)$ ,  $f(x^*) = 0 < M$ .

### 习题 1.5

1. (1)  $-6$ , (2)  $0$ , (3)  $2x$ , (4)  $3$ , (5)  $\frac{2}{3}$ , (6)  $6$ , (7)  $2$ , (8)  $-1$ ;

2. (1)  $\infty$ , (2)  $\frac{1}{2}$ ;

3. (1)  $0$ , (2)  $0$ ;

4.  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 0$ ;

### 习题 1.6

1. (1)  $2w$ , (2)  $\frac{3}{7}$ , (3)  $2$ , (4)  $x$ ;

2. (1)  $e^{-2}$ , (2)  $e^3$ , (3)  $e^3$ , (4)  $e$ ;

3. (略);

4. (1) 提示:  $1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n},$

(2) 提示:  $\frac{n^2}{n^2 + n\pi} < n(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \dots + \frac{1}{n^2 + n\pi}) < \frac{n^2}{n^2 + \pi},$

(3) 提示:  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 3},$  利用单调有界准则;

(4) 提示: 当  $x > 0$  时,  $1 - x \leq x[\frac{1}{x}] \leq 1;$

(5) 提示:  $1 \leq \sqrt[n]{n} = (\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \overbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}^{(n-2) \text{ 个}})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \overbrace{1 + \dots + 1}^{(n-2) \text{ 个}}}{n};$

(6) 提示: 当  $n \geq 2$  时,  $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}, \quad 0 \leq [\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}]^2 \leq \frac{1}{2n+1};$

## 习题 1.7

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x^2 - x^3$  是比  $2x - x^2$  高阶的无穷小;

2. 当  $x \rightarrow 1$  时, 无穷小  $x-1$  与  $x^3-1$  是同阶无穷小,

无穷小  $x-1$  与  $\frac{1}{2}(x^4-1)$  是同阶无穷小;

3.(略);

4. (1)  $\frac{2}{3},$  (2)  $-3;$