杭州师范大学2020-2021学年第一学期期末考试

《线性代数A3》试卷（A）答案及其评分标准

一、单选题（共18分，每小题3分）.

1-5. CBBAD 6. C

二、填空题（共18分，每小题3分）.

1. $\underline{1}$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 3. $\underline{2}$ 4. $\underline{1}$ 5. $\underline{1}$ 6. $\underline{3}$

三、计算题（共50分，每小题10分）

1. 计算n阶行列式.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解： 原式=

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

（代数余子式展开） …4分

$=1+(-1)^{n+1}$ …………6分

当n为奇数，原式=2； …………8分

当n为偶数，原式=0 …………10分

2. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABA} = -2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{AB}$，又已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解： 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由 $\boldsymbol{ABA} = -2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{AB}$ 知，

$$\boldsymbol{BA} = -2\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2\boldsymbol{A}^{-1},$$ ············3 分

则

$$\boldsymbol{B} = 2\left[(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}\right]^{-1},$$ ············5 分

又已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，故

$$\boldsymbol{B} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$ ············10 分

3.设向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩及极大线性无关组.

解:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ············6 分

则所求向量组的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大无关组. ············10 分

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$，已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量，求 $\boldsymbol{A}^n$，其中 n 为正整数.

解： $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0}$，特征值 $\lambda = 1$、1、-2， ············2 分

当$\lambda=-2$时，对应的特征向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，　　　　　…………5 分

所以

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^n=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+(-2)^n&0&-1-(-2)^n\\0&2&0\\1-(-2)^n&0&+1-(-2)^n\end{bmatrix}$$　　　　　…………10 分

5. 已知向量$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}4\\5\\-3\\11\end{bmatrix}$ 是方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1,\\4x_1+b_2x_2+3x_3+b_4x_4=d_2,\\3x_1+c_2x_2+5x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$$ 的三个解，求该方程组的通解

解： 由已知有$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}3\\6\\-3\\9\end{bmatrix}$是相应的齐次方程组的两个线性无关解：所以，系数矩阵的秩≤ 2，（因为$4-r(\boldsymbol{A})\ge 2$）.　　　　　…………4 分

又系数矩阵

$$\begin{bmatrix}a_1&2&a_3&a_4\\4&b_2&3&b_4\\3&c_2&5&c_4\end{bmatrix}$$

有二阶子式$\begin{vmatrix}4&3\\3&5\end{vmatrix}\ne 0$，所以，系数矩阵的秩$\ge 2$，于是，系数矩阵的秩为 2.

…………7 分

故齐次方程组的基础解系包含 2 个向量，即$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1$是齐次方程组的基础解系．因此，该方程组的通解为

$$k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+\boldsymbol{\eta}_1\qquad(k_1,k_2\in\mathbb{R}).$$　　　　　…………10 分

四、证明题（共 14 分，每小题 7 分）

得分	

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量，证明：

（1）$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$；

（2）线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 必有解.

证明　（1）显然方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.反之，若 $\boldsymbol{x}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，从而有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，因此，$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2=0$，所以 $\boldsymbol{x}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

综上所述，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，因此 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

………………7 分

（2）　因为 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\le R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=R[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})]\le R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$，由（1）知 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})$，故线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 必有解.

………………14 分