第九章 假设检验

对一个样本进行考察，从而决定它能否合理地认为与假设相符，这一过程叫做假设检验。

判别参数假设的检验称为参数检验。

参数估计与参数检验都利用样本的信息。

样本信息

估计量 —— 参数估计

检验统计量 —— 参数检验

§1 假设检验的原理

以H_0表示一个待检假设。

设H_0成立，若样本出现的概率很小

由小概率原理，否定H_0

若样本出现的概率较大，则无法否定H_0

“小概率”事先指定，记为α

一般α＝0.05或0.01

称α为显著性水平或检验水平

由样本推断总体，可能会犯错误

第一类错误：原假设H_0符合实际情况，检验结果将它否定了，称为弃真错误。

第二类错误：原假设H_0不符合实际情况，检验结果无法否定它。称为取伪错误。

假设检验的步骤：

(1)提出待检假设H_0

(2)提出检验统计量

(3)确定H_0的否定域

(4)计算检验统计量的观察值

(5)下结论。

例如 对已知方差$D\xi$的未知总体，检验

$$H_0: E\xi = \mu_0$$

若H_0成立，则对$\overline{X}$用切贝谢夫不等式

$$P\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| > \sqrt{\frac{D\xi}{n\alpha}}\right) < \alpha$$

若由样本求出$\overline{x}$

当$\left|\overline{x}-\mu_0\right|>\sqrt{\dfrac{D\xi}{n\alpha}}$时，否定$H_0$

当$\left|\overline{x}-\mu_0\right|<\sqrt{\dfrac{D\xi}{n\alpha}}$时，不否定$H_0$

- 例1 掷100次硬币，出现60次正面，该硬币是否均匀？（α=0. 05）

解：待检假设H_0：$E\xi=\dfrac{1}{2}$

样本平均值$\overline{x}=0.6$ $\sqrt{\dfrac{D\xi}{n\alpha}}=\sqrt{\dfrac{0.25}{100\times 0.05}}=0.224$

$\left|\overline{x}-\dfrac{1}{2}\right|=0.1<0.224$ 不能否定H_0

§2 一个正态总体的假设检验

(一) 已知方差σ^2，关于期望的检验

1、检验假设$H_0: \mu = \mu_0$

选取检验统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

查表确定u_α使 $P\left(|U| > u_\alpha\right) = \alpha$

求出 $u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

若$|u| > u_\alpha$,则否定H_0

若$|u| < u_\alpha$，不能否定H_0

在$|u| \approx u_\alpha$时,重新检验

例1 根据长期经验和资料的分析，某砖瓦厂生产砖的抗断强度ξ服从正态分布，方差σ^2=1.21。从该厂产品中随机抽取6块，测得抗断强度如下(单位：kg/cm^2)

32.56　29.66　31.64　30.00　31.87　31.03

检验这批砖的平均抗断强度为32.50kg/cm^{2}是否成立?$(\alpha=0.05)$

解：$H_0: \mu=32.50$　　$\alpha=0.05$　$u_\alpha=1.96$　$\bar{x}=31.13$

$$|u|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{31.13-32.50}{1.1/\sqrt{6}}\right|\approx 3.05>1.96$$

否定H_0,即不能认为这批砖的平均抗断强度为32.50kg/cm^2

- 例2 假定某厂生产一种钢索，它的断裂强度$\xi(kg/cm^2)$服从正态分布$N(\mu, 40^2)$。从中选取一种容量为9的样本，得$\bar{x}=780kg/cm^2$。能否据此样本认为这批钢索的断裂强度为$800kg/cm^2$?（$\alpha=0.05$）

解：$H_0:\mu=800 \quad \alpha=0.05 \quad u_\alpha=1.96$

$$|u|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{780-800}{40/\sqrt{9}}\right| = 1.5 < 1.96$$

不能否定H_0

即可以认为这批钢索的断裂强度为800kg

(二)未知方差，关于期望的检验

1、待检假设 $H_0: \mu = \mu_0$

选取检验统计量 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

查表确定t_α使$P\left(|T| > t_\alpha\right) = \alpha$

求出 $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

若$|t| > t_\alpha$,则否定H_0

若$|t| < t_\alpha$,不能否定H_0

- 例4 从某年的新生儿中随机抽取20个，测得其平均体重为3160g，样本标准差为300g。据过去统计资料，新生儿体重服从正态分布，平均体重为3140g。问该年与过去的新生儿体重有无显著差异？（α=0. 01）

解：$H_0: \mu = 3140$ n=20 $\alpha = 0.01$ $t_\alpha = 2.861$

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{3160 - 3140}{300/\sqrt{20}} \right|$$

$$\approx 0.298 < 2.861$$

不能否定H_0

即该年与过去新生儿体重没有显著差异。

- 例5 掷100次硬币，出现60次正面，该硬币是否均匀？$(\alpha = 0.05)$

解：大样本，可用正态总体来做 $H_0 : E\xi = 0.5$

$n=100 \quad \alpha = 0.05 \quad t_\alpha = 1.98$

$\bar{x} = 0.6 \quad s^2 = 0.2424 \quad s = 0.49$

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{0.6 - 0.5}{0.49/\sqrt{100}} \right|$$

$= 2.04 \quad > 1.98$

否定H_0

即认为该硬币不是均匀的

(三)关于方差的检验

1、检验假设$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

选取检验统计量$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

要使得 $P\left(a \le \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le b\right) = 1-\alpha$

查表确定a与b使得

$$P\left(\chi^2 > b\right) = \alpha/2 \quad P\left(\chi^2 > a\right) = 1-\alpha/2$$

求出$\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

若$\chi^2 > b$或$\chi^2 < a$，否定H_0

若$a < \chi^2 < b$,不能否定H_0

- 例7 某钢铁厂铁水含碳量在正常情况下服从正态分布。现对操作工艺进行了某些改进，从中抽取5炉铁水，测得含碳量数据如下：

4.421　4.052　4.357　4.287　4.683

是否可以认为新工艺炼出的铁水含碳量的方差仍为0.108^2?($\alpha = 0.05$)

解：$n = 5 \quad \alpha = 0.05 \quad s^2 = 0.228^2$

查表可得　a=0.484　b=11.1

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{4 \times 0.228^2}{0.108^2} \approx 17.83 > 11.1$$

否定H_0,即方差不能认为时0.108^2

§3 两个正态总体的假设检验

对$\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$与$\xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$进行比较

(一)方差的比较检验

1、检验假设$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

若H_0成立时，S_1^2/S_2^2的值不应太大或太小

$$F = S_1^2/S_2^2 \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

其中S_1^2与S_2^2分别表示与两个总体对应的样本方差。

对给定α，查$F-$分布表使

$$P(F < a) = P(F > b) = \alpha/2$$

样表如下：

$$P\left(F\left(n_1, n_2\right) > F_\alpha\right) = \alpha, \alpha = 0.025$$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3
2	38.51	39.60	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.46
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.98
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
6	8.31	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03

求 $P(F<a)=\alpha/2$的方法为：

$$1/F=S_2^2/S_1^2\sim F(n_2-1,n_1-1)$$

故$P(F<a)=P\left(1/F>1/a\right)=\alpha/2$

对给定样本，求出

$$f=s_1^2/s_2^2$$

若f>b或f<a，否定H_0

若a<f<b,不能否定H_0

- 例1　从两处煤炭各抽样数次，分析其含灰率

甲矿　24. 3　20. 8　23. 7　21. 3　17. 4

乙矿　18. 2　16. 9　20. 2　16. 7

假定各煤矿含灰率都服从正态分布，问甲、乙两煤矿的含灰率的方差是否有显著差异？（α=0. 05）

解：$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$n_1=5$　　$n_2=4$　　$\alpha=0.05$

查表得　　$a\approx 0.1$　　$b=15.10$

由样本求出$s_1^2 = 7.505$　$s_2^2 = 2.593$

故$f = 7.505/2.593 \approx 2.894$

不能否定H_0

2、检验假设$H_0:\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > a\right) \le P\left(\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} > a\right) = \alpha$$

取统计量　$F = S_1^2 / S_2^2$

若$f = s_1^2 / s_2^2 > a$，则否定H_0

若$f < a$，无法否定H_0

- 例2 为比较不同季节出生的新生儿体重的方差，从某年12月及6月的新生儿中分别随机抽取6名及10名，得$s_1^2=505667, s_2^2=93956$，假定新生儿体重服从正态分布，问新生儿体重的方差是否冬季的比夏季的小?(α=0. 05)

解：$n_1=6 \qquad n_2=10 \qquad \alpha=0.05$

查表得$a=3.48$

$$f=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{505667}{93956}=5.382 > 3.48$$

否定H_0,认为新生儿体重的方差冬季不比夏季小

(二)期望的比较检验

未知σ_1^2，σ_2^2，但知道$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，检验假设$H_0: \mu_1 = \mu_2$

若H_0成立，设两组样本容量均为n, 则

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(S_1^2 + S_2^2)/n}} \sim t(2n-2)$$

查表确定t_α使$P\left(|T| > t_\alpha\right) = \alpha$

计算 $t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2)/n}}$

若$|t| > t_\alpha$,否定H_0　　若$|t| < t_\alpha$,不能否定H_0

- 例3 在10个相同的地块上对甲、乙两种玉米进行品比试验，得如下资料(单位：kg)：

甲	951	966	1008	1082	983
乙	730	864	742	774	990

若农作物产量服从正态分布，这两种玉米产量有无显著差异？（α=0. 05）

解:(1)先检验两者的方差是否有差异：

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

查表确定　　a=0.1　　b=9.6

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{2653.5}{11784} = 0.23$$

不能否定H_0,即两者方差无显著差异

（2）在σ_1^2＝σ_2^2的条件下检验：$H_1:\mu_1=\mu_2$

查表得到 $t_\alpha = 2.306$

$\bar{x} = 998$ $\bar{y} = 820$

$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(s_1^2+s_2^2)/n}} = \frac{998-820}{\sqrt{\dfrac{2653.5+11784}{5}}}$$

$=3.313 > 2.306$

否定H_1,即认为两种玉米有明显差异。