第三章 随机变量的数字特征

§3.1 数学期望

例1 奖学金的评定

	数学	经济	英语	政治
学分	4	3	3	2
成绩	80	70	90	75

平均成绩是多少？

解：算法一：$平均成绩=\dfrac{80+70+90+75}{4}=78.75$

算法二：$平均成绩=\dfrac{80\times4+70\times3+90\times3+75\times2}{4+3+3+2}$

$=79.17$

$=80\times\dfrac{4}{12}+70\times\dfrac{3}{12}+90\times\dfrac{3}{12}+75\times\dfrac{2}{12}$

例2 进行N次独立试验，

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
频数	m_1	m_2	$\ldots$	m_n

其中$m_1+m_2+\ldots+m_n=N$,求ξ的平均数。

解：$$\text{平均数}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{N}$$

$$=x_1\frac{m_1}{N}+x_2\frac{m_2}{N}+\ldots+x_n\frac{m_n}{N}$$

当试验次数N很大时，$\frac{m_i}{N}$接近于$\xi=x_i$发生的概率p_i

因此，平均值$=x_1p_1+\ldots+x_np_n$

- 定义1 离散型随机变量ξ有概率函数$P(\xi=x_k)=p_k$，$(k=1,2,\ldots)$。若级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$绝对收敛，则称级数的和为$\xi$的数学期望，简称期望或均值。

记为 $$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$$

- 例3 若ξ服从$0-1$分布，求$E\xi$。

解：ξ的概率分布表为

ξ	0	1
P	$1-p$	p

$$E\xi=0\times(1-p)+1\times p=p$$

例4 甲乙两射手在一次射击中得分为

甲

ξ	1	2	3
P	0. 4	0. 1	0. 5

乙

η	1	2	3
P	0. 1	0. 6	0. 3

比较甲、乙两射手的技术。

解：$E\xi=1\times0.4+2\times0.1+3\times0.5=2.1$

$$E\eta=1\times0.1+2\times0.6+3\times0.3=2.2$$

多次射击后，平均得分分别是2.1与2.2

乙的技术较好。

- 例5 一批产品有一、二、三等品，等外品及废品5种，相应的概率分别为0.7，0.1，0.1，0.06及0.04。若其产值分别为6元，5.4元，5元，4元及0元。求产品的平均产值。

解：产品的产值ξ是一个随机变量，

ξ	6	5.4	5	4	0
P	0.7	0.1	0.1	0.06	0.04

故 $$E\xi = 6\times 0.7 + 5.4\times 0.1 + 5\times 0.1 + 4\times 0.06 + 0\times 0.04$$

$$= 5.48$$

例6 设ξ服从几何分布，$P(\xi=k)=(1-p)^{k-1}p$,
(k=1, 2, . . .), 求Eξ

解：$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p \quad =p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^{2}}$

故 $\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p^{2}} \quad \therefore \quad E\xi=\frac{1}{p}$

射击命中率为0.2，平均要5次才能击中目标。

若买彩票中大奖的概率为10^{-6}

则平均要买一百万张彩票才会中到大奖。

- 定义2 设连续型随机变量ξ的概率密度$\varphi(x)$,若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx$绝对收敛，则

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx$$

称为ξ的数学期望。

- 例7 ξ服从区间$[a，b]$上的均匀分布，求$E\xi$。

解：$$\xi \sim \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

故 $$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$$

例8 设$\xi \sim \varphi(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 其它 \end{cases}$

求Eξ。

解：$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos x$$

$$= -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= 0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1$$

例9 设$\xi \sim \varphi(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

求$E\xi$

解：$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-2x}dx$

$$=-\int_0^{+\infty} xde^{-2x}$$

$$=-xe^{-2x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$$

$$=0+\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}$$

§2　数学期望的性质

(1) $Ec=c$

证：$P(\xi=c)=1$　　故 $E\xi=c\times1=c$

(2) $E(\xi+c)=E\xi+c$

证：令$\eta=\xi+c$

离散时，$E\eta=\sum_{k}(x_k+c)p_k$

$$=\sum_{k}x_kp_k+c\sum_{k}p_k=E\xi+c$$

连续时，$\varphi_\eta(x)=\varphi_\xi(x-c)$

$$E\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_\eta(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_\xi(x-c)dx$$

令x-c=t

$$E\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}(t+c)\varphi_{\xi}(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi_{\xi}(t)dt+c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{\xi}(t)dt$$

$$=E\xi+c$$

(3)$E(c\xi)=cE\xi$

证：$c=0$时$c\xi$是常数，由(1)得证。

$c\neq 0$时，若ξ是离散的，$\eta=c\xi$

$$E\eta=\sum_{k}(cx_{k})p_{k}=c\sum_{k}x_{k}p_{k}=cE\xi$$

连续时，要求出$\eta=c\xi$的概率密度，与(2)类似。

(4) $E(a\xi+b)=aE\xi+b$

证： $E(a\xi+b)=E(a\xi)+b=aE\xi+b$

(5) $E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$

可推广为

$$E(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=E\xi_1+E\xi_2+\ldots+E\xi_n$$

特别地，n个随机变量的平均值仍是随机变量。

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i$$

(6)若E与η独立，则 $E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta$

也可推广到 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 相互独立时，

$$E(\xi_1\ldots\xi_n)=E\xi_1E\xi_2\ldots E\xi_n$$

(7)设$\eta=f(\xi)$

离散时，若$P(\xi=x_k)=p_k$，$(k=1, 2, ...)$

则 $E\eta=Ef(\xi)=\sum_k f(x_k)p_k$

连续时,若$\xi\sim\varphi(x)$

则 $E\eta=Ef(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$

(8) 设$\varsigma=f(\xi,\eta)$选讲

离散时，若$P(\xi=x_i,\eta=y_j)=p_{ij}$

则 $E\varsigma=Ef(\xi,\eta)=\sum_{i,j} f(x_i,y_j)p_{ij}$

连续时，若$(\xi,\eta)\sim\varphi(x,y)$

则 $E\varsigma=Ef(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)dxdy$

例1 已知ξ与η相互独立，且分布表为

ξ	1	2	3
P	0. 6	0. 3	0. 1

η	1	2
P	0.3	0.7

求$E(\xi+\eta)$与$E(\xi\eta)$

解：

$$E\xi=1\times 0.6+2\times 0.3+3\times 0.1=1.5$$

$$E\eta=1\times 0.3+2\times 0.7=1.7$$

由性质(5)及(6)

$$E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta=1.5+1.7=3.2$$

$$E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta=1.5\times 1.7=2.55$$

例2 已知 $\xi \sim \varphi(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

求 $E\xi^2$

解：$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx$

$$= \int_0^1 x^2 2x dx$$

$$= \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$$

注意：$E\xi = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}$

$$E\xi^2 \neq E\xi \cdot E\xi$$

因为 ξ 与 ξ 是不独立的。

例3 设ξ是[0,2]区间上的均匀分布，求E(3ξ+1)。

解：$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

由性质(7) $E(3\xi+1)=\int_{-\infty}^{+\infty}(3x+1)\varphi(x)dx$

$$=\int_0^2(3x+1)\frac{1}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)\Bigg|_0^2 =4$$

由于Eξ=1 故 $E(3\xi+1)=3E\xi+1$

$$=3\times1+1=4$$

例4 有一队射手共9人，技术不相上下，每人中靶概率均为0.8。进行射击，各自打中靶为止，但限制每人最多只打3次，问他们平均需要多少发子弹？

解：设ξ_i表示第i名射手所需子弹数目。

ξ表示9名射手所需子弹数目，则$\xi=\sum_{i=1}^{9}\xi_i$

ξ_i	1	2	3
P	0.8	0.16	0.04

故 $E\xi_i=1\times0.8+2\times0.16+3\times0.04=1.24$

由性质(5)

$$E\xi=\sum_{i=1}^{9}E\xi_i=9E\xi_1=9\times1.24=11.16$$

注意：若由$\xi=\sum_{i=1}^{9}\xi_i=9\xi_1$得出$E\xi=9E\xi_1$是错的。

因为$\sum_{i=1}^{9}\xi_i\neq9\xi_1$

- 例5 发行福利彩票，为简化，假定只有一种奖，即百万大奖。中奖率为百万分之一。若售出4百万张彩票，每张彩票2元，问可以筹集到多少福利资金？

解：用ξ_i表示售出第i张彩票的收入，则

ξ_i	2	$2-10^6$
P	$1-\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^6}$

可见$E\xi_i=2\times\left(1-\frac{1}{10^6}\right)+\left(2-10^6\right)\times\frac{1}{10^6}\approx 1$

总收入$\xi=\xi_1+\ldots+\xi_n$　　$E\xi=E\xi_1+\ldots+E\xi_n=nE\xi_1$

$n=4\times10^6$时，　　$E\xi=4\times10^6\times1=4\times10^6$

- 例6 赌场设立一台老虎机，投一枚硬币进去，若出现特殊图案，可以获得很多硬币。若出现特殊图案的可能性为0.001，奖金应设为多少？

解：为简便，假定硬币都是一元的。

用ξ_i表示第i名赌客的所得，奖金设为a元。

ξ_i	-1	$a-1$
P	0.999	0.001

$$E\xi_i=(-1)\times 0.999+(a-1)\times 0.001=0.001a-1$$

赌场设立奖金时，希望$E\xi_i<0$ 从而a<1000

若有n人次参赌，总所得$\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$

$$E\xi=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i=nE\xi_1=n(0.001a-1)$$

§3 条件期望

例 已知(ξ,η)的联合分布表为

	0	1	3
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.1	0.1

求$E(\xi|\eta=3)$及$E(\eta|\xi=2)$

ξ	1	2
P	0.6	0.4

η	0	1	3
P	0.3	0.3	0.4

$\eta=3$时ξ的条件分布为

ξ	1	2
$P(\xi=k\mid\eta=3)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

故$E(\xi\mid\eta=3)=1\times\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$\xi=2$时η的条件分布为

η	0	1	3
$P(\eta=k\mid\xi=2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

故 $E(\eta\mid\xi=2)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{3}{4}=1$

对于二元离散型随机变量(ξ,η)，在$\xi=x_i$的条件下，求η的数学期望，称为给定$\xi=x_i$时η的条件期望。

记作$E(\eta|\xi=x_i)$

$$E(\eta|\xi=x_i)=\sum_j y_j P(\eta=y_j|\xi=x_i)=\sum_j y_j \frac{p_{ij}}{p_i^{(1)}}$$

类似地

$$E(\xi|\eta=y_j)=\sum_i x_i P(\xi=x_i|\eta=y_j)=\sum_i x_i \frac{p_{ij}}{p_j^{(2)}}$$

对于二元连续型随机变量。

$$E(\eta|x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y|x)dy$$

$$E(\xi|y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x|y)dx$$

§4 方差, 协方差

(一) 方差的概念

请先看一个例子. 具体可见P69的表3-7和3-8

可见在实际问题中,仅靠期望值不能完善随机变量的分布特征,还必须研究其离散程度.通常大家关心的是rv ξ 对期望值 $E\xi$ 的离散程度.

定义3.4 设 ξ 是一随机变量,数学期望存在,如果 $E(\xi-E\xi)^2$ 存在, 则称 $E(\xi-E\xi)^2$ 为随机变量 ξ 的 **方差** ,记为 $D\xi$.

方差的平方根 $\sqrt{D\xi}$ 又称为标准差或根方差.

如果 ξ 是离散型随机变量,并且 $P(\xi=x_k)=p_k(k=1,2,\ldots)$

则

$$D\xi=\sum_k (x_k-E\xi)^2 p_k$$

对连续型随机变量,则有

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 \varphi(x) dx$$

例1　计算参数为p的0-1分布的方差

方差的快速计算公式

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

(二) 方差的性质

$$(1)Dc=0$$

$$(2)D(\xi+c)=D\xi$$

$$(3)D(c\xi)=c^2D\xi$$

(4) 若ξ与η独立,则$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$

例2　设 ξ为随机变量,若已知$E\xi=2, D(\frac{\xi}{2})=1$,求$E(\xi-2)^2$.

答案为4.

例3,4,5参看课本P72-P73.

(三) 协方差与相关系数

定义3.5 对于二元随机变量 (ξ,η), 称数值

$E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)$为ξ和η的协方差, 记作$\text{cov}(\xi,\eta)$

$$\text{cov}(\xi,\eta)=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)$$

定义3.6 称

$$\rho=\frac{\text{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$$

为ξ与η的相关系数.

可以证明 $|\rho| \le 1$.如果$|\rho| = 1$, ξ与η 有线性关系,称

ξ与η完全线性相关;如果$\rho = 0$,称ξ与η不相关.

注意到$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$

因此若ξ与η独立,则$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$

即$\rho = 0$, ξ与η不相关

但反之不成立.