第五章解答参考

5.1 节

1.取等分分割且取介点为每个小区间的右端点，

则$\int_1^2 x dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{2n}\right)=\frac{3}{2}$

2.略

3.对区间$[a,b]$任意分割，任意取介点ξ_i,由定义有

$\int_{\mathrm{a}}^{b} 1dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$

4.估值：求出函数在积分区间上的最大值M 和最小值m,则当a<b时，

$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

$(1)\pi\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)dx\le 2\pi$

$(2)-2\mathrm{e}^2\le\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}dx\le -2$

5.(1)反正法

设存在$\mathrm{c}\in[a,b]$,使得$\mathrm{f(c)}\neq 0$,由连续函数的局部保号性

存在$(c-\delta,c+\delta)$,在其内$\mathrm{f(x)}\neq 0$

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c-\delta} f(x)dx+\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx+\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$

$\ge 0+\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx+0=f(\xi)\bullet 2\delta\neq 0$　(因为积分中值定理）

与条件矛盾。

(2)设h(x)=g(x)-f(x),由（1）显然

6.D

7.思路：先由积分中值定理找到与 f(1)相等的点，再对$F(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2 f(x)$用罗尔定理。

5.2 节

1.$\frac{dy}{dx}=\cot x$

2.$y'=-\frac{\cos x}{2e^y}$

3.$x=0$

4.$-2\sin x\cos(8\pi\cos^3 x)-\cos x\cos\left(\pi\sin^3 x\right)$

5(1)$\frac{347}{6}$;(2)$\frac{\pi}{3}$;(3)$\frac{\pi}{3b}$:(4)$\frac{4}{3}+\frac{\pi}{4}$:(5)$1-\frac{\pi}{4}$:(6)2

$6(1)\frac{1}{2};(2)0$

$7.\Phi(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3},0\le x<1\\ \frac{x^2}{2}-\frac{1}{6},1\le x<2\end{cases}$,在$(0,2)$内连续。

8.提示：先用洛必达，再用积分中值定理和f的单调性即可证。

9.A

10.A

$11.-a^2f(a)$

5.3 节

$1(1)\frac{2}{65};(2)\pi-\frac{4}{3};(3)1-\frac{\pi}{4};(4)4(1+\ln\frac{2}{3});(5)(\sqrt{3}-1)|b|;(6)\frac{2}{3}$

$2(1)\frac{\pi^3}{324}$:（2）0

3.提示：令$x=-t$

4.提示：令$x=1-t$

5.提示：记$\Phi(a)=\int_a^{a+l}f(x)dx$,求导数, 证明此函数为常数

6提示：记$F(x)=\int_0^x f(t)dt$,用定积分的换元法证明$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt=F(x)$或者$-F(x)$

$7(1)\frac{e^2+1}{4};(2)\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\ln\sqrt{\frac{3}{2}};(3)\frac{e(\sin1+\cos1)-1}{2};(4)\frac{2}{e}-2:(5)\frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4})$

8.D

5.4 节

1⑴ 发散； （2）$\frac{p}{p^2-1}$;(3)π;(4)$\frac{\pi}{2}$； （5）发散； （6)3

2.$k\le1$时，积分发散；$k>1$时，积分$=\frac{(\ln2)^{1-k}}{k-1}$,且$k=1-\frac{1}{\ln\ln2}$时，积分取得最小值。

$3.I_n = n!$

总习题 5

1. 1. (1)2; $(2)\sin^{100} x$; $(3)\dfrac{\pi}{4}$; $(4)\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ (5)2; (6)1; $(7)-4\pi$

2.A,A,B,B,D

$3.(1)\dfrac{1}{2};(2)\dfrac{1}{3}$

$4.(1)\dfrac{3}{2}+\ln 2$; $(2)\arctan 2-\dfrac{\pi}{4}$; $(3)\dfrac{1}{3}$; $(4)2\left(\sqrt{3}-1\right)$; $(5)\dfrac{\pi}{6}$; $(6)2-\dfrac{\pi}{2}$;

$(7)\pi$; $(8)\ln 2-\dfrac{1}{2}$

5. 单调减区间为$\left(-\infty,-1\right)$和$\left(0,1\right)$,单调增区间为$\left[-1,0\right]$和$\left[1,+\infty\right)$，极小值为 f(−1)=0, 极大值为$f(0)=\dfrac{1-e^{-1}}{2}$

$6.\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{e}$

7. 提示：先用最值定理证明$\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$介于f(x)的最大值和最小值之间，再用介值定理。