1.5独立试验概型

事件的独立性

定义1.4 如果事件A发生的可能性不受事件B发生与否的影响，即$P(A|B)=P(A)$，则称事件A对于事件B独立.

由定义及条件概率$P(A|B)$的定义有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$$

因此必有$P(AB)=P(A)P(B)$

反过来,如有$P(AB)=P(A)P(B)$

则必有$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$

因此$P(AB)=P(A)P(B)$是A对于B独立的充分必要条件,而且可以看出如果A对于B独立则B对于A也独立,因此称事件A与B相互独立

如A与B独立, 则

A与$\overline{B}$也独立,这是因为

$$P(A\overline{B}) = P(A - AB)$$

$$= P(A) - P(AB)$$

$$= P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\overline{B})$$

同理可知$\overline{A}$与B, $\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立.

定义1.5

如果$n(n>2)$个事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$中任何一个事件发生的可能性都不受其它一个或几个事件发生与否的影响，则称$A_1,A_2,\ldots,A_n$相互独立.

若$A_1,A_2,\ldots,A_n$相互独立，则有

$$\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\overline{A_i})$$

注意:互斥与独立的区别

1.互斥的概念是事件本身的属性;
独立的概念是事件的概率属性。

2. 两事件互斥,即A与B不能同时发生;
独立是指A与B的概率互不影响. $P(A/B)=P(A)$

3.若$0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$,
互斥一定不独立;独立一定不互斥。

4.在用途上有区别:互斥通常用于概率的加法运算,独立通常用于概率的乘法运算。

例1 甲,乙,丙3部机床独立工作, 由一个工人照管, 某段时间内它们不需要工人照管的概率分别为0.9,0.8及0.85. 求在这段时间内有机床需要工人照管的概率以及机床因无人照管而停工的概率.

解 用事件A,B,C分别表示在这段时间内机床甲,乙,丙不需工人照管.依题意A,B,C相互独立,

并且$P(A)=0.9$, $P(B)=0.8$, $P(C)=0.85$

则这段时间内有机床需要工人照管的概率为

$$P(\overline{ABC})=1-P(ABC)=1-P(A)P(B)P(C)$$

$$=1-0.9\times0.8\times0.85=0.388$$

而当至少有两部机床需要照管的时候, 就有机床因无人照管而停工了, 这样的事件是

$$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}$$

因此相应的概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C})=$$

$$=P(\overline{A}\,\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{C})+P(\overline{B}\,\overline{C})-2P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=$$

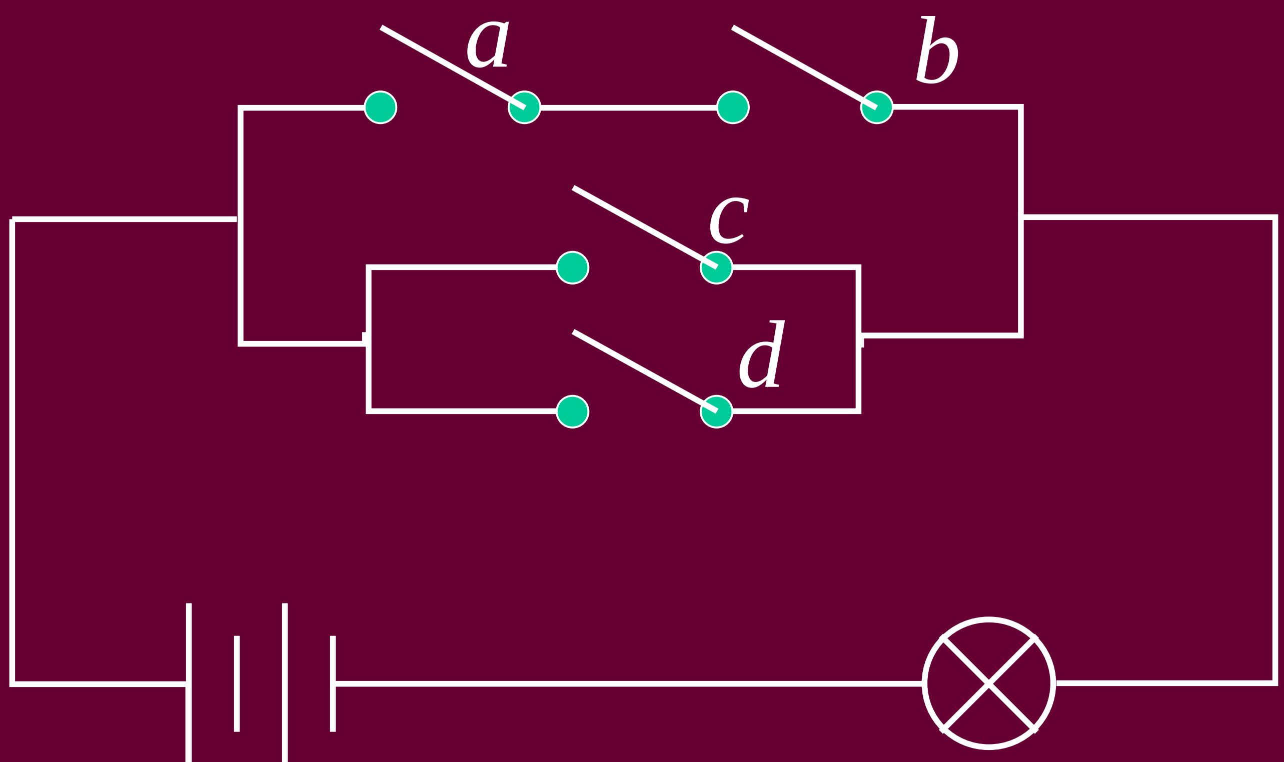
$$=P(\overline{A})P(\overline{B})+P(\overline{A})P(\overline{C})+P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$-2P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

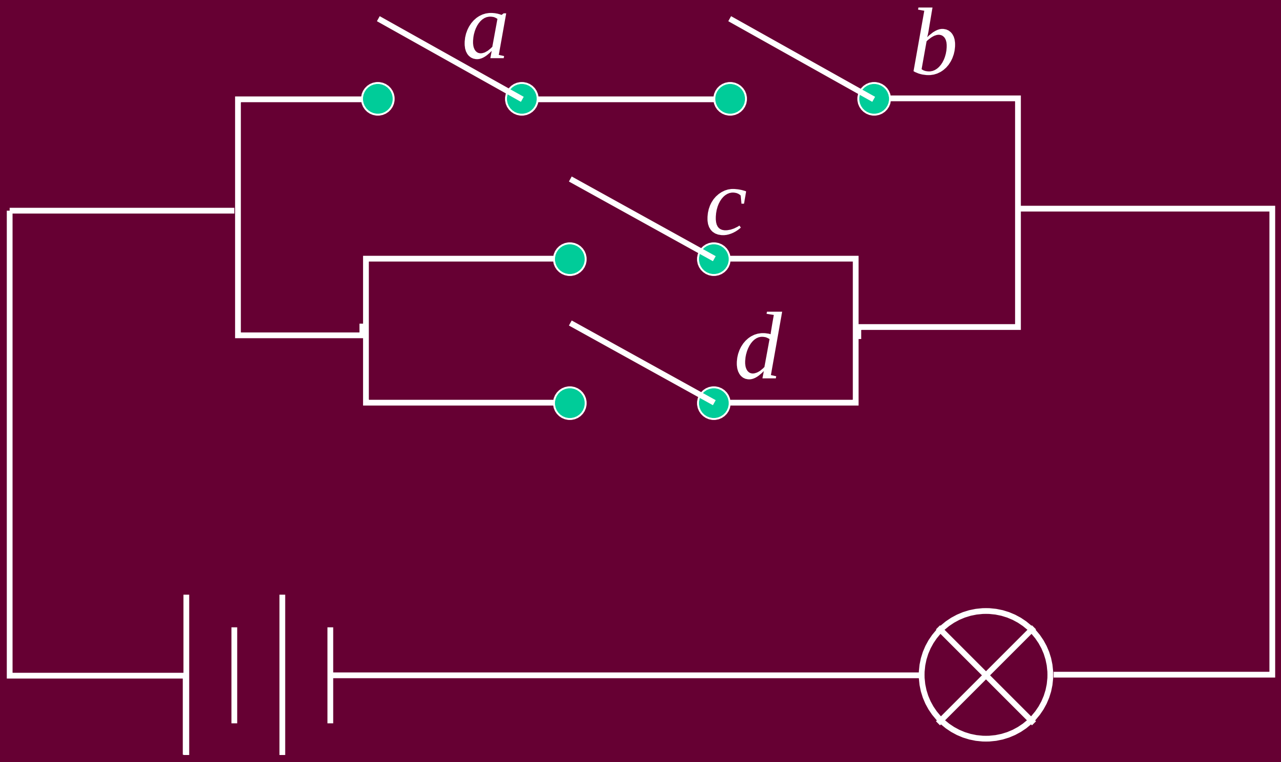
$$=0.1\times0.2+0.1\times0.15+0.2\times0.15$$

$$-2\times0.1\times0.2\times0.15=0.059$$

例3 如图所示, 开关电路中开关a,b,c,d开或关的概率都是0.5, 且各开关是否关闭相互独立. 求灯亮的概率以及若已见灯亮, 开关a与b同时关闭的概率



解 令事件A,B,C,D分别表示开关a,b,c,d关闭, E表示灯亮, 则$E=AB+C+D$



$P(E)=P(AB+C+D)$

$=P(AB)+P(C)+P(D)-P(ABC)-P(ABD)$

$-P(CD)+P(ABCD)$

$=P(A)P(B)+P(C)+P(D)-P(A)P(B)P(C)$

$-P(A)P(B)P(D)-P(C)P(D)+P(A)P(B)P(C)P(D)$

$=0.5^2+0.5+0.5-0.5^3-0.5^3-0.5^2+0.5^4=0.8125$

$P(AB|E)=P(ABE)/P(E)$

而$AB\subset E$, 故$ABE=AB$, 因此

$$P(AB\,|\,E)=\frac{P(AB)}{P(E)}=\frac{0.25}{0.8125}\approx 0.3077$$

98年经济类考研题

甲,乙,丙三人进行定点投篮比赛, 已知甲的命中率为0.9, 乙的命中率为0.8, 丙的命中率为0.7, 现每人各投一次, 求:

(1)三人中至少有两人投进的概率;

(2)三人中至多有两人投进的概率.

解: 设A="甲投进", B="乙投进", C="丙投进"

则三人中至少两人投中的事件为

$AB+AC+BC$

三人中至多有两人投进的事件为$\overline{ABC}$

因此

$$(1)\ P(AB+AC+BC)=$$

$$=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2P(ABC)$$

$$=P(A)P(B)+P(A)P(C)+P(B)P(C)$$

$$-2P(A)P(B)P(C)$$

$$=0.9\times0.8+0.9\times0.7+0.8\times0.7-2\times0.9\times0.8\times0.7$$

$$=0.72+0.63+0.56-1.008=1.91-1.008=0.902$$

$$(2)\ P(\overline{ABC})=1-P(ABC)=1-P(A)P(B)P(C)$$

$$=1-0.9\times0.8\times0.7=1-0.504=0.496$$

1998经济类考研题

设A,B,C是三个相互独立的随机事件, 且$0<P(C)<1$, 则在下列给定的四对事件中不相互独立的是

A. $\overline{A+B}$与C　　B. $\overline{AC}$与$\overline{C}$

C. $\overline{A-B}$与$\overline{C}$　　D. $\overline{AB}$与$\overline{C}$

解 由题设, A,B,C是三个相互独立的随机事件, 那么其中任意两个事件或其对立事件的和,差, 交与另一事件或者其对立事件是相互独立的, 根据这一性质, 只有B是不成立的.

1994年经济类考研题

设$0<P(A)<1,\ 0<P(B)<1,$

$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1,$则(　　　　)

A.事件A和B互不相容　B.事件A和B互相对立

C.事件A和B互不独立　D.事件A和B相互独立

解 由$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1,$

有$P(A|B)=1-P(\bar{A}|\bar{B}),$

即$P(A|B)=P(A|\bar{B}).$

因此, A, B相互独立, 应填选项D

这是因为, 如果

$$P(A|B)=P(A|\overline{B})$$

即 $$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

$$P(AB)-P(AB)P(B)=$$

$$P(A)P(B)-P(AB)P(B)$$

因此 $P(AB)=P(A)P(B)$

A 与 B 相互独立

2000年经济类考研题

设A,B,C三个事件两两独立, 则A,B,C相互独立的充分必要条件是(　　)

A. A与BC独立　　B. AB与$A+C$独立

C. AB与AC独立　　D. $A+B$与$A+C$独立

解: 选项B,C,D的两个事件中都出现事件A, 因此都不可能独立. 因此考察选项A,

如A与BC独立, 则$P(ABC)=P(A)P(BC)$

但A,B,C两两独立, 因此$P(BC)=P(B)P(C)$

因此$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$, 即A,B,C相互独立, 反之亦然. 因此, 应填选项A.