第一章 随机事件及其概率

试验

为了研究随机现象, 就要对客观事物进行观察.观察的过程称为试验.

概率论里所研究的试验有下列特点:

(1) 在相同的条件下试验可以重复进行;

(2) 每次试验的结果具有多种可能性, 而且在试验之前可以明确试验的所有可能结果;

(3) 在每次试验之前不能准确地预言该次试验将出现哪一种结果

样本空间

给定一个试验，所有可能的结果的全体构成一个集合，这个集合称作样本空间，用大写的希腊字母Ω表示，这个样本空间中的每一个元素也称作此样本空间的一个样本点，可以用小写的希腊字母ω表示.

试验和样本空间的例

1, 掷一次硬币为一个试验, 则有两个可能的试验结果, 正面和反面, 则

Ω={正面, 反面}

2, 掷一次骰子为一个试验, 则有六个可能的试验结果, 1点, 2点, 3点, 4点, 5点和6点, 因此样本空间为

Ω={1点, 2点, 3点, 4点, 5点, 6点}

更多的试验和样本空间的例

3, 掷两次硬币作为一次试验, 将两次试验结果排序, 则共有四种可能的结果:

(反, 反), (反, 正), (正, 反), (正, 正)

因此样本空间

Ω={(反, 反), (反, 正), (正, 反), (正, 正)}

更多的试验和样本空间的例

4, 掷两次骰子作为一次试验, 将两次试验结果排序, 则共有36种可能的结果:

Ω={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),

(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6),

} = $\{(x,y)|x,y=1,2,3,4,5,6\}$

事件

事件就是样本空间的子集, 或者说事件就是试验结果的集合, 通常用大写英文字母A, B, C, …等表示.

例如, 掷两次硬币这个试验, 事件A="至少一次正面朝上"包括三个样本点(正,反),(反正),(正正). 也可以表示为

A={(正,反),(反,正),(正正)}

掷两次骰子的试验, 事件B="两次点数相同",

则B={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}

几个特殊的事件

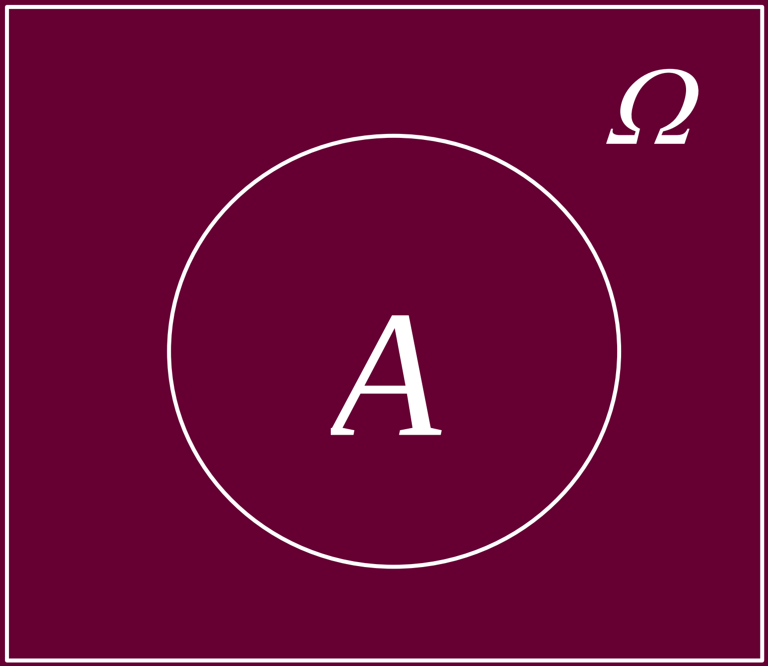
基本事件: 只包括一个样本点, 或者说一个试验结果的事件称为基本事件.

必然事件: 包括整个样本空间Ω的所有元素的事件, 或者就用Ω表示, 则每次试验必然发生, 因此称为必然事件.

不可能事件: 不包括任何元素的空集, 即每次试验一定不会发生, 称为不可能事件, 用Φ表示, 则$\Phi=\{\}$.

事件的图示

为了直观, 经常使用图示来表示事件, 一般地, 用一个平面上某个方(或矩)形区表示必然事件或者整个样本空间Ω, 其中的一个子区域表示一具体的事件.

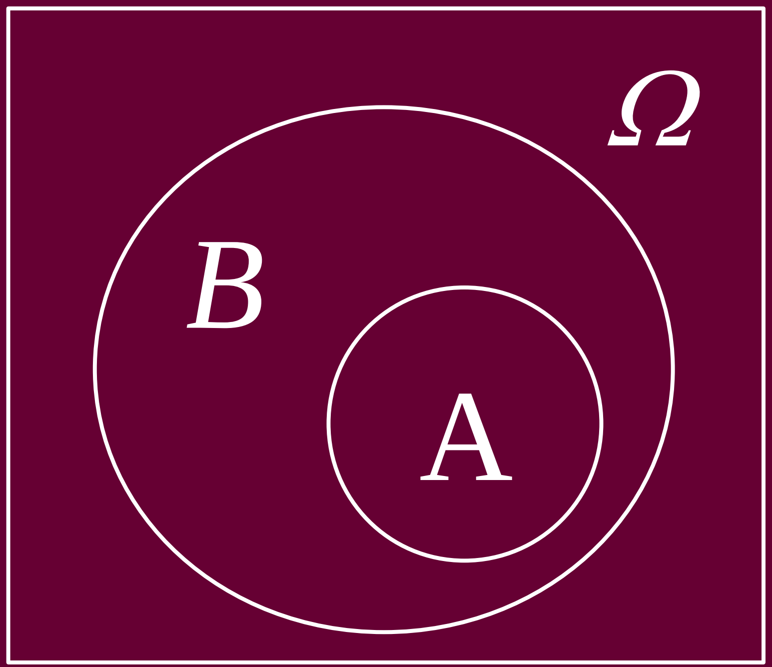


事件间的关系及其运算

事件的包含

如果事件A发生必然导致事件B发生, 即属于A的每一个样本点都属于B, 则称事件B包含事件A或称事件A含于事件B, 记作

$B\supset A$或$A\subset B$



等价的说法是如果B不发生则A也不会发生. 对于任何事件A有

$\Phi\subset A\subset \Omega$

事件的相等

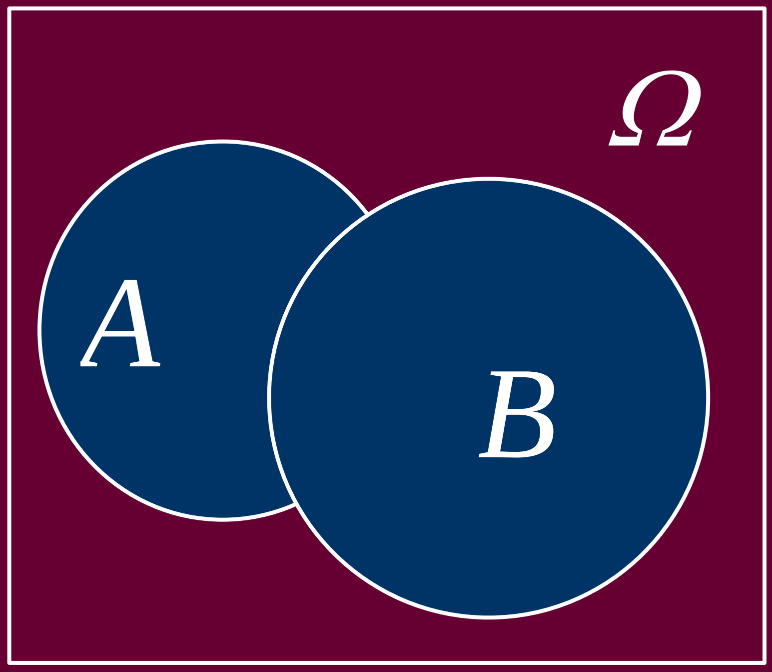
如果事件A包含事件B, 事件B也包含事件A, 称事件A与B相等. 即A与B中的样本点完全相同. 记作

$$A=B$$

事件的并(和)

两个事件A,B 中至少有一个发生, 即"A或B", 是一个事件, 称为事件A与B的并(和). 它是属于A或B的所有样本点构成的集合. 记作

$$A+B \text{ 或 } A\cup B$$



易知

$$A+\Omega=\Omega$$

$$A+\Phi=A$$

n个事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$中至少有一个发生

是一个事件, 称为事件的和, 记作

$A_1+A_2+\ldots+A_n$ 或 $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$

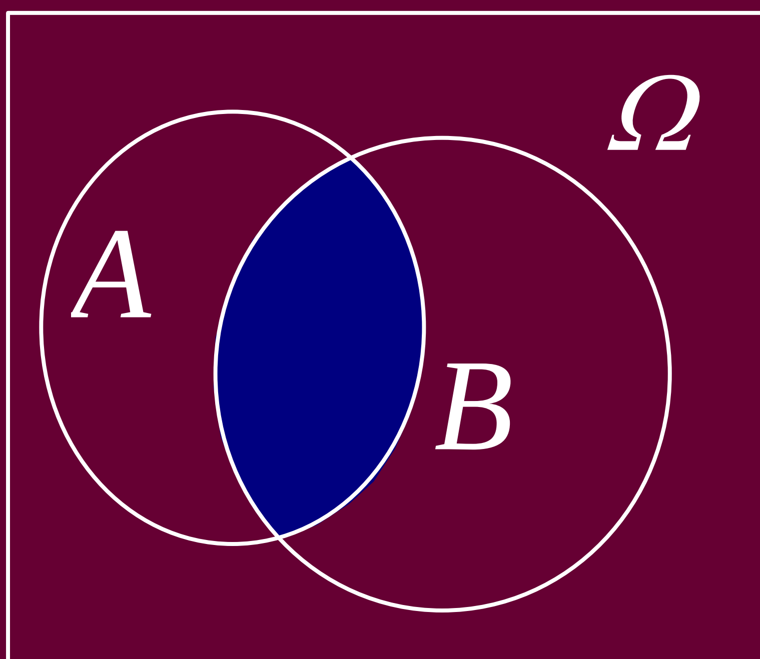
可列个事件的和表示可列个事件中至少有一个事件发生, 记作

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \quad 或 \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

事件的交(积)

两个事件A与B同时发生, 即"A且B", 是一个事件, 称为事件A与B的交. 它是由既属于A又属于B的所有公共样本点构成的集合. 记作

AB 或 $A\cap B$



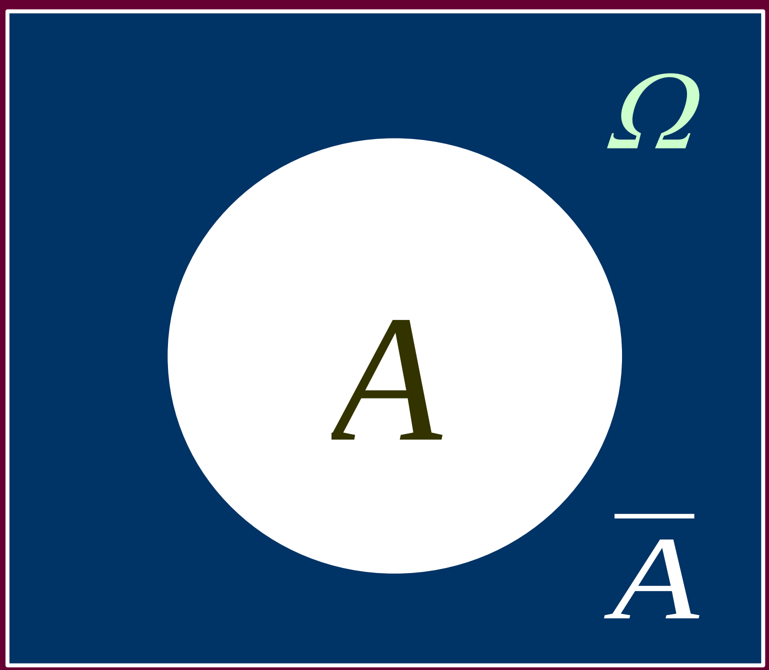
易知

$$A\cap\Omega = A$$

$$A\cap\Phi = \Phi$$

对立事件

事件"非A"称为A的对立事件(或逆事件). 它是由样本空间中所有不属于A的样本点组成的集合. 记作 $\overline{A}$



显然

$$A\overline{A}=\Phi,$$

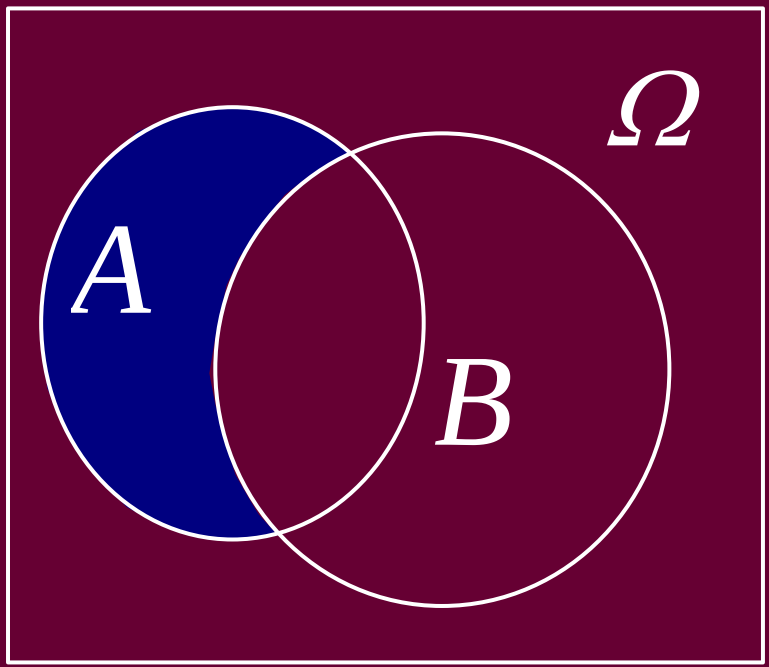
$$A+\overline{A}=\Omega,$$

$$\overline{\overline{A}}=A$$

事件的差

事件A发生而事件B不发生, 是一个事件, 称为事件A与B的差. 它是由属于A但不属于B的那些样本点构成的集合. 记作

$$A-B$$



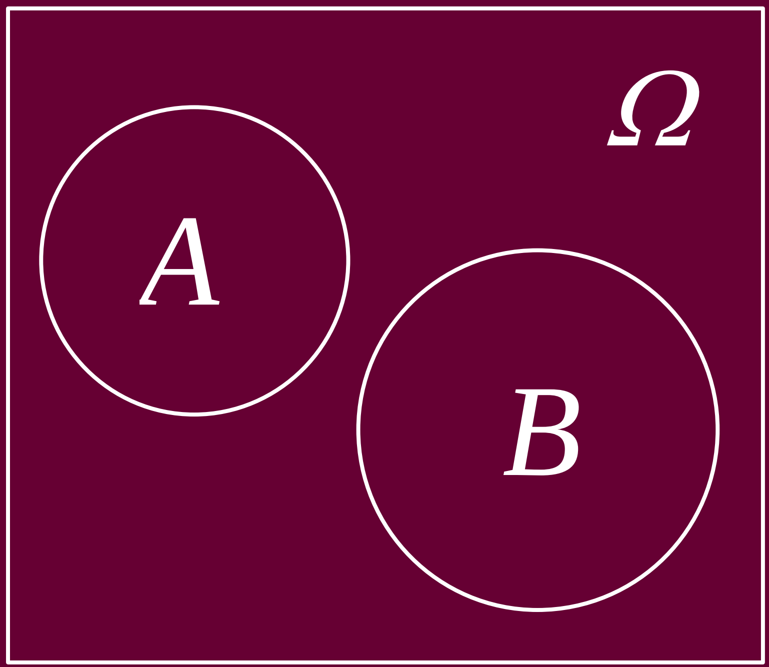
易知

$$A-B=A\overline{B}$$

$$\Omega-A=\overline{A}$$

互不相容事件

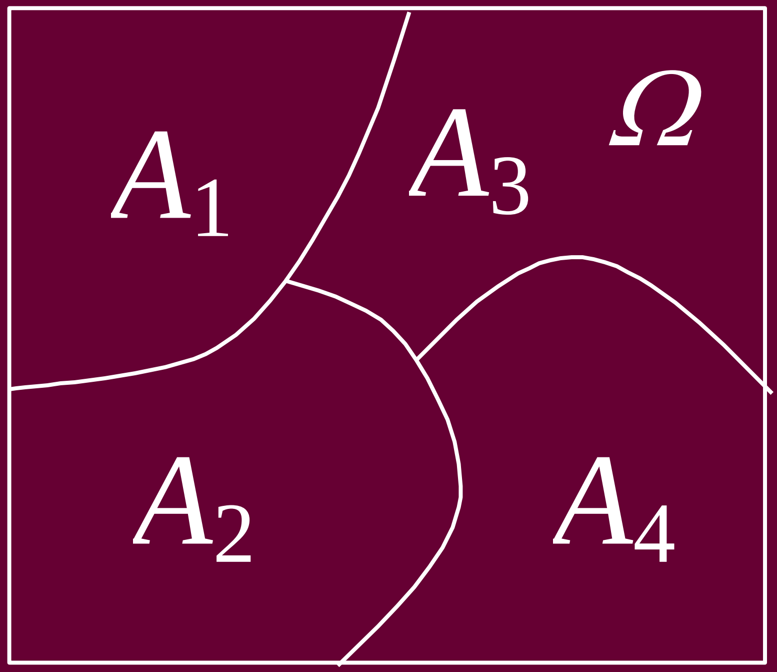
如果事件A与B不能同时发生, 即$AB=\Phi$, 称事件A与B互不相容(或称互斥). 互不相容事件A与B没有公共的样本点. 显然, 基本事件间是互不相容的



对立事件一定互不相容, 但互不相容事件未必对立

完备事件组

若事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$为两两互不相容事件, 并且$A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$, 称构成一个完备事件组或构成一个划分.



最常用的完备事件组是某事件A与它的逆 $\overline{A}$

事件的运算

1、交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

2、结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(AB)C=A(BC)$

3、分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$

4、对偶(De Morgan)律：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

可推广 $\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k \overline{A_k},\quad \overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k \overline{A_k}.$

例1 掷一颗骰子的试验，观察出现的点数

事件A表示"奇数点", 事件B表示"点数小于5", C表示"小于5的偶数点". 用集合的列举表示法表示下列事件:

$$\Omega, A, B, C, A+B, A-B,$$

$$B-A, AB, AC, \overline{A}+B$$

解:

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A=\{1,3,5\}$

$B=\{1,2,3,4\}$ $C=\{2,4\}$

$A+B=\{1,2,3,4,5\}$ $A-B=\{5\}$

$B-A=\{2,4\}$ $AB=\{1,3\}$

$AC=\Phi$ $C-A=\{2,4\}$

$$\overline{A}+B=\{1,2,3,4,6\}$$

例2

从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回), 事件A_i表示第i次取到合格品(i=1,2,3). 试用事件的运算符号表示下列事件:

三次都取到了合格品;

三次中至少有一次取到合格品;

三次中恰有两次取到合格品;

三次中最多有一次取到合格品.

解:

三次全取到合格品: $A_1A_2A_3$

三次中至少有一次取到合格品: $A_1+A_2+A_3$

三次中恰有两次取到合格品:

$$A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$$

三次中至多有一次取到合格品:

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,\overline{A_3}+\overline{A_2}\,\overline{A_3}$$

例3 一名射手连续向某个目标射击三次

事件A_i表示该射手第i次射击时击中目标 (i=1,2,3). 试用文字叙述下列事件:

$$A_1 + A_2; \overline{A_2}; A_1 + A_2 + A_3;$$

$$A_1 A_2 A_3; A_3 - A_2; A_3 \overline{A_2}; \overline{A_1 + A_2};$$

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2}; \overline{A_2} + \overline{A_3}; \overline{A_2 A_3};$$

$$A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3$$

解:

A_1+A_2：前两次至少有一次中

$\overline{A_2}$：第二次未中

$A_1+A_2+A_3$：三次中至少一次中

$A_1A_2A_3$：三次都中

$A_3-A_2=A_3\overline{A_2}$：第三次中但第二次未中

$\overline{A_1+A_2}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}$：前两次均未中

$\overline{A_2}+\overline{A_3}=\overline{A_2A_3}$：后两次至少有一次未击中

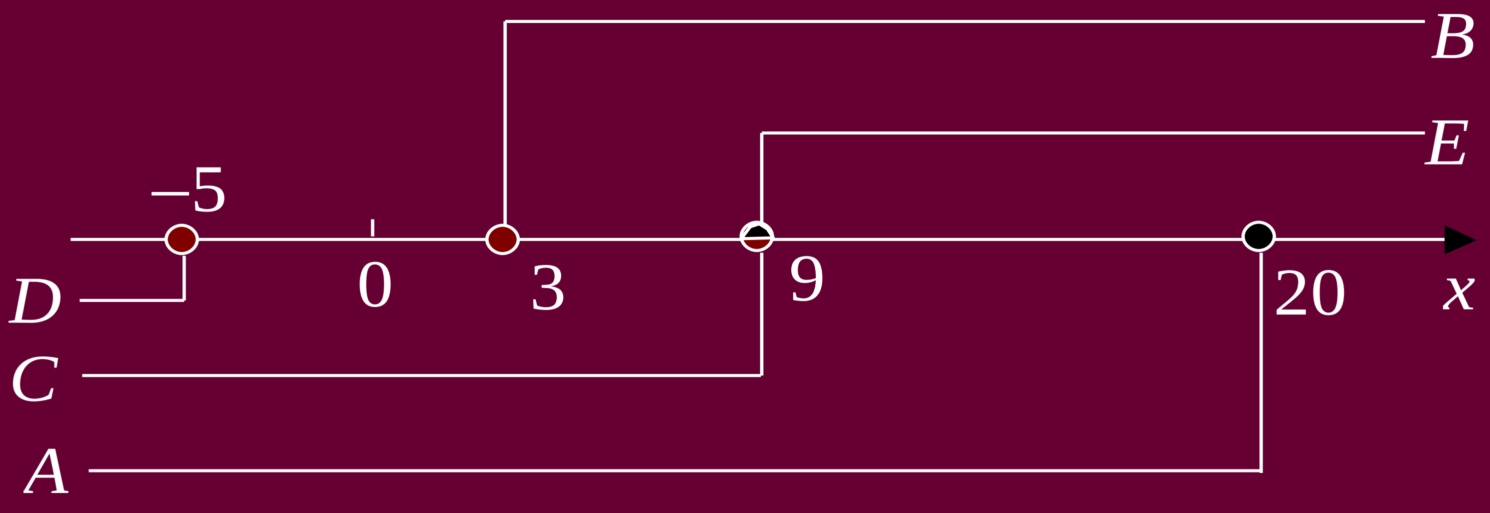
$A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$：三次射击至少两次中

例4 如果x表示一个沿数轴做随机运动的质点的位置, 试说明下列各事件的关系.

$A=\{x|x\le 20\}$ $B=\{x|x>3\}$

$C=\{x|x<9\}$ $D=\{x|x<-5\}$

$E=\{x|x\ge 9\}$



解: 由图可见

$A \supset C \supset D$, $B \supset E$

D与B, D与E互不相容

C与E为对立事件,

B与C, B与A, E与A相容, 显然A与C, A与D,

C与D, B与E也是相容的