综合练习二（导数）参考答案

一 填空选择题

(1) (2007考研题) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列错误的是（D）.

解 (A) ∵ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，设为 a，则 $\dfrac{f(x)}{x}=a+\alpha$，$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$

∴ $f(x)\big|_{x=0}=(\alpha+a)x\big|_{x=0}=0$ ∴ (A) 对.

(B) ∵ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，可设为 b，则 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}=b+\beta$，

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\beta=0$ ∴ $[f(x)+f(-x)]_{x=0}=(b+\beta)x\big|_{x=0}=0$

即 $f(0)+f(-0)=0$ ∴ $f(0)=0$，(B) 对

(C) ∵ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，由 (A) 知 $f(0)=0$ ∴ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在

即 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在. (C) 对

(D) 条件不足以证明 $f'(0)\exists$，∴ (D) 错.

(2) 设 $f(x)$ 可导且满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为（B）

(A) 2，(B) -2，(C) 1，(D) -1

解答：∵ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$

∴ $f'(1)=-2$ 答案为 (B)

(3) (1999考研题) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（D）

须

解答：$\because f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}=0=f(0)=0$

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\underbrace{x^2}_{无穷小}\underbrace{g(x)}_{有界}=0=f(0)$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 点连续

又 $\because f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}}{x}=0$

$f'_-(0)\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2g(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\underbrace{x}_{无穷小}\underbrace{g(x)}_{有界}=0$

$\therefore f'(0)=0$ 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导．可导必连续

$\therefore$ 答案为(D)

(4) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1+t)^{\frac{2x}{t}}$，则 $f'(x)=$ $\underline{e^{2x}+2xe^{2x}}$

解答：$\because f(x)=\lim\limits_{t\to0}x\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{2x}=xe^{2x}$

$\therefore f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}$

(5) 设 $y=x^n+e^{2x}$，则 $y^{(n)}=$ $\underline{n!+2^ne^{2x}}$

解答：$y^{(n)}=(x^n)^{(n)}+(e^{2x})^{(n)}=n!+2^ne^{2x}$

(6) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$ $\underline{2}$

解：方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ ①两边同时对 x 求导有：

$e^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0$ ② 解得 $y'=\dfrac{-6y-2x}{e^y+6x}$

对方程②两边对 x 求导，得 $e^y(y')^2+e^y\cdot y''+6y'+6y'+6xy''+2=0$

于是 $y''\Big|_{x=0}=\dfrac{e^y\cdot(y')^2+12y'+2}{e^y+6x}\Big|_{x=0}=2$，$(\because y(0)=0，y'(0)=0)$

2页

(7) 曲线 $\begin{cases} x=\cos t+\cos^2 t \\ y=1+\sin t \end{cases}$ 上对应于 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程：$y+(1-\sqrt{2})x-\frac{1}{2}=0$

解答：$y'(t)=\cos t$，$x'(t)=-\sin t+2\cos t\cdot(-\sin t)$

$\therefore y'(x)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos t}{-\sin t-\sin 2t}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=1-\sqrt{2}$，$x(\frac{\pi}{4})=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，$y(\frac{\pi}{4})=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ 曲线在 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处切线方程为

$y-1-\frac{\sqrt{2}}{2}=(1-\sqrt{2})(x-\frac{1+\sqrt{2}}{2})$ 即 $y+(1-\sqrt{2})x-\frac{1}{2}=0$

(8) 设 $y=\ln\sin\sqrt{x}$，则 $dy=$ (C)

解答：$\underbrace{dy=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}d\sin\sqrt{x}}$ $(=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,d\sqrt{x}=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$=\frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=\cot\sqrt{x}\,d\sqrt{x}$) 括号内多余

$\therefore$ 答案为(C)

2 解：$\because$ $y=f(x)$ 在原点与 $y=\sin x$ 相切 $\therefore y'(0)=f'(0)=(\sin x)'|_{x=0}=1=k$

且有 $f(0)=\sin 0=0$ $\therefore$ 有 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{nf(\frac{2}{n})}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}2\frac{f(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}}}=\sqrt{2}$

3. 解：$\because \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=5$ $\therefore \frac{f(x)}{x-2}=5+\alpha$，其中 $\lim_{x\to 2}\alpha=0$

$\therefore f(x)=(5+\alpha)(x-2)$ $\therefore f(2)=0$

于是有 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\underline{f'(2)=5}$

4. ∵ $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，∴ $\cancel{f(1)}$ $f(1^+)=a-b=f(1)=1$

又 ∵ $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，∴ $f'_+(1)=a=f'_-(1)=2$，从而 $b=1$

5. 解答 ∵ $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arcsin x^2$

∴ $y'(x)=\arcsin\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)'=\underline{\arcsin\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2}\cdot\underline{\frac{12}{(3x+2)^2}}$

∴ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=3\times\arcsin(-1)=\frac{-3\pi}{2}$

6. 解答：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\cdot\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{x\sin\frac{1}{x}}_{无穷小\cdot有界}=0$

7. 解答 ∵ 总成本 $C(x)=1200+5x+\frac{1}{10}x^2$，总收益 $R(x)=160x-x^2$

设总利润为 $M(x)$，则 $M(x)=R(x)-C(x)=-\frac{11}{10}x^2+155x-1200$

∴ ① 生产30件平均成本 $\frac{C(30)}{30}=48$

② 生产30件边际~~利润~~ $M'(30)=\left[-\frac{11}{5}x+155\right]_{x=30}=89$

③ 生产30件的边际~~成本~~ ~~$M'(30)=$~~ $C'(30)=\left[\frac{x}{5}+5\right]_{x=30}=11$

8. 求导 ① $y'=\left(e^{\arctan\sqrt{x}}\right)'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$

② $y'=(x+x^x)'\overset{x>0}{=}1+\left(e^{x\ln x}\right)'=1+e^{x\ln x}\cdot\left(1\ln x+\frac{x}{x}\right)=1+x^x(1+\ln x)$

③ $y'=\left(\frac{1}{\sin x\cos x}\right)'=\left(\frac{2}{\sin 2x}\right)'=2(\csc 2x)'=-4\csc 2x\cdot\cot 2x$

8(4) $y' = \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]'$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

9、$\because f(x) = xe^{-x}$

$\therefore f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$, $f''(x) = -2e^{-x} + xe^{-x}$

$f'''(x) = 3e^{-x} - xe^{-x}$, $f^{(4)} = -4x + xe^{-x}$, $\cdots$.

$\therefore f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} ne^{-x} + (-1)^n xe^{-x}$

10. $\because y = f(x+y)$，其中 $f''(u)$ ∃，$f'(u) \neq 1$

$\therefore y' = f'(u)\cdot(1+y')$

$y'' = f''(u)(1+y')^2 + f'(u)\cdot y''$

$$\therefore y'' = \frac{f''(u)(1+y')^2}{1-f'(u)} = \frac{f''(x+y)(1+y')^2}{1-f'(x+y)}$$

11. 作~~方程~~ $y = 1+xe^y$ 两边同时对 x 求导得：

$y' = e^y + xe^y\cdot y'$ ①

$$\therefore y' = \frac{e^y}{1-xe^y}$$

对①两边同时对 x 再求导得：

$y'' = e^y\cdot y' + e^y\cdot y' + xe^y\cdot(y')^2 + xe^y\cdot y''$

$$\therefore y''\Big|_{x=0} = \frac{2e^y\cdot y' + xe^y\cdot(y')^2}{1-xe^y}\Big|_{x=0} = \frac{2e^y - 2xe^{2y} + xe^{3y}}{(1-xe^y)^3}\Big|_{x=0} = 2e$$

(其中 $y(0)=1$，$y'(0)=e$)

12题：∵ $\begin{cases} y = \arctan t \\ x = t - \ln(1+t^2) \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ x'(t) = 1 - \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$

∴(1) $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{1}{1+t^2} \Big/ \left(1 - \dfrac{2t}{1+t^2}\right) = \dfrac{1}{(t-1)^2}$

(2) $y''(x) = \left(\dfrac{1}{(t-1)^2}\right)' \Big/ \left(1 - \dfrac{2t}{1+t^2}\right) = \dfrac{-2(t^2+1)}{(t-1)^5}$

13题：∵ $f(a) = f(b) = 0$，$f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$

∴ $f'_+(a) \cdot f'_-(b) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$

$= \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{x-a} \cdot \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{x-b} > 0$，而 $x \to a^+$ 时 $x - a > 0$，$x \to b^-$ 时 $x - b < 0$

又∵ $f(x) \in C[a,b]$，∴ 又由保号性 (1) $\begin{cases} f(x) > 0, & x > a \\ f(x) < 0, & x < b \end{cases}$ 或(2) $\begin{cases} x > a 时, f(x) < 0 \\ x > b 时, f(x) > 0 \end{cases}$

对(1)，∵ $f(x) \in C[a,b]$ ∴ $\exists [x_1, x_2] \subset (a,b)$，

使 $f(x_1) > 0$，$f(x_2) < 0$，又 $f(x) \in C[x_1, x_2]$

∴ 由零点存在定理 得 $\exists \xi_1$，使 $\xi_1 \in (x_1, x_2) \subset [a,b]$

$f(\xi_1) = 0$，同理 $\exists \xi_2 \in (x_1, x_2)$，使 $f(\xi_2) = 0$

对(2)情形，类似(1)，

结论得证.