

# 第 6 章 MATLAB 解方程 与最优化问题求解

Lecturer: 白煌

杭州师范大学  
信息科学与技术学院

2022.11.25



# 本章要点

- MATLAB 线性方程组求解
- MATLAB 非线性方程数值求解
- MATLAB 常微分方程初值问题的数值解法
- MATLAB 最优化问题求解



# 目录

## 1 6.1 线性方程组求解



## 6.1.1 直接解法

### 1. 利用左除运算符的直接解法

对于线性方程组  $Ax=b$ ，可以利用左除运算符“\”求解：

$$x=A\backslash b$$



## 6.1.1 直接解法

例 6-1: 用直接解法求解下列线性方程组。



## 6.1.1 直接解法

例 6-1: 用直接解法求解下列线性方程组。

```
>> A=[2,1,-5,1;1,-5,0,7;0,2,1,-1;1,6,-1,-4];  
>> b=[13,-9,6,0]';  
>> x=A\b
```



## 6.1.1 直接解法

### 2. 利用矩阵的分解求解线性方程组

矩阵分解是指根据一定的原理用某种算法将一个矩阵分解成若干个矩阵的乘积。常见的矩阵分解有 LU 分解、QR 分解、Cholesky 分解，以及 Schur 分解、Hessenberg 分解、奇异分解等。



## 6.1.1 直接解法

### (1) LU 分解

矩阵的 LU 分解就是将一个矩阵表示为一个交换下三角矩阵和一个上三角矩阵的乘积形式。线性代数中已经证明，只要方阵  $A$  是非奇异的，LU 分解总是可以进行的。





## 6.1.1 直接解法

MATLAB 提供的 `lu` 函数用于对矩阵进行 LU 分解，其调用格式为：

- $[L,U]=lu(X)$ ：产生一个上三角矩阵  $U$  和一个变换形式的下三角矩阵  $L$ （行交换），使之满足  $X=LU$ 。这里的矩阵  $X$  必须是方阵。
- $[L,U,P]=lu(X)$ ：产生一个上三角矩阵  $U$  和一个下三角矩阵  $L$  以及一个置换矩阵  $P$ ，使之满足  $PX=LU$ 。矩阵  $X$  同样必须是方阵。



## 6.1.1 直接解法

MATLAB 提供的 `lu` 函数用于对矩阵进行 LU 分解，其调用格式为：

- $[L,U]=lu(X)$ ：产生一个上三角矩阵  $U$  和一个变换形式的下三角矩阵  $L$ （行交换），使之满足  $X=LU$ 。这里的矩阵  $X$  必须是方阵。
- $[L,U,P]=lu(X)$ ：产生一个上三角矩阵  $U$  和一个下三角矩阵  $L$  以及一个置换矩阵  $P$ ，使之满足  $PX=LU$ 。矩阵  $X$  同样必须是方阵。

实现 LU 分解后， $Ax=b$  的解  $x=U\backslash(L\backslash b)$  或  $x=U\backslash(L\backslash P*b)$ ，这样可以大大提高运算速度。



## 6.1.1 直接解法

例 6-2: 用 LU 分解求解例 6-1 中的线性方程组。



## 6.1.1 直接解法

例 6-2: 用 LU 分解求解例 6-1 中的线性方程组。

```
>> A=[2,1,-5,1;1,-5,0,7;0,2,1,-1;1,6,-1,-4];
```

```
>> b=[13,-9,6,0]';
```

```
>> [L,U]=lu(A);
```

```
>> x=U\ (L\b)
```

```
>> [L,U,P]=lu(A);
```

```
>> x=U\ (L\ P*b)
```



## 6.1.1 直接解法

### (2) QR 分解

对矩阵  $X$  进行 QR 分解，就是把  $X$  分解为一个正交矩阵  $Q$  和一个上三角矩阵  $R$  的乘积形式。



## 6.1.1 直接解法

MATLAB 的函数 `qr` 可用于对矩阵进行 QR 分解，其调用格式为：

- $[Q,R]=qr(X)$ ：产生一个正交矩阵  $Q$  和一个上三角矩阵  $R$ ，使之满足  $X=QR$ 。
- $[Q,R,E]=qr(X)$ ：产生一个正交矩阵  $Q$  和一个上三角矩阵  $R$ ，以及一个置换矩阵  $E$ ，使之满足  $XE=QR$ 。



## 6.1.1 直接解法

MATLAB 的函数 `qr` 可用于对矩阵进行 QR 分解，其调用格式为：

- $[Q,R]=qr(X)$ ：产生一个正交矩阵  $Q$  和一个上三角矩阵  $R$ ，使之满足  $X=QR$ 。
- $[Q,R,E]=qr(X)$ ：产生一个正交矩阵  $Q$  和一个上三角矩阵  $R$ ，以及一个置换矩阵  $E$ ，使之满足  $XE=QR$ 。

实现 QR 分解后， $Ax=b$  的解  $x=R \setminus (Q \setminus b)$  或  $x=E^*(R \setminus (Q \setminus b))$ 。



## 6.1.1 直接解法

例 6-3: 用 QR 分解求解例 6-1 中的线性方程组。





## 6.1.1 直接解法

例 6-3: 用 QR 分解求解例 6-1 中的线性方程组。

```
>> A=[2,1,-5,1;1,-5,0,7;0,2,1,-1;1,6,-1,-4];  
>> b=[13,-9,6,0]';  
>> [Q,R]=qr(A);  
>> x=R\ (Q\b)  
>> [Q,R,E]=qr(A);  
>> x=E*(R\ (Q\b))
```



## 6.1.1 直接解法

### (3) Cholesky 分解

如果矩阵  $X$  是对称正定的，则 Cholesky 分解将矩阵  $X$  分解成一个下三角矩阵和上三角矩阵的乘积。设上三角矩阵为  $R$ ，则下三角矩阵为其转置，即  $X=R'R$ 。



## 6.1.1 直接解法

MATLAB 函数 `chol(X)` 用于对矩阵  $X$  进行 Cholesky 分解，其调用格式为：

- `R=chol(X)`：产生一个上三角矩阵  $R$ ，使  $R'R=X$ 。若  $X$  为非对称正定，则输出一个出错信息。
- `[R,p]=chol(X)`：这个命令格式将不输出出错信息。当  $X$  为对称正定的，则  $p=0$ ， $R$  与上述格式得到的结果相同；否则  $p$  为一个正整数。如果  $X$  为满秩矩阵，则  $R$  为一个阶数为  $q=p-1$  的上三角矩阵，且满足  $R'R=X(1:q,1:q)$ 。



## 6.1.1 直接解法

MATLAB 函数 `chol(X)` 用于对矩阵  $X$  进行 Cholesky 分解，其调用格式为：

- $R=\text{chol}(X)$ ：产生一个上三角矩阵  $R$ ，使  $R'R=X$ 。若  $X$  为非对称正定，则输出一个出错信息。
- $[R,p]=\text{chol}(X)$ ：这个命令格式将不输出出错信息。当  $X$  为对称正定的，则  $p=0$ ， $R$  与上述格式得到的结果相同；否则  $p$  为一个正整数。如果  $X$  为满秩矩阵，则  $R$  为一个阶数为  $q=p-1$  的上三角矩阵，且满足  $R'R=X(1:q,1:q)$ 。

实现 Cholesky 分解后， $Ax=b$  变成  $R'Rx=b$ ，所以  $x=R \setminus (R' \setminus b)$ 。



## 6.1.1 直接解法

例 6-4: 用 Cholesky 分解求解例 6-1 中的线性方程组。



## 6.1.1 直接解法

例 6-4: 用 Cholesky 分解求解例 6-1 中的线性方程组。

```
>> A=[2,1,-5,1;1,-5,0,7;0,2,1,-1;1,6,-1,-4];  
>> b=[13,-9,6,0]';  
>> R=chol(A)
```



## 6.1.2 迭代解法

迭代解法非常适合求解大型系数矩阵的方程组。在数值分析中，迭代解法主要包括 **Jacobi** 迭代法、**Gauss-Seidel** 迭代法、超松弛迭代法和两步迭代法。



## 6.1.2 迭代解法

### 1. Jacobi 迭代法

对于方程组  $Ax=b$ ，如果  $A$  为非奇异方阵，且  $a_{ii} \neq 0$  ( $i=1,2,\dots,n$ )，则可将  $A$  分解为  $A=D-L-U$ ，其中  $D$  为对角阵，其元素为  $A$  的对角元素， $L$  与  $U$  为  $A$  的下三角矩阵取反和上三角矩阵取反，于是  $Ax=b$  化为

$$x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$$

与之对应的迭代公式为：

$$x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b$$

这就是 Jacobi 迭代公式。如果序列  $\{x^{(k+1)}\}$  收敛于  $x$ ，则  $x$  必是方程  $Ax=b$  的解。





## 6.1.2 迭代解法

例 6-5: 用 Jacobi 迭代法求解下面的线性方程组。设迭代初值为 0, 迭代精度为  $10^{-6}$ 。



## 6.1.2 迭代解法

例 6-5: 用 Jacobi 迭代法求解下面的线性方程组。设迭代初值为 0, 迭代精度为  $10^{-6}$ 。

```
>> A=[10,-1,0;-1,10,-2;0,-2,10];  
>> b=[9,7,6]';  
>> [x,n]=jacobi(A,b,[0,0,0]',1.0e-6)
```



## 6.1.2 迭代解法

### 2. Gauss-Serdel 迭代法

在 Jacobi 迭代过程中，原来的迭代公式

$$Dx^{(k+1)} = (L+U)x^{(k)} + b$$

可以改进为

$$Dx^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b$$

于是得到

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

该式即为 Gauss-Serdel 迭代公式。和 Jacobi 迭代相比，Gauss-Serdel 迭代用新分量代替旧分量，精度会更高。



## 6.1.2 迭代解法

例 6-6: 用 Gauss-Serdel 迭代法求解下面的线性方程组。设迭代初值为 0, 迭代精度为  $10^{-6}$ 。



## 6.1.2 迭代解法

例 6-6: 用 Gauss-Seidel 迭代法求解下面的线性方程组。设迭代初值为 0, 迭代精度为  $10^{-6}$ 。

```
>> A=[10,-1,0;-1,10,-2;0,-2,10];  
>> b=[9,7,6]';  
>> [x,n]=gaussidel(A,b,[0,0,0]',1.0e-6)
```



## 6.1.2 迭代解法

例 6-7：分别用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解下列线性方程组，看是否收敛。



## 6.1.2 迭代解法

例 6-7: 分别用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解下列线性方程组，看是否收敛。

```
>> a=[1,2,-2;1,1,1;2,2,1];  
>> b=[9;7;6];  
>> [x,n]=jacobi(a,b,[0;0;0])  
>> [x,n]=gauseidel(a,b,[0;0;0])
```

