第一章　函数与极限习题解答与提示

习题 1.1

1. $A\cup B=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$， $A\cap B=[-9,-6)$， $A\setminus B=(-\infty,-9)\cup(4,+\infty)$，

$A\setminus(A\setminus B)=[-9,-6)$；

2. (略)；

3. （1）$[-\dfrac{8}{5},+\infty)$，（2）$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$，（3）$[0,+\infty)$，

（4）$R\setminus\{x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1\big|\, k\in Z\}$，（5）$[1,3]$，（6）$(-\infty,0)\cup(0,5]$；

4. （略）；

5. $\varphi(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$， $\varphi(\dfrac{\pi}{4})=\varphi(-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $\varphi(-2)=0$；

6. (1) 单调增加，(2) 单调增加；

7-8 题(略)；

9. (1) 偶函数，(2) 既非偶函数又非奇函数，(3) 奇函数；

10. (1) 是周期函数，周期 $l=2\pi$，(2) 是周期函数，周期 $l=\dfrac{\pi}{4}$，(3) 是周期函数，周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$；

11.（1） $y=x^3-5$，（2） $y=\dfrac{2(1-x)}{1+x}$，（3） $y=e^{x-1}-3$；

12.(略)；

13.（1） $y=\sin^2 x,\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}$，（2） $y=\sqrt{1+x^2},\sqrt{2},\sqrt{5}$，（3） $y=e^{2x},u=e^x,e^2,e^{-2}$；

14.（1）$[-1,1]$，（2）$[1,e]$；

15. $f[g(x)]=\begin{cases}1,\ x<0\\ 0,\ x=0\\ -1,x>0\end{cases}$，$g[f(x)]=\begin{cases}e,|x|<1\\ 1,|x|=1\\ e^{-1},|x|>1\end{cases}$；

16. $p=\begin{cases}90, & 0\le x\le 100\\ 190-x, & 101\le x\le 115\\ 75, & x>115\end{cases}$，$P=\begin{cases}30x, & 0\le x\le 100\\ 130x-x^2, & 101\le x\le 115\\ 15x, & x>115\end{cases}$；

$P(1000)=15000$ (元)；

习题 1.2

1. (1) 收敛，极限为 1；(2) 收敛，极限为 3；(3) 发散；

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$， $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$， $N = 1000$

3-5 题(略)；

习题 1.3

1. (略)；

2. 当 $x \to 2$ 时, 不妨设 $|x-2| < 1$，则 $|y-4| < 5|x-2| < 0.001$，故取 $\delta = 0.0002$；

3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$， $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$， $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1$，故极限 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在；

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$， $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$， $N = 1000$；

4. (略)；

习题 1.4

1. 两个无穷小的商不一定是无穷小， $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$， $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$，但 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在；

2. (略)；

3. $0 < |x| < \frac{1}{10^4 + 3}$；

4. 根据定理 1，极限为 3；

5. 函数 $y = x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界，当 $x \to +\infty$ 时，该函数不是无穷大，

对任意正数 M，存在 $x^* = 2[M]\pi + \frac{\pi}{2} \in (0, +\infty)$， $f(x^*) = 0 < M$.

习题 1.5

1.（1） -6，（2） 0，（3） $2x$，（4）3，（5） $\frac{2}{3}$，（6） 6，（7） 2，（8） -1；

2.（1） ∞，（2） $\frac{1}{2}$；

3.（1）0，（2）0；

4. $\alpha = -2$， $\beta = 0$；

习题 1.6

1.（1） $2w$，（2） $\frac{3}{7}$，（3） 2，（4） x；

2.（1） e^{-2}，（2） e^3，（3） e^3，（4） e；

3. (略)；

4.（1）提示:$1 \le \sqrt{1+\frac{1}{n}} \le 1+\frac{1}{n}$,

（2）提示:$\frac{n^2}{n^2+n\pi} < n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi}) < \frac{n^2}{n^2+\pi}$,

（3）提示:$x_{n+1}=\sqrt{x_n+3}$, 利用单调有界准则;

（4）提示:当 $x>0$ 时, $1-x \le x[\frac{1}{x}] \le 1$;

（5）提示:$1 \le \sqrt[n]{n} = (\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\overbrace{1\cdots\cdots 1}^{(n-2)\text{个}})^{\frac{1}{n}} \le \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\overbrace{1+\cdots+1}^{(n-2)\text{个}}}{n}$;

（6）提示:当 $n \ge 2$ 时, $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$， $0 \le [\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}]^2 \le \frac{1}{2n+1}$;

习题 1.7

1. 当 $x \to 0$ 时，x^2-x^3 是比 $2x-x^2$ 高阶的无穷小;

2. 当 $x \to 1$ 时，无穷小 $x-1$ 与 x^3-1 是同阶无穷小，

   无穷小 $x-1$ 与 $\frac{1}{2}(x^4-1)$ 是同阶无穷小;

3.(略);

4. （1）$\frac{2}{3}$，（2）-3;

习题 1.8

（1）解： 已知多项式函数是连续函数, 所以函数 $f(x)$在[0, 1)和(1, 2]内是连续的.

在 x=1 处, 因为 $f(1)$=1, 并且

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2-x) = 1.$$

所以 $\lim_{x\to 1} f(x)=1$, 从而函数 $f(x)$在 x=1 处是连续的.

综上所述，函数 $f(x)$在[0, 2]上是连续函数.

（2）解： 只需考察函数在 x=−1 和 x=1 处的连续性.

在 x=−1 处, 因为 $f(-1)$=−1, 并且

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 1 = 1 \ne f(-1),$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x = -1 = f(-1),$$

所以函数在 x=−1 处间断, 但右连续.

在 $x=1$ 处，因为 $f(1)=1$，并且

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1=f(1),\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 1=1=f(1),$$

所以函数在 $x=1$ 处连续.

综合上述讨论，函数在$(-\infty, -1)$和$(-1, +\infty)$内连续，在 $x=-1$ 处间断，但右连续. $f(x)$ 在

$(-\infty,-1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内连续， $x=-1$ 为跳跃间断点；

2.（1） 解： $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$. 因为函数在 $x=2$ 和 $x=1$ 处无定义，所以 $x=2$ 和 $x=1$ 是函数的间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$，所以 $x=2$ 是函数的第二类间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{(x-2)}=-2$，所以 $x=1$ 是函数的第一类间断点，并且是可去间断点. 在 $x=1$ 处，令 $y=-2$，则函数在 $x=1$ 处成为连续的.

（2）解：函数在点 $x=k\pi(k\in Z)$和 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$处无定义，因而这些点都是函数的间断点.

因 $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty\,(k\neq 0)$，故 $x=k\pi(k\neq 0)$是第二类间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$， $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0\,(k\in Z)$，所以 $x=0$ 和 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$ 是第一类间断点且是可去间断点.

令 $y|_{x=0}=1$，则函数在 $x=0$ 处成为连续的；

令 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y=0$，则函数在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处成为连续的.

3. 解： $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ x & |x|<1\end{cases}$.

在分段点 $x=-1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-x)=1$， $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x=-1$，所以 $x=-1$ 为函数的第一类跳跃间断点.

在分段点 $x=1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1$， $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-x)=-1$，所以 $x=1$ 为函数的第一类跳跃间断点.

5. 解： $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}}, & x>0\\ \ln(1+x), & -1<x\le 0\end{cases}$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 内有定义

在分段点 x=0 处, 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(x+1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x+1}}=e$, 所以 x=1 为函数的第一类跳跃间断点.

函数 $f(x)$在区间$(-1,0)$与$(0,+\infty)$内连续。

习题 1.9

1.解: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$, 函数在$(-\infty, +\infty)$内除点 x=2 和 x=−3 外是连续的, 所以函数 $f(x)$的连续区间为$(-\infty, -3)$、$(-3, 2)$、$(2, +\infty)$.

在函数的连续点 x=0 处, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=\dfrac{1}{2}$.

在函数的间断点 x=2 和 x=−3 处,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\infty,\quad \lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{(x-1)(x+1)}{x-2}=-\frac{8}{5}.$$

2. 证明 已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$.

可以验证

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

因此

$$\varphi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|],$$

$$\psi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)-|f(x_0)-g(x_0)|].$$

因为

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

$$=\frac{1}{2}[\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)+|\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x)|]$$

$$=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|]=\varphi(x_0),$$

所以$\varphi(x)$在点 x_0 也连续.

同理可证明$\psi(x)$在点 x_0 也连续.

3. 解: (1)因为函数 $f(x)=\sqrt{x^2-3x+4}$ 是初等函数, $f(x)$在点 x=0 有定义且连续, 所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-3x+4}=f(0)=\sqrt{0^2-3\cdot 0+4}=2.$$

（2）因为函数 $f(\alpha)=(\sin 2\alpha)^3$ 是初等函数, $f(\alpha)$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 有定义且连续，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=f(\frac{\pi}{4})=(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4})^3=1；$$

(3) $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x})(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4x-4}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1}\frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=\frac{4}{\sqrt{5\cdot1-4}+\sqrt{1}}=2.$$

（4） $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos\frac{a+a}{2}\cdot1=\cos a.$$

（5） $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}})}=1.$$

4. 解: (1) $$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

（3） $$\lim_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim_{x\to0}\left[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}}\right]^3=e^3$$

（4） $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2x}-x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{x(\sqrt{1+\sin^2x}-1](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\frac{1}{2}x\sin^2x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

（5*） $$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin2x}-e^{2\sin x}}{x\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin2x}-e^{2\sin x}}{x\cdot x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2\sin x}(e^{2\sin x(\cos x-1)}-1)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{2\sin x}}{x\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}2\sin x(\cos x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}\cdot x(-x^2)}{x^3}=-1$$

5. 解 要使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只须 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即只须

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to +0}f(x)=f(0)=a\,.$$

因为 $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=\lim\limits_{x\to -0}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to +0}f(x)=\lim\limits_{x\to +0}(a+x)=a$，所以只须取 $a=1$.

6. 解：$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=2$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}=2，\lim_{x\to 1}(x^4+ax+b)=1+a+b=0，$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+ax-a-1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+a+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{a+4}{3}=2，$$

解得 $a=2$，$b=-3$。

7. 解：$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^2e^{-nx}}{1+e^{-nx}}x=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 0, & x=0\\ x, & x>0\end{cases}.$$

在分段点 $x=0$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$，所以 $x=0$ 为函数的连续点. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续

在分段点 $x=1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-x)=-1$，所以 $x=1$ 为函数的第一类跳跃间断点.

习题 1.10

1.证： 设 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(x)$ 是闭区间 $[1,2]$ 上的连续函数.

因为 $f(1)=-3, f(2)=25, f(1)f(2)<0$，所以由零点定理，在 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ $(1<\xi<2)$，使 $f(\xi)=0$，即 $x=\xi$ 是方程 $x^5-3x=1$ 的介于 1 和 2 之间的根.

因此方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

2. 证：设 $f(x)=a\sin x+b-x$，则 $f(x)$ 是 $[0, a+b]$ 上的连续函数.

$f(0)=b, f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a[\sin(a+b)-1]\le 0$.

若 $f(a+b)=0$，则说明 $x=a+b$ 就是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根;

若 $f(a+b)<0$，则 $f(0)f(a+b)<0$，由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(0, a+b)$，使 $f(\xi)=0$，这说明 $x=\xi$ 也是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根.

总之，方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

3. 证：设 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$是$[a, b]$上的连续函数.

$F(a)=f(a)-a<0$,, $f(b)=f(b)-b>0$

则 $f(a)f(b)<0$, 由零点定理, 至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使 $F(\xi)=0$,

即至少有一点 $\boldsymbol{\xi\in(a,b)}$ 使 $\boldsymbol{f(\xi)=\xi}$ 。

5. 证： 显然$f(x)$在$[x_1, x_n]$上也连续. 设 M 和 m 分别是 $f(x)$在$[x_1, x_n]$上的最大值和最小值.

因为 $x_i\in[x_1, x_n](1\le i\le n)$, 所以有 $m\le f(x_i)\le M$, 从而有

$$n\cdot m\le f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\le n\cdot M\ ,$$

$$m\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M\ .$$

由介值定理推论, 在$[x_1, x_n]$上至少有一点ξ 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\ .$$

6. 证：设 $\boldsymbol{f(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)}$, 则 $f(x)$在$[1, 2]$上连续

$f(1)=2>0$,, $f(2)=f-1<0$

则 $f(1)f(2)<0$, 由零点定理, 至少存在一点$\xi\in(1,2)$, 使 $f(\xi)=0$,

$f(x)$在$[2, 3]$上连续

$f(2)=2>0$, $f(3)=-1<0$

则 $f(1)f(2)<0$, 由零点定理, 至少存在一点$\xi\in(2,3)$, 使 $f(\xi)=0$,

方程 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=0$ 有分别包含于(1, 2), (2, 3) 内的两个实根.

7.证: 若 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在, 则 $f(x)$必在$(-\infty, +\infty)$内有界.

证明 令 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, 则对于给定的$\varepsilon>0$, 存在 $X>0$, 只要$|x|>X$, 就有

$|f(x)-A|<\varepsilon$, 即 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

又由于 $f(x)$在闭区间$[-X, X]$上连续, 根据有界性定理, 存在 $M>0$, 使$|f(x)|\le M$, $x\in[-X, X]$.

取 $N=\max\{M, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\}$, 则$|f(x)|\le N$, $x\in(-\infty, +\infty)$, 即 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内有界.