

教材

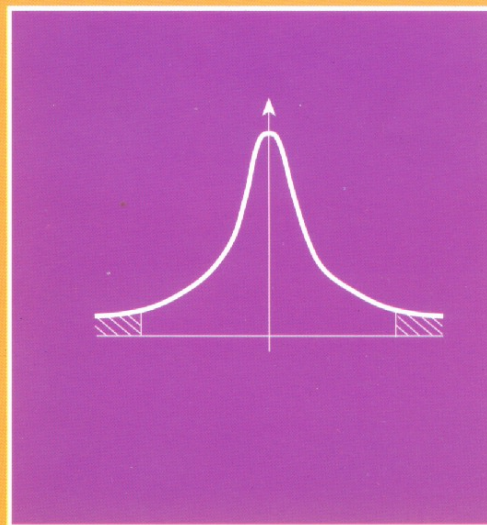
高等学校文科教材

经济应用数学基础（三）

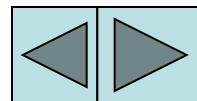
概率论与数理统计

袁荫棠 编

（修订本）



中国人民大学出版社



参考书：1. 《概率论及数理统计》

中山大学 数学力学系 编

人民教育出版社

2. 《概率论与数理统计》

李少辅 等编

河南大学出版社

概率论与数理统计

概率论—事件发生的可能性

数理统计—用数据来分析对象满足
的概率规律

第一章 随机事件与概率

§ 1 随机事件

一、必然现象与随机现象

1、必然现象

在一定条件下肯定会发生的现象

如水 100°C 沸腾，苹果从树上掉落

2、偶然现象或随机现象

即使条件一定，结果也不可预测

如 掷一枚硬币，出现正面或反面？

买一张彩票，是否中奖？

是否会发生水灾？

要面对随机现象进行研究，还有一些要求。

二、随机试验与随机事件

随机试验是对随机现象进行试验或观察

- 1、相同的条件下可以重复进行
- 2、每次试验有多种可能的结果，而且在试验之前即可明确有几种可能。
- 3、每次试验不能预知哪一结果会发生。

当目的不同时，结果也会有不同。

如天气：下雨或不下雨。

晴、多云、阴、小雨、大雨等。

随机试验的每个结果称为随机事件，简称事件。

一般用大写英文字母A、B、C等表示。

例如在0、1、2、...、9中任取一数。

A表示取到0，B表示取到5，

C表示取到奇数，D表示取到3的倍数。

它们都是随机事件。

不能分解为其它事件的事件称为基本事件。如A,B

能分解为其它事件的事件称为复合事件。如C,D

每次试验一定发生的事件称为必然事件。

如点数大于0

一般用 Ω 表示必然事件。

每次试验一定不发生的事件称为不可能事件。

如点数大于9

一般用 ϕ 表示不可能事件

它们是随机事件的特例。

为了研究的方便，可以用点集来表示事件，

也可以用文氏图表示。

基本事件用只包含一个元素 ω 的单点集 $\{\omega\}$ 表示。

复合事件用包含若干个元素的集合表示。

例如掷一颗骰子，

A表示点数为4，即为单点集 $\{4\}$

B表示点数为偶数，即为点集 $\{2, 4, 6\}$

点数为正数，是必然事件，即为全集 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

点数为负数，是不可能事件，即为空集 ϕ

所有基本事件对应的元素组成的集合称为样本空间。

每个基本事件对应的元素称为一个样本点。

三、事件间的关系及运算

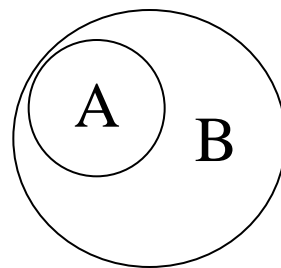
1、事件的包含

若事件A发生必然导致事件B发生，即属于A的每个样本点也属于B,则称事件B包含事件A。

记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$

等价的说法是：B不发生，则A也不发生。

用图形表示，即



例如 $A = \{4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 则 $A \subset B$

对任何事件A,有 $\phi \subset A \subset \Omega$

2、事件的相等

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，称事件A与B相等。

即A与B中的样本点完全相同。

记作 $A=B$

掷一颗骰子

A表示点数小于3，B表示点数为1或2

则 $A=B$

3、事件的并（和）

两个事件A，B中至少有一个发生，即“A或B”，是一个事件，称为A与B的并（和）。

它是由A与B的所有样本点构成的集合。

记作A+B或 $A \cup B$

掷骰子之例中，若

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}$$

$$\text{则 } A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

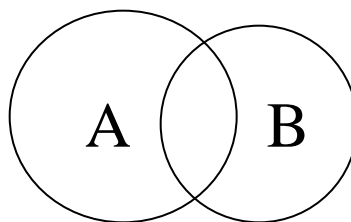
集合的运算规律对事件也成立，如

$$A \cup B = B \cup A, (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cup B \supset A, A \cup B \supset B$$

$$A \cup \varnothing = A, A \cup \Omega = \Omega$$

用图形表示，即



n 个事件 A_1, \dots, A_n 中至少有一个发生，是一个事件。

称为事件 A_1, \dots, A_n 的和。

记作 $A_1 + \dots + A_n$ 或 $A_1 \cup \dots \cup A_n$

可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生

称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和

记作 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{1, 3, 4\}$

则 $A+B+C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

4、事件的交（积）

两个事件A与B同时发生，即“A且B”，是一个事件。
称为事件A与B的交（积）。

它是由A与B的公共样本点构成的集合。

记作AB或 $A \cap B$

如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

则 $AB = \{1, 3\}$

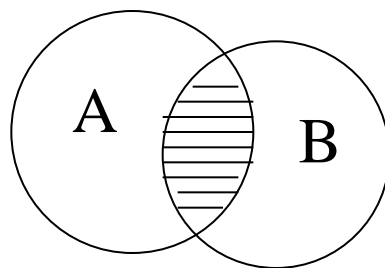
它也有运算律：

$$A \cap B = B \cap A \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap B \subset A \quad A \cap B \subset B$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing \quad A \cap \Omega = A$$

用图形表示，即



也可定义多个事件的交。

交与并运算还满足分配律：

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

用不同的记号，可写为

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$(AB) + C = (A+C)(B+C)$$

5、事件的差

事件A发生而事件B不发生，是一个事件，
称为事件A与B的差。

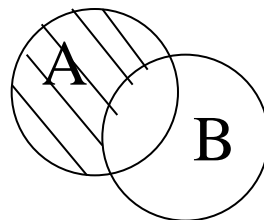
它由属于A但不属于B的所有样本点组成。

记作A-B

如： $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 5\}$

则 $A-B=\{2\}$, $B-A=\{5\}$

用图形表示即



6、互不相容事件

若A与B不能同时发生，即 $AB = \phi$

称事件A与B互不相容或互斥。

互斥事件没有公共的样本点。

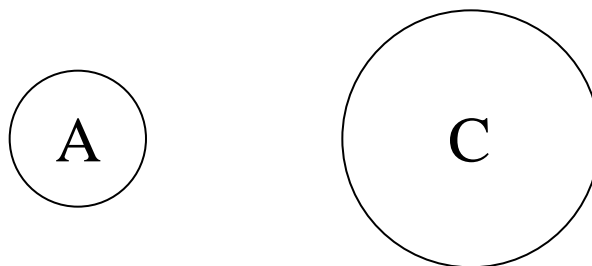
基本事件间是互不相容的。

如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{4, 5\}$

A与C是互不相容的。

A与B是相容的。

用图形表示 即



7、对立事件

事件“非A”,即A不发生,称为A的对立事件。

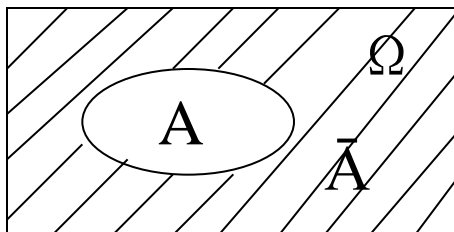
也称为A的逆事件。

它是由样本空间中所有不属于A的样本点组成。

记作 \bar{A}

如 $A=\{1, 2, 3\}$, $\bar{A}=\{4, 5, 6\}$

用图形表示



易见 $A \cap \bar{A} = \varnothing$, $A \cup \bar{A} = \Omega$

$$\bar{\bar{A}} = \Omega - A \quad \bar{\bar{A}} = A$$

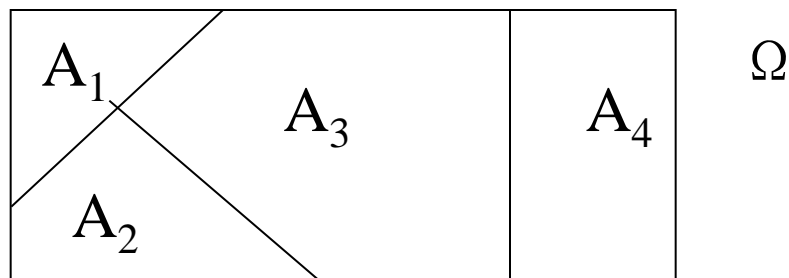
8、完备事件组

若事件 A_1, \dots, A_n 两两互不相容,

并且 $A_1 + \dots + A_n = \Omega$

称 A_1, \dots, A_n 构成一个完备事件组。

用图形表示, 如



A 与 \bar{A} 构成一个完备事件组。

若 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

则 $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 6\}$, $A_3 = \{5\}$

是一个完备事件组。

■ 例1 从一批产品中每次取出一个产品进行检验，事件 A_i 表示第 i 次取到合格品($i=1,2,3$)用事件的运算表示下列事件：三次都取到合格品，三次中至少有一次取到合格品，三次中恰有两次取到合格品，三次中最多有一次取到合格品。

解：三次全部取到合格品： $A_1A_2A_3$

三次中至少有一次取到合格品 $A_1+A_2+A_3$

三次中恰有两次取到合格品

$$A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3$$

三次中至多有一次取得合格品 $\overline{A_1}\overline{A_2} + \overline{A_1}\overline{A_3} + \overline{A_2}\overline{A_3}$

$$\text{或 } \overline{A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1A_2A_3}$$

■ 例2 设 x 表示一个沿数轴做随机运动的质点的位置，试说明下列各事件的关系：

$$A = \{x | x \leq 20\} \quad B = \{x | x > 3\} \quad C = \{x | x < 9\}$$

$$D = \{x | x < -5\} \quad E = \{x | x \geq 9\}$$

解： $A \supset C \supset D, B \supset E$

D 与 B, D 与 E 互不相容

C 与 E 为对应事件。

B 与 C, B 与 A, E 与 A 相容

A 与 C, A 与 D, C 与 D, B 与 E 也是相容的。

符号	集合含义	事件含义
Ω	全集	样本空间，必然事件
Φ	空集	不可能事件
$\omega \in \Omega$	集合的元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A \subset \Omega$	一个集合	一个事件
$A \subset B$	A的元素在B中	A发生导致B发生
$A=B$	集合A与B相等	事件A与B相等
$A \cup B$	A与B的所有元素	A与B至少有一个发生
$A \cap B$	A与B的共同元素	A与B同时发生
\bar{A}	A的补集	A的对立事件
$A-B$	在A中而不在B中的元素	A发生而B不发生
$A \cap B = \Phi$	A与B无公共元素	A与B互斥

§ 2 概率

概率是事件发生可能性的数量指标。

即在多次重复后，某结果出现的比率。

概率应有如下特征：

(1)是事件本身固有的，可通过大量试验来检验。

(2)符合一般常情，可能性大时，概率也大。

一般叙述可能性时用百分比。

以后为方便更多地用0到1之间的小数。

即 $0 \leq P(A) \leq 1$

且 $P(\Omega)=1$ $P(\varphi)=0$

1.2.1 频率与概率



某人向目标射击，
以A表示事件“命中目标”，
 $P(A) = ?$

定义：事件A在n次重复试验中出现 n_A 次，则
比值 n_A/n 称为事件A在n次重复试验中
出现的频率，记为 $f_n(A)$. 即

$$f_n(A) = n_A/n.$$

历史上曾有人做过试验,试图证明抛掷匀质硬币时,出现正反面的机会均等。

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	6019	0.5016
K. Pearson	24000	12012	0.5005

● 频率的性质

(1) $0 \leq f_n(A) \leq 1;$

(2) $f_n(S)=1; \quad f_n(\phi)=0$

(3) 可加性: 若 $AB=\phi$, 则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B).$$

- 定义1.1: 当试验次数 n 增大时, $f_n(A)$ 逐渐趋向一个常数 p 。此常数 p 称为事件 A 的概率,记作 $P(A)$.



1.2.2.古典概型与概率

若某实验**E**满足

1.有限性：样本空间 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$;

2.等可能性：（公认）

$$P(e_1)=P(e_2)=\dots=P(e_n).$$

则称**E**为古典概型也叫等可能概型。

古典概型中的概率:

设事件A中所含样本点个数为 $N(A)$ ，以 $N(\Omega)$ 记样本空间 Ω 中样本点总数，则有

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

$P(A)$ 具有如下性质

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$;

(2) $P(\Omega) = 1$; $P(\phi) = 0$

(3) $AB = \phi$, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

例0:有三个子女的家庭, 设每个孩子是男是女的概率相等, 则至少有一个男孩的概率是多少?

解: 设A—至少有一个男孩, 以H表示某个孩子是男孩

$$N(\Omega) = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}$$

$$N(A) = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT\}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{7}{8}$$

■ 例1 掷一枚硬币，出现正面的概率

解：设硬币是均匀的

只有正、反面两个基本事件。

若A表示出现正面。

则
$$P(A) = \frac{1}{2}$$

■ 例2 随意拨一个六位电话号码，正好找到朋友张某的概率。

解：为简便，每位数字有10种选择。

基本事件总数是 10^6 。

事件A表示找到张某，则A只有一个基本事件。

故
$$P(A) = \frac{1}{10^6} = 0.000001$$

■ 例3 袋中装有5个白球，3个黑球。从中任取两个球，计算取出的两个球都是白球的概率。

解：组成试验的基本事件总数 $n = C_{5+3}^2$

事件A表示取到两个白球，基本事件数 $m = C_5^2$

$$\text{故 } P(A) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14} \approx 0.357$$

另解：若认为取出的两个球有先后次序，

则基本事件总数为 $P_8^2 = 8 \times 7$, A的事件数为 $P_5^2 = 5 \times 4$

$$\text{故 } P(A) = \frac{5 \times 4}{8 \times 7} = \frac{5}{14} \approx 0.357$$

注意，若认为是取出一个，放回去后再取一个。

则基本事件总数是 8×8 , A的事件数为 6×6

$$\text{故 } P(A) = \frac{5 \times 5}{8 \times 8} = \frac{25}{64}$$

■ 例4 福利彩票35选7中特等奖的概率。

解：不论是号码是自选还是机选，

基本事件总数为 C_{35}^7

A表示中特等奖，则A只含一个基本事件，

$$\text{故 } P(A) = \frac{1}{C_{35}^7} = \frac{1}{6724520} \approx 0.000000148$$

若B表示中一等奖(对6个号码)

B的基本事件数为 $C_7^6 C_{28}^1$

$$\text{故 } P(B) = \frac{C_7^6 C_{28}^1}{C_{35}^7} \approx 0.0000292$$

例5一批产品共200个，有6个废品求

①这批产品的废品率；

②任取3个恰有一个是废品的概率；

③任取3个全非废品的概率

• 解： 设A= “废品”

• A_1 = “3个产品中恰有一个是废品”

• A_0 = “3个产品全非废品”

• 则 $N(\Omega)=C_{200}^3$ $N(A_1)=C_6^1 C_{200-6}^2$ $N(A_0)=C_{194}^3$

$$P(A)=\frac{6}{200}=0.03 \quad P(A_1)=\frac{C_6^1 C_{194}^2}{C_{200}^3}=\frac{3 \times 194 \times 193}{100 \times 199 \times 66}=\frac{18721}{218900}$$

$$P(A_0)=\frac{C_{194}^3}{C_{200}^3}=\frac{97 \times 193 \times 4}{25 \times 199 \times 33}=\frac{74884}{164175}$$

例6 两封信随机的向标号为 I、II、III、IV 的4个邮筒投寄，求第2个邮筒恰好被投入1封信的概率

- 解：设A= “第二个邮筒只投入1封信”
- B= “前两个邮筒各有一封信”
- 则根据乘法原理

$$N(\Omega)=4^2$$

$$N(A)=C_2^1 C_3^1 \quad \therefore P(A)=\frac{C_2^1 C_3^1}{4^2}=\frac{2 \times 3}{4 \times 4}=\frac{3}{8}$$

$$N(B)=C_2^1 \times 1 \quad P(B)=\frac{C_2^1 \times 1}{4^2}=\frac{1}{8}$$

关于概率的一些解释。

(1)硬币出现正面的概率为 $\frac{1}{2}$

是指多次试验中正面出现的频率接近 $\frac{1}{2}$

而不是多次试验中正面出现的次数接近一半。

如	总次数100	正面55
---	--------	------

	总次数10000	正面5050
--	----------	--------

(2)概率不会自动“平衡”

硬币连在10个正面，下一次是什么？

打牌手风很顺，该继续还是停止？

连生几个女孩，想生男孩，该继续生吗？

(3)对概率的错误估计

a、你认为自己买彩票会中奖吗？

b、你害怕h1n1吗？

对可怕后果的担忧使人过高估计概率。

c、一对夫妇要去买点东西，该把婴儿单独留在家中？

还是带在汽车上和自己一起去？

因为不可控制而错估概率。

d、你认为自己买彩票会赚钱吗？

过度自信使人低估了风险。

§ 3 概率的加法法则

■ 例1 10件产品中有6个一等品，3个二等品，1个废品。规定一、二等品为合格品。求合格率与一、二等品之间的关系。

解：A、B分别表示一、二等品，A+B表示产品合格

$$P(A) = \frac{6}{10} \quad P(B) = \frac{3}{10}$$

$$P(A+B) = \frac{6+3}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\text{故 } P(A+B) = P(A) + P(B)$$

可以推广为一般的加法法则：

若A与B互斥，则 $P(A+B) = P(A) + P(B)$

可以得到一些重要的推广。

(1)如果n个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥, 则
 $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

(2)若 A_1, A_2, \dots, A_n 构成一个完备事件组, 它们的概率和为
 $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$

特别地, 对立事件的概率之和为1。

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

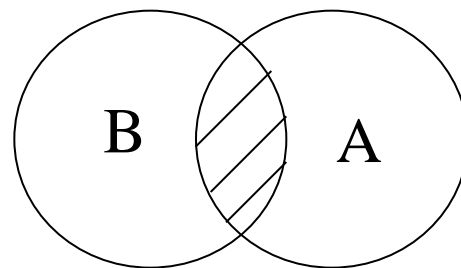
常用形式为 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

(3) 若 $B \supset A$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$

一般有 $P(B - A) = P(B) - P(AB)$

这是因为 $B = (B - A) + AB$

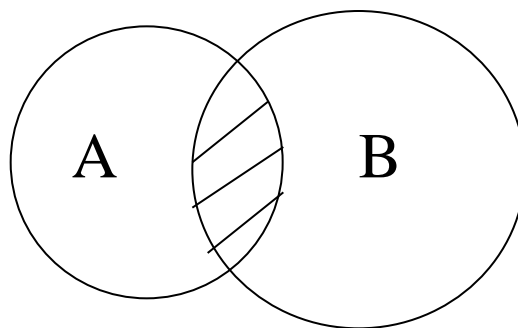
见右图



$$(4)P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

称为广义加法法则

这是因为由图



$$A+B=A+(B-A)$$

由于A与B-A互斥

$$\text{故 } P(A+B)=P(A)+P(B-A)$$

再由(3)得证。

可见，只需 $P(AB)=0$ 加法法则就成立。

若是多个事件之和，公式会变复杂。

$$\begin{aligned}
P(A+B+C) &= P(A+B) + P(C) - P((A+B)C) \\
&= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC+BC) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)
\end{aligned}$$

其中要注意 $(AC)(BC) = ABC$

类似地，可以证明

$$\begin{aligned}
P(A_1+A_2+A_3+A_4) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\
&\quad - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_1A_4) - P(A_2A_3) - P(A_2A_4) - P(A_3A_4) \\
&\quad + P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + P(A_1A_3A_4) + P(A_2A_3A_4) \\
&\quad - P(A_1A_2A_3A_4)
\end{aligned}$$

■ 例2 袋中有大小相同的7个球，4个是白球，3个为黑球。从中一次取出3个，求至少有两个是白球的概率。

解：分别用 A_2 与 A_3 表示抽到两个与三个白球。

A_2 与 A_3 互斥

$$P(A_2) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$$

$$P(A_3) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$$

由加法法则，所求概率为

$$P(A_2 + A_3) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{22}{35}$$

■ 例3 50个产品中有46个合格品与4个废品，从中一次抽取3个，求其中有废品的概率。

解：用 A_i 表示取到 i 个废品。

A_1, A_2, A_3 互斥

$$P(A_1) = \frac{C_4^1 C_{46}^2}{C_{50}^3} = \frac{207}{980}$$

$$P(A_2) = \frac{C_4^2 C_{46}^1}{C_{50}^3} = \frac{276}{19600}$$

$$P(A_3) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{19600}$$

$$\text{故 } P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{221}{980}$$

考虑到 $A_1 + A_2 + A_3 = \overline{A_0}$

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + A_3) &= P(\overline{A_0}) = 1 - P(A_0) \\ &= 1 - \frac{C_{46}^3}{C_{50}^3} = \frac{221}{980} \end{aligned}$$

- 例4 现有黑桃自A至K的13牌。有放回地抽3次。
求(1)三张号码不同的概率。
(2)三张中有相同号码的概率。
(3)三张中至多有两张同号的概率。

解： A_i 表示有正好有*i*张相同。 $i=0, 2, 3$

$$(1) P(A_0) = \frac{13 \times 12 \times 11}{13^3} = \frac{132}{169}$$

$$(2)P(A_2+A_3)=P(A_2)+P(A_3)$$

$$\text{而}P(A_2)=\frac{13\times 1\times 12}{13^3}+\frac{13\times 12\times 1}{13^3}+\frac{13\times 12\times 1}{13^3}=\frac{36}{169}$$

$$P(A_3)=\frac{13}{13^3}=\frac{1}{169}$$

$$\text{故}P(A_2+A_3)=\frac{37}{169}$$

$$\text{或}P(A_2+A_3)=P(\overline{A_0})=1-P(A_0)=\frac{37}{169}$$

$$(3)P(A_0+A_2)=P(A_0)+P(A_2)$$

$$=\frac{132}{169}+\frac{36}{169}=\frac{168}{169}$$

$$\text{或} P(A_0+A_2)=P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=\frac{168}{169}$$

■ 例5 甲盒中有2个红球1个白球，乙盒中有2个白球1个红球。从甲盒中取一球放入乙盒，再从乙盒中取一球放入甲盒。求甲盒成分不变的概率。

解：甲盒成分不变，包括两种情况

从甲盒中取出红球，从乙盒中也取出红球,记为A

从甲盒中取出白球，从乙盒中也取出白球,记为B

A与B互斥

基本事件总数为 $3 \times 4 = 12$

A的基本事件数 $2 \times 2 = 4$

B的基本事件数 $1 \times 3 = 3$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

■ 例6 从1到200中任取一数。求

(1)能被6与8同时整除的概率。

(2)不能被6或8整除的概率。

解：A表示能被6整除。

B表示能被8整除。

$$(1)P(AB) = \frac{8}{200}$$

$$(2)P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$$

$$= 1 - \frac{33}{200} - \frac{25}{200} + \frac{8}{200}$$

$$= \frac{3}{4}$$

■ 例7 你的班级中是否有人有相同的生日？
这一事件的概率有多大？

解：设人的生日在一年365天的每一天是等可能的

A表示n个人组成的班级中有人生日相同。

基本事件总数为 365^n

A的基本事件数不易确定。

\bar{A} 的基本事件数为 $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (366 - n)$

$$\text{故 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (366 - n)}{365^n}$$

当 $n=30$ 时，可求出 $P(A) \approx 0.7$

当 $n=50$ 时，可求出 $P(A) \approx 0.97$

§ 4 条件概率与乘法规则

■ 例1 有100件产品，其中有5件是不合格品，包括3件次品与2件废品，任取一件，求

(1)取到废品的概率。

(2)已知取到的是不合格品，它是废品的概率。

解：(1)取到废品用A表示 $P(A) = \frac{2}{100} = 0.02$

(2)基本事件总数为5 $P(A) = \frac{2}{5} = 0.4$

■ 定义1 在事件B已发生的条件下，事件A发生的概率，称为事件A在给定B下的条件概率，简称为A对B的条件概率，记作 $P(A|B)$

一般设 $P(B)>0$ 。而 $P(A)$ 称为无条件概率。

■ 例2 市场上供应的电风扇中，甲厂产品占70%，乙厂占30%。甲厂产品的合格率是95%，乙厂的合格率是80%。若用事件A, \bar{A} 分别表示甲、乙两厂的产品，B表示产品为合格品，试写出有关事件的概率。

解：由题设

$$P(A)=0.7$$

$$P(\bar{A})=0.3$$

$$P(B|A)=0.95$$

$$P(B|\bar{A})=0.8$$

$$\text{且有 } P(\bar{B} | A) = 0.05$$

$$P(\bar{B} | \bar{A}) = 0.2$$

■ 例3 全年级100名学生中，有男生(事件A)80人，女生20人；来自北京的(事件B)有20人，其中男生12人，女生8人；免修英语(事件C)有40人，其中男生32人，女生8人。试写出 $P(A), P(B), P(C), P(B | A), P(A | B), P(AB), P(C | A), P(\bar{A} | \bar{B}), P(AC)$

解：由题设

$$P(A) = \frac{80}{100} = 0.8 \quad P(B) = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$P(C) = \frac{40}{100} = 0.4 \quad P(B | A) = \frac{12}{80} = 0.15$$

$$P(A | B) = \frac{12}{20} = 0.6 \quad P(AB) = \frac{12}{100} = 0.12$$

$$P(C | A) = \frac{32}{80} = 0.4 \quad P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{12}{80} = 0.15$$

$$P(AC) = \frac{32}{100} = 0.32$$

在例3中可以观察到

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

它是条件概率的计算公式。

要求 $P(A) > 0, P(B) > 0$

定理1 (乘法规则)

若 $P(A) > 0$, 则 $P(AB) = P(A)P(B|A)$

若 $P(B) > 0$, 则 $P(AB) = P(B)P(A|B)$

关于 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的乘法规则是

$$\begin{aligned} & P(A_1 A_2 \dots A_n) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \end{aligned}$$

■ 例4 在例1中求从市场上买一台电风扇是甲厂生产的合格品的概率以及是乙厂生产的合格品的概率。

解：甲厂生产的合格品，即

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B|A) \\ &= 0.7 \times 0.95 = 0.665 \end{aligned}$$

乙厂生产的合格品，即

$$\begin{aligned} P(\bar{A}B) &= P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= 0.3 \times 0.8 = 0.24 \end{aligned}$$

为什么后者不是 $1-P(AB)$?

因为 AB 与 $\bar{A}B$ 不是对立事件。

■ 例5 10个考签中有4个难签，3人参加抽签(不放回)，甲先，乙次，丙最后。求甲抽到难签，甲、乙都抽到难签，甲没抽到难签而乙抽到难签以及甲乙丙都抽到难签的概率。

解：设A、B、C分别表示甲、乙、丙抽到难签。

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(AB) = P(A)P(B | A) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B | \bar{A}) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(A)P(B | A)P(C | AB) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

■ 例6 设100件产品中有5件不合格，任取两件，求两件均合格的概率，要求分为不放回与放回两种情况计算。

解： 设A表示第一件合格，B表示第二件合格。

在不放回时

基本事件总数为 C_{100}^2 ，AB的基本事件数为 C_{95}^2

$$\text{故 } P(AB) = \frac{C_{95}^2}{C_{100}^2} \approx 0.902$$

另一方法

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{95}{100} \times \frac{94}{99} \approx 0.902$$

$$\text{放回时} \quad P(AB) = \frac{95^2}{100^2} = 0.9025$$

$$\text{或 } P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{95}{100} \times \frac{95}{100} = 0.9025$$

■ 例7 10件产品中有4件废品，任取两件。若已知有一个是废品，求另一个也是废品。

错解：在另9个产品中(含3个废品)取到废品的概率 $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

正解：用A表示第一件是废品，B表示第二件是废品

已知有一个是废品，即表示至少有一个废品，就是A+B

若另一个也是废品，则两个都是废品即AB

因 $(A+B)AB=AB$

$$\text{且 } P(A+B) = 1 - P(\overline{A+B}) = 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{3}$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

$$\text{故 } P(AB|(A+B)) = \frac{P((A+B)AB)}{P(A+B)} = \frac{2}{15} \bigg/ \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

■ 例8 设A,B为两个事件, 且 $P(A)=a>0, P(B)=b>0$

求证: $P(A|B) \geq \frac{a+b-1}{b}$

证: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

由于 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

故 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B)$

又因 $P(A+B) \leq 1$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A+B)}{P(B)}$$

$$\geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)} = \frac{a+b-1}{b}$$

全概率公式与贝叶斯公式

- 例1 市场上供应的灯泡中，甲厂产品占70%，乙厂占30%，甲厂产品的合格率是95%，乙厂的合格率是80%。若用事件A， \bar{A} 分别表示甲、乙两厂的产品，B表示产品为合格品。求市场上买一个灯泡的合格率，及买到合格灯泡是甲厂生产的概率。

解： $B=AB+\bar{A}B$ 且 AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容。

$$P(B)=P(AB+\bar{A}B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$$

$$=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=0.7 \times 0.95 + 0.3 \times 0.8 = 0.905$$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0.7 \times 0.95}{0.7 \times 0.95 + 0.3 \times 0.8} \approx 0.735 \end{aligned}$$

定理1 (全概率公式)若事件 A_1, A_2, \dots 构成一个完备事件组并且都具有正概率, 则对任何一个事件 B , 有

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B | A_i)$$

证: A_1, A_2, \dots 两两互斥, 故 A_1B, A_2B, \dots 两两互斥

$$\text{且 } B = B\Omega = B\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i A_i B$$

由加法法则

$$P(B) = \sum_i P(A_i B)$$

再由乘法法则

$$P(A_i B) = P(A_i)P(B | A_i)$$

$$\text{故 } P(B) = \sum_i P(A_i)P(B | A_i)$$

■ 定理2 (贝叶斯公式) 若事件 A_1, A_2, \dots 构成一个完备事件组, 且都具有正概率, 则对任何一个概率不为零的事件 B , 有

$$P(A_m|B) = \frac{P(A_m)P(B|A_m)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}$$

证:
$$P(A_m|B) = \frac{P(A_mB)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_m)P(B|A_m)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}$$

各原因下条件概率已知 $\xrightarrow{\text{全概率}}$ 求事件发生概率

求是某种原因造成得概率 $\xleftarrow{\text{贝叶斯}}$ 事件已发生

■ 例2 设5支枪中有2支未经试射校正，3支已校正。
一射手用校正过的枪射击，中靶率为0.9，用未校正过的枪射击，中靶率为0.4。

(1)该射手任取一支枪射击，中靶的概率是多少？

(2)若任取一支枪射击，结果未中靶，求该枪未校正的概率。

解：设A表示枪已校正，B表示射击中靶

$$\text{则 } P(A) = \frac{3}{5}, P(\bar{A}) = \frac{2}{5} \quad P(B|A) = 0.9$$

$$P(\bar{B}|A) = 0.1 \quad P(B|\bar{A}) = 0.4 \quad P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.6$$

$$\begin{aligned} (1) P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= \frac{3}{5} \times 0.9 + \frac{2}{5} \times 0.4 = 0.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) P(\bar{A}|\bar{B}) &= \frac{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) + P(A)P(\bar{B}|A)} = \frac{\frac{2}{5} \times 0.6}{\frac{2}{5} \times 0.6 + \frac{3}{5} \times 0.1} \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

- 例3 有三个同样的箱子，A箱中有4个黑球1个白球，B箱中有3个黑球3个白球，C箱中有3个黑球5个白球。现任取一箱，再从中任取一球，求
- (1)此球是白球的概率
 - (2)若取出的是白球，求它取自B箱的概率。

解：用A、B、C表示A、B、C三个箱子取球
用D表示取出的是白球。

则A、B、C是完备事件组。

$$\text{且 } P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(D | A) = \frac{1}{5} \quad P(D | B) = \frac{1}{2} \quad P(D | C) = \frac{5}{8}$$

$$(1)P(D) = P(A)P(D \mid A) + P(B)P(D \mid B) + P(C)P(D \mid C)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{8}$$

$$= \frac{53}{120} \approx 0.442$$

$$(2)P(B \mid D) = \frac{P(B)P(D \mid B)}{P(A)P(D \mid A) + P(B)P(D \mid B) + P(C)P(D \mid C)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{8}}$$

$$= \frac{20}{53} \approx 0.378$$

■ 例4 (抽签的公正性) 设10支签中有4支难签。甲、乙、丙依次不放回的抽取。求各人抽到难签的概率。

解：分别用A、B、C表示甲、乙、丙抽到难签。

$$P(A) = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{36}{90} = 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(AB)P(C|AB) + P(A\bar{B})P(C|A\bar{B}) + P(\bar{A}B)P(C|\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B})P(C|\bar{A}\bar{B}) \\ &= P(A)P(B|A)P(C|AB) + P(A)P(\bar{B}|A)P(C|A\bar{B}) \\ &\quad + P(\bar{A})P(B|\bar{A})P(C|\bar{A}B) + P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})P(C|\bar{A}\bar{B}) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \\ &= \frac{288}{720} = 0.4 \end{aligned}$$

■ 例5 设验血诊断某种疾病的误诊率仅为5%，即若用A表示验血阳性，B表示受验者患病，则

$P(\bar{A} | B) = P(A | \bar{B}) = 5\%$ 。若受检人群中仅有0.5%患此病，即 $P(B) = 0.005$ 。求一个验血阳性的人确患此病的概率。

解：
$$P(B | A) = \frac{P(B)P(A | B)}{P(B)P(A | B) + P(\bar{B})P(A | \bar{B})}$$
$$= \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.05}$$
$$\approx 0.087$$

若有10000人受检，患病者仅50人，其中验血阳性约47.5人
而9950健康人中，验血阳性者为 $9950 \times 0.05 = 497.5$ 人

§ 5 独立试验概型

(一)事件的独立性

■ 定义1 若事件发生的可能性不受事件B发生与否的影响, 即 $P(A|B)=P(A)$, 则称事件A独立于事件B。

$$\text{若} \quad P(A) = P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$\text{则} \quad P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B | A)$$

故若A独立于B, 则B也独立于A, 称事件A与事件B相互独立。

■ 定义2 若n ($n>2$)个事件 A_1, \dots, A_n 中任何一个事件发生的可能性都不受其它一个或几个事件发生与否的影响, 称 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立。

关于独立性有如下性质:

(1)事件A与B独立的充分必要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$

证：必要性

若A与B中有一个事件概率为零，结论成立。

设A与B的概率都不为零，由独立性

$$P(B|A)=P(B)$$

而由乘法法则可得

$$P(AB)=P(A)P(B|A) =P(A)P(B)$$

充分性

设 $P(B)>0$,则

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

即A与B独立。

(2) 若事件A与B独立，则A与 \bar{B} , \bar{A} 与B, \bar{A} 与 \bar{B} 中的每一对事件都相互独立。

证： $P(A\bar{B}) = P(A - AB)$

$$= P(A) - P(AB)$$
$$= P(A) - P(A)P(B)$$
$$= P(A)(1 - P(B))$$
$$= P(A)P(\bar{B})$$

由(1)可知，A与 \bar{B} 独立。

类似可证其它两对事件独立。

(3)若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则有
 $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$

证: $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$

而 $P(A_2|A_1) = P(A_2), \dots, P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) = P(A_n)$

故 $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$

(4)若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则有

$P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \dots P(\overline{A_n})$

证: 由于 A_1, \dots, A_n 对立, $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$ 也对立

$$\begin{aligned} P(A_1 + \dots + A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 + \dots + A_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \dots \overline{A_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1}) \dots P(\overline{A_n}) \end{aligned}$$

■ 例1 设甲、乙两射手独立地射击同一目标，他们击中目标的概率分别为0.9和0.8。求一次射击中，目标被击中的概率。

解：分别用A,B表示甲、乙击中目标。

目标被击中，即至少有一人击中，即A+B

A与B独立。故

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 = 0.98 \end{aligned}$$

或由性质(4)

$$\begin{aligned} P(A+B) &= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) \\ &= 1 - 0.1 \times 0.2 = 0.98 \end{aligned}$$

- 例2 一名士兵用步枪射击飞机，命中率为0.004。求：
- (1)若250名士兵同时射击，飞机被击中的概率。
 - (2)多少名士兵同时射击，才能使飞机被击中的概率达到99%？

解：用 A_i 表示第 i 名士兵击中飞机， $P(A_i)=0.004$

$$\begin{aligned}(1) P(A_1 + \dots + A_{250}) &= 1 - P(\bar{A}_1) \dots P(\bar{A}_{250}) \\ &= 1 - 0.996^{250} \approx 0.63\end{aligned}$$

(2)设要 n 名士兵同时射击

$$\begin{aligned}P(A_1 + \dots + A_n) &= 1 - P(\bar{A}_1) \dots P(\bar{A}_n) \\ &= 1 - 0.996^n = 0.99\end{aligned}$$

$$\text{即 } 0.996^n = 0.01$$

$$\text{故 } n = \frac{\lg 0.01}{\lg 0.996} \approx 1150$$

■ 例3 甲、乙、丙3部机床独立工作，由一个工人照管，某段时间内它们不需要工人照管的概率分别为0.9，0.8及0.85。求在这段时间内有机床需要工人照管的概率以及机床因无人照管而停工的概率。

解：用A、B、C分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙不需要照管。

则A、B、C相互独立，且

$$P(A)=0.9 \quad P(B)=0.8 \quad P(C)=0.85$$

$$\begin{aligned} P(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) &= P(\overline{ABC}) = 1 - P(ABC) = 1 - P(A)P(B)P(C) \\ &= 1 - 0.9 \times 0.8 \times 0.85 = 0.388 \end{aligned}$$

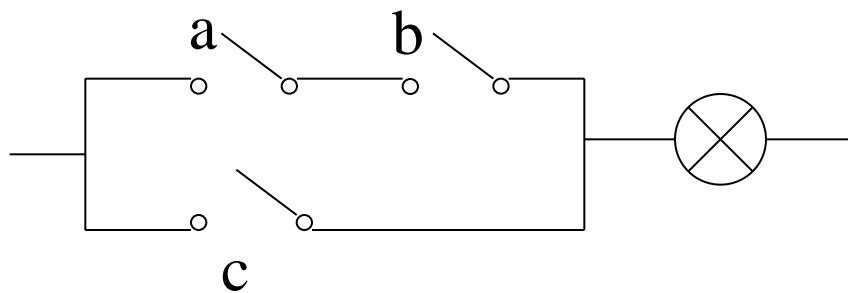
$$P(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC})$$

$$= P(\overline{AB}) + P(\overline{BC}) + P(\overline{AC}) - 2P(\overline{ABC})$$

$$= 0.1 \times 0.2 + 0.2 \times 0.15 + 0.1 \times 0.15 - 2 \times 0.1 \times 0.2 \times 0.15$$

$$= 0.059$$

■例4 图中开关a、b、c开或关的概率都是0.5，且各开关是否关闭相互独立。求灯亮的概率以及若已见灯亮，开关a与b同时关闭的概率。



解：令A、B、C分别表示开关a、b、c关闭，D表示灯亮

$$\begin{aligned} P(D) &= P(AB+C) = P(AB) + P(C) - P(ABC) \\ &= P(A)P(B) + P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= 0.5 \times 0.5 + 0.5 - 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \\ &= 0.625 \end{aligned}$$

由于 $AB \subset D$, $ABD = AB$

$$P(AB | D) = \frac{P(ABD)}{P(D)} = \frac{P(AB)}{P(D)} = \frac{0.5 \times 0.5}{0.625} = 0.4$$

■ 例5 甲、乙、丙三人独立射击一个目标，命中率分别为0.4，0.5，0.7，若只有一人击中，目标被摧毁的概率是0.2，若二人击中，则目标被摧毁的概率是0.6，若三人都击中，目标一定被摧毁。若目标被摧毁，求它是一人摧毁的概率。

解：用 A_i 表示有 i 个人击中目标， $i=0,1,2,3$

用 B 表示目标被摧毁。

$$P(B|A_0)=0 \quad P(B|A_1)=0.2 \quad P(B|A_2)=0.6 \quad P(B|A_3)=1$$

$$P(A_0)=0.6 \times 0.5 \times 0.3=0.09$$

$$P(A_1)=0.4 \times 0.5 \times 0.3+0.6 \times 0.5 \times 0.3+0.6 \times 0.5 \times 0.7=0.36$$

$$P(A_2)=0.4 \times 0.5 \times 0.3+0.4 \times 0.5 \times 0.7+0.6 \times 0.5 \times 0.7=0.41$$

$$P(A_3)=0.4 \times 0.5 \times 0.7=0.14$$

$$P(B)=\sum_{i=0}^3 P(A_i)P(B|A_i)=0.458$$

(二)独立试验序列概型

进行 n 次试验，若任何一次试验中各结果发生的可能性都不受其它各次试验结果发生情况的影响，则称这 n 次试验是相互独立的。

在同样条件下重复进行试验的数学模型称为独立试验序列概型。

若在每次试验中只关心某事件 A 发生或不发生，且每次试验结果与其它各次试验结果无关，即在每次试验中事件 A 发生的概率都是 $p(0 < p < 1)$ 。

这样的 n 次重复试验称为 n 重贝努里试验。

■ 例6 一批产品的废品率为 p , ($0 < p < 1$) 重复抽取 n 次, 求有 k 次取到废品的概率。

解: 设所求事件的概率为 $P(B)$, 事件 B 由下列 m 个互不相容的事件组成:

$$B_1 = (\text{废}, \dots, \text{废}, \text{正}, \dots, \text{正})$$

$$B_2 = (\text{废}, \dots, \text{废}, \text{正}, \text{废}, \text{正}, \dots, \text{正})$$

$$B_m = (\text{正}, \dots, \text{正}, \text{废}, \dots, \text{废})$$

$$P(B_1) = P(B_2) = \dots = P(B_m) = p^k(1-p)^{n-k}$$

而 $m = C_n^k$, 故

$$P(B) = \sum_{i=1}^m P(B_i) = mP(B_1) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

一般地，有如下的定理：

■ 定理1 (贝努里定理) 设一次试验中事件A发生的概率为 p ，($0 < p < 1$)，则 n 重贝努里试验中，事件A恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)$ 为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, (k = 0, 1, \dots, n)$$

其中 $q = 1 - p$

■ 例7 一条自动生产线上产品的一级品率为0.6，现在检查了10件，求至少有两件一级品的概率。

解：设B表示至少有两件一级品

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=2}^{10} P_{10}(k) = 1 - P_{10}(0) - P_{10}(1) \\ &= 1 - 0.4^{10} - C_{10}^1 \times 0.6 \times 0.4^9 \approx 0.998 \end{aligned}$$

■ 例8 某药物对某病的治愈率为0.8，求10位服药的病人中至少有6人治愈的概率。

解：设A表示至少有6人治愈。

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=6}^{10} P_{10}(k) \\ &= P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) \\ &= C_{10}^6 0.8^6 0.2^4 + C_{10}^7 0.8^7 0.2^3 + C_{10}^8 0.8^8 0.2^2 + C_{10}^9 0.8^9 0.2 + 0.8^{10} \\ &\approx 0.97 \end{aligned}$$

而正好有8人治愈的概率为

$$P_{10}(8) = C_{10}^8 0.8^8 0.2^2 = 0.302$$

■ 例9 在四次独立试验中，A至少出现一次的概率为0.59，求A至多出现一次的概率。

解：设在一次试验中A出现的概率为p

则A至少出现一次的概率为

$$\sum_{k=1}^4 P_4(k) = 1 - P_4(0) = 1 - (1-p)^4 = 0.59$$

故 $(1-p)^4 = 0.41$

$$1-p = 0.8$$

$$p = 0.2$$

A至多出现一次的概率为：

$$\begin{aligned} P_4(0) + P_4(1) &= (1-p)^4 + C_4^1 p(1-p)^3 \\ &= 0.8^4 + C_4^1 \times 0.2 \times 0.8^3 = 0.82 \end{aligned}$$

■ 例10 (分赌注问题)甲、乙各下注a元，以猜硬币方式赌博，五局三胜，胜者获得全部赌注。若甲赢得第一局后，赌博被迫中止，赌注该如何分？

解法一：每局双方获胜的可能性均为 $\frac{1}{2}$ 。

应按照比赛双方最终获胜的可能性分赌注。

即在余下的四局中甲赢得2局以上即可。

甲最终获胜的概率为

$$P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)$$

$$=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{16}$$

乙胜的概率为 $\frac{5}{16}$ ，赌注应按11：5的比例分配。

解法二：

一般情况下不必比到第五局，有一方赢得三局即中止。

甲方在第三局结束赌博获得胜利的概率为

$$P(B_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

甲方在第四局结束赌博获胜的概率为

$$P(B_4) = \left(C_2^1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

甲方在第五局结束赌博获胜的概率为

$$P(B_5) = \left(C_3^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

故甲方最终获胜的概率为

$$P(B_3+B_4+B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{11}{16}$$

赌注应按11：5的比例分配。

■ 例11 (赛制的选择)在体育比赛中，若甲选手对乙选手的胜率是0.6，那么甲在五局三胜与三局两胜这两种赛制中，选择哪个对自己更有利。

解：在五局三胜赛制中，甲获胜的概率为

$$\begin{aligned} & P_5(3)+P_5(4)+P_5(5) \\ &= C_5^3 0.6^3 0.4^2 + C_5^4 0.6^4 0.4 + 0.6^5 = 0.6826 \end{aligned}$$

在三局两胜赛制中，甲获胜的概率为

$$\begin{aligned} & P_3(2)+P_3(3) \\ &= C_3^2 0.6^2 0.4 + 0.6^3 = 0.648 \end{aligned}$$

甲应选择五局三胜制。