

1.4 条件概率与乘法法则

先看1.3中的例1

100个产品中有60个一等品, 30个二等品, 10个废品. 规定一,二等品都是合格品.

试验: 从100个产品中任抽一个

假设: A, B 为抽到的为一,二等品, C 为抽到的是合格品, 则 $C=A+B$

则一等品率为 $P(A)=60/100$, 二等品率为 $P(B)=30/100$. 合格率为 $P(C)=90/100$

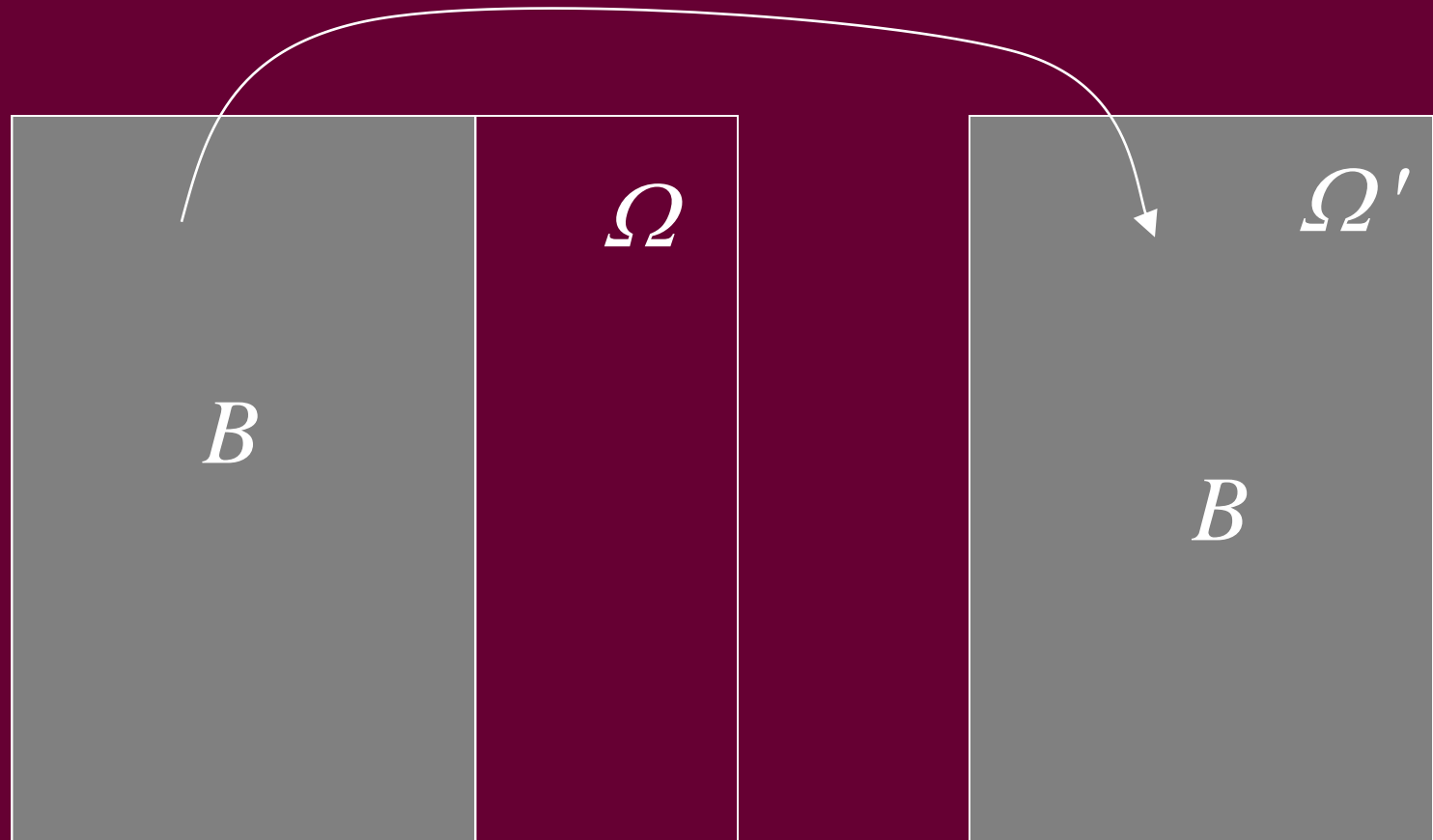
如果改变试验为: 从合格品中任抽一件, 则合格品中的一等品率为 $P(A|C)=60/90$.

定义1.3

在事件 B 已经发生的条件下, 事件 A 发生的概率, 称为事件 A 在给定 B 下的条件概率, 简称为 A 对 B 的条件概率, 记作 $P(A|B)$. 相应地, 把 $P(A)$ 称为无条件概率. 这里, 只研究作为条件的事件 B 具有正概率即 $P(B)>0$ 的情况.

条件概率意味着样本空间的压缩

可以认为是基本事件的减少而导致的试验. 以事件 B 为条件的条件概率, 意味着在试验中将 B 提升为必然事件.



例1 市场上供应的灯泡中, 甲厂的产品占70%, 乙厂占30%, 甲厂产品的合格率是95%, 乙厂的合格率是80%, 若用事件 A, \bar{A} 分别表示甲乙两厂的产品, B 表示产品为合格品, 试写出有关事件的概率和条件概率

解 依题意

$$P(A) = 70\% \quad P(\bar{A}) = 30\%$$

$$P(B | A) = 95\% \quad P(B | \bar{A}) = 80\%$$

$$P(\bar{B} | A) = 5\% \quad P(\bar{B} | \bar{A}) = 20\%$$

注: 在解题过程中常见的错误是将条件概率写成无条件概率!

例2 全年级100名学生中, 有男生(以事件 A 表示)80人, 女生20人, 来自北京的(以事件 B 表示)有20人, 其中男生12人, 女生8人, 免修英语的(用事件 C 表示)40人中有32名男生, 8名女生,

$$\text{则有 } P(A)=80/100=0.8 \quad P(B)=20/100=0.2$$

$$P(B|A)=12/80=0.15 \quad P(A|B)=12/20=0.6$$

$$P(AB)=12/100=0.12 \quad P(C)=40/100=0.4$$

$$P(C|A)=32/80 \quad P(\bar{A}|\bar{B})=12/80=0.15$$

$$P(AC)=32/100=0.32$$

$$\text{可以看出 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

因此, 在概率论中把某一事件 B 在给定另一事件 $A(P(A)>0)$ 下的条件概率 $P(B|A)$ 定义为

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

乘法法则 两个事件 A, B 之交的概率等于其中任一个事件(其概率不为零)的概率乘以另一个事件在已知前一个事件发生下的条件概率, 即

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \quad (\text{若 } P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \quad (\text{若 } P(B)>0)$$

相应地, 关于 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的乘法公式为:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \dots \\ \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

在证明此式时, 首先将事件 $A_1 A_2 \dots A_n$ 分为两个事件 A_1 和 $A_2 \dots A_n$ 然后套用乘法公式得

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2 \dots A_n | A_1)$$

然后再将 $P(A_2 \dots A_n | A_1)$ 中的 $A_2 \dots A_n$ 分为两个事件 A_2 和 $A_3 \dots A_n$, 这样依此类推就能够得到上式.

无论是两个事件的乘法公式还是多个事件的乘法公式都是非常重要的, 需要在解题前背下来, 它们可以用来解许多概率论的较难的题

在通常的情况下, 一事件 A 条件下的对另一事件 B 的条件概率 $P(A|B)$ 通常是好算的, 而两事件的积的概率 $P(AB)$ 往往是不好算的.

这是因为条件概率是在条件受控情况下的概率, 能够在一个较"小"的样本空间中讨论问题, 相对容易一些.

例4 10个考签中有4个难签, 3人参加抽签(不放回), 甲先, 乙次, 丙最后, 求甲抽到难签, 甲, 乙都抽到难签, 甲没抽到难签而乙抽到难签以及甲, 乙, 丙都抽到难签的概率.

解 设事件 A, B, C 分别表示甲乙丙各抽到难签

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{10}$$

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$$

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$$

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{720}$$

事件上,即使这十张难签由10个人抽去,因为其中有4张难签,因此每个人抽到难签的概率都是 $4/10$,与他抽的次序无关.

正如十万张彩票如果只有10个特等奖,则被十万个人抽去,无论次序如何,每个人的中奖概率都是十万分之十,即万分之一.

这在概率论中叫抽签原理.

这类问题经常在研究生的入学考试题中出现,如果知道,就能够很快回答,否则就有可能出错.