## 两向量的数量积：

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个给定的向量，它们的数量积定义为：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$，其中 $\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

在空间直角坐标系下，若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

### 两向量的向量积：

两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个新的向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其模为 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 且垂直于 $\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 可构成右手系.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

(3) 向量积满足下列运算规律：

①$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(2) 向量积提供了判断两向量是否平行(共线)的依据：

$$\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2};$$

### 向量的混合积：

三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合乘法运算 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

在空间直角坐标系下，设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$，

$$\text{则}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

#### 向量之间的几何关系：

(1) 两向量平行(共线)

$$\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

要证明不重合的三点 $A$、$B$、$C$ 共线，只需证明 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=0$.

(2) 两向量垂直

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

(3) 三向量共面

$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在 $\lambda,u$，使 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{b}\Leftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$

$$=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=0.$$

要证明不重合的四个点 $A$、$B$、$C$、$D$ 共面(或三线共面)，只需证明 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

### 方向角与方向余弦：

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标轴的三个夹角 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$，故

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\boldsymbol{e}_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

### 空间曲面方程：

(1) 一般方程 $F(x,y,z)=0$；

(2) 显式方程 $z=f(x,y)$；

(3) 参数方程 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v),(u,v)\in D,\text{其中}\\z=z(u,v)\end{cases}$

$D$ 为 $uv$ 平面上某一区域.

### 旋转曲面方程：

设 $C$：$f(y,z)=0$ 为 $yOz$ 平面上的曲线，则

(1) $C$ 绕 $z$ 轴旋转所得的曲面为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0;$$

(2) $C$ 绕 $y$ 轴旋转所得的曲面为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

旋转曲面由母线和旋转轴确定.

求旋转曲面方程时，平面曲线绕某坐标轴旋转，则该坐标轴对应的变量不变，而曲线方程中另一变量改写成该变量与第三变量平方和的正负平方根，例如：$L$：$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$. 曲线 $L$ 绕 $x$ 轴旋转所形成的旋转曲面的方程为：$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

### 柱面方程：

(1) 母线平行于 $z$ 轴的柱面方程为 $F(x,y)=0$；

(2) 母线平行于 $x$ 轴的柱面方程为 $G(y,z)=0$；

(3) 母线平行于 $y$ 轴的柱面方程为 $H(x,z)=0$.

当曲面方程中缺少一个变量时，则曲面为柱面.

如 $F(x,y)=0$，变量 $z$ 未出现，该曲面表示由准线 $\begin{cases}F(x,y)=0\\z=0\end{cases}$ 生成，母线平行于 $z$ 轴的柱面.

柱面方程须注意准线与母线两个要素.

### 点到平面的距离：

设给定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及平面 $\pi$：$Ax+By+Cz+D=0$. 则 $P_0$ 到 $\pi$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

### 直线方程：

(1) 一般方程(交面式方程)

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

此方程的意义是将直线表示为两个平面的交线，直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$. 方程的一般式与对称式可以互相转化.

(2) 对称式方程(点向式方程)

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

其中 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上给定的已知点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量.

若用 $M(x,y,z)$ 表示直线上一动点，点向式方程可表示为向量形式 $\overrightarrow{PM}=\lambda\boldsymbol{s},\lambda\in\mathbf{R}$.

(3) 参数式方程

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}\quad t\in\mathbf{R}$$

其中 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的定点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量.

(4) 两点式方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

### 两直线间的关系：

设直线 $l_1$：$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$

$l_2$：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$

(1) 两直线的夹角

两直线的方向向量 $\boldsymbol{s}_1$、$\boldsymbol{s}_2$ 之间的夹角(取锐角为两直线的夹角 $\theta$)

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\cdot|\boldsymbol{s}_2|}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$$

(2) 两直线平行(含重合)

$$l_1\ /\!/\ l_2\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\ /\!/\ \boldsymbol{s}_2$$

(3) 两直线垂直

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2$$

(4) 两直线共面

若 $P_1$、$P_2$ 分别为直线 $l_1$、$l_2$ 的两点，则 $l_1$、$l_2$ 共面 $\Leftrightarrow\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=0$

(5) 两直线异面

$$l_1、l_2\text{ 异面}\Leftrightarrow\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\neq0$$

### 距离公式：

(1) 点到直线的距离

设给定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及直线 $l$：

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

则 $P_0$ 到直线 $l$ 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_0P_1}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$.

#### 两平面间的关系：

给定 $\pi_1$：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，

$\pi_2$：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

(1) 两平面的夹角

两平面的夹角即两平面法向量 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 的夹角(取锐角).

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

### 空间曲线：

| 名　称 | 方　程 | 说　明 |
|---|---|---|
| 一般方程 | $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ | 两曲面的交线 |
| 参数方程 | $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta\\z=z(t)\end{cases}$ | 曲线上的点随参数因子改变而改变 |
| 投影曲线方程 | 由 $L$：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$ 此曲线即为 $L$ 在 $xOy$ 面上的投影曲线 | 同理可得曲线 $L$ 在 $xOz$、$yOz$ 面上的投影曲线 |

二次曲面的标准方程

- 球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- 圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=z^2$
- 椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2,(a\neq b)$
- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-z$
- 双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$
- 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



#### 直线与平面间的关系：

给定平面 $\pi$：$Ax+By+Cz+D=0$ 和直线 $l$：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

(1) 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线 $l$ 与其在平面 $\pi$ 上的投影直线 $l'$ 的夹角(取锐角)为直线与平面的夹角 $\theta$.

$$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

$$(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$$

(2) 直线与平面垂直

$$l\perp\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\ /\!/\ \boldsymbol{n}\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

(3) 直线与平面平行

$l\ /\!/\ n\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$.

(4) 直线在平面上

$l$ 在 $\pi$ 上 $\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

(5) 直线与平面相交

$l$ 与 $\pi$ 相交 $\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}\neq0\Leftrightarrow Am+Bn+Cp\neq0$.

此时，直线 $l$ 与平面 $\pi$ 有唯一交点.

#### 平面的方程：

(1) 点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

其中，$P(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上给定的已知点，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量.

若 $M(x,y,z)$ 表示平面上任一动点，则点法式可以写成向量形式：$\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}=0$

(2) 一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量，$D=0$ 时平面过原点.

若方程中某个坐标不出现，则平面就平行于该坐标轴. 如平面 $Ax+Cz+D=0(B=0)$ 平行于 $y$ 轴.

若 $B=D=0$，则平面过 $y$ 轴，方程为 $Ax+Cz=0$. 只需知另外一点就可确定方程. 在求解平面问题时，要注意利用方程系数的特殊性简化运算.

(3) 截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

其中 $a$、$b$、$c$ 分别为平面在 $x$、$y$、$z$ 轴上的截距. 由于要求 $a$、$b$、$c$ 非零，故平面并不总能表示成这种形式.

偏导数连续 $\Longrightarrow$ 可微分 $\Longrightarrow$ 连续 $\Longrightarrow$ 极限存在

偏导数存在

**复合函数的中间变量均为一元函数的情形：**

如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 $t$ 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 $(u,v)$ 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f(\varphi(t)、\psi(t))$ 在点 $t$ 可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

由于 $z$ 为 $t$ 的一元函数，故常称 $z$ 对 $t$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 为全导数.

**复合函数的中间变量均为多元函数的情形：**

如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 都在点 $(x,y)$ 具有对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 $(u,v)$ 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 $(x,y)$ 的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

**复合函数的中间变量既有一元函数，又有多元函数的情形：**

如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 具有对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数，函数 $v=\psi(y)$ 在点 $y$ 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 $(u,v)$ 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(y))$ 在点 $(x,y)$ 的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

由于 $v=\psi(y)$ 为一元函数，故使用导数符号 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，而不能使用偏导数符号.

特殊情形：复合函数的某些中间变量本身又是复合函数的自变量. 如 $z=f(u(x,y),x,y)$ 具有连续偏导数，而 $u=u(x,y)$ 具有偏导数，则有：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

注意上面两式中 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是将 $f(u,x,y)$ 中的 $u$ 看作不变，对第二个位置变元 $x$ 的偏导数. 它与 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 的含义不同. 同样，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 是 $f(u,x,y)$ 对第三个位置变元 $y$ 的偏导数，与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 不同.

**二元函数的偏导数：**

设二元函数 $z=f(x,y)$.

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则记以 $f'_x(x_0,y_0)$，或 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left.z'_x\right|_{(x_0,y_0)}$ 称为 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处关于 $x$ 的偏导数.

同理，若 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在，则记以 $f_y(x_0,y_0)$，或 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left.z_y\right|_{(x_0,y_0)}$ 称为 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处关于 $y$ 的偏导数.

**定理**：如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 $D$ 内连续，那么在该区域内，这两个二阶混合偏导数必相等.

## 二元函数的可微性与全微分的定义：

设 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处有全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

若 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

$$(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0)$$

其中 $A,B$ 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 只与 $x_0,y_0$ 有关，则称 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处可微，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处的全微分，记以 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left.\mathrm{d}f\right|_{(x_0,y_0)}$

**二元函数的全微分公式：**

当 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处可微时

则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$

$=f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$

这里规定自变量微分 $\mathrm{d}x=\Delta x,\mathrm{d}y=\Delta y$.

一般地 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}f(x,y)=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$

**二元函数全微分的几何意义：**

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的全微分 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(x_0,y_0)}$ 在几何上表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处切平面上的点的竖坐标的增量.

**定理**：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微分，则该函数在该点处必连续.

**全微分存在的必要条件：**

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微分，则该函数在点 $(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

**全微分存在的充分条件：**

如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $(x,y)$ 连续，则函数在该点可微分，且 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

**二元函数偏导数的几何意义：**

$f'_x(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的截线在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线关于 $x$ 轴的斜率；$f'_y(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的截线在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线关于 $y$ 轴的斜率.

**隐函数存在定理** 1：

设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某一领域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

**隐函数存在定理** 2：

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的某一领域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

**隐函数存在定理** 3：

设 $F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比式）：

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零，则方程组 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 在点 $(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

**方向导数**：函数的增量 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 与 $PP'$ 两点间的距离 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 之比值，当 $P'$ 沿着 $\boldsymbol{l}$ 趋于 $P$ 时，如果此比值的极限存在（如图 9-2），则称这极限为函数在点 $P$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数，记为

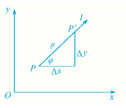


图 9-2

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}.$$

特别地，函数 $f(x,y)$ 在点 $P$ 沿着 $x$ 轴正向 $\boldsymbol{e}_1=\{1,0\}$、$y$ 轴正向 $\boldsymbol{e}_2=\{0,1\}$ 的方向导数分别为 $f_x$，$f_y$；沿着 $x$ 轴负向、$y$ 轴负向的方向导数是 $-f_x$，$-f_y$.

对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，它在空间一点 $P(x,y,z)$ 沿着方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数，可定义为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho},$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$.

**定理**：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 是可微分的，那么函数在该点沿任意方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,$$

其中 $\varphi$ 为 $x$ 轴到方向 $\boldsymbol{l}$ 的转角.

如果函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 是可微分的，那么函数在该点沿任意方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向角为 $\alpha,\beta,\gamma$.

**方向导数的几何意义：**

函数 $z=f(x,y)$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}$ 的几何意义为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率.

**梯度**：设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 $D$ 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P(x,y)\in D$，都可定出一个向量 $\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$，这向量称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的梯度，记为

$$\mathbf{grad}\,f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

函数在某点的梯度的方向与取得最大方向导数的方向一致，它的模为方向导数的最大值，即

$$|\mathbf{grad}\,f(x,y)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

设函数 $u=f(x,y,z)$ 在空间区域 $G$ 内具有一阶连续偏导致，则对于每一点 $P(x,y,z)\in G$，梯度

$$\mathbf{grad}\,f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

**方向导数与梯度的关系：**

函数的梯度和方向导数是相关联的两个概念. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分，$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与方向 $\boldsymbol{l}$ 同向的单位向量，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$=\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e}_l$$

$$=|\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)|\cos\theta$$

其中 $\theta$ 为 $\boldsymbol{e}_l$ 与 $\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)$ 的夹角.

这一关系式表明函数在一点的梯度与函数在这点的方向导数间的关系. 特别是，当向量 $\boldsymbol{e}_l$ 与 $\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)$ 的夹角 $\theta=0$，即沿梯度方向时，方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}$ 取得最大值，且最大值为梯度的模 $|\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)|$. 也就是说，函数在一点的梯度是个向量，它的方向是函数在这点的方向导数取得最大值的方向. 它的模就等于方向导数的最大值. 这就是函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处梯度的物理意义.

**空间曲线的切线与法平面：**

(1) 参数方程情形

设空间曲线 $\varGamma$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$ 且 $x(t),y(t),z(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上都可导，$t_0$ 对应曲线 $\varGamma$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$ 不全为零，则曲线 $\varGamma$ 在点 $M_0$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)),$$

切线方程为 $\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$，

法平面方程为

$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$

(2) 一般方程情形

设空间曲线 $\varGamma$ 的参数方程为

$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲线 $\varGamma$ 上一点，如果 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ 在点 $M_0$ 处不全为零，则曲线 $\varGamma$ 在点 $M_0$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)_{M_0},$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{M_0}},$$

法平面方程为 $\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{M_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{M_0}(z-z_0)=0.$

**曲面的切平面与法线：**

(1) 隐式方程情形

设曲面 $\Sigma$ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 $\Sigma$ 上一点，$F(x,y,z)$ 在点 $M_0$ 处偏导数连续且不全为零，则曲面 $\Sigma$ 在点 $M_0$ 处的法向量为

$\boldsymbol{n}=\pm(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$，

切平面方程为

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$，

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

(2) 显式方程情形

曲面方程为 $z=f(x,y)$，在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处，平面的方程为

$-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$，

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

**极值的必要条件**：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处具有偏导数，且在点 $(x_0,y_0)$ 处有极值，则有 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$. 并称能使 $f_x(x,y)=0,f_y(x,y)=0$ 同时成立的点 $(x_0,y_0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的驻点. 即具有偏导数的函数的极值点必定是驻点. 但函数的驻点不一定是极值点.

**极值的充分条件**：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内连续且具有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$，令 $f_{xx}=(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}=(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}=(x_0,y_0)=C$，则 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，需另作讨论.

**条件极值**：函数满足若干条件（约束方程）的极值称为条件极值. 对于在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下 $z=f(x,y)$ 的条件极值的求法：

方法 1：化为无条件极值. 若可由 $\varphi(x,y)=0$ 解出 $y=\psi(x)$，代入 $z=f(x,y)$，便化为无条件极值.

方法 2：拉格朗日乘数法.

设 $f(x,y)$、$\varphi(x,y)$ 有连续的一阶偏导数，且 $\varphi'_x,\varphi'_y$ 不同时为零，

(1) 构造拉格朗日函数

$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$.

(2) 将 $F(x,y,\lambda)$ 分别对 $x,y,\lambda$ 求偏导数，得到下列方程组：

$$\begin{cases}F_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0,\\ F_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0,\\ F_\lambda=\varphi(x,y)=0.\end{cases}$$

求解此方程组，解出 $x_0,y_0$ 及 $\lambda$，则 $(x_0,y_0)$ 是 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下可能的极值点.

(3) 判别驻点 $(x_0,y_0)$ 是否为极值点.