4.6　　正态分布

定义 如果连续型随机变量ξ的概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

其中σ,μ为常数, 并且$\sigma>0$, 则称ξ服从正态分布, 简记作$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$.

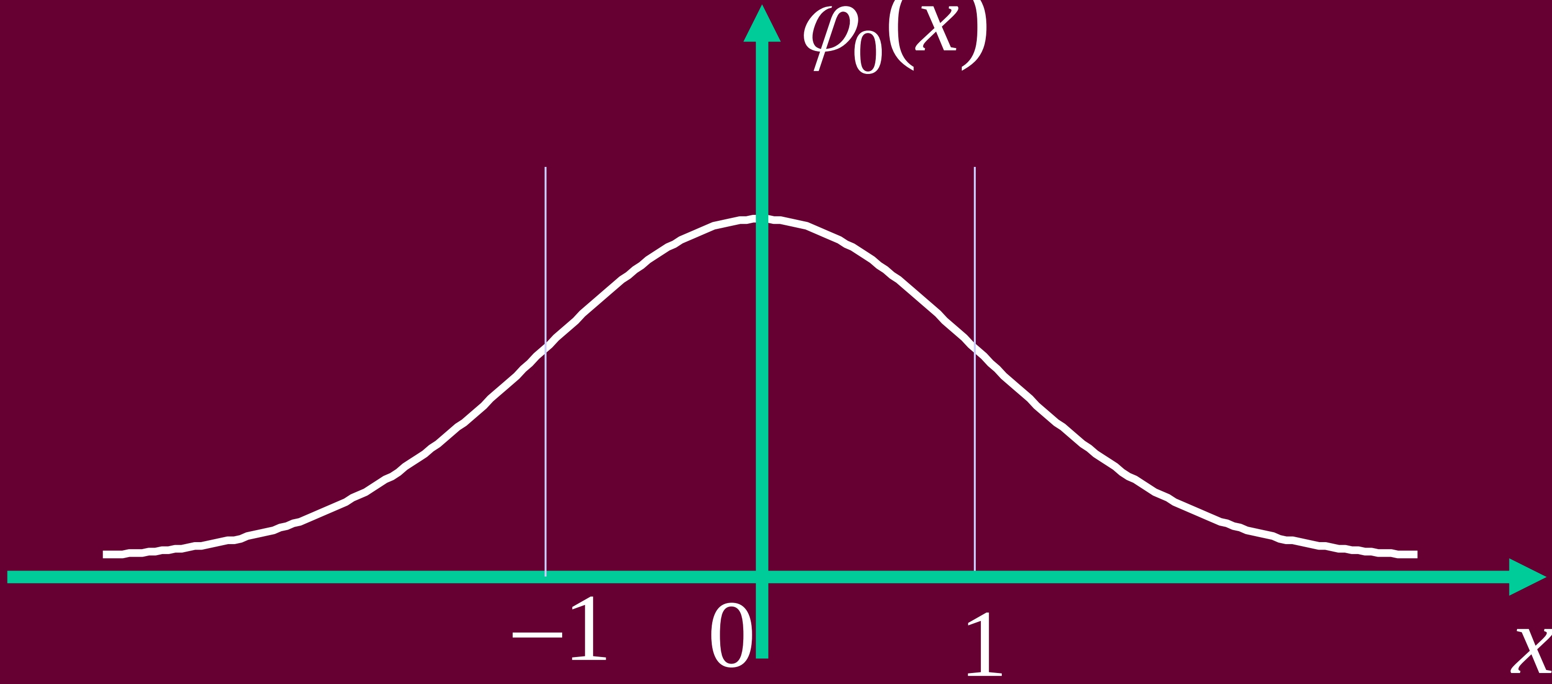
可以验证$E\xi=\mu$, $D\xi=\sigma^2$

特别地, 当$\mu=0$, $\sigma=1$时, 称其为标准正态分布, 其概率密度记为$\varphi_0(x)$, 这时$\xi\sim N(0,1)$.

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\varphi_0(x)$的图形

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



$\varphi_0(x)$除一般概率密度的性质外，还有下列性质

(1) $\varphi_0(x)$有各阶导数

(2) $\varphi_0(-x)=\varphi_0(x)$，偶函数关于$y$轴对称

(3) 在$(-\infty,0)$内严格上升，在$(0,+\infty)$严格下降.在$x=0$ 处达到最大值：

$$\varphi_0(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0.3989$$

(4) 在$x=\pm 1$处有两个拐点；

(5) x轴是$\varphi_0(x)$的水平渐近线

$$\lim_{x\to\infty}\varphi_0(x)=0$$

可用书后附表二查出$\varphi_0(x)$的各个值

例1 $\xi \sim N(0,1)$, 求$\varphi_0(1.81)$, $\varphi_0(-1)$, $\varphi_0(0.57)$, $\varphi_0(6.4)$, $\varphi_0(0)$.

解 查书后附表二可得

$\varphi_0(1.81)=0.07754$ $\varphi_0(-1)=\varphi_0(1)=0.2420$

$\varphi_0(0.57)=0.3391$ $\varphi_0(6.4)=0$

$\varphi_0(0)=0.3989$

一般正态分布与标准正态分布的关系

定理4.2 如果$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\eta \sim N(0,1)$, 其概率密度分布记为$\varphi(x)$和$\varphi_0(x)$, 分布函数分别记为$\Phi(x)$及$\Phi_0(x)$, 则

$$(1)\ \varphi(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$(2)\ \Phi(x)=\Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

证

$$(1)\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$(2)\ \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)dt$$

令$y=\dfrac{t-\mu}{\sigma}$，$\Phi(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\varphi_0(y)dy=\Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

定理 4.3 如果$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$, 而$\eta=(\xi-\mu)/\sigma$, 则 $\eta \sim N(0,1)$

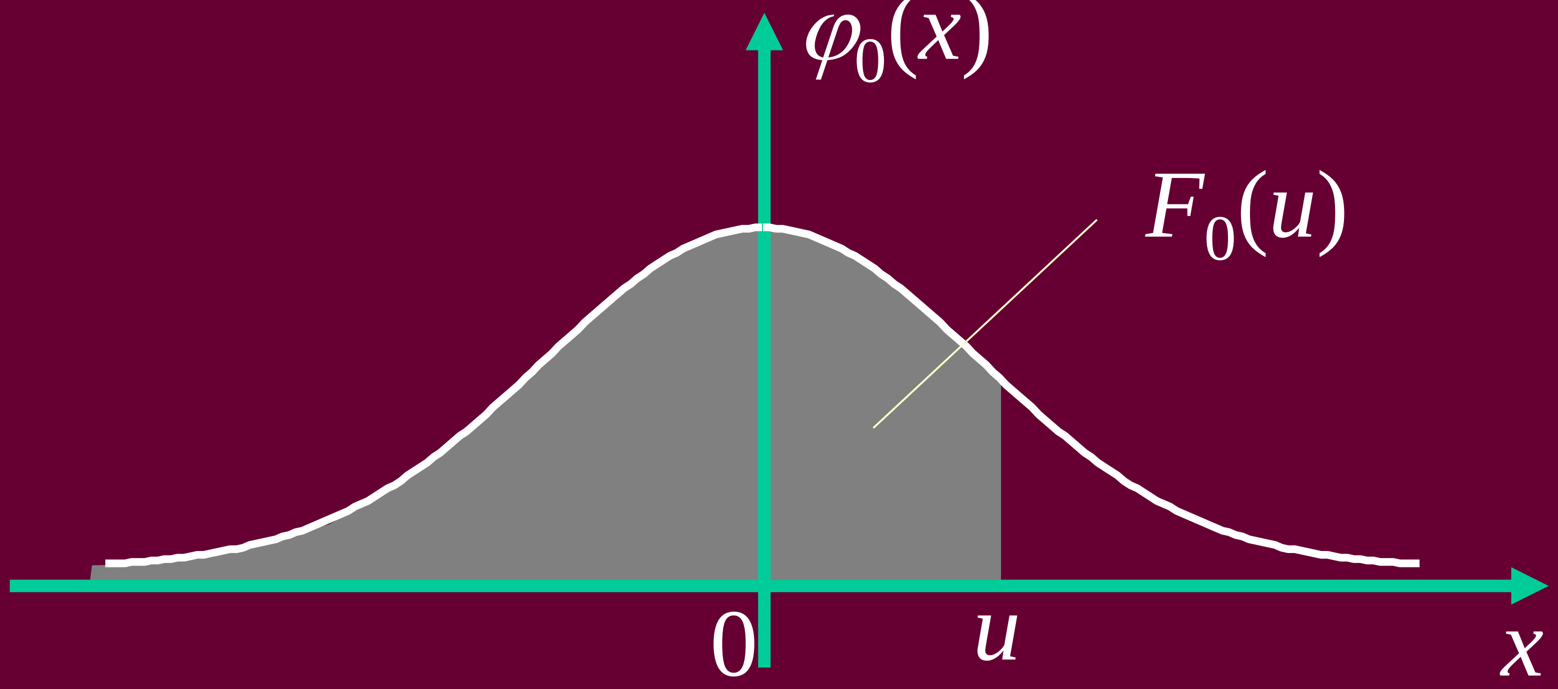
证 为证明$\eta \sim N(0,1)$, 只要证明η的概率密度为 $\varphi_0(x)$或分布函数为$\Phi_0(x)$即可.

$$F_\eta(x)=P(\eta \le x)=P((\xi-\mu)/\sigma \le x)$$
$$=P(\xi \le \sigma x+\mu)=\Phi(\sigma x+\mu)=\Phi_0(x)$$

可以证明, 服从正态分布的随机变量ξ, 它的线性函数$k\xi+b(k\neq 0)$仍服从正态分布.

标准正态分布函数表

如果$\xi \sim N(0,1)$, 则对于大于零的实数x, $\Phi_0(x)$的值可以由附表三直接查到. 而对于小于零的x则可通过对称性来求得.



例2 $\xi \sim N(0,1)$, 求$P(\xi \le 1.96)$, $P(\xi \le -1.96)$, $P(|\xi| \le 1.96)$, $P(-1 < \xi \le 2)$, $P(\xi \le 5.9)$.

解 $P(\xi \le 1.96) = 0.975 = \Phi_0(1.96)$

$P(\xi \le -1.96) = P(\xi \ge 1.96) = 1 - P(\xi < 1.96)$

$= 1 - 0.975 = 0.025 = 1 - \Phi_0(1.96)$

$P(|\xi| \le 1.96) = \mathrm{P}(-1.96 \le \xi \le 1.96)$

$= \Phi_0(1.96) - \Phi_0(-1.96) = 2\Phi_0(1.96) - 1 = 0.95$

$P(-1 < \xi \le 2) = \Phi_0(2) - \Phi_0(-1) = \Phi_0(2) - [1 - \Phi_0(1)]$

$= 0.81855$

$P(\xi \le 5.9) = \Phi_0(5.9) = 1$

概括起来, 如果ξ~$N(0,1)$, 则

$$P(\xi \le x) = \begin{cases} \Phi_0(x) & x > 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1 - \Phi_0(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$P(|\xi| \le x) = 2\Phi_0(x) - 1 \ (当 x > 0 时)$$

$$P(a < \xi \le b) = \Phi_0(b) - \Phi_0(a)$$

当$x \ge 5$时, $\Phi_0(x) \approx 0$,

而当$x \le -5$时, $\Phi_0(x) \approx 0$

例3 $\xi \sim N(8,0.5^2)$, 求$P(|\xi-8|<1)$及$P(\xi\leq 10)$

解 因为$\xi \sim N(8,0.5^2)$, 所以$(\xi-8)/0.5 \sim N(0,1)$

$$P(|\xi-8|<1)=P\left(\left|\frac{\xi-8}{0.5}\right|<2\right)$$

$$=2\Phi_0(2)-1=0.9545$$

$$P(\xi\leq 10)=\Phi(10)=\Phi_0\left(\frac{10-8}{0.5}\right)=\Phi_0(4)$$

$$=0.99996833$$

附表中$0.9^4 6833$表示0.99996833

例4 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$, $P(\xi\le -5)=0.045$, $P(\xi\le 3)=0.618$, 求μ及σ

解 $P(\xi\le -5)=\Phi_0\left(\dfrac{-5-\mu}{\sigma}\right)=0.045$

$$1-\Phi_0\left(-\frac{5+\mu}{\sigma}\right)=\Phi_0\left(\frac{5+\mu}{\sigma}\right)=0.955$$

$$P(\xi\le 3)=\Phi_0\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right)=0.618$$

查表可得$\begin{cases}\dfrac{5+\mu}{\sigma}=1.7\\ \dfrac{3-\mu}{\sigma}=0.3\end{cases}$ 解得$\mu=1.8,\sigma=4$

（五）正态分布与Γ-分布的关系

定理 4.4　如果ξ服从$N(0, 1)$，则ξ^2服从 $\lambda=0.5$，$r=0.5$的Γ-分布，即 $\xi^2\sim\chi^2(1)$

（六）二元正态分布

定义4.7　若二元连续型随机变量（ξ，η）的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} \qquad (4.16)$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数。

$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$ 时，称（ξ，η）服从二元正态分布

定理 4.5　二元正态分布的边缘概率密度是一元正态分布。

由第三章的知识我们知道：

相互独立的两个随机变量一定不相关$\rho=0$

但是不相关的随机变量不一定独立

然而对于二元正态分布来说，有定理4.6成立

定理4.6　服从二元正态分布的随机变量（ξ,η）它们独立的充分必要条件是ξ与η的相关系数$\rho=0$

定义4.8 若连续型随机变量ξ的概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (4.17)$$

称ξ服从具有n个自由度的t分布，简记为t（n）。

定义4.9 若连续型随机变量ξ的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & x\succ 0\\ 0 & x\le 0\end{cases} \tag{4.18}$$

- 称ξ服从具有第一个自由度为 n_1 ，
- 第二个自由度为n_2 的F分布，简记为 $F(n_1,n_2)$