姓名:______ 学号:______ 班级:______ 装 订 线

杭州师范大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

《高等数学 A1》试卷（A）答案及评分标准

一、单项选择题（填上正确选择支前面的字母，共 18 分，每小题 3 分）

1．下列函数极限存在的是（　C　）。

A．$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$　　B．$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$　　C．$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos x$　　D．$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$

2．设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$，那么是 $f'(1)=$（　C　）。

A．0　　B．1　　C．－9！　　D．10！

3．设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，且 $f''(x)$ 存在，则必有（　B　）。

A．$f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$　　B．$f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$

C．$f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$　　D．$f'(x_0)=0, f''(x_0)$ 符号不确定

4．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t dt}{x^4}=$（　D　）。

A．0　　B．1　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

5．已知函数 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f'(t)dt=$（　A　）。

A．$f(x)-f(a)$　　B．$f(x)+f(a)$　　C．$f(x)$　　D.0

6．在下列微分方程中，其通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 的是（ C　）

A．$y''-y'=0$　　B．$y''+y'=0$　　C．$y''+y=0$　　D．$y''-y=0$

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

7．当 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^{\sin x}$ 与 x^k 为同阶无穷小，则 k=__3__.

8．设 $f(x)=(x^2-3x+2)(x^2-7x+12)$ 则方程 $f'(x)=0$ 有几个根__3 个__.

9．设函数 $f(x)$ 可微，则 $y=f(1-e^{-x})$ 的微分 $dy=e^{-x}f'(1-e^{-x})dx$.

10．$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x^2\sin x+1}{1+\cos x}dx=$__$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$__.

11．微分方程 $(1-x^2)y-xy'=0$ 的通解 $y=Cxe^{-\frac{x^2}{2}}$（C为任意实数）.

三、解答题（共 42 分，每小题 6 分）

12．求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$．

解：$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{(x-1)}{x}+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{1+1+\ln x}$

$=-\frac{1}{2}$ （6 分）

13．已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax-b)=1$，求常数 a 和 b 。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1-ax-ax^3-bx^2-b}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^3-bx^2-b}{x^2+1}=1$

当且仅当 $a=1,b=-1$ （ 6 分）

14．设方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求 y',y''.

解：方程两边对 x 求导，$\frac{2x+2yy'}{2(x^2+y^2)}=\frac{\frac{xy'-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$，解出 $y'=\frac{x+y}{x-y},(x\neq y)$ （3 分）

$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}=\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}$ （6 分）

15．求不定积分 $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$

解：$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{[1+(\sqrt{x})^2]}d\sqrt{x}=2\int\arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x}=\arctan^2\sqrt{x}+C$ （ 6 分）

16．求定积分 $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$

解：令 $\sqrt{2x+1}=t$， $dx=tdt$

$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_0^3\frac{t^2+3}{2t}tdt=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)dt=\frac{1}{2}(\frac{t^3}{3}+3t)_1^3=\frac{22}{3}$ （6 分）

17．证明不等式：当 $x>0$ 时， $\mathrm{e}^x-(1+x)>1-\cos x$

证明：令函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-(1+x)-(1-\cos x)$，则 $f(0)=0$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x-1-\sin x$，且 $f'(0)=0$，

$f''(x)=e^x-\cos x$，且当 $x>0$ 时，$f''(x)=e^x-\cos x>e^0-\cos x>0$，（ 3 分）

故 $f'(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 为单增函数，即当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，从而

$f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 为单增函数，即当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，

所以，当 $x>0$ 时，$e^x-(1+x)>1-\cos x$．证毕.（6 分）

18. 求微分方程的通解：$y''+y'=x^2$.

解：特征方程 $\lambda^2+\lambda=0$，故齐次通解为 $Y=C_1+C_2e^{-x}$，（2 分）

令 $y^*=x(ax^2+bx+c)$ *则* $y^{*\prime}=3ax^2+2bx+c$，$y^{*\prime\prime}=6ax+2b$,*代入原方程，*

得 $$3ax^2+(6a+2b)x+2b+c=x^2$$

由此得 $a=\frac{1}{3},b=-1,c=2$，即 $y^*=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$（4 分）

所以原方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$（6 分）

四、综合题（共 20 分，每小题 10 分）

19．讨论函数 $y=\int_0^x(t^2-5t+4)dt$ 的单调区间和极值、凹凸区间及拐点。

解：$y'=x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$，$y''=2x-5$，

令 $y'=0,y''=0$，得驻点 $x=1,x=4$ 及 $x=\frac{5}{2}$（2 分）

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\frac{5}{2})$	$\frac{5}{2}$	$(\frac{5}{2},4)$	4	$(4,+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	+
y''	−		−	0	+		+
y	增，凸	$\frac{11}{6}$	减，凸	拐点	减,凹	$-\frac{8}{3}$	增，凹

$\int_0^{\frac{5}{2}}(t^2-5t+4)dt=-\frac{5}{12}$，$\int_0^1(t^2-5t+4)dt=\frac{11}{6}$，$\int_0^4(t^2-5t+4)dt=-\frac{8}{3}$（8 分）

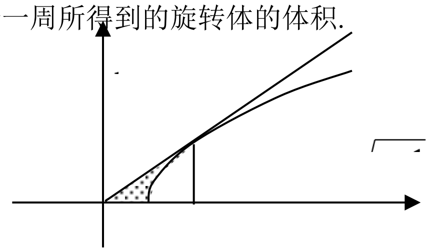
增区间为 $(-\infty,1)$ 与 $(4,+\infty)$，减区间为 $(1,4)$，极大值 $f(1)=\frac{11}{6}$，极小值 $f(4)=-\frac{8}{3}$

凸区间 $(-\infty,\frac{5}{2})$，凹区间 $(\frac{5}{2},+\infty)$，拐点为 $(\frac{5}{2},-\frac{5}{12})$（10 分）

20．设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，试求：

（1） 切线方程；

（2） 此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形及绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积.



解：设切点为 $(x_{\circ},\sqrt{x_{\circ}-1})$，斜率为 $\dfrac{1}{2\sqrt{x_{\circ}-1}}$

则切线方程为 $y-\sqrt{x_{\circ}-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_{\circ}-1}}(x-x_0)$，

因为切线过原点，以点 $(0,0)$ 代入切线方程，解得 $x_{\circ}=2$， $y_{\circ}=\sqrt{x_{\circ}-1}=1$， 则切线方程为

$y=\dfrac{1}{2}x$ 。（4 分）

面积 $A=\int_0^1(y^2+1-2y)dy=\dfrac{1}{3}$ （7 分）

体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 2-\int_1^2\pi(x-1)dx=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}(x-1)^2\Big|_1^2=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}.$ （10 分）

五、证明题（5 分）

21．设当 $x\in[2,4]$ 时，有不等式 $ax+b\ge\ln x$，问 a,b 为何值时，能使积分 $I=\int_2^4(ax+b-\ln x)dx$ 取得最小值.

解： $I=\int_2^4(ax+b-\ln x)dx=(\dfrac{a}{2}x^2+bx-x\ln x+x)_2^4=6a+2b-6\ln 2+2$

因为 $ax+b\ge\ln x$，当且仅当 $ax+b=\ln x$ 时值为最小，

故直线 $y=ax+b$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切的那点，能使两线所围成的面积为最小。

求切点： $y'=a=\dfrac{1}{x}$， $x=\dfrac{1}{a}$ 代入两线，得 $b=-1-\ln a$

将 b 代入 I，得 $I=6a-2\ln a-6\ln 2$，令 $I'_a=6-\dfrac{2}{a}=0$，得 $a=\dfrac{1}{3}$，所以 $b=\ln 3-1$

$\because I''_a=\dfrac{2}{a^2}>0$，所以 $a=\dfrac{1}{3}$， $b=\ln 3-1$ 时， I 取得最小值。 （5 分）