

## 2.4 随机变量函数的分布

# 随机变量的函数的分布

我们常常遇到一些随机变量, 它们的分布往往难于直接得到(如滚珠体积的测量值等), 但是与它们有关系的另一些随机变量, 其分布却是容易知道的(如滚珠直径的测量值). 因此, 要研究随机变量之间的关系, 从而通过它们之间的关系, 由已知的随机变量的分布求出与之有关的另一个随机变量的分布.

## 定义 2.10

设 $f(x)$ 是定义在随机变量 $\xi$ 的一切可能值 $x$ 的集合上的函数. 如果对于 $\xi$ 的每一可能取值 $x$ , 有另一个随机变量 $\eta$ 的相应取值 $y=f(x)$ . 则称 $\eta$ 为 $\xi$ 的函数, 记作 $\eta=f(\xi)$ .

我们的任务是, 如何根据 $\xi$ 的分布求出 $\eta$ 的分布, 或由 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的分布求出 $\eta=f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的分布.

## (一) 离散型随机变量函数的分布

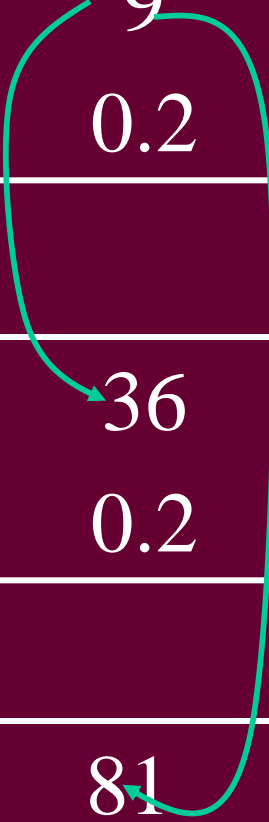
如果相应的函数 $f(x)$ 在给定的试验范围内是单调函数或者存在反函数, 则 $\eta=f(\xi)$ 的分布是很容易从 $\xi$ 的分布中求出来的, 即当 $P(\xi=x_i)=p_i$ 时,  $P(\eta=f(x_i))=p_i, i=1,2,\dots$

例1 测量一个正方形的边长, 其结果是一个随机变量 $\xi$ (为简便起见把它看成是离散型的),  $\xi$ 的分布如下表所示, 求周长 $\eta$ 和面积 $\zeta$ 的分布律.

$\xi$	9	10	11	12
$P$	0.2	0.3	0.4	0.1

解: 根据题意知  $\eta$  和  $\zeta$  都是  $\xi$  的函数,  
 $\eta=4\xi$ ,  $\zeta=\xi^2$ , 因此而计算出如下的结果

$\xi$ $P$	9 0.2	10 0.3	11 0.4	12 0.1
$\eta$ $P$	36 0.2	40 0.3	44 0.4	48 0.1
$\zeta$ $P$	81 0.2	100 0.3	121 0.4	144 0.1



例2  $\xi$ 的分布如下表所示, 求 $\xi^2$ 的分布

$\xi$	-1	0	1	1.5	3
$P$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

解 此题与上题的不同在于 $\xi$ 存在着取负数的可能, 而-1的平方与1的相同, 因此,  $\{\xi^2=1\}$ 的事件是 $\{\xi=1\}$ 和 $\{\xi=-1\}$ 两个互斥事件的和, 则 $P\{\xi^2=1\}=P\{\xi=1\}+P\{\xi=-1\}$ , 最后结果如下表:

$\xi^2$	0	1	2.25	9
$P$	0.1	0.5	0.3	0.1

例3 一个仪器的长度由两个主要部件构成, 其总长度为此二部件之和, 这两个部件的长度 $x$ 和 $h$ 为两个相互独立的随机变量, 其分布律如下二表所示. 求此仪器长度的分布律.

$\xi$	9	10	11
$P$	0.3	0.5	0.2

$\eta$	6	7
$P$	0.4	0.6



解 设仪器的总长度为 $\zeta$ ,  $\xi, \eta$ 的可能取值的数对及概率与相应的和如下面的表所示

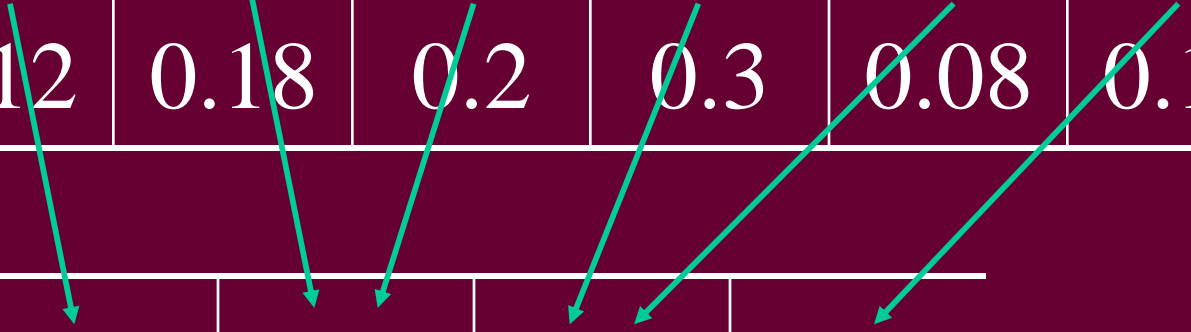
$\xi$	9	10	11
$P$	0.3	0.5	0.2

$\eta$	6	7
$P$	0.4	0.6

$\xi$	9	9	10	10	11	11
$\eta$	6	7	6	7	6	7
$\zeta=\xi+\eta$	15	16	16	17	17	18
$P$	0.12	0.18	0.2	0.3	0.08	0.12

由此可计算出 $\zeta$ 的分布率如下表所示.

$\xi$	9	9	10	10	11	11
$\eta$	6	7	6	7	6	7
$\zeta=\xi+\eta$	15	16	16	17	17	18
$P$	0.12	0.18	0.2	0.3	0.08	0.12



$\zeta$	15	16	17	18
$P$	0.12	0.38	0.38	0.12

例4 求 § 2.3例2中两个邮筒内信的数目之和  $\xi_1 + \xi_2$  的分布律.

解  $\xi_1$  和  $\xi_2$  的联合分布律如下表所示

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2
0	4/16	4/16	1/16
1	4/16	2/16	0
2	1/16	0	0

按斜线计算:

		$\xi_1 + \xi_2 = 0$		$\xi_1 + \xi_2 = 1$	
		$\xi_1 + \xi_2 = 2$		$\xi_1 + \xi_2 = 3$	
		$\xi_1 + \xi_2 = 4$			
$\xi_1 \backslash \xi_2$		0	1	2	
0		4/16	4/16	1/16	
1		4/16	2/16	0	
2		1/16	0	0	

$\xi_1 + \xi_2$	0	1	2
$P$	1/4	1/2	1/4

# 用斜线法计算 $\xi_1-\xi_2$ 的分布

$\xi_1-\xi_2=0$		$\xi_1-\xi_2=-1$		$\xi_1-\xi_2=-2$	
$\xi_1-\xi_2=1$	$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2	
	0	4/16	4/16	1/16	
	1	4/16	2/16	0	
	2	1/16	0	0	

$\xi_1-\xi_2$	-2	-1	0	1	2
$P$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

## (二)连续型

例5 已知 $\xi$ 的概率密度是 $\varphi_{\xi}(x)$ ,  $\eta=4\xi-1$ , 求 $\eta$ 的概率密度 $\varphi_{\eta}(x)$ .

解 首先求 $\eta$ 的分布函数 $F_{\eta}(x)$ . 依题意, 有

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P\{\eta \leq x\} = P\{4\xi - 1 \leq x\} \\ &= P\left\{\xi \leq \frac{x+1}{4}\right\} = F_{\xi}\left(\frac{x+1}{4}\right) \end{aligned}$$

其中 $F_{\xi}(x)$ 为 $\xi$ 的分布函数. 然后对上式两边求导即得 $\xi$ 和 $\eta$ 的概率密度函数的关系.

对

$$F_{\eta}(x) = F_{\xi}\left(\frac{x+1}{4}\right)$$

两边求导得

$$\varphi_{\eta}(x) = \frac{1}{4} \varphi_{\xi}\left(\frac{x+1}{4}\right)$$

例6 设随机变量 $\xi$ 的分布函数为 $F_{\xi}(x)$ , 求 $\xi^2$ 的分布函数.

解:

当 $x < 0$ 时,  $F_{\xi^2}(x) = P(\xi^2 \leq x) = 0$

设 $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} F_{\xi^2}(x) &= P(\xi^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq \xi \leq \sqrt{x}) \\ &= P(-\sqrt{x} < \xi \leq \sqrt{x}) + P(\xi = -\sqrt{x}) \\ &= F_{\xi}(\sqrt{x}) - F_{\xi}(-\sqrt{x}) + P(\xi = -\sqrt{x}) \end{aligned}$$



特别地, 如果 $\xi$ 是具有概率密度为 $\varphi_{\xi}(x)$ 的连续型随机变量,

$P(\xi = -\sqrt{x}) = 0$ , 则 $\xi^2$ 的概率密度为

$$\varphi_{\xi^2}(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_{\xi}(\sqrt{x}) + \varphi_{\xi}(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$