第五章 定积分

第一节 定积分的概念与性质

习题 5.1

1、利用定积分定义计算积分：$\int_{1}^{2} x\mathrm{d}x$.

2、利用定积分的几何意义，证明下列等式：

（**1**）$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$；

（**2**）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$

3、证明定积分性质：$\int_{a}^{b} 1\cdot\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} \mathrm{d}x = b-a$.

4、估计下列各积分的值的范围：

（**1**）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$；

（**2**）$\int_{2}^{0}e^{x^2-x}\mathrm{d}x$。

5、设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

（**1**）若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geq 0$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$；

（**2**）若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\leq g(x)$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv g(x)$。

6. 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围成的图形面积可表示为 **(　　)**

A. $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$　　　**B.** $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$　　　**D.** $\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

7. 证明题：设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导， $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

第二节　微积分基本定理
习题 5.2

1、 求由参数表达式 $\begin{cases} x=\int\limits_0^t \sin u\mathrm{d}u \\ y=\int\limits_0^t \cos u\mathrm{d}u \end{cases}$ 所确定的函数对 x 的导数。

2、 求由 $\int\limits_0^x \cos t\mathrm{d}t+2\int\limits_0^y e^t\mathrm{d}t=0$ 所决定的隐函数对 x 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 。

3、 当 x 为何值时，函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}\mathrm{d}t$ 有极值？

4、计算下列导数：

（1） $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t$；

（2） $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{2\cos x}\cos(\pi t^3)\mathrm{d}t$

5、计算下列各定积分：

（1） $\int_4^9\sqrt{x}(2+\sqrt{x})\mathrm{d}x$；

（2） $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$；

（3） $\int_0^{\sqrt{3}b}\frac{\mathrm{d}x}{b^2+x^2}$；

（4） $\int_{-1}^0\frac{4x^4+4x^2+1}{x^2+1}dx$；

（5） $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\mathrm{d}\theta$；

（6） $\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$；

6、求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{2x}$；　　**（2）** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x te^{2t^2}\mathrm{d}t}$。

7、设 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\in[0,1) \\ x, x\in[1,2] \end{cases}$，求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,2)$ 上的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0,2)$ 内的连续性。

8、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\le 0$，

$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\le 0$。

9．设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $x\in[a,b]$，则下列导数恒为零的是（　　）

(A) $\dfrac{d}{dx}\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$　　　　(B) $\dfrac{d}{dx}\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t$

(C) $\dfrac{d}{dx}\int_x^b xf(t)\mathrm{d}x$　　　　(D) $\dfrac{d}{dx}\int_a^b xf(x)\mathrm{d}t$

10.设 $f(x)=x^3+x$，则 $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=$(　**)**.

A. 0　　**B.　8**　　**C.**　$\int_0^2 f(x)dx$　　**D.**　$2\int_0^2 f(x)dx$

11.设 $f\left(x\right)$ 连续，且 $F\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$，求 $\lim\limits_{x\to a}F\left(x\right)$.

第三节　定积分的换元法和分部积分法

习题 5.3

1、计算下列积分：

（1） $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(9+4x)^2}$；　　**（2）** $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$；

（3） $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$；　　**（ 4）** $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{2\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$；

（5） $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}b}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3b^2-x^2}}$；　　**（6）** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x$

2、利用函数的奇偶性计算下列积分：

（1） $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$； **（2）** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$。

3、设 $f(x)$ **在** $[-b,b]$ **上连续，证明：**

$$\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-b}^{b} f(-x)\mathrm{d}x。$$

4、证明：

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m \mathrm{d}x。$$

5.设 $f(x)$ **是以** l **为周期的连续函数，证明** $\displaystyle\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x$ **的值与** a **无关。**

6、若 $f(t)$ 是连续函数且为奇函数，证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数；若 $f(t)$ 是连续函数且为偶函数，证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数。

7、计算下列定积分：

（1）$\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$ ；

（2）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_1^e \cos(\ln x)\mathrm{d}x$；

（4）$\int_e^{\frac{1}{e}} |\ln x|\mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

8. 若 $\int_0^2 xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^a f(x)dx$，则 $a =$（　　）.

A、1　　B、2　　C、$\frac{1}{2}$　　D、4

第四节　反常积分
习题 5.4

1、判别下列各反常积分的收敛性，如果反常积分收敛，求出其值：

（1） $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$；　　**（2）** $\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}ch t\mathrm{d}t\,(p>1)$；

（3） $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$；　　**（4）** $\int_{1}^{e}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$；

（5） $\int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$；　　(6)　$\int_0^{+\infty}x^7\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

2、当 k 为何值时，反常积分 $\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，这反常积分发散？又当 k 为何值时，这反常积分取得最小值？

3、利用递推公式计算反常积分 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}\mathrm{d}x$ **。**

总习题 5

1. 填空题

（1）曲线 $y=\cos x$ 与直线 $x=0$， $x=\pi$，$y=0$ 所围成平面图形面积等于________.

（2）若 $G(x)=\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,dt$，则 $G'(x)=$________.

（3）(2000 年考研题) $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\ dx$ =________.

（4）(2007 年考研试题) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx$ =________.

（5）设可导函数 $f(x)$ 满足条件 $f(0)=1$， $f(2)=3$， $f'(2)=5$，

则 $\int_0^1 xf''(2x)dx$ =________.

（6）(2002 年考研题) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$ =________.

（7）(2010 年考研题) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx$ =________.

2. 单项选择题

（1）(1998 年考研题) 设函数 $f(x)$ 连续, 则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x t\,f(x^2-t^2)dt=$ （ ）.

(A) $xf(x^2)$; (B) $-xf(x^2)$; (C) $2xf(x^2)$; (D) $-2xf(x^2)$.

（2） 设在区间$[0,1]$上，$f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 的大小顺序为（ ）.

(A) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$； (B) $f'(0)>f(1)-f(0)>f'(1)$；

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$； (D) $f(1)-f(0)>f'(0)>f'(1)$.

（3）设 $f(x)=\int_0^x \sin t^2dt$， $g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）.

(A) 等价无穷小; (B) 同阶非等价无穷小;

(C) 高阶无穷小; (D) 低阶无穷小.

（4）下列广义积分发散的是（ ）.

(A) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$； (B) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx$；

(C) $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$； (D) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

（5）设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则下列各式中不成立的是 （ ）.

(A) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$； (B) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(t)dt$；

(C) $\int_a^a f(x)dx=0$； (D)若 $\int_a^b f(x)dx=0$，则 $f(x)=0$.

3. 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t dt}{x^2}$ ； （2） $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}dt}{x^6}$.

4. 求下列定积分：

（1）$\int_1^2 (x+\frac{1}{x})dx$；　　（2）$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 xdx$.　　（4）$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$；

（5）$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$；　　（6）$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$.

（7）$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$；　　（8）$\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{x^2}dx$.

5.（2010 年考研题）求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 在的单调区间和极值.

6.（1992 年考研题）设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\le 0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$，求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

7. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且不变号，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \quad \text{(积分第一中值定理)}$$