

3.4 方差、协方差

(一) 方差的概念

先看两个例子

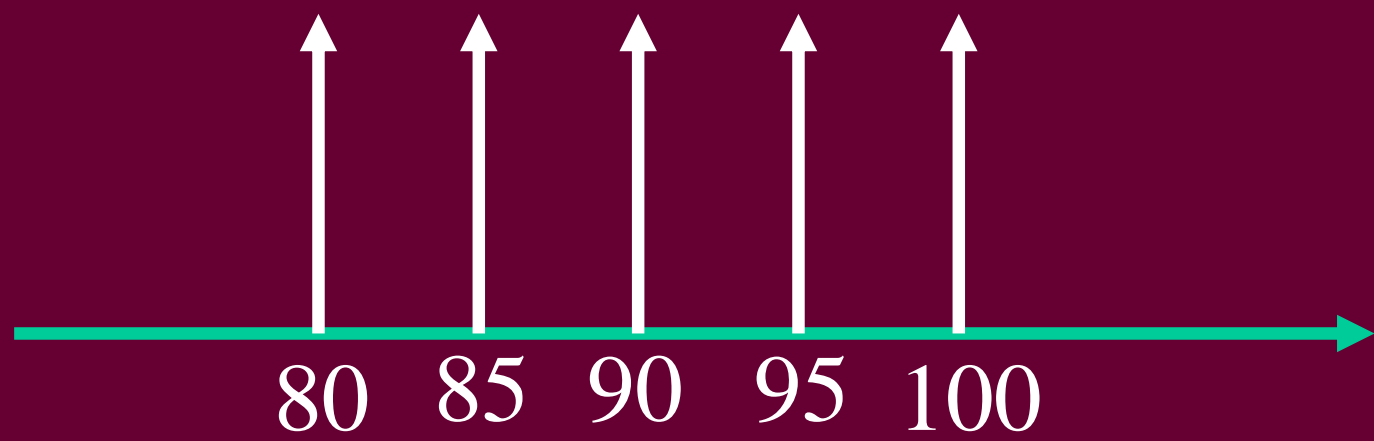
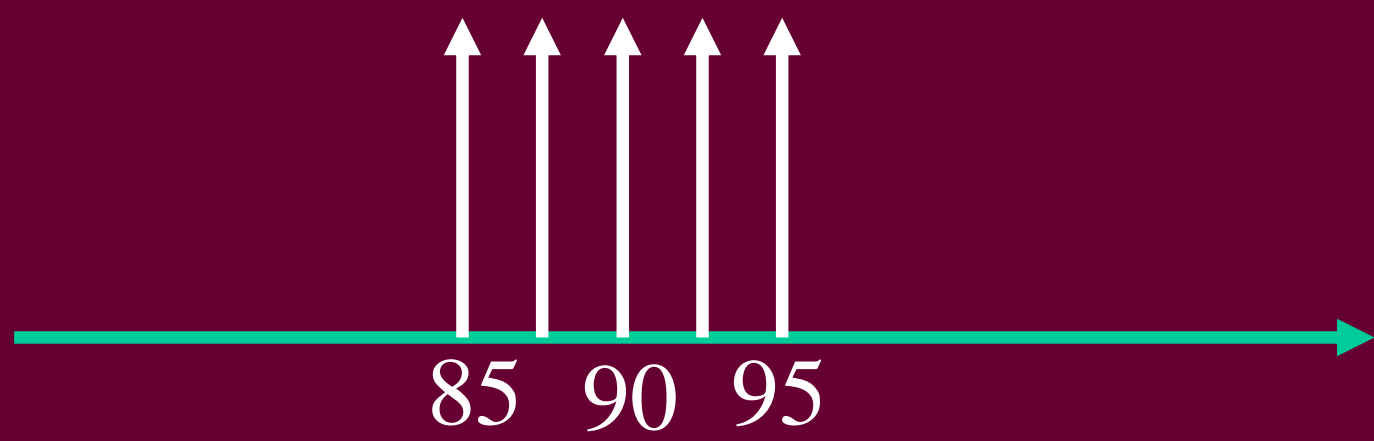
设甲,乙两炮射击弹着点与目标的距离分别为 ξ_1, ξ_2 (为简便起见, 假定它们只取离散值), 并有如下分布律.

ξ_1	80	85	90	95	100
P	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

ξ_2	85	87.5	90	92.5	95
P	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

则两炮有相同的期望值($E\xi_i=90, i=1,2$), 但比较两组数据可知乙炮较甲炮准确. 弹着点集中.

图示比较:



又如有两批钢筋, 每批各10根, 它们的抗拉强度指标如下:

第一批: 110, 120, 120, 125, 125, 125, 130, 130, 135, 140

第二批: 90 100 120 125 130 130 135 140 145 145

它们的平均抗拉强度指标都是126, 但是, 使用钢筋时, 一般要求抗拉强度指标不低于一个指定数值(如115). 那么, 第二批钢筋的抗拉强度指标与平均值偏差较大, 即取值较分散, 不合格的多, 可以认为第二批比第一批质量差.

可见在实际问题中, 仅靠期望值(或平均值)不能完善地说明随机变量的分布特征, 还必须研究其离散程度. 通常人们关心的是随机变量 ξ 对期望值 $E\xi$ 的离散程度.

定义3.3 如果随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi$ 存在, 称 $\xi-E\xi$ 为随机变量的离差.

显然, 随机变量离差的期望是零, 即

$$E(\xi-E\xi)=0$$

不论正偏差大还是负偏差大, 同样都是离散程度大, 为了消除离差 $\xi-E\xi$ 的符号, 用 $(\xi-E\xi)^2$ 来衡量 ξ 与 $E\xi$ 的偏差.

定义3.4

随机变量 ξ 离差平方的数学期望,
称为随机变量的方差,
记作 $D\xi$ 或 σ_{ξ}^2 .

而 $\sqrt{D\xi}$ 或 σ_{ξ} 称为 ξ 的标准差(或方差根)

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

如果 ξ 是离散型随机变量, 并且
 $P\{\xi=x_k\}=p_k$ ($k=1,2,\dots$), 则

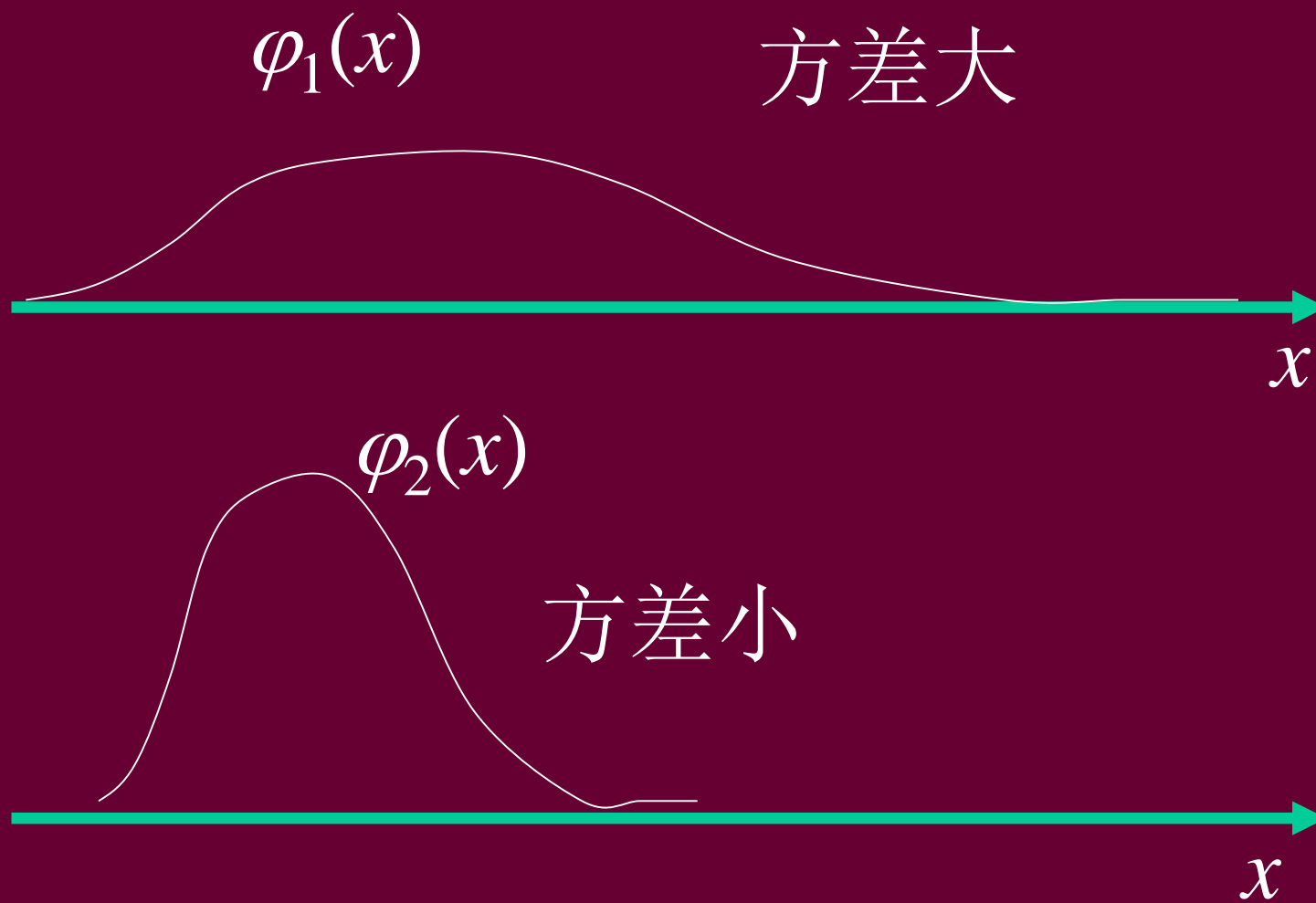
$$D\xi = \sum_k (x_k - E\xi)^2 p_k$$

如果 ξ 是连续型随机变量, 有概率密度 $\varphi(x)$, 则

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 \varphi(x) dx$$

可见随机变量的方差是非负数, $D\xi \geq 0$, 常量的方差是零. 当 ξ 的可能值密集在它的期望值 $E\xi$ 附近时, 方差较小, 反之则方差较大. 因此方差的大小可以表示随机变量分布的离散程度

图示, 方差大和方差小的情况



例1 计算参数为 p 的0-1分布的方差

解 根据 ξ 的概率函数

$$P\{\xi=1\}=p \quad P\{\xi=0\}=1-p=q$$

$$\text{则 } E\xi=0\times q+1\times p=p$$

$$\begin{aligned} D\xi &= (0-p)^2q + (1-p)^2p = \\ &= p(pq+q^2) = pq(p+q) = pq \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

$$E\xi=p \quad D\xi=pq$$

例2 计算本节开始所举甲乙两炮射击中 $D\xi_1$,
及 $D\xi_2$

ξ_1	80	85	90	95	100
P	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

ξ_2	85	87.5	90	92.5	95
P	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

解 $E\xi_1=E\xi_2=90$, 则

$$\begin{aligned} D\xi_1 &= 10^2 \times 0.2 + 5^2 \times 0.2 + 0^2 \times 0.2 + 5^2 \times 0.2 + 10^2 \times 0.2 \\ &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\xi_2 &= 5^2 \times 0.2 + 2.5^2 \times 0.2 + 0^2 \times 0.2 + 2.5^2 \times 0.2 + 5^2 \times 0.2 \\ &= 12.5 \end{aligned}$$

方差的性质

(1) 常量的方差等于零

$$\text{证 } D(c)=E(c-Ec)^2=E(c-c)^2=0$$

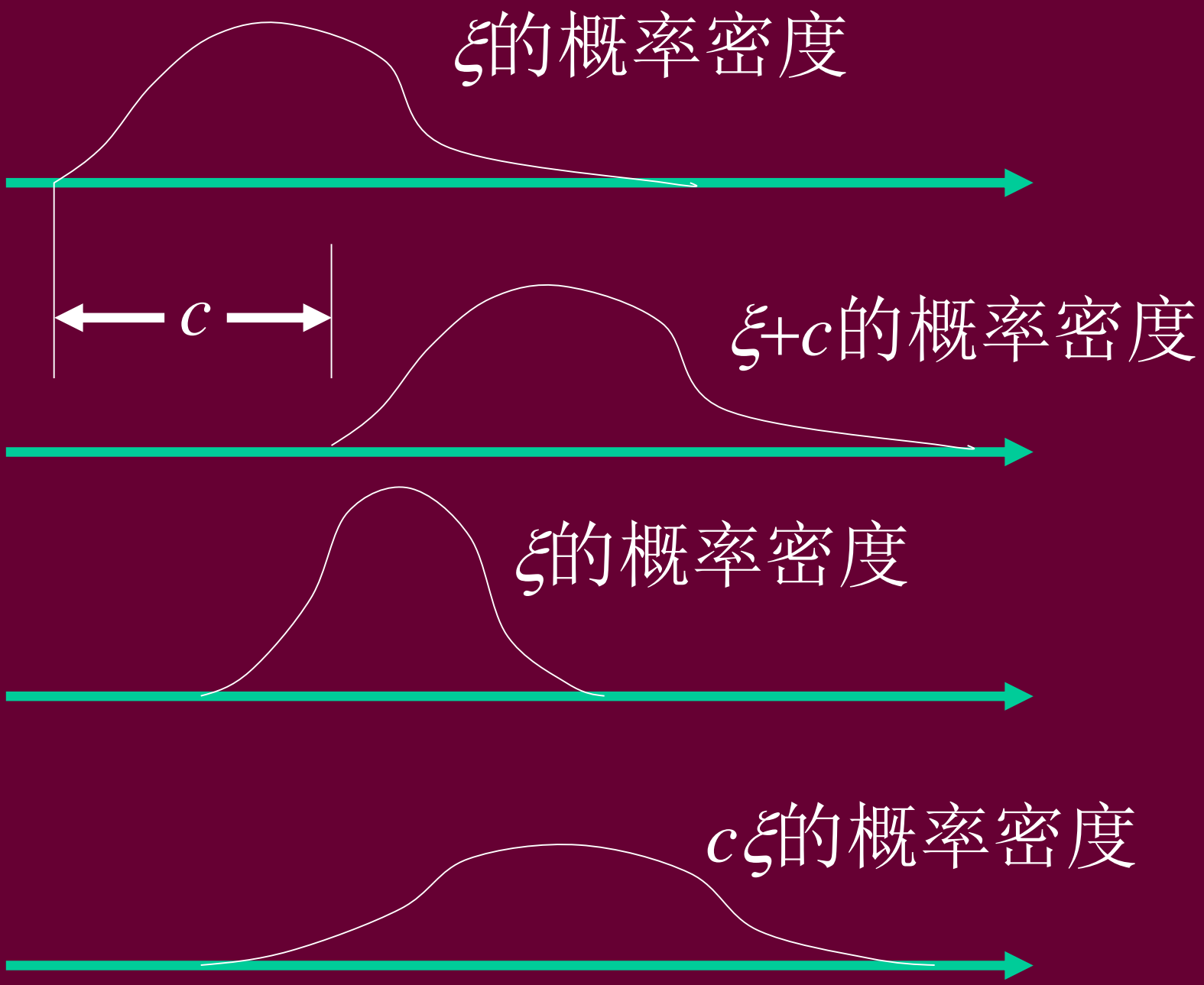
(2) 随机变量与常量之和的方差就等于这个随机变量的方差本身

$$\begin{aligned}\text{证 } D(\xi+c) &= E\{\xi+c-E(\xi+c)\}^2 = E\{\xi+c-E\xi-c\}^2 \\ &= E(\xi-E\xi)^2 = D\xi\end{aligned}$$

(3) 常量与随机变量乘积的方差, 等于这常量的平方与随机变量方差的乘积.

$$\begin{aligned}\text{证 } D(c\xi) &= E\{c\xi-E(c\xi)\}^2 = E\{c(\xi-E\xi)\}^2 \\ &= E\{c^2(\xi-E\xi)^2\} = c^2 D\xi\end{aligned}$$

图示性质



(4) 两个独立随机变量之和的方差, 等于这两个随机变量方差的和

$$\begin{aligned}\text{证 } D(\xi+\eta) &= E\{\xi+\eta-E(\xi+\eta)\}^2 \\ &= E\{\xi-E\xi+\eta-E\eta\}^2 \\ &= E\{(\xi-E\xi)^2+(\eta-E\eta)^2+2(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)\} \\ &= E(\xi-E\xi)^2+E(\eta-E\eta)^2+2E\{(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)\} \\ &= D\xi+D\eta\end{aligned}$$

这是因为 ξ 与 η 独立, 则 $\xi-E\xi$ 与 $\eta-E\eta$ 也独立,
因此 $E\{(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)\}=E(\xi-E\xi)E(\eta-E\eta)=0$

性质4可以推广到任意有限个随机变量

即, 若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 相互独立, 则有

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n$$

进一步可得: n 个相互独立的随机变量的算术平均数的方差等于其方差算术平均数的 $1/n$ 倍.

$$D\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n}{n}$$

(5) 任意随机变量的方差等于这个随机变量平方的期望与其期望平方之差, 即

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$$

证 $D\xi=E(\xi-E\xi)^2$

$$=E\{\xi^2-2\xi E\xi+(E\xi)^2\}$$

$$=E\xi^2-2E\xi\cdot E\xi+(E\xi)^2$$

$$=E\xi^2-(E\xi)^2$$

这个公式很重要, 实际上计算一个随机变量的方差用的是这个公式.

计算 $E\xi^2$ 的办法:

当 ξ 为离散型:

$$E\xi^2 = \sum_k x_k^2 p_k$$

当 ξ 为连续型:

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx$$

例3 计算在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布的随机变量 ξ 的方差.

解 已知 ξ 的概率密度为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在3.1例4中已算出 $E\xi = (a+b)/2$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{1}{12} (b-a)^2$$

例4 两相互独立的随机变量 ξ, η 的分布如下面两表所示, 计算 $D(\xi-\eta)$

ξ	9	10	11
P	0.3	0.5	0.2

η	6	7
P	0.4	0.6

解 $E\xi=9\times 0.3+10\times 0.5+11\times 0.2=9.9$

$$E\eta=6\times 0.4+7\times 0.6=6.6$$

$$E\xi^2=81\times 0.3+100\times 0.5+121\times 0.2=98.5$$

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=98.5-98.01=0.49$$

$$E\eta^2=6^2\times 0.4+7^2\times 0.6=43.8$$

$$D\eta=E\eta^2-(E\eta)^2=43.8-43.56=0.24$$

$$D(\xi-\eta)=D\xi+D\eta=0.49+0.24=0.73$$

例5 若连续型随机变量的概率密度是

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

已知 $E\xi = 0.5$, $D\xi = 0.15$, 求系数 a, b, c

解: 因 $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 0.15$,

则 $E\xi^2 = D\xi + (E\xi)^2 = 0.15 + 0.25 = 0.4$

$$\text{则从} \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx = 0.5 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = 0.4 \end{cases} \quad \text{联立解得 } a, b, c$$

也即从

$$\begin{cases} \int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx = 1 \\ \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx)dx = 0.5 \\ \int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2)dx = 0.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 1 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c = 0.5 \\ \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c = 0.4 \end{cases} \quad \text{解得 } a = 12, b = -12, c = 3$$

协方差与相关系数

一.协方差定义与性质

1.协方差定义 若二元随机变量 (ξ, η) 的期望 $E(\xi)$ 和 $E(\eta)$ 存在, 则称

$$\text{COV}(\xi, \eta)=E\{[\xi-E(\xi)][\eta-E(\eta)]\}. \quad (3.18)$$

为 ξ 与 η 的协方差,

协方差的计算

在已知两个随机变量 ξ 和 η 的联合分布的情况下怎样计算它们的协方差 $\text{cov}(\xi, \eta)$ 呢, 这一点书上并没有明讲.

$$\begin{aligned}\text{cov}(\xi, \eta) &= E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = \\ &= E[\xi\eta - \xi E\eta - \eta E\xi + E\xi E\eta] = \\ &= E(\xi\eta) - E\xi E\eta - E\eta E\xi + E\xi E\eta = \\ &= E(\xi\eta) - E\xi E\eta\end{aligned}$$

即相乘的均值减去均值的相乘.

其中 $E\xi$ 和 $E\eta$ 是通过边缘分布计算的, 因此关键是如何计算 $E(\xi\eta)$.

对于离散型随机变量, 假设 ξ, η 的概率函数为 $P(\xi=x_i, \eta=y_j)=p_{ij}, (i, j=1, 2, \dots)$, 则

$$E(\xi \eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}$$

对于连续型随机变量, 假设 ξ, η 的联合概率密度为 $\varphi(x, y)$, 则

$$E(\xi \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \varphi(x, y) dy dx$$

例 假设 ξ, η 的联合概率函数如下表所示

$\xi \backslash \eta$	0	1/3	1
-1	0	1/12	1/3
0	1/6	0	0
2	5/12	0	0

$$\begin{aligned} E(\xi\eta) &= (-1) \times 0 \times 0 + (-1) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{12} + (-1) \times 1 \times \frac{1}{3} \\ &\quad + 0 \times 0 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} \times 0 + 0 \times 1 \times 0 \\ &\quad + 2 \times 0 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{3} \times 0 + 2 \times 1 \times 0 = -\frac{13}{36} \end{aligned}$$

而 ξ 与 η 的边缘分布及数学期望为:

ξ	-1	0	2
P	5/12	1/6	5/12

η	0	1/3	1
P	7/12	1/12	1/3

$$\text{则 } E\xi = -\frac{5}{12} + \frac{10}{12} = \frac{5}{12}, E\eta = \frac{1}{36} + \frac{1}{3} = \frac{13}{36}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= E(\xi\eta) - E\xi E\eta = \\ &= -\frac{13}{36} - \frac{5}{12} \cdot \frac{13}{36} = -\frac{221}{432} \end{aligned}$$

二.相关系数

相关系数 ρ 是一个无量纲的量

1. 定义 若随机变量 ξ , η 的方差和协方差均存在, 且 $D\xi > 0$, $D\eta > 0$, 则

$$\rho = \rho_{\xi\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}} \quad (3.19)$$

称为 ξ 与 η 的相关系数.

可以证明 $|\rho| \leq 1$ 。

如果 $|\rho| = 1$, ξ 与 η 有线性关系, 称 ξ 与 η 完全线性关系;

如果 $\rho = 0$, 称 ξ 与 η 不相关。

实际上 ρ 是刻画 ξ 与 η 间线性相关程度的一个数字特征。

相互独立的两个随机变量 ξ 与 η 一定不相关, 即 ρ 必为零。

逆命题不成立, 即不相关的两个随机变量不一定独立。