第三章 随机变量的数字特征

通常求出随机变量的分布并不是一件容易的事, 而人们更关心的是用一些数字来表示随机变量的特点, 这些与随机变量有关的数字, 就是随机变量的数字特征. 最常用的数字特征为数学期望, 方差和相关系数.

3.1 数学期望

数学期望是任何一个随机变量的最重要的也被最广泛使用的数学特征, 英文是 expectation, 另一种叫法为均值(mean or everage value)

它的实际意义就是平均值. 但属于一种更为严格的平均值, 和本书后面讲到的统计平均值有一些小差别.

首先从一个例子说起

假设一个班共20人, 其中18岁的有6人, 19岁的有10人, 20岁的有4人, 现任取一人观察其岁数, 则观察到的岁数ξ为一随机变量, 不难求出ξ的分布率如下表所示.

ξ	18	19	20
P	6/20	10/20	4/20

现在要计算这个班的学生的平均年龄

将这个班的学生的每个人的年龄加起来, 再除以这个班的人数20人, 即6个18岁, 10个19岁, 4个20岁加起来得平均年龄为

$$E\xi = \frac{6\times 18 + 10\times 19 + 4\times 20}{20}$$

$$= \frac{6}{20}\times 18 + \frac{10}{20}\times 19 + \frac{4}{20}\times 20$$

$$= 18p_{18} + 19p_{19} + 20p_{20}$$

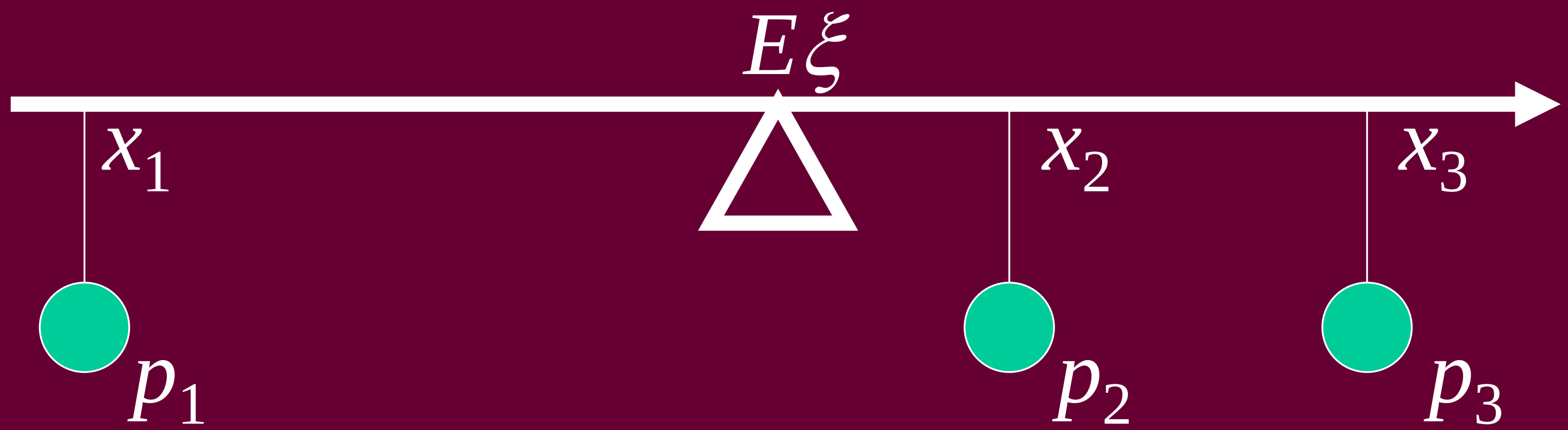
定义 3.1 假设离散型随机变量ξ有概率函数 $P\{\xi=x_k\}=p_k$ $(k=1,2,\ldots)$, 若级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

绝对收敛, 则称这级数为ξ的数学期望, 简称期望或均值, 记为$E\xi$, 即

$$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

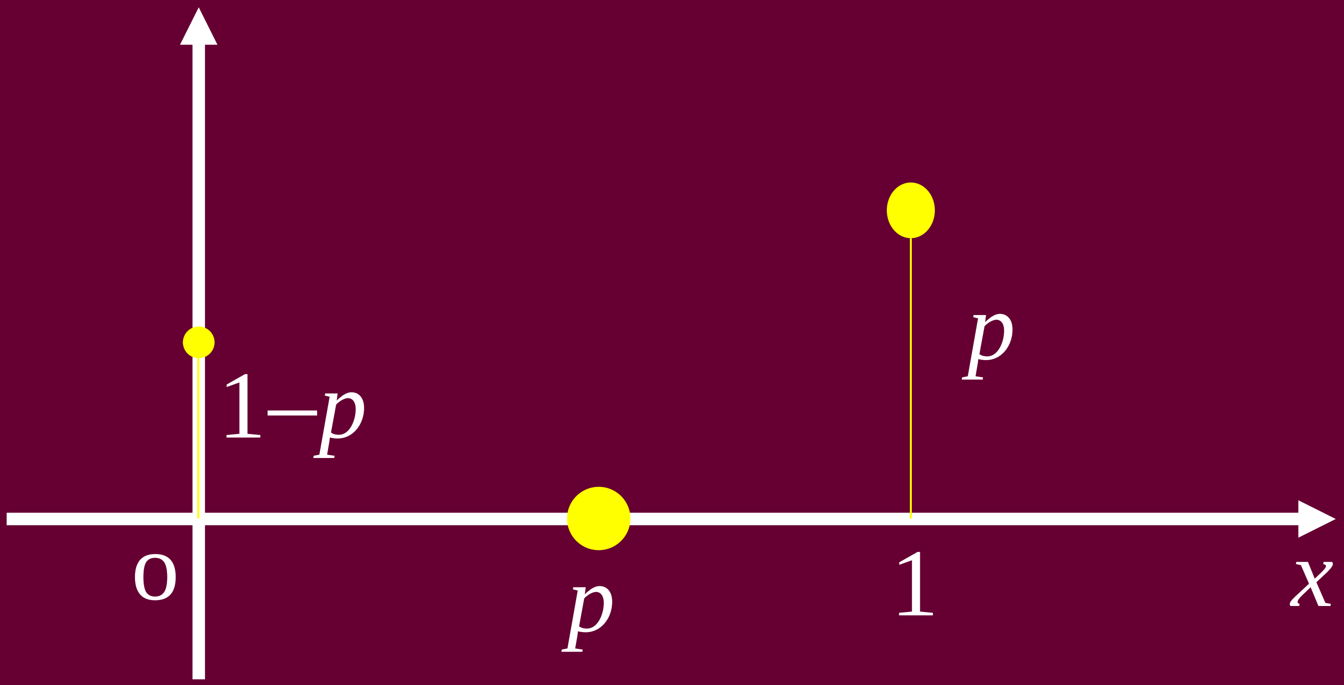
关于数学期望的一个力学上的解释, 在坐标轴上的$x_1,x_2,\ldots,$等点处放置质量为$p_1,p_2,\ldots$的质点, 则数学期望处为整个质点体系的重心.



例1 若ξ服从0-1分布, 其概率函数为

$P\{\xi=k\}=p^k(1-p)^{1-k}\ (k=0,1)$, 求$E\xi$

解 $E\xi=0\times(1-p)+1\times p=p$



例2 甲乙两名射手在一次射击中得分(分别用ξ,η表示)的分布律如下表所示, 试比较甲,乙两射手的技术.

ξ	1	2	3
P	0.4	0.1	0.5

η	1	2	3
P	0.1	0.6	0.3

解 $E\xi=1\times0.4+2\times0.1+3\times0.5=2.1$

$E\eta=1\times0.1+2\times0.6+3\times0.3=2.2$

这表明, 如果进行多次射击, 他们得分的平均值分别是2.1和2.2, 故乙射手较甲射手的技术好.

例3 一批产品中有一,二,三等品,等外品及废品5种, 相应的概率分别为0.7, 0.1, 0.1, 0.06, 及0.04, 若其产值分别为6元,5.4元,5元4元及0元. 求产品的平均产值.

解 产品产值ξ是一个随机变量, 其分布如下表:

ξ	6	5.4	5	4	0
P	0.7	0.1	0.1	0.06	0.04

因此,

$$E\xi=6\times0.7+5.4\times0.1+5\times0.1+4\times0.06+0\times0.04$$

$$=5.48(\text{元})$$

定义 3.2 设连续型随机变量ξ有概率密度$\varphi(x)$, 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx$$绝对收敛, 则

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx$$

称为ξ的数学期望.

例4 计算在区间$[a,b]$上服从均匀分布的随机变量ξ的数学期望.

解 依题意,

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

故 $$E\xi=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

例4 某种无线电元件的使用寿命ξ是一个随机变量, 其概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\lambda>0$, 求这种元件的平均使用寿命.

解 $$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda xe^{-\lambda x}dx=\int_{0}^{+\infty}xd\left(-e^{-\lambda x}\right)$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

其中用到分部积分公式$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

3.2 数学期望的性质

我们可以得出一个重要的性质, 就是无论ξ是离散型的随机变量还是连续型的随机变量, 我们都可以用下面的式子来计算ξ的函数$f(\xi)$的数学期望:

$$E[f(\xi)]=\begin{cases}\sum_k f(x_k)p_k & \text{当}\xi\text{为离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx & \text{当}\xi\text{为连续型}\end{cases}$$

因为求$f(\xi)$的分布经常是不容易的, 这两个式子无须求$f(\xi)$的分布因此极大地简化了数学期望的计算, 在各种论文中被广泛使用.

我们得到二元随机变量ξ,η的函数$f(\xi,\eta)$的数学期望的公式为:

$$E[f(\xi,\eta)]=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{i}\sum\limits_{j} f(x_i, y_j)p_{ij} & \text{当}\xi,\eta\text{为离散型}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)dydx & \text{当}\xi,\eta\text{为连续型}\end{cases}$$

这样也避免了求二元随机变量的函数的分布而直接根据原概率函数或概率密度来求二元随机变量的函数的分布, 因此也得到广泛的应用.

数学期望的性质

(1) 常量的期望就是这个常量本身, 即$E(c)=c$.

证 常量c可以看作是以概率1只取一个值c的随机变量, 所以

$$E(c)=c\times 1=c$$

(2) 随机变量ξ与常量c之和的数学期望等于ξ的期望与这个常量c的和$E(\xi+c)=E\xi+c$

证 令$\eta=f(\xi)=\xi+c$, 则

$$\text{当}\xi\text{为离散}: E(\xi+c)=\sum_k (x_k+c)p_k=$$

$$\sum_k x_k p_k+\sum_k cp_k=E\xi+c$$

$$\text{当}\xi\text{为连续}: E(\xi+c)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+c)\varphi(x)dx=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}c\varphi(x)dx=E\xi+c$$

(3) 常量c与随机变量ξ的乘积等于这个常量与此随机变量的期望的乘积, $E(c\xi)=cE\xi$

证 令$\eta=f(\xi)=c\xi$, 则

$$\text{当}\xi\text{为离散}: E(c\xi)=\sum_k cx_k p_k$$

$$=c\sum_k x_k p_k = cE\xi$$

$$\text{当}\xi\text{为连续}: E(c\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} cx\varphi(x)dx$$

$$=c\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = cE\xi$$

(4) 随机变量的线性函数的数学期望等于这个随机变量期望的同一线性函数, 即

$$E(k\xi+c)=kE\xi+c$$

证 $E(k\xi+c)=E(k\xi)+c=kE\xi+c$

(5) 两个随机变量之和的数学期望等于这两个随机变量数学期望之和.$E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$

证 设$f(\xi,\eta)=\xi+\eta$, 则

$$\text{离散型}: E(\xi+\eta)=\sum_i\sum_j(x_i+y_j)p_{ij}$$

$$=\sum_i x_i p_i^{(1)}+\sum_j y_j p_j^{2}=E\xi+E\eta$$

$$\text{连续型}: E(\xi+\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\varphi(x,y)dydx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x,y)dydx+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi(x,y)dydx=E\xi+E\eta$$

这个性质可推广到任意有限个随机变量的情况，即对于$n>2$也同样有

$$E(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=E\xi_1+E\xi_2+\ldots+E\xi_n$$

特别地，n个随机变量的算术平均数仍是一个随机变量，其期望值等于这n个随机变量期望的算术平均数.

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i$$

(6) 两个相互独立随机变量乘积的数学期望等于它们数学期望的乘积, 即

$$E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta$$

证 设$f(\xi,\eta)=\xi\eta$, 则

$$离散型: E(\xi\eta)=\sum_i\sum_j x_i y_j p_i^{(1)} p_j^{(2)}=$$

$$=\sum_i x_i p_i^{(1)}\sum_j y_j p_j^{(2)}=E\xi\cdot E\eta$$

$$连续型: E(\xi\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_1(x)\varphi_2(y)dydx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_1(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_2(y)dy=E\xi\cdot E\eta$$

例1 两相互独立的随机变量ξ,η的分布如下面两表所示, 计算$E(\xi+\eta)$和$E(\xi\eta)$

ξ	9	10	11
P	0.3	0.5	0.2

η	6	7
P	0.4	0.6

解 $E\xi=9\times0.3+10\times0.5+11\times0.2=9.9$

$E\eta=6\times0.4+7\times0.6=6.6$

则$E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta=9.9+6.6=16.5$

且因ξ与η相互独立, 因此$E(\xi\eta)=9.9\times6.6=65.34$

例2 计算上式的$E\eta^2$

解 $E\eta^2=6^2\times0.4+7^2\times0.6=43.8$

例3 有一队射手共9人, 技术不相上下, 每人射击中靶的概率均为0.8; 进行射击, 各自打中靶为止, 但限制每人最多只打3次, 问大约需为他们准备多少发子弹?

解 设ξ_i表示第i名射手所需的子弹数目, ξ表示9名射手所需的子弹数目, 则$\xi=\xi_1+\ldots+\xi_9$, 且ξ_i有如下分布律:

ξ_i	1	2	3
P	0.8	0.16	0.04

$E\xi_i=1.24$ $E\xi=E\xi_1+\ldots+E\xi_9=9\times1.24=11.16$

再多准备10%, 则约需为他们准备13发子弹.

例5 据统计, 一位40岁的健康(一般体检未发现病症)者, 在5年之内活着或自杀死亡的概率为p($0<p<1$, p为已知), 在5年内非自杀死亡的概率为$1-p$, 保险公司开办5年人寿保险, 参加者需交保险费a元(a已知), 若5年之内非自杀死亡, 公司赔偿b元($b>a$). b应如何定才能使公司可期望获益; 若有m人参加保险, 公司可期望从中收益多少?

解 设ξ_i表示公司从第i个参加者身上所得的收益, 则ξ_i是一个随机变量, 其分布如下:

ξ_i	a	$a-b$
P	p	$1-p$

公司期望获益为$E\xi_i>0$, 而

$$E\xi_i=ap+(a-b)(1-p)=a-b(1-p)$$

因此, $a<b<a(1-p)^{-1}$. 对于m个人, 获益ξ元,

$$\xi=\sum_{i=1}^{m}\xi_i,\quad E\xi=\sum_{i=1}^{m}E\xi_i=ma-mb(1-p)$$