

第 8 章 MATLAB 符号运算

Lecturer: 白煌

杭州师范大学
信息科学与技术学院

2022.12.9



本章要点

- MATLAB 符号对象
- MATLAB 符号微积分
- MATLAB 符号级数
- MATLAB 符号方程求解



目录

① 8.1 符号对象

② 8.2 符号微积分

③ 8.3 级数

④ 8.4 符号方程求解



8.1.1 建立符号对象

1. 建立符号变量和符号常量

- **sym 函数：** sym 函数用来建立一个符号对象，常用的调用格式为
符号对象名=sym(A)

该函数由 A 来建立符号对象，A 可以是一个数值常量、数值矩阵或数值表达式（不加单撇号），这时 sym 函数将数值对象转换为符号对象。A 也可以是一个变量名（加单撇号），这时 sym 函数将创建一个符号变量。



8.1.1 建立符号对象

1. 建立符号变量和符号常量

- **sym 函数：** sym 函数用来建立一个符号对象，常用的调用格式为

符号对象名=sym(A)

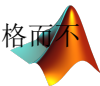
该函数由 A 来建立符号对象，A 可以是一个数值常量、数值矩阵或数值表达式（不加单撇号），这时 sym 函数将数值对象转换为符号对象。A 也可以是一个变量名（加单撇号），这时 sym 函数将创建一个符号变量。

- **syms 命令：** 函数 sym 一次只能定义一个符号变量，使用不方便。

MATLAB 提供了命令 syms，一次可以定义多个符号变量。syms 命令的一般调用格式为

syms 符号变量名1 符号变量名2 ... 符号变量名n

用这种格式定义符号变量时不要在变量名上加单撇号，变量间用空格而不要用逗号分隔。



8.1.1 建立符号对象

2. 建立符号表达式

通过 $+$ 、 $-$ 、 $*$ 、 $/$ 、 $^$ 等运算符将已经定义的符号对象连接起来，就组成了符号表达式。



8.1.2 符号表达式运算

1. 符号表达式的四则运算

符号表达式的四则运算与数值运算一样，用 $+$ 、 $-$ 、 $*$ 、 $/$ 、 $^$ 等运算符实现，其运算结果依然是一个符号表达式。



8.1.2 符号表达式运算

2. 符号表达式的提取分子和分母运算

如果符号表达式是一个有理分式或可以展开为有理分式，可利用 `numden` 函数来提取符号表达式中的分子或分母。其一般调用格式为：

$$[n,d]=\text{numden}(s)$$

该函数提取符号表达式 s 的分子和分母，分别将它们存放在 n 与 d 中。



8.1.2 符号表达式运算

3. 符号表达式的因式分解与展开

MATLAB 提供了符号表达式的因式分解与展开的函数，函数的调用格式为：

- `factor(s)`: 对符号表达式 s 分解因式。
- `expand(s)`: 对符号表达式 s 进行展开。
- `collect(s)`: 对符号表达式 s 合并同类项。
- `collect(s,v)`: 对符号表达式 s 按变量 v 合并同类项。



8.1.2 符号表达式运算

4. 符号表达式系数的提取

如果符号表达式是一个多项式，可利用 `coeffs` 函数来提取符号表达式中的系数。其一般调用格式为：

$$c = \text{coeffs}(s[,x])$$

该函数返回多项式中按指定变量升幂顺序排列的系数，若没有指定变量，则返回所有项的常系数，且按离字符“x”近原则确定主变量。



8.1.2 符号表达式运算

5. 符号表达式的化简

MATLAB 提供 `simplify(s)` 函数对符号表达式 `s` 进行化简。



8.1.2 符号表达式运算

6. 符号表达式与数值表达式之间的转换

- 函数 `sym` 可以将数值表达式变换成它的符号表达式。
- 函数 `eval` 可以将符号表达式变换成数值表达式。



8.1.2 符号表达式运算

7. 符号多项式与多项式系数向量之间的转换

- 函数 `sym2poly` 可以将符号多项式转换为多项式系数向量。
- 函数 `poly2sym` 可以将多项式系数向量转换为符号多项式。



8.1.3 符号表达式中变量的确定

`symvar` 函数可以帮助用户查找一个符号表达式中的符号变量，其调用格式为：

`symvar(s[,n])`

该函数以向量形式返回符号表达式 `s` 中的 `n` 个符号变量，若没有指定 `n`，则返回 `s` 中的全部符号变量。



8.1.4 符号矩阵的运算

- 符号矩阵是一种符号表达式，所以前面介绍的符号表达式运算都可以在矩阵意义下进行。但应注意这些函数作用于符号矩阵时，是分别作用于矩阵的每一个元素。



8.1.4 符号矩阵的运算

- 符号矩阵是一种符号表达式，所以前面介绍的符号表达式运算都可以在矩阵意义下进行。但应注意这些函数作用于符号矩阵时，是分别作用于矩阵的每一个元素。
- 符号矩阵是一个矩阵，所以符号矩阵还能进行有关矩阵的运算，包括前几章介绍过的应用于数值矩阵的点运算符和函数，如 `diag`、`triu`、`tril`、`inv`、`det`、`rank`、`eig` 等。



8.2.1 符号极限

limit 函数的调用格式为:

- $\text{limit}(f,x,a)$: 计算当变量 x 趋近于常数 a 时, $f(x)$ 函数的极限值。
- $\text{limit}(f,a)$: 由于没有指定符号函数 $f(x)$ 的自变量, 则使用该格式时, 符号函数 $f(x)$ 的变量为函数 $\text{symvar}(f)$ 确定的默认自变量, 即变量 x 趋近于 a 。
- $\text{limit}(f)$: 符号函数 $f(x)$ 的变量为函数 $\text{symvar}(f)$ 确定的默认变量; 没有指定变量的目标值时, 系统默认变量趋近于 0, 即 $a=0$ 的情况。
- $\text{limit}(f,x,a,'right')$: 'right' 表示变量 x 从右边趋近于 a 。
- $\text{limit}(f,x,a,'left')$: 'left' 表示变量 x 从左边趋近于 a 。



8.2.1 符号极限

例 8-1: 求下列极限。

极限 1:

```
>> syms a m x;  
>> f=(x*(exp(sin(x))+1)-2*(exp(tan(x))-1))/(x+a);  
>> limit(f,x,a)
```

极限 2:

```
>> syms x t;  
>> limit((1+2*t/x)^(3*x),x,inf)
```

极限 3:

```
>> syms x;  
>> f=x*(sqrt(x^2+1)-x);  
>> limit(f,x,inf,'left')
```

极限 4:

```
>> syms x;  
>> f=(sqrt(x)-sqrt(2)-sqrt(x-2))/sqrt(x*x-4);  
>> limit(f,x,2,'right')
```



8.2.2 符号导数

`diff` 函数用于对符号表达式求导数，其一般调用格式为：

- `diff(s)`: 没有指定变量和导数阶数，则系统按 `symvar` 函数指示的默认变量对符号表达式 `s` 求一阶导数。
- `diff(s,'v')`: 以 `v` 为自变量，对符号表达式 `s` 求一阶导数。
- `diff(s,n)`: 按 `symvar` 函数指示的默认变量对符号表达式 `s` 求 `n` 阶导数，`n` 为正整数。
- `diff(s,'v',n)`: 以 `v` 为自变量，对符号表达式 `s` 求 `n` 阶导数。



8.2.2 符号导数

例 8-2: 求下列函数的导数。

```
>> syms x y z a t;  
>> f=exp(-x)+x;  
>> diff(f)      % 求 (1)。未指定求导变量和阶数，按默认规则处理  
>> f=cos(x*x);  
>> diff(f,x,2)   % 求 (2)。求 f 对 x 的二阶导数  
>> diff(f,x,3)   % 求 (2)。求 f 对 x 的三阶导数  
>> f1=a*cos(t); f2=a*sin(t);  
>> diff(f2)/diff(f1) % 求 (3)。按参数方程求导公式求 y 对 x 的导数  
>> (diff(f1)*diff(f2,2)-diff(f1,2)*diff(f2))/(diff(f1))^3 % 求 (3) 二阶导数  
>> f=x+1/y^2;  
>> diff(f,x)     % 求 (4)。z 对 x 的偏导数  
>> diff(f,y)     % 求 (4)。z 对 y 的偏导数
```



8.2.3 符号积分

符号积分由函数 `int` 来实现。该函数的一般调用格式为:

- `int(s)`: 没有指定积分变量和积分阶数时, 系统按 `symvar` 函数指示的默认变量对被积函数或符号表达式 `s` 求不定积分。
- `int(s,v)`: 以 `v` 为自变量, 对被积函数或符号表达式 `s` 求不定积分。
- `int(s,v,a,b)`: 求定积分运算。`a` 和 `b` 分别表示定积分的下限和上限。该函数求被积函数在区间 `[a,b]` 上的定积分。`a` 和 `b` 可以是两个具体的数, 也可以是一个符号表达式, 还可以是无穷 (`inf`)。当函数 `f` 关于变量 `x` 在闭区间 `[a,b]` 上可积时, 函数返回一个定积分结果。当 `a` 和 `b` 中有一个是 `inf` 时, 函数返回一个广义积分。当 `a,b` 中有一个符号表达式时, 函数返回一个符号函数。



8.2.3 符号积分

例 8-3: 求下列积分。

```
>> x=sym('x');  
>> f=1/(1+x^ 2);  
>> int(f)                                % 求不定积分 (1)  
>> syms alpha t  
>> int([exp(t),exp(alpha*t)])           % 求 (2)  
>> f=sqrt(1/(1+x));  
>> int(f,0,2)                            % 求定积分 (3)  
>> int(4*x*t,t,2,sin(x))               % 求定积分 (4)
```



8.3.1 级数符号求和

求无穷级数的和需要符号表达式求和函数 `symsum`，调用格式为：

$$\text{symsum}(s,v,n,m)$$

其中， s 表示一个级数的通项，是一个符号表达式。 v 是求和变量， v 省略时使用系统的默认变量。 n 和 m 是求和的开始项和末项。



8.3.1 级数符号求和

例 8-4: 求下列级数之和。

```
>> syms n;  
>> s=symsum(1/n^ 2,1,inf)      % 求 (1)  
>> y=symsum(1/(2*n-1),1,10)    % 求 (2)  
>> eval(y)    % 转换为数值
```



8.3.2 函数的泰勒级数

MATLAB 提供了 `taylor` 函数将函数展开为幂级数，其调用格式为：

```
taylor(f,v,a)
```

```
taylor(f,v,a,Name,Value)
```

该函数将函数 f 按变量 v 展开为泰勒级数， v 的默认值与 `symvar` 函数指示的默认变量相同。参数 a 指定将函数 f 在自变量 $v=a$ 处展开， a 的默认值是 0。第二种格式用于运算时设置相关选项，`Name` 和 `Value` 成对使用，`Name` 为选项，`Value` 为 `Name` 的值。



8.3.2 函数的泰勒级数

例 8-5: 求函数在指定点的泰勒级数展开式。

```
>> syms x;  
>> f1=(1+x+x^2)/(1-x+x^2);  
>> taylor(f1)      % 求 (1)  
>> f2=log(x);  
>> taylor(f2,x,1,'Order',6)      % 求 (2), 应选择 n=6
```



8.4.1 符号代数方程求解

在 MATLAB 中，求解用符号表达式表示的代数方程可由函数 `solve` 实现，其调用格式为：

- `solve(s)`: 求解符号表达式 s 的代数方程，求解变量为默认变量。
- `solve(s,v)`: 求解符号表达式 s 的代数方程，求解变量为 v 。
- `solve([s1,s2,...,sn],[v1,v2,...,vn])`: 求解符号表达式 $s1,s2,...,sn$ 组成的代数方程组，求解变量分别为 $v1,v2,...,vn$ 。



8.4.1 符号代数方程求解

例 8-6: 解下列方程。

```
>> syms x y z a
```

```
>> x=solve(1/(x+2)+a==1/(x-2),x)           % 解方程 (1)
```

```
>> syms x y z
```

```
>> [x,y,z]=solve([x+2*y-z==27,x+z==3,...  
                  x^2+3*y^2==12],[x,y,z])    % 解方程 (2)
```



8.4.2 符号常微分方程求解

在 MATLAB 中，用大写字母 D 表示导数。例如， Dy 表示 y' ， $D2y$ 表示 y'' ， $Dy(0)=5$ 表示 $y'(0)=5$ 。 $D3y+D2y+Dy-x+5=0$ 表示微分方程 $y''' + y'' + y' - x + 5 = 0$ 。符号常微分方程求解可以通过函数 `dsolve` 来实现，其调用格式为：

`dsolve(e,c,v)`

该函数求解常微分方程 e 在初值条件 c 下的特解。参数 v 描述方程中的自变量，省略时按默认原则进行处理，若没有给出初值条件 c ，则求方程的通解。

`dsolve` 在求常微分方程组时的调用格式为：

`dsolve(e1,e2,...,en,c1,...,cn,v1,...,vn)`

该函数求解常微分方程组 $e1, \dots, en$ 在初值条件 $c1, \dots, cn$ 下的特解，若不给出初值条件，则求方程组的通解， $v1, \dots, vn$ 给出求解变量。

