第二章 随机变量及其分布

2.1 随机变量的概念

再谈试验及样本空间

一次随机试验的所有可能的试验结果ω所构成的集合被称作样本空间Ω, 而每一个可能的试验结果ω构成样本点. 样本点的集合A称作事件, 只包含一个样本点的集合$\{\omega\}$被称作基本事件.

请注意, 这里的试验结果实际上是一次试验的全过程的记录, 因此和我们原来的印象中的试验结果并非一样, 并非试验结束时候的那个结果.

因此, 样本空间是一个非常抽象的集合

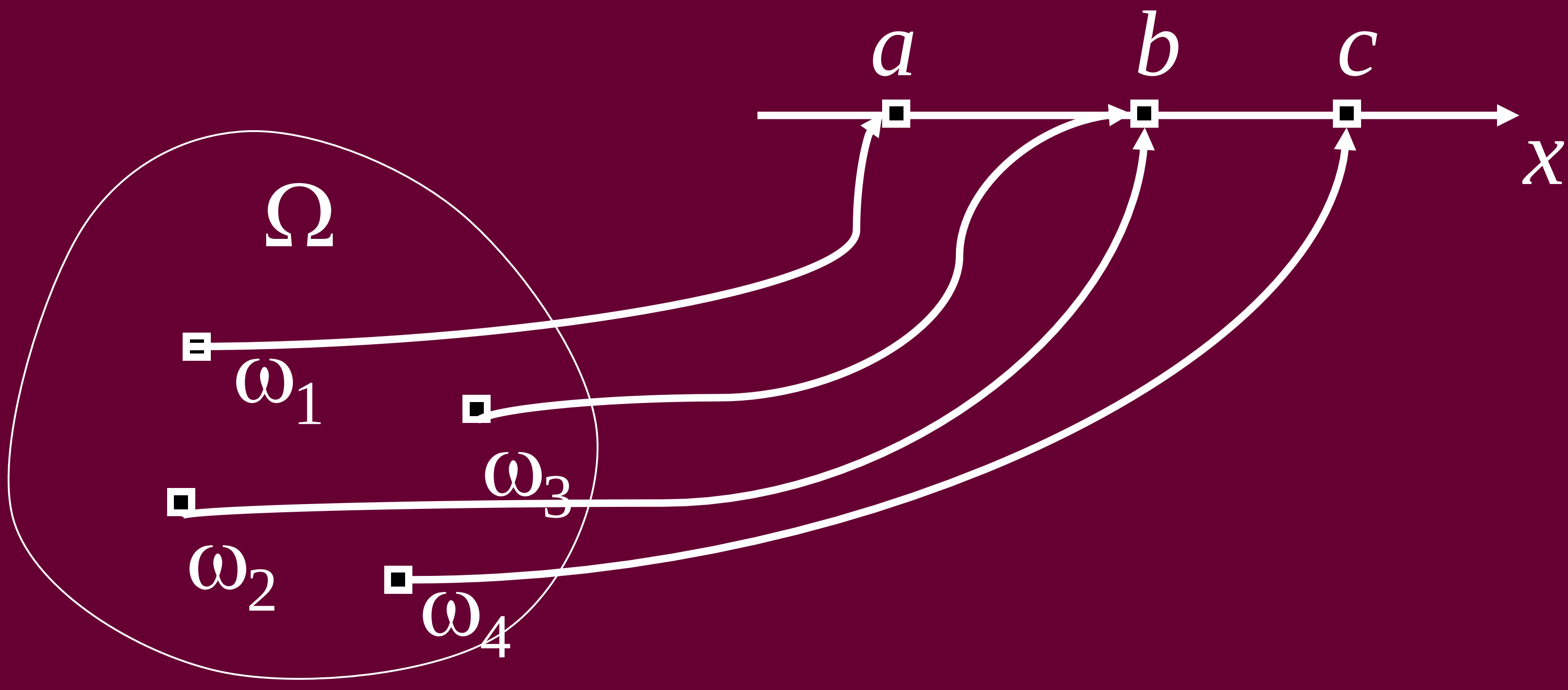
从理论上讲它可以是任何集合. 但这对于研究带来了许多不方便.

而数学上则更喜欢研究实数集合.

一方面, 样本空间本身也可能就是实数集合或者其子集.

另一方面, 可以建立一个从样本空间到实数集合的一个映射, 即每给定一个实验结果或者样本点ω, 存在着唯一的一个实数$\xi(\omega)$与之对应. 这样就建立了一个自变量为ω而函数值则为实数的一个特殊的"函数". 我们称之为随机变量.

这可以用下图来示意



此图显示了只有四个样本点的一个样本空间映射到实数a,b,c的一种映射. 注意ω_1和ω_2映射到同一个实数b, 这是一种常见的情况.

从样本空间到实数的映射方法有许多种,

每一种映射方法, 被称为一个随机变量. 一般用希腊字母ξ, η, ζ或大写拉丁字母X,Y,Z等表示.

通常的试验的结果都能够通过各种编码的方法映射到实数集合. 而也有一些试验的结果干脆就是数字, 即样本空间本来就是实数.

当我们看到一个随机变量ξ时, 可以想到一种在实数轴上进行的随机试验, 每次试验的结果的样本空间就是实数集合, 每一次试验都将产生一个具体的实数, 但具体产生哪个实数不可预知.

一些随机变量的例

(1) 一个射手对目标进行射击, 击中目标记为1分, 未中目标记为0分. 如果用ξ表示射手在一次射击中的得分, 则它是一个随机变量, 可以取0和1两个可能的值.

(2) 某段时间内候车室的旅客数目记为ξ, 它是一个随机变量, 可以取0及一切不大于M的自然数, M为候车室的最大容量.

(3) 单位面积上某农作物的产量ξ是一个随机变量, 它可以取一个区间内的一切实数值, 即$\xi\in[0,T]$, T是一个常数.

给定一随机变量ξ, 它有可能取某些值, 而没有可能取另一些值. 因此可按取值情况将随机变量分为两类:

(1) 离散型随机变量只可能取有限个或无限可列个值.

(2) 非离散型随机变量可能取任何实数.

而非离散型随机变量中最常用的为连续型随机变量.

2.2 随机变量的分布

离散型随机变量的分布

定义 2.1 如果随机变量ξ只取有限个或可列个可能值, 而且以确定的概率取这些不同的值, 则称ξ为离散性随机变量.

为直观起见, 将ξ可能取的值及相应概率列成概率分布表如下

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

此外, ξ的概率分布情况也可以用一系列等式表示: $P(\xi=x_k)=p_k \quad (k=1,2,\ldots)$

这被称作随机变量ξ的概率函数(或概率分布)

其中$\{\xi=x_1\}, \{\xi=x_2\}, \ldots, \{\xi=x_k\}, \ldots$构成一完备事件组. 因此概率函数具有如下性质:

$$(1)\ p_k \geq 0 \quad k = 1,2,\ldots$$

$$(2)\sum_k p_k = 1$$

一般所说的离散性随机变量的分布就是指它的概率函数或概率分布表.

上面两个性质中的性质(2)经常在解题中构成解方程的一个条件.

例1 一批产品的废品率为5%, 从中任意抽取一个进行检验, 用随机变量ξ来描述废品出现的情况. 好写出ξ的分布.

解 用ξ表示废品的个数, 则它只能取0或1两个值. "ξ=0"表示"产品为合格", "ξ=1"表示"产品为废品", 则概率分布表如下

ξ	0	1
P	0.95	0.05

即$P\{\xi=0\}=0.95$, $P\{\xi=1\}=0.05$, 或可写为

$$P\{\xi=k\}=0.05^k 0.95^{1-k} \qquad (k=0,1)$$

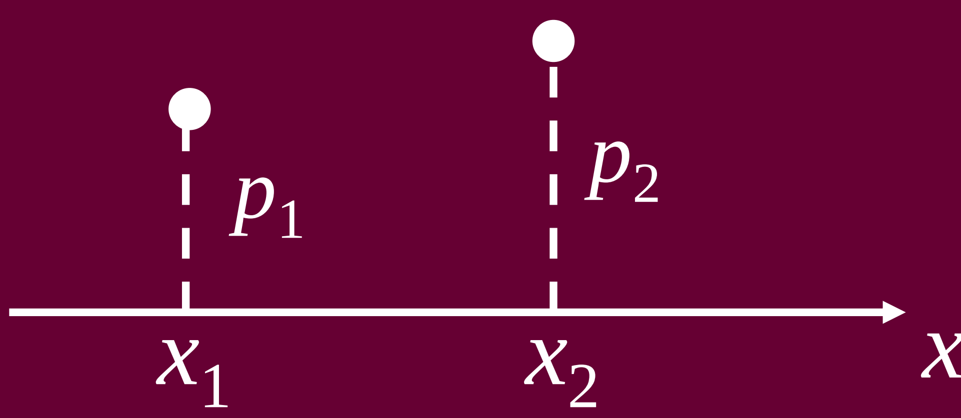
两点分布: 只有两个可能取值的随机变量所服从的分布, 称为两点分布. 其概率函数为

$$P(\xi=x_k)=p_k \qquad (k=1,2)$$

概率分布表为:

ξ	x_1	x_2
P	p_1	p_2

概率分布图为



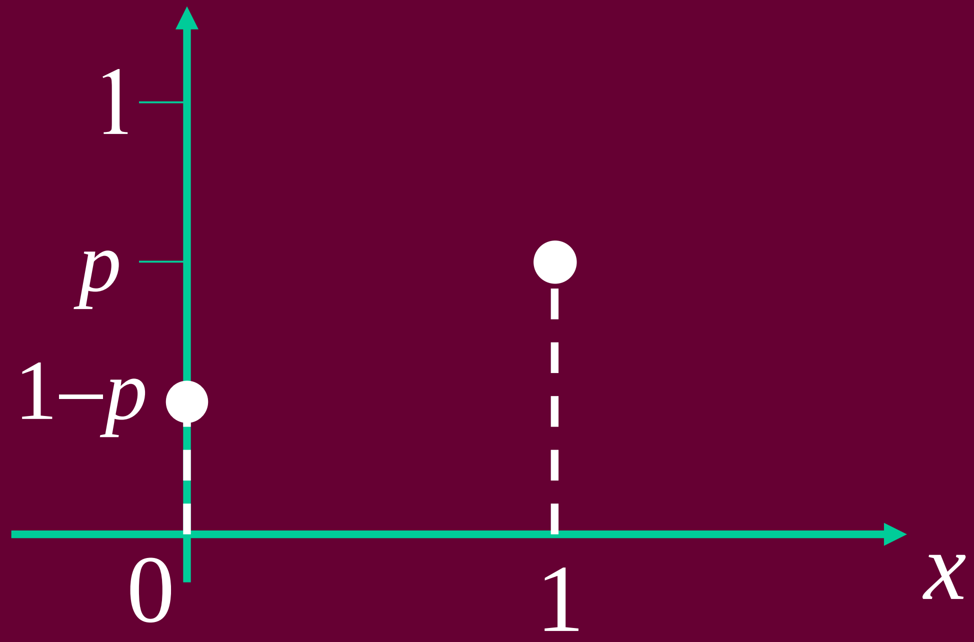
0-1分布: 只取0和1两个值的随机变量所服从的分布称为0-1分布. 其概率函数为

$$P(\xi=k)=p^k(1-p)^{1-k} \quad (k=0,1)$$

概率分布表为:

ξ	0	1
P	$1-p$	p

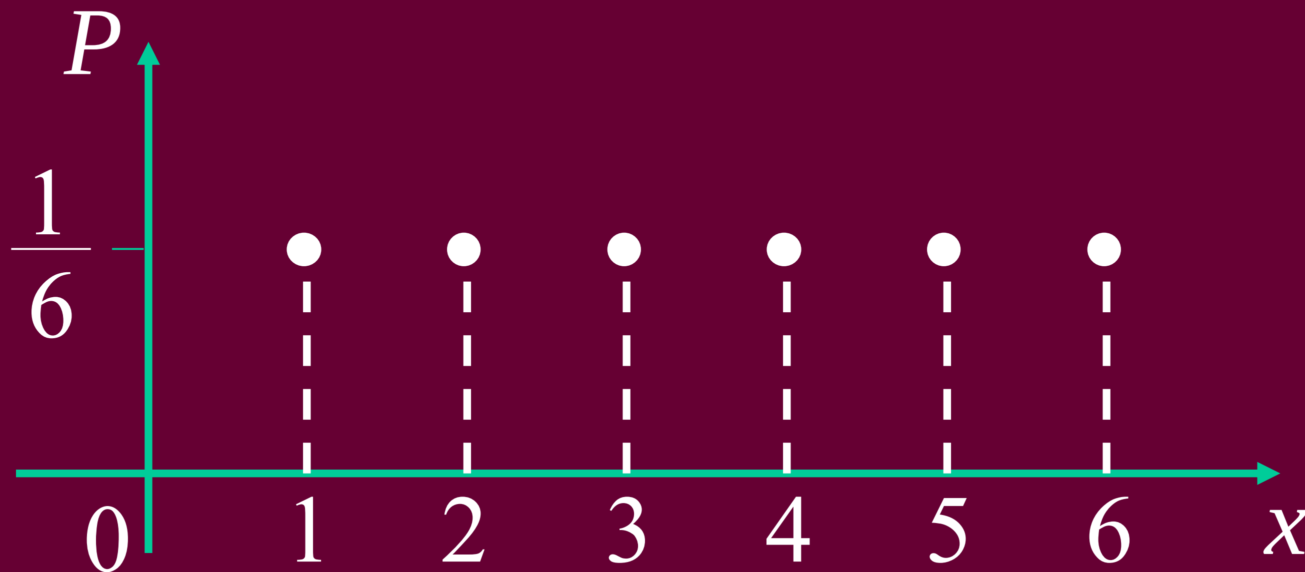
概率分布图为



例3 用随机变量描述掷一颗骰子的试验情况

解 令ξ表示掷一颗骰子出现的点数, 它可取1到6共6个自然数, 相应的概率都是1/6, 列成概率分布表和概率分布图如下

ξ	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



离散型均匀分布

如果随机变量ξ有概率函数:

$$P(\xi = x_k) = \frac{1}{n} \quad (k = 1,2,\ldots,n)$$

且当$i \neq j$时, $x_i \neq x_j$,

则称ξ服从离散型均匀分布.

例4 社会上定期发行某种奖券, 每券1元, 中奖率为p, 某人每次购买1张奖券, 如果没有中奖下次再继续购买1张, 直到中奖为止. 求该人购买次数ξ的分布.

解 "$\xi=1$"表示第一次购买的奖券中奖, 依题意$P(\xi=1)=p$,

"$\xi=2$"表示购买两次奖券, 但第一次未中奖, 其概率为$1-p$, 而第二次中奖, 其概率为p. 由于各期奖券中奖与否相互独立, 所以

$$P(\xi=2)=(1-p)p;$$

"$\xi=i$"表示购买i次, 前$i-1$次都未中奖, 而第i次中奖, $P(\xi=i)=(1-p)^{i-1}p$.

由此得到ξ的概率函数为

$$P(\xi=i)=p(1-p)^{i-1} \quad (i=1,2,\ldots)$$

验证$\sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}=\sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1}=1$

其中$q=1-p$,上面的级数称为几何级数,也称为等比级数,因为级数中每一项与前一项之比为常数q,称为公比,几何级数在公比小于1时收敛于

$$\sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1}=\frac{p}{1-q}=\frac{p}{p}=1$$

称此分布为几何分布

随机变量的分布函数

定义 2.2 若ξ是一个随机变量(可以是离散型的，也可以是非离散型的), 对任何实数x, 令

$$F(\xi)=P(\xi\le x)$$

称$F(x)$是随机变量ξ的分布函数

(因此, 要求出一个随机变量的分布函数的工作量是很大的, 理论上要算无穷多个事件的概率才行)

$F(x)$, 即事件"$\xi \le x$"的概率是x的一个实函数

对任意实数$x_1<x_2$, 有

因$\{\xi \le x_2\} \supset \{\xi \le x_1\}$

$\{x_1<\xi \le x_2\}=\{\xi \le x_2\}-\{\xi \le x_1\}$

$P(x_1<\xi \le x_2)=P(\xi \le x_2)-P(\xi \le x_1)$

即

$P(x_1<\xi \le x_2)=F(x_2)-F(x_1)$

因此, 若已知ξ的分布函数$F(x)$, 就能知道ξ在任何一个区间上取值的概率, 从这个意义上说, 分布函数完整地描述了随机变量的变化情况

分布函数$F(x)$具有如下几个性质:

(1) $0 \le F(x) \le 1$, 对一切$x \in R$成立

(2) $F(x)$是x的不减函数,即

任给$x_1, x_2 \in R, x_2 > x_1$有

$$F(x_2) \ge F(x_1)$$

(3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

(4) $F(x)$至多有可列个间断点,

而且在间断点上也是右连续的

分布函数与概率函数满足关系:

概率函数: $P(\xi = x_k) = p_k \ (k = 1,2,3,\ldots)$

分布函数: $F(x) = \sum\limits_{k: x_k \leq x} p_k$

例6 求本节例1中的分布函数

解 在例1中ξ的分布函数如下表所示:

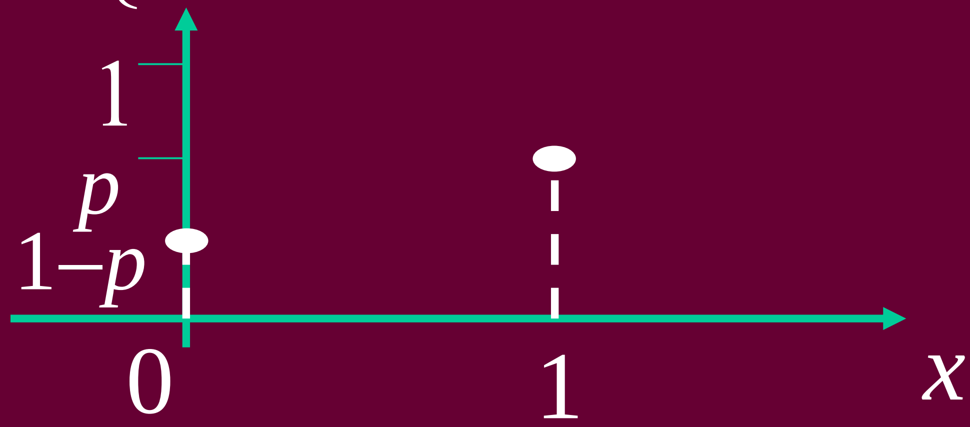
ξ	0	1
P	0.95	0.05

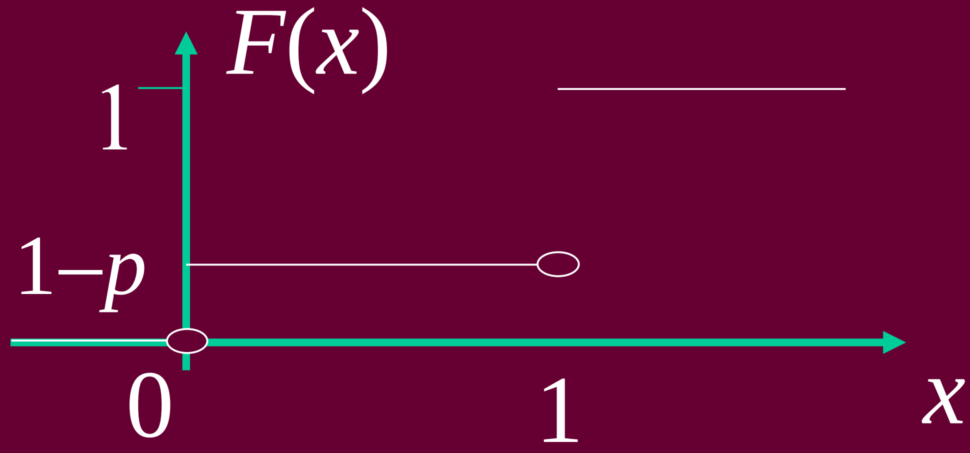
其分布函数为

$$F(x)=P(\xi\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.95 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

对于一般的0-1分布: 其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-p & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$





例7 求例3中的分布函数$F(x)$

解

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \dfrac{k}{6} & k\le x<k+1\ (k=1,2,3,4,5) \\ 1 & x\ge 6 \end{cases}$$

ξ的概率函数及$F(x)$的图形为