

《高等数学 A1》试卷(A 卷)

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、单项选择题：(填上正确选择前面的字母，共 15 分，每小题 3 分)

得分	
----	--

1. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $a < x_0 < x_1 < b$ ；且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} g(x) = 0$ ，则以下说法正确的是 ()

A. 当 $x \rightarrow x_0$ 时， $f(x) + g(x)$ 为无穷小

B. 当 $x \rightarrow x_1$ 时， $f(x) - g(x)$ 为无穷小

C. 当 $x \rightarrow x_0$ 时， $f(x)g(x)$ 为无穷小

D. 当 $x \rightarrow x_1$ 时， $\frac{f(x)}{g(x)}$ 为无穷大或无穷小或为某个常数

2. 设 $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$ ，关于 $f(x)$ 的间断点，以下说法正确的是 ()

A. $x = 0$ 为可去间断点

B. $x = 1$ 为无穷间断点

C. $x = -1$ 为跳跃间断点

D. 以上都不对

3. 积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ()$

A. π

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{4}$

4. 下列方程中可化为一阶线性微分方程的是 ()

A. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$

B. $(x - 2y + 1)dx = (2x - y + 1)dy$

C. $\frac{xdx}{1+y} = \frac{ydy}{1+x}$

D. $y' = \frac{1}{2x - y}$

5. 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y = ()$

A. $y = C_1x + C_2e^x + 2e^{2x}$

B. $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + 2e^{2x}$

C. $y = C_1x + C_2e^x - 2e^{2x}$

D. $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 2e^{2x}$

二、填空题（共 18 分，每小题 3 分）

得分	
----	--

6. 设函数 $y = \sqrt{4 - 3x - x^2}$ ，则函数的值域为_____

7. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + 2n}{n^2} =$ _____

8. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$ ，则 $f'(10) =$ _____

9. 设 $f(x) = \int_0^x t(t-4)dt$ ，则 $f(x)$ 在 $[-1, 5]$ 上最小值为_____

10. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^x ，则 $f'(x) =$ _____

11. 该函数 $f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 a 满足的条件是_____

得分	
----	--

三、解答题：（共 42 分，每小题 6 分）

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t)dt}{(1 - \cos x)^2}$ 。

13. 求参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a > 0)$ 所确定函数的微分 dy 。

14. 已知 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x + \tan^2 x (0 < x < 1)$ ，求 $f(x)$ 。

15. 计算定积分 $\int_0^{63} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$ 。

16. 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $xy + e^y = e^x$ 所确定的隐含数, 求 $y''(0)$ 。

17. 求微分方程 $y' + \frac{y}{x} = e^x$ 满足条件 $y(1) = 0$ 的解。

18. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 8e^x$ 的通解。

得分	
----	--

四、分析与应用题 (共 20 分, 每小题 10 分)

19. 若直角三角形的一直边与斜边之和为常数, 求有最大面积的直角三角形。

20. 求由曲线 $y = x^2 + 1$, 直线 $y=0$, $x=0$ 和 $x=1$ 所围成的平面图形的面积, 以及此图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

得分	
----	--

五、证明题: (共 5 分, 每小题 5 分)

21. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且满足 $f(1) = 2 \int_0^1 xf(x)dx$, 试证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。