大数定律总结

有关贡献

本学期的学习中我们学习了关于大数定律的一些知识，我在网络上也学习到了一些大数定律的不同形式，我希望能将这些有关强大数定律的证明，应用等知识串联起来，做个总结。

强大数定律（1）

形式：

假定$X_1, X_2, ...$为独立的随机变量，且对于某常数$K \in [0, \infty)$，满足$E(X_k) = 0, E(X_k^4) \le K, \forall k$。

记$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$，则有$\frac{S_n}{n} \to 0(a.s.)$。

证明：

可得$E(S_n^4) = E[(X_1 + X_2 + ... + X_n)^4] = E(\sum_k X_k^4 + 6\sum\sum_{i<j} X_i^2 X_j^2)$

容易知道$E(X_i^2) \le E(X_i^4) \le K$，由独立性得$E(X_i^2 X_j^2) \le K$

则有$E(S_n^4) \le nK + 3n(n-1)K \le 3Kn^2$ 和$E\sum(S_n/n)^4 \le 3K\sum n^{-2}] < \infty$

所以可得$\sum(S_n/n)^4 < \infty(a.s)$和$S_n/n \to 0(a.s.)$

简单的推论：

将$E(X_k) = 0$换成$E(X_k) = u$，即有结论$S_n/n \to u(a.s.)$。可由闵可夫斯基不等式得。

说明：

此定律的形式和证明是由书（概率与鞅）7.2节给出的。注意此处的强大数定律不需要(X_n)同分布的假设。

强大数定律叙述的是样本均值以概率1收敛为期望值。

辛钦大数定理

形式：

设$X_1, ... X_n ...$是独立同分布的随机变量，具有有限的数学期望$E(X_k)$,则对任意给定的正数ϵ，
$lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_k - E(X_k)| < \epsilon) = 1$

证明：

由于$X_1, ... X_n ...$是具有相同分布的随机变量序列，故他们具有相同的特征函数，设为$f(t)$，由于数学期望存在，因此$f(t)$有展开式：$f(t) = f(0) + f'(0)t + o(t) = 1 + iat + o(t)$，$o(t)$表示$t$的高阶无穷小量。

有独立性得：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$的特征函数为：$[f(t/n)]^n = (1 + iat/n + o(t/n))^n$

对于任意给定的t，有$lim_{n\to\infty f^n(t/n)} = e^{iat}$，所以由逆极限定理：$\sum_{i=1}^n X_i/n$的分布函数弱收敛于$F(x)$，其中
$x > a : F(x) = 1 \quad x = a : F(x) = 0$，因此$\sum_{i=1}^n X_i/n \to^P a$

说明：

辛钦大数定理又被称为弱大数定律，它陈述为样本的均值依概率收敛于期望值。

切比雪夫大数定律

形式：

设随机变量$X_1, X_2, ..., X_n$相互独立，$E(X_i)=u, D(X_i)=\sigma^2$，则
$\forall\epsilon>0: lim_{n\to\infty}P(|\sum_{i=1}^n X_i/n-u|<\epsilon)=1$。

证明:

易得$E(\sum_{i=1}^n X_i/n)=u, D(\sum_{i=1}^n X_i/n)=\sigma^2/n$。

由切比雪夫不等式
$1\geq P(|\sum_{i=1}^n X_i/n-E(\sum_{i=1}^n X_i/n)|<\epsilon)=P(|\sum_{i=1}^n X_i/n-u|<\epsilon])\geq 1-D(\sum_{i=1}^n X_i/n)/\epsilon^2=1-\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}\to 1, n\to\infty$

所以有$lim_{n\to\infty}P(|\sum_{i=1}^n X_i/n-u|<\epsilon)=1$

说明:

原版的切比雪夫大数定律中随机变量的数学期望和方差可以不同，不过证明方法类似。

切比雪夫大数定理不像辛钦大数定理一样需要随机变量独立同分布。

总结:

大数定理说明的是随着随机次数的增加，样本平均值最终收敛于理论推断的期望值。这一定律有助于我们在现实生活中通过采样得出事件的期望值，且采样次数越多，理论准确性也就越高，最终必定收敛于期望值。

大数定律的证明方法一般是利用相对应不等式，进行变换即可。

其他的大数定理：伯努利大数定理，独立同分布的强大数定律。

参考资料