Discussion on some quizzes

董海辰 518030910417

March 9, 2020

1

中原大战，冯玉祥问士兵: 空中飞机多还是乌鸦多? 众人答: 乌鸦多。冯再问: 然则乌鸦拉屎掉到你们头上没有? 众人异口同声: 没有。冯说: 所以嘛，随着飞机投下的炸弹的命中机会就更少了，大家莫怕!

我认为这里「飞机数量」,「飞机出现」和「飞机投炸弹」这三者的关系与「乌鸦数量」,「乌鸦出现」和「乌鸦拉屎」三者的关系并不一致———飞机的数量分布并不如乌鸦一样是均匀的，而是在这一片区域的出现概率远大于其他区域。且由于飞机可能有瞄准，「飞机投弹」事件也并不与「飞机出现」的事件独立，而「乌鸦拉屎」与「乌鸦出现」却是独立的。

设飞机总数为 N，飞机经过为事件 X，飞机投炸弹为 Y，被炸弹命中的事件为 $Y \cup X$，有 $P(Y \cup X) \neq P(Y)P(X)$。反观乌鸦，乌鸦在任何区域内拉屎的概率是一定的，设乌鸦总数为 N'，乌鸦经过为事件 X'，乌鸦拉屎为 Y'，有 $P(Y' \cup X') = P(Y')P(X')$。

因此即使在这里冯玉祥说: $N' > N$, 这样并不能得出 $P(X') > P(X)$。即使是有 $P(X') > P(X)$, 也不能决定 $P(Y \cup X)$ 和 $P(Y' \cup X')$ 的大小关系。

2

罐子里有 70 个黑球和 30 个白球。每次从中取一个球直到罐子中只含单色球为止。最后罐子中剩的都是白球的概率为多少?

更一般地，设共有 N 个黑球和 M 个白球，P_m 为最后恰好剩 m 个白球的概率，由于当共有 n 个黑球和 m 个白球时，选出一个黑球的概率为 $\frac{n}{n+m}$，有

$$\begin{aligned}
P_m &= \frac{N! \cdot (M \cdot (M-1) \cdots (m+1))}{(N+M) \cdot (N+M-1) \cdots (m+1)} \cdot \binom{N-1+M-m}{M-m} \\
&= N! \cdot \frac{m!}{(N+M)!} \cdot \frac{M!}{m!} \cdot \frac{(N-1+M-m)!}{(M-m)!(N-1)!} \\
&= \frac{N \cdot M!}{(N+M)!} \cdot \frac{(N+M-1-m)!}{(M-m)!}.
\end{aligned}$$

最后剩下白球的概率为

$$
\begin{aligned}
p = \sum_{i=1}^{M} p_i &= \frac{N \cdot M!}{(N+M)!} \sum_{i=1}^{M} \frac{(N+M-1-m)!}{(M-m)!} \\
&= \frac{N \cdot M!}{(N+M)!} \cdot \frac{(M+N-1)!}{N(M-1)!} \\
&= \frac{M}{N+M}.
\end{aligned}
$$

可以发现，最后剩下白球的概率恰为白球在所有球里面的比例。

3

对于生男生女，比如生男生女概率各 50%，每个家庭都生到第一个男孩就不再生，那么产生的男女比例是多少?

设 X 为每个家庭的孩子数量，有

$$
P(X=k) = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2} = 2^{-k}.
$$

即前 $k-1$ 次均为女孩，最后一次为男孩。
则期望为

$$
E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) = 2.
$$

而每个家庭恰好有 1 个男孩，因此男女比为 1 : 1。