吴润哲哥哥说得非常对，我来补充几句。

1 $O(n)$ solving Markov Chain

首先，$O(n^3)$ 的高斯消元是可以优化的。本质上，消元解决的是 Markov 链问题，可以抽象为

$$\begin{cases} x_1 = L \\ x_n = R \\ x_i = a_i x_{i-1} + b_i x_{i+1}, \quad i \in (1, n) \end{cases}$$

而消元方程组的系数是形如下的，只有 $O(n)$ 个：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L \\ a_2 & -1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -1 & b_3 & \cdots 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & R \end{bmatrix}$$

因此，这个矩阵消元复杂度可以减少为 $O(n^2)$

但是其实我们可以做到 $O(n)$。对于方程

$$x_i = a_i x_{i-1} + b_i x_{i+1}$$

可以变形为

$$x_{i+1} = \frac{x_i - a_i x_{i-1}}{b_i}$$

因此对于这样的 Markov 链我们可以用 $O(n)$ 的时间递推，用 x_1, x_2 将所有项表达出来。算出 x_n 的表达我们就能带入计算得到 x_2，进而得到所有值了。

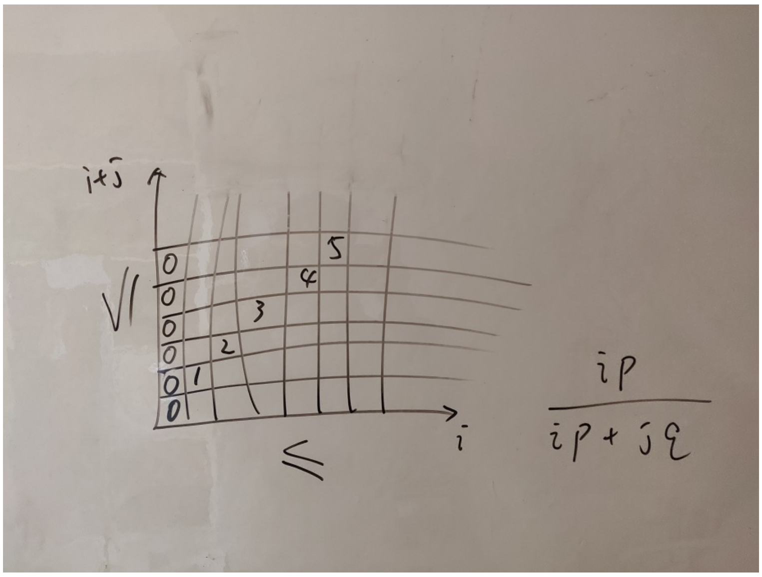
2 About monotonicity

如果我们承认了决策意义上的单调性，也即，承认了 $i + j = \text{const}$ 时，在 i 由小到大时 $f_{i,j}$ 的决策存在一个分割点，前半段决策为取 $\max$，后半段决策为取 Markov 链更新，那么我们可以一层更新做到 $O(n)$，即用上述更新方法倒着维护值，直到取 $\max$ 更优为止。总复杂度 $O(n^2)$。（当然其实不承认这种单调性也是能 $O(n^2)$ 做的，随时维护随时取 $\max$ 即可，正确性应该不依赖于这个单调性）

但是这个单调性，直觉上很对，并且实践证明很对，但囿于我的水平不行，没法给出一个完整的解释。

尽管这个 $f_{i,j}$ 的本身的单调性非常优秀，

$$f_{i,j} \le f_{i+1,j}$$
$$f_{i,j} \le f_{i,j+1}$$



并且我们可以在 $\frac{i}{i+j}$ 充分小时，可以知道某个前缀必然是取 max: 对于上图的表格中的任意一列，即 $i = \text{const}$ 时，当 $p, q > 0$ 时，取 $i + j \to \infty$，有

$$\frac{ip}{ip + jq} \to 0$$
$$\frac{jq}{ip + jq} \to 1$$

如果 $f_{i,j}$ 的决策为取 max 而 $f_{i+1,j-1}$ 取 Markov 链更新，那么

$$f_{i+1,j-1} \to f_{i,j} = f_{i,j-1} \le f_{i+1,j-2}$$

这是一个矛盾，因此每一列充分高的位置都是取 max 的。同理可证充分高的每一列充分右的位置是取 Markov 链更新的。这两种情况对应白羊太多和黑羊太多的情况。

但我，我还是不会证明决策点对于每一行每一列唯一。

而且，根据吴润哲哥哥的结果，这样的分割点大概就是 $ip - jq \le 0$——和直觉分析相符的结果。但其中存在几个畸变点。这几个畸变点我想了很久，也没有办法给出解释。

也许只好寄希望于吴老师或其他助教、同学来解答这些疑惑了。或者我想，学习了本学期的内容或许我就能说出其中的道理了吧。