

Video spiegazione parte iniziale.

Lavoriamo sempre con le equazioni di Maxwell facendo un'analisi in frequenza.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{2}{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2)$$

Si potrebbe risolvere l'equazione di Helmholtz con le appropriate condizioni al contorno, ma non è facile quindi si deve cercare una seconda via.

Analizziamo ad esempio un fronte d'onda piana che si propaga attraverso un'apertura:

se usassimo ancora l'ottica geometrica troveremmo che passano solo i raggi centrali mentre gli altri no.

Se l'apertura è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda le deflessioni sono meno evidenti e il fronte d'onda è ancora praticamente piano. se però riduciamo l'apertura questa approssimazione non è più accettabile.

Andremo a studiare il sistema per aperture abbastanza piccole da avere diffrazione evidente, ma sufficientemente grande da non variare la polarizzazione del campo entrante lasciando l'equazione di Helmholtz scalare (NON FARLA DIVENTARE VETTORIALE)

1 OTTICA DIFFRATTIVA IN REGIME SCALARE

ipotizziamo di essere nel vuoto

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad (3)$$

chiamo il campo elettrico $U(P)$ anziché $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (Metto in evidenza il fatto di essere scalare)

$$\nabla^2 U(P) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{2}{\varepsilon_0} U(P) = 0 \quad (4)$$

Nell'ottica diffrattiva studiamo tutto ciò che ha dimensione finita prendiamo un sistema con apertura di forma non definita attraverso la quale passa un'onda polarizzata linearmente: come sarà il campo dopo l'apertura?

DEvo risolvere l'equazione di Helmholtz con le apposite condizioni al contorno. dovrò quindi usare le funzioni di Grenn

a formulare la seguente equazione son kirchoff, Raleigh, Sommerfeld

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) dS \quad (5)$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6)$$

Esiste una strada alternativa che risulta solo dopo avere visto la soluzione di RAleigh Sommerfeld: **da un punto di vista matematico ci accorgiamo di avere in mano delle onde sferiche**

Si tratta di un potente artificio matematico che scompone il campo nella sovrapposizione di tante funzioni elementari.

Scriveremo il campo di partenza come somma di un set di onde semplici la cui sovrapposizione alla fine ci garantisce di trovare il campo complessivo
 è possibile trovare un altro set di funzioni semplici che ci risolvano il problema.

1.1 TRASFORMATTA DI FOURIER

$$g(t) \longrightarrow \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt = G(\omega) \quad (7)$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (8)$$

Formiamo la $g(t)$ come sovrapposizione di funzioni seno e coseno

Possiamo andare e applicare lo stesso concetto su delle variabili spaziali utilizzando un **TDF spaziale**

$$g(x, y) \longrightarrow \mathcal{F}\{g(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = G(k_x, k_y) \quad (9)$$

SPIEGARE MEGLIO TDF SPAZIALE

Video spiegazione.

L'equazione ci ricava la parte spaziale di un **onda piana** che si propaga nello spazio con k_x, k_y, k_z a $z=0$

Vediamo quindi $g(x, y)$ come il campo non più generico ma in corrispondenza dell'apertura

A è la trasformata del campo $U(x, y)$, quindi

$$U(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y)e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \quad (10)$$

$z=0$

Abbiamo un'onda elettromagnetica piana ($e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$) ovviamente $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \longrightarrow k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$

Il campo nell'apertura è visualizzabile come sovrapposizione di onde piane in partenza da $z=0$

Sappiamo che l'equazione di Helmholtz è lineare, quindi, sapendo come questa onda si propaga, possiamo trovare il campo ad ogni z lasciando propagare le onde piane e troviamo nuovamente la sovrapposizione a z scelto

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y)e^{i(k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z)} dk_x dk_y \quad (11)$$

La sorgente non viene più vista come sorgente di onde sferiche ma di onde piane

In termini matematici onde sferiche $\longrightarrow \cos()$

onde piane $\longrightarrow e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}$

Facendo la trasformata di Fourier trovo $A(k_x, k_y)$ che sarà lo **spettro angolare delle onde piane**

spiegare che diamine è lo spettro angolare

Possiamo però vedere $U(x_0, y_0)$ come $U(x_0, y_0) = \mathcal{F}^{-1}\{A(k_x, k_y)e^{ik_z z}\}$ **COSA KZ FA NON HO CAPITO** Ma anche k_z è funzione di k_x, k_y e può essere visto come lo spettro angolare di $U(x_0, y_0)$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

$$A_0(k_x, k_y) = A_1(k_x, k_y)e^{ik_z z} = A_1(k_x, k_y)e^{ik\sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}}z}$$

il pedici 1 si riferisce allo spettro iniziale, 0 a quello finale

Lo spettro angolare è uguale a quello di partenza, moltiplicato per un termine di sfasamento.

Ipotizziamo di essere in **OTTICA DIFFRATTIVA IN REGIME PARASSIALE**

DEFINIRE OTTICA DIFFRATTIVA IN REGIME PARASSIALE

$$k_x, k_y \ll k^2 \text{ per Taylor quindi } k\sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \approx k - \frac{1}{2} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k}$$

Possiamo vedere il termine $e^{-i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z}$ come un filtro in frequenza

cosa cazzo è un filtro in frequenza?!????????????????

Video spiegazione .

1.2 EQUIVALENZA TRA LE DUE FORMULAZIONI

Formulazione onde piane(1):

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) e^{i(k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z)} dk_x dk_y \quad (12)$$

Formulazione onde sferiche(2):

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) dS \quad (13)$$

Approssimazioni di (1):

- regime parassiale $k_x, k_y \ll k^2$ per Taylor quindi $k\sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \approx k - \frac{1}{2} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k}$

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) e^{ikz} e^{-i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z} e^{i(k_x x_0 + k_y y_0)} dk_x dk_y \quad (14)$$

NOTO CHE È IL PRODOTTO DI DUE TRASFORMATE DI FOURIER QUINDI

$$\mathcal{F}\{g(t)f(t)\} = G(\omega) * F(\omega) \quad (15)$$

ma vale anche l'inverso applicabile a questo caso

$$\mathcal{F}^{-1}\{g(t)f(t)\} = G(\omega) * F(\omega) \quad (16)$$

$$A(k_x, k_y) \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}U(x, y) \quad (17)$$

$$e^{ikz} e^{-i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z} \longrightarrow [\mathcal{F}^{-1}] \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} e^{i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)} \quad (18)$$

e il prodotto di convoluzione sarà quindi
io mi sono fidato
spiegare meglio il passaggio

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{\frac{k}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]} dx_1 dy_1 \quad (19)$$

e in regime parassiale (**e approssimazione di Fraunhofer????**) sarà possibile applicare le seguenti approssimazioni:

$$r_{01} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + z^2} = z \sqrt{\frac{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}{z^2} + 1} \approx z \left(1 + \frac{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}{2z^2} \right) \quad (20)$$

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = 1$$

e quindi (2) potrà essere scritta come

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{\frac{k}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]} dx_1 dy_1 \quad (21)$$

identica a (1) quindi c'è **IL QUADRATINO !!!!!!!!!!!!!!!**

Il campo nel piano d'arrivo è dato da un integrale che può essere visto come la trasformata di Fourier del campo sull'apertura

Se non ci fosse il termine quadratico all'interno dell'integrale l'intensità del campo sul piano d'arrivo, proporzionale al modulo quadro del campo, sarebbe uguale al modulo quadro della trasformata di Fourier nell'apertura

SPIEGARE MEGLIO DA COSA LO DEDUCO E L'APPROSSIMAZIONE DI FRAUNHOFER

Sviluppo il quadrato nell'equazione (20) e trovo:

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} e^{i \frac{k(x_0^2 + y_0^2)}{2z}} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{i \frac{k(x_0 x_1 + y_0 y_1)}{z}} e^{i \frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2z}} dx_1 dy_1 \quad (22)$$

$$e^{i \frac{k(x_1^2 + y_1^2)}{2z}} \quad (23)$$

$\frac{kx_0}{z}$ e $\frac{ky_0}{z}$ pulsazione spaziale

parlare della frequenza spaziale $f_x = \frac{x_0}{\lambda z}$

$$f_y = \frac{y_0}{\lambda z}$$

$$k_x = 2\pi f_x$$

$$k_y = 2\pi f_y$$

$$e^{i \frac{k(x_0 x_1 + y_0 y_1)}{z}} = e^{i(2\pi f_x x_1 + 2\pi f_y y_1)} = e^{i(k_x x_1 + k_y y_1)} \quad (24)$$

se andassimo a grande distanza dall'apertura questo termine quadratico è trascurabile. questa è l'**approssimazione di Fraunhofer**

$$I(x_0, y_0) = \left| \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{-\frac{k}{2z}[x_0 x_1 + y_0 y_1]} dx_1 dy_1 \right|^2 = \|U(x_1, y_1) e^{-\frac{k}{2z}[x_0 x_1 + y_0 y_1]}\|^2 \quad (25)$$

Sul piano di arrivo ho la trasformata di Fourier dell $U(x_1, y_1)$ moltiplicata per l'esponentiale seguente

non ho mica capito

Posso associare allo spazio una coppia di frequenze che mi danno la mappa spettrale del campo

È quindi possibile associare alla coppia di assi (x_0, y_0) la coppia (f_x, f_y) che corrispondono allo specchio in frequenza

-L'ottica diffrattiva in regime parassiale è in grado di fare un'operazione matematica: la trasformata di Fourier bidimensionale (va riscritta meglio)

se faccio il modulo quadro della funzione d'arrivo trovo lo spettro in potenza

Se andiamo a grande distanza dalla fenditura (approssimazione di Fraunhofer) andiamo a studiare la propagazione del campo come composto da onde piane (stessa cosa per la soluzione di Raleigh Sommerfeld)

A grande distanza la soluzione sarà

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} e^{i\frac{k(x_0^2 + y_0^2)}{2z}} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{i(k_x x_1 + k_y y_1)} dx_1 dy_1 \quad (26)$$

e l'intensità sarà quindi:

$$I(x_0, y_0) = |U(x_0, y_0)|^2 = \frac{|\mathcal{F}\{U(x_1, y_1)\}|^2}{\lambda^2 z^2} \quad (27)$$

poniamo $t(x_1, y_1) = U(x_1, y_1)$

e ipotizziamo il caso di un'apertura dentro la quale c'è un reticolo di trasmissione che varia come un cos

$$t(x_1, y_1) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_1) \right] \text{rect}\left(\frac{x_1}{l_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{l_y}\right) \quad (28)$$

$a = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_1) \right]$ è dovuto al reticolo di trasmissione

$b = \text{rect}\left(\frac{x_1}{l_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{l_y}\right)$ all'apertura, in questo caso rettangolare di lato $l_x l_y$

$$\mathcal{F}\{t(x_1, y_1)\} = \mathcal{F}\{a\} * \mathcal{F}\{b\} \quad (29)$$

$$\mathcal{F}\{a\} = \frac{1}{2} \delta(f_x, f_y) + \frac{m}{4} \delta(f_x + f_0, f_y) + \frac{m}{4} \delta(f_x - f_0, f_y) \quad (30)$$

ipotizzo $l = l_x = l_y$

$$\mathcal{F}\{b\} = l^2 \text{sinc}(lf_x) \text{sinc}(lf_y) \quad (31)$$

dovrò quindi trovare il prodotto di convoluzione dei due

Si ricorda che fare il prodotto di convoluzione con una delta di dirac ad una certa frequenza significa traslare la funzione a tale di tale frequenza

$$\mathcal{F}\{t(x_1, y_1)\} = l^2 \text{sinc}(lf_y) \{ \text{sinc}(lf_y) + \frac{m}{2} \text{sinc}(l(f_x + f_0)) + \frac{m}{2} \text{sinc}(l(f_x - f_0)) \} \quad (32)$$

Facendo il modulo quadro trovo come scritto sopra l'intensità del campo. Noto che se f_0 è grande i doppi prodotti non si sovrappongono????? e possono essere trascurati

$$f_0 \gg 1$$

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{l^2}{2\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right) \left\{ \text{sinc}^2\left(\frac{lx_0}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{l(x_0 + f_0)\lambda z}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{l(x_0 - f_0)\lambda z}{\lambda z}\right) \right\} \quad (33)$$

il numero di fenditure è legato a x_0 la profondità a è legata a m(cosa vuole dire????)

ricordando(che non ho scritto) che l'apertura del lato centrale è $\Delta x_0 = \frac{2\lambda z}{l}$ troviamo affinché tali lobi siano separati ????? (e quindi si possano trascurare i doppi prodotti) si deve avere $f_0 \lambda z > \Delta x_0$ e quindi $f_0 > \frac{2}{l}$

Cosa vedo sul piano di Fraunhofer?

vedo quindi un reticolo di diffrazione

È possibile ad una distanza ragionevole? Dalla distanza di Fraunhofer a una distanza praticabile?

Forse sì ma è necessario servirsi delle lenti

Innanzitutto immaginiamo una **lente più grande del fronte d'onda incidente** l'unica azione che la lente può compiere sull'onda è sfasarla attraverso il passaggio nel materiale dielettrico e nell'aria

$\Delta(x, y)$ = cammino interno

$\Delta_0 - \Delta(x, y)$ = cammino nell'aria

$$\Phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)] = k\Delta_0 + k\Delta(x, y)(n-1) \quad (34)$$

$$U'_l = U_l t(x, y)$$

con $t(x, y)$ funzione di trasferimento della lente

$$t(x, y) = e^{i\Phi(x, y)} = e^{ik\Delta_0 + k\Delta(x, y)(n-1)}$$

$$U'_l = U_l e^{ik\Delta_0} e^{ik\Delta(x, y)(n-1)}$$

ora dobbiamo determinare lo spessore della lente $\Delta(x, y)$ che dipende dai raggi di curvatura In approssimazione parassiale

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\text{La focale della lente è } \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$U'_l = U_l e^{ikn\Delta_0} e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2f}} \quad (35)$$

mettiamo la lente in corrispondenza con l'apertura in modotale che le sue coordinate coincidano con quelle dell'apertura

momentaneamente tralasciamo il termine costante $e^{ikn\Delta_0}$ si ricongiungerà alla fine con il resto dell'equazione

inseriamo ciò che abbiamo trovato ora nell'equazione (21)

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{\frac{k}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]} dx_1 dy_1$$

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} U_l e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2f}} e^{\frac{k}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]} dx_1 dy_1 \quad (36)$$

Ipotizzo $f > 0$

Se ci poniamo a $z = f$ i due esponenziali si semplificano
ottengo

$$U(x_f, y_f) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i \frac{k(x_f^2 + y_f^2)}{2f}} \iint_{-\infty}^{\infty} U_l e^{-i \frac{2\pi(x_f x + y_f y)}{\lambda f}} dx dy \quad (37)$$

indico con $f_x = \frac{x_f}{\lambda}$ e $f_y = \frac{y_f}{\lambda}$

ottengo quindi la stessa trasformata che prima trovavo nella regione di Fraunhofer ora in corrispondenza del fuoco della lente

$$U(x_f, y_f) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i \frac{k(x_f^2 + y_f^2)}{2f}} \mathcal{F}\{U_l(x, y)\}(f_x, f_y) \quad (38)$$

Le lenti convergenti avvicinano la lunghezza di Fraunhofer a piccole distanze
Vogliamo però la trasformata di Fourier esatta e quindi lo spettro nel caso che tra l'apertura e la lente ci sia una certa distanza d_0
definisco ora:

$$\mathcal{F}\{U_0(x, y)\}(f_x, f_y) = F_0(f_x, f_y)$$

che mi rappresenta lo spettro dell'onda piana di partenza

Restando nel dominio di Fourier siamo in grado di trovare la trasformata in corrispondenza della lente dopo un tratto d_0 di propagazione libera **DOVE CAZZO LO TROVO QUESTA COSA QUI???**

$$\mathcal{F}\{U_l(x, y)\}(f_x, f_y) F_l(f_x, f_y) = F_0(f_x, f_y) e^{-i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} d_0} = F_0(f_x, f_y) e^{-i \frac{4\pi^2}{2} \frac{\lambda}{2\pi} (f_x^2 + f_y^2) d_0}$$

e la sostituisco nell'equazione (38)

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{i \frac{k}{2f} (1 - \frac{d_0}{f}) (x_f^2 + y_f^2)}{i\lambda f} F_0(\frac{x_f}{\lambda_f}, \frac{y_f}{\lambda_f}) \quad (39)$$

nel caso particolare $d_0 = f$

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} F_0(\frac{x_f}{\lambda_f}, \frac{y_f}{\lambda_f}) \quad (40)$$

Significa che il termine quadratico che nasce dalla propagazione libera viene eliminato dalla presenza della lente a distanza d_0

1.3 elaborazione ottica del segnale

NON HO CAPITO TROPPO BENE SPIEGARE MEGLIO

SERVE IL DISEGNO QUI!!!

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(f)$$

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(f)$$

fequenza (in che senso????) $G(f)H(f)$

tempi $\int_t^{-\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau$

h(x,y) funzione di trasferimento del sistema ogliamo spostare l'analisi in frequenza in analisi spaziale

Se anzichè $g(t)$ in ingresso avessi una δ il sistema mi restituirebbe la stessa funzione $h(t)$

una δ fisicamente sarebbe una sorgente puntiforme che attraversa il sistema ottico mi da $h(x,y)$

se nel piano dell'origine ho una distribuzione di campo estesa posso scomporla in tante sorgenti puntiformi in modo da avere nel piano d'arrivo la sovrapposizione delle funzioni $h(x,y)$ prodott del sistema, traslata approssimativamete in base alla posizione della sorgente

il risultato sarà quindi un prodotto di convoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, y_1)h(x-x_1, y-y_1)dx_1dy_1 \quad (41)$$

Circuito ottico e elettrico sono quindi equivalenti(????????) tuttavia come si fa a produrre un sistema ottico che possa lavorare sul segnale?

Si passa alle frequenze per poi antitrasfromare

in ogni punto NON sappiamo quale è il contributo di ogni frequenza spaziale

possiamo porre una siapositiva opaca con alcuni punti trasparenti. Passeranno solo determinate???????????????? frequenze spaziali e il raggio sarà monocromatico

ottengo così un nuovo spettro che possiamo ritrasformare

————BHO————

Video spiegazione .

Se il sistema ottico ha un apertura abbastanza grande, l'ottica geometrica funziona bene. L'ottica diffrattiva interviene quando le dimensioni dell'apertura (sono paragonabili con la lunghezza d'onda????) hanno effetti diffrattivi rilevanti nel sistema

siano (x_0, y_0) le coordinate dell'oggetto e $U_0(x_0, y_0)$ il relativo campo elettromagnetico che viene trasformato fino ad arrivare al piano immagine del campo $U_i(x_i, y_i)$. la relazione tra ingresso e uscita è lineare(essendo l'equazione di Helmotz lineare)

$$U_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0)h(x_i, y_i; x_0, y_0)dx_0dy_0 \quad (42)$$

CHE NOTAZIONE HA h????????????????????

Dove $h()$ funzione di trasferimento del sistema che può essere spazialmente invariante(in regime parassiale lo è, ma non in generale)

COSA VUOLE DIRE SPAZIALMENTE INVARIANTE????

Se nel piano immagine abbiamo la riproduzione perfetta dell'oggetto la funzione h dovrà essere proporzionale a una δ

$$h \propto \delta(x_i \pm Mx_0, y_i \pm My_0) \quad (43)$$

Se scomponiamo $U_0(x_0, y_0)$ in tante sorgenti puntiformi l'integrale di sovrapposizione sarà un altro punto luminoso la cui posizione dipenderà da $h(M)$ (dovrebbe essere traslato no?)

Quando la risposta del sistema non è una δ (quindi tutti i casi reali) spazio invariante non ho più la perfetta riproduzione dell'immagine

Se l'apertura ha dimensioni finite troncherà il fronte d'onda dando origine a effetti di DIFFRAZIONE

La funzione $P(x, y)$ è detta pupilla della lente

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dove la lente lascia passare la luce} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Scomponiamo il campo in ingresso in varie sorgenti puntiformi di onde sferiche che sarà possibile sovrapporre per formare il campo in uscita

La risposta del sistema ottico e un punto sorgente mi dà la funzione che l'onda sferica che parte dalla sorgente puntiforme che stiamo considerando il suo andamento di fase

$$\frac{e^{ikr}}{i\lambda r}$$

Siamo in ottica parassiale

$$r \approx [1 + \frac{1}{2}(\frac{x-x_0}{z})^2 + \frac{1}{2}(\frac{y-y_0}{z})^2] \quad (44)$$

Il campo che mi arriva sulla lente sarà ($r \approx z = d_0$)

$$U_l(x, y) = \frac{1}{i\lambda d_0} e^{i\frac{k}{2d_0}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} \quad (45)$$

il campo dopo la lente sarà moltiplicato per le funzioni di trasmissione della lente composto dalla pupilla e dal termine di fase (ipotizzando sempre che la lente $f > 0$)

$$U'_l(x, y) = U_l(x, y)P(x, y)e^{-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)} \quad (46)$$

per arrivare al piano (x_i, y_i) abbiamo un tratto $z = d_0$ di propagazione libera che andiamo a studiare con l'integrale di Fresnel

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_l(x, y) e^{i\frac{k}{2d_i}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} dx dy \quad (47)$$

sostituendo troviamo la funzione h

$$h = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} e^{i\frac{k}{2d_i}(x_i^2 + y_i^2)} e^{i\frac{k}{2d_0}(x_0^2 + y_0^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) e^{i\frac{k}{2}(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f})(x^2 + y^2)} e^{-ik[(\frac{x_0}{d_0} + \frac{x_i}{d_i})x + (\frac{y_0}{d_0} + \frac{y_i}{d_i})y]} dx dy \quad (48)$$

per una ragione che non mi è facile comprendere

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f}$$

poniamo come condizione

$$M = \frac{d_i}{d_0}$$

$$h = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} e^{i \frac{k}{2d_i} (x_i^2 + y_i^2)} e^{i \frac{k}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) e^{-ik \frac{k}{d_i} [(Mx_0 + x_i)x + (My_0 + y_i)y]} dx dy \quad (49)$$

ricordando la (42) e ricordando sempre che $I \sim |U|^2$

in ottica diffrattiva un punto luminoso nel piano oggetto diventa una macchia nel piano immagine corrispondente alla trasformata di Fourier nell'apertura della lente la cui dimensione è inversamente proporzionale alla dimensione della pupilla (più grande è la pupilla più piccolo sarà la macchia quindi l'immagine più chiara)

A grandi linee è possibile approssimare :

pupilla grande $\rightarrow \delta \rightarrow$ macchia puntiforme \rightarrow ottica geometrica

pupilla piccolo \rightarrow macchi su tutto il piano immagine \rightarrow ottica diffrattiva

COME FACCIO A DIRE CHE È UN FILTRO?? La lente è quindi un filtro sulla frequenza spaziale del campo di partenza

l'effetto della pupilla in un sistema ottico in ottica diffrattiva è quello di un **filtro passa basso per le frequenze spaziali** maggiori le dimensioni della pupilla più frequenze passano, più è precisa la riproduzione nel piano immagine

Esempio: Telescopio

Video spiegazione .