ЗАДАНИЕ
на лабораторные работы №4

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями III рода и исследование математической модели на основе технологии вычислительного эксперимента.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа, и исследование соответствующей математической модели.

Исходные данные.

1. Задана математическая модель.

Уравнения для функций $T(r,t)$ и $u(r)$

$$c_T(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \sigma(T)E^2 - q(r), \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{1}{k(T)}\frac{du}{dr}\right) = 3k(T)(u - u_p(T)), \qquad (2)$$

$$E = \frac{I(t)}{2\pi\int\limits_0^R \sigma(T(r))\, r\, dr}, \qquad (3)$$

$$q(r) = c\, k(r)(u_p - u) \qquad (4)$$

Начальные и краевые условия

$$\begin{cases} t = 0, \quad T(x,0) = T_0 + (T_w - T_0)\ (r/R)^p, \\ r = 0, \quad \dfrac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \dfrac{du}{dr}_0 = 0, \\ r = R, \quad T(R) = T_w, \quad -\dfrac{1}{3k(R)}\dfrac{du}{dr} = 0.39 \cdot u(R) \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь σ, λ, c_T -коэффициенты электропроводности, теплопроводности и теплоемкость среды (даны в таблице ниже), T - температура, E - напряженность электрического поля, $I(t)$ - электрический ток в момент времени t в течение импульса. Обозначения переменных в уравнении (2) приведены в лаб. работе №2.

Задана зависимость тока $I(t)$ от времени t

$$I(t) = \frac{I_{max}}{t_{max}} t \exp(-(t/t_{max} - 1)), \qquad (6)$$

где I_{max}, t_{max} - амплитуда импульса тока и время её достижения (А и с).

Уравнение (1) - квазилинейное, уравнение (2) - линейное.

2, Заданы материальные функции и параметры задачи (все размерности согласованы)

Т,К	σ, 1/(Ом см)	λ, Вт/(см К)	с, Дж/(см^{3}К)
2000	0.309e-3	0.381e-3	1.90e-3
3000	0.309e-2	0.381e-3	1.90e-3
4000	0.309e-1	0.381e-3	0.95e-3
5000	0.270e-0	0.448e-3	0.75e-3
6000	0.205e+1	0.577e-3	0.64e-3
7000	0.606e+1	0.733e-3	0.61e-3
8000	0.120e+2	0.131e-2	0.66e-3
9000	0.199e+2	0.218e-2	0.66e-3
10000	0.296e+2	0.358e-2	1.15e-3
11000	0.411e+2	0.562e-2	1.79e-3
12000	0.541e+2	0.832e-2	2.02e-3

Параметры для отладки (предусмотреть возможность быстрого их изменения при обсуждении работы)

$T_0 = 8000$К,

$T_w = 1800$К,

p=2,

$R = 0.35$ см,

$I_{max} = 1000$ А, t_{max} = 80 мкс.

Уравнение (2) решалось в лаб. работах №2 и 3, в которых представлены данные по $k(T)$.

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы)**.**

Сформулированная математическая модель описывает нестационарное температурное поле $T(x,t)$ в сильно излучающем разряде, протекающем в кварцевой трубке с внутренним радиусом R. Через разряд проходит импульс тока, заданный формулой (6). По мере увеличения тока идет разогрев плазмы, и все большую роль начинает играть излучение. Нестационарное поле температур в разряде описывается уравнением (1), перенос излучения - уравнением (2). Уравнение (2) стационарное, т.к. при больших значениях скорости света плотность излучения в нашем случае успевает подстроиться под температурное поле, в итоге, зависимость решения уравнения (2) от времени параметрическая, через зависимость от меняющейся температуры функции Планка и коэффициента поглощения. Поле температур по мере развития импульса тока «забывает» о начальных условиях, поэтому при достаточно длительном разряде начальные условия можно задавать достаточно произвольно. На переднем фронте импульса тока температуры в разряде растут, на спаде происходит охлаждение, при этом максимумы тока и температур не совпадают из-за влияния теплоемкости плазмы.

Если положить ток $I(t)$=const, то будет происходить формирование температурного поля от начального температурного распределения при t =0 до некоторого установившегося (стационарного) распределения $T(r)$, т.е. будет моделироваться переходный режим. Сформировавшееся поле температур в дальнейшем при неизменном токе $I(t)$ = const с течением времени меняться не будет. Это полезный факт для тестирования программы. При отключении тока ($I(t)$ = 0) плазма начинает остывать.

Результаты слабо зависят от выбора температуры на границе T_w.

Результаты работы.

1. Алгоритм и программа, реализующие решение сформулированной задачи методом конечных разностей.

2. Исследование по выбору оптимальных шагов по времени τ и пространству h. Шаги должны быть максимально большими при сохранении устойчивости разностной схемы и заданной точности расчета.

Рассмотреть влияние на получаемые результаты амплитуды импульса I_{max} и времени t_{max} (определяют крутизну фронтов и длительность импульса).

Точность расчета можно оценить разными способами.

1) Уменьшая шаги и наблюдая сходимость решений в фиксированной пространственной точке и в фиксированный момент времени.

2) Проверяя, соблюдается ли при выбранных шагах h, τ баланс мощности после выхода на стационарное распределение температуры (в установившемся режиме), реализующееся при $I(t)$=const, т.е. в этом режиме должно выполняться условие: подводимая электрическая мощность равна отводимой за счет излучения и теплопроводности, т.е.

$$EI = \int_0^R q(T(r))\, r\, dr + R F_N, \tag{7}$$

где

$$F_N = -\lambda(T(R)) \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

Задать точность ε выполнения (7) примерно 10^{-2}. Стационарный режим устанавливается в момент времени, когда температура перестает меняться с заданной точностью.

3. График зависимости температуры $T(r,t)$ для нескольких моментов времени (4-5) на переднем и и столько же на заднем фронте импульса.

Справка. Если менять теплоемкость, то с ростом теплоемкости темп нарастания и спада температуры снижаются.

4. Исследование влияния на формирование температурных полей параметров разряда (R, I_{max}, t_{max} , T_w), начальных условий при t =0, значений коэффициентов оптического поглощения, тепло-и электропроводности и теплоемкости плазмы (σ, λ, c_T, k).

Методика оценки работы.

Модуль 3, срок - 17-я неделя.

1. Разработана программа, проведено тестирование, выполнены пункты 1-4 Задания, обнаружено понимание технологии исследования в математическом моделировании - 18 баллов (минимум).

2. Проведено детальное исследование по всем пунктам задания и любых других вопросов, сформулированных автором в инициативном порядке по теме работы в различных компонентах вычислительного эксперимента: модель, алгоритм, программа, исследование предметной области – 19-30 баллов (максимум).