THREE-BODIES PROBLEM AND ITS ACCURATE SOLUTIONS

A. P. MARKEEV

The content of the three-bodies problem is described. Its accurate particular solutions are given. The problem of stability of these solutions and some modern projects of their applications for space investigations are discussed.

Описана постановка задачи трех тел. Указаны ее точные частные решения. Обсуждаются вопрос об устойчивости этих решений и некоторые современные проекты их использования для космических исследований.

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ И ЕЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

А. П. МАРКЕЕВ

Московский государственный авиационный институт

ВМЕСТО ВВЕДЕНИЯ

В различных науках о природе есть такие задачи, которые не решены до сих пор несмотря на их важность для развития самих наук и познания окружающего нас мира.

В статье пойдет речь о небесной механике – науке о движении естественных и искусственных небесных тел под действием сил различной физической природы и об одной важнейшей задаче, изучаемой небесной механикой – знаменитой задаче трех тел (точнее, трех материальных точек).

Прежде чем углубиться в основное содержание статьи, нужно рассмотреть несколько вспомогательных вопросов, которые общеизвестны, но совершенно необходимы для дальнейшего изложения.

О ЗАКОНАХ КЕПЛЕРА И О ВСЕМИРНОМ ТЯГОТЕНИИ

Геометрические законы движения небесных тел, составляющих Солнечную систему, были установлены трудами немецкого ученого Иоганна Кеплера, который в своих трудах опирался на материалы наблюдений, полученные его предшественниками, в частности на богатый наблюдательный материал датского ученого Тихо Браге. В результате многотрудных поисков И. Кеплер установил три следующих закона.

1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Площади, заметенные радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны промежуткам времени, в которые они были заметены.

3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их больших полуосей.

Законы Кеплера имеют только кинематический характер, то есть они не рассматривают причины (силы), обусловливающие движение планет, хотя некоторые ученые эпохи Кеплера были близки к правильному пониманию этих причин, отмечали свойство небесных тел притягиваться друг к другу (Н. Коперник, Г. Галилей). Сам И. Кеплер писал: “Если в каком-нибудь месте мира находились два камня на близком расстоянии друг к другу и вне сферы действия какого бы ни было родственного им тела, то эти камни стремились бы соединиться друг с другом подобно двум магнитам”. Еще более близок к пониманию причин, объяснявших движение планет, был Р. Гук, отметивший увеличение силы взаимодействия небесных тел при уменьшении расстояния между ними.

Наиболее полное и строгое описание взаимодействия тел дал Исаак Ньютон в 1687 году в своем знаменитом трактате "Математические начала натуральной философии". Ньютон открыл закон, который впоследствии получил название закона всемирного тяготения или закона притяжения Ньютона: две материальные точки масс m_1 и m_2 притягиваются одна к другой с силой F, которая прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними, то есть

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1)$$

Здесь γ – универсальная гравитационная постоянная, одна и та же для всей Вселенной, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3 · кг$^{-1}$ · с$^{-2}$.

Закон всемирного тяготения является фундаментом небесной механики. Во всех ее основных задачах силы взаимодействия между телами определяются формулой Ньютона (1).

О ЗАДАЧЕ *n* ТЕЛ

Пусть n – произвольное целое число. Фундаментальная задача небесной механики – задача n тел – состоит в следующем. В пустоте находится n материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения Ньютона. Заданы начальные положения и скорости точек. Требуется найти положения точек для всех последующих моментов времени.

Математические трудности исследования этой задачи быстро возрастают с ростом числа тел. Для произвольного n задача не решена до сих пор, хотя существует много аналитических и численных методов, ориентированных на использование компьютеров, которые могут дать приближенное решение задачи. Это решение позволяет для заданных конкретных начальных условий определить положение каждой из n точек с любой необходимой для практики точностью для любого конечного отрезка времени. Но эти методы неспособны дать ответ на вопрос о поведении точек на сколь угодно большом неограниченном промежутке времени, хотя этот вопрос крайне важен в задаче о будущей судьбе Солнечной системы, да и всего мироздания тоже.

Однако для двух частных значений n задача n тел решена полностью, и произошло это очень давно, лет 300–350 назад, на заре становления современной механики. Речь идет о задачах одного и двух тел ($n = 1$ и $n = 2$). Кратко остановимся на этих задачах.

Случай $n = 1$. Решение задачи о движении одного тела содержится уже в первом законе Ньютона – законе инерции: всякое тело удерживается в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не побуждается приложенными силами изменить это свое состояние (И. Ньютон "Математические начала натуральной философии"). Так как тело одно-единственное, а побуждающие силы могут действовать только со стороны других тел (которых при $n = 1$ нет!), то оно в соответствии с законом инерции движется равномерно и прямолинейно. Это и дает полное решение задачи n тел при $n = 1$.

Случай $n = 2$. Решение задачи двух тел также было получено Ньютоном. Опираясь на законы Кеплера движения планет и некоторые другие результаты своих предшественников, Ньютон открыл закон всемирного тяготения, то есть по заданному движению планеты была найдена сила (1) ее взаимодействия с Солнцем. Ньютон рассмотрел и обратную задачу (в данном случае задачу двух тел): найти движение двух тел, взаимодействующих с силой, определяемой формулой (1). Оказалось, что тела движутся в фиксированной плоскости, определяемой начальными условиями, а их орбиты друг относительно друга и относительно общего центра масс представляют собой кривые, называемые коническими сечениями.

Эти имеющие исключительно важное значение для движения небесных тел кривые были открыты геометром и астрономом древности Менехмом (IV век до н.э.), учеником Евдокса. Менехм рассматривал сечения конусов вращения плоскостями, перпендикулярными их образующим. Линия пересечения плоскости и поверхности конуса получила название конического сечения. В зависимости от угла α при вершине конуса Менехм получил три типа конических сечений: если угол α острый, то в сечении получается эллипс; при прямом угле α получается парабола; при тупом угле α коническое сечение будет гиперболой.

Таким образом, Ньютон доказал, что орбиты в задаче двух тел могут быть эллипсами, гиперболами или параболами. Эти орбиты в небесной механике называют еще кеплеровскими орбитами.

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ – МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Каков путь, проходимый ученым, занимающимся решением реальных научных проблем естествознания? Ведь формы взаимодействия материальных объектов, участвующих в исследуемом им процессе, как правило, настолько сложны и многообразны, что даже в задачах механики и физики точное их описание математическими уравнениями оказывается невозможным. А если бы даже сами уравнения и удалось бы составить, то все равно пришлось бы столкнуться с непреодолимыми трудностями при их решении. Поэтому предварительно анализируются причины, определяющие основные качественные характеристики изучаемого процесса. Малосущественными причинами пренебрегается и внимание сосредоточивается на основных.

Математическая задача при этом упрощается. Следовательно, формулируется некоторая близкая к реальной упрощенная задача, идеализирующая рассматриваемый процесс. Эти упрощенные задачи называют модельными. Именно они затем подвергаются математическому исследованию.

Одной из таких модельных задач небесной механики является задача двух тел. Если пренебречь взаимным притяжением планет, а также другими факторами, такими, как сопротивление межпланетной среды, несферичность планет, изменение со временем их масс и массы Солнца и т.д., то приходим к задаче о движении только под действием взаимного притяжения двух тел: одной планеты и Солнца.

Но планеты притягивают одна другую, поэтому движение каждой из них не описывается задачей двух тел. Для пояснения влияния сил взаимного притяжения планет на их движение сопоставим величину силы F_J притяжения Земли Юпитером (масса которого превосходит массу остальных восьми планет, вместе взятых) с величиной силы F_S притяжения Земли Солнцем. Вычисления показывают, что $F_J/F_S < 0{,}0006$. Как видим, силы взаимного притяжения планет малы по сравнению с силами их притяжения Солнцем. Но они существуют! И их наличие может привести к заметному эффекту на больших промежутках времени.

В небесной механике движение планеты по эллипсу под действием притяжения одного Солнца называют невозмущенным, а силы взаимного притяжения – возмущающими. Движения планет, учитывающие возмущения, называют их возмущенными движениями.

Как построить модельную задачу для теории движения планет, учитывающую основные возмущения? Мы видели, что на отдельно взятую планету наибольшее воздействие будет оказывать Солнце. Из возмущений со стороны других тел Солнечной системы необходимо прежде всего учесть влияние Юпитера как самого массивного члена Солнечной системы после Солнца. Возмущениями от других тел Солнечной системы на первом этапе вполне можно пренебречь. Таким образом, мы приходим еще к одной важнейшей модельной задаче небесной механики – задаче о движении трех тел под действием сил взаимного тяготения по закону Ньютона.

В отличие от задачи двух тел задача трех тел не допускает общего решения, позволяющего для произвольных значений координат и скоростей тел в начальный момент времени $t = 0$ предсказать положение каждого из трех тел для любого будущего момента времени $t > 0$. И это несмотря на то, что ввиду своей важности задача трех тел привлекала к себе внимание многих математиков и механиков, среди которых были выдающиеся. Крупнейшие математики Ж. Лагранж, К. Якоби, А. Пуанкаре, Дж. Биркгоф и др. затратили на эту задачу много лет упорного труда, выдав поток блестящих идей и получив много ценных методов и результатов, но построить общее решение так и не удалось.

Наконец, в конце прошлого века ученые пошли на штурм этой задачи иначе: решили показать невозможность построения общего решения. Это удалось сделать Г.Э. Брунсу и А. Пуанкаре, доказавшим, что общее решение задачи трех тел нельзя выразить через алгебраические или через однозначные трансцендентные функции координат и скоростей тел.

Поэтому при современном состоянии математики общее решение может быть найдено только при помощи бесконечных рядов того или иного характера. Такое решение было предложено в 1912 году финским математиком К. Зундманом, который в результате глубоких исследований дал общее решение задачи трех тел в виде рядов, расположенных по степеням некоторой введенной им вместо времени t вспомогательной переменной. Но через двадцать лет вопрос о практической значимости рядов Зундмана для астрономии, к сожалению, был решен в отрицательном смысле. Французский ученый Д. Белорицкий показал, что для того, чтобы, пользуясь рядами Зундмана, вычислить положение какой-либо планеты с точностью, даваемой современными астрономическими ежегодниками, нужно в этих рядах взять число членов, выражаемое единицей с многими десятками нулей. Такие вычисления недоступны даже для современных компьютеров.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Хотя общее решение задачи трех тел получить не удалось, тем не менее уже более двухсот лет известны ее точные частные решения.

В 1772 году Лагранж опубликовал свой знаменитый мемуар "О задаче трех тел", удостоенный впоследствии премии Парижской академии наук. В нем, занимаясь уравнениями задачи трех тел, Лагранж, между прочим, указывает на существование двух классов движений в задаче трех тел, которые описываются несложными математическими формулами.

Для движений одного класса три взаимно притягивающиеся по закону Ньютона точки P_1, P_2 и P_3, расположенные в вершинах равностороннего треугольника произвольных размеров, при определенных по величине и направлению скоростях будут и в последующем двигаться, постоянно образуя равносторонний треугольник. Величина стороны треугольника изменяется со временем согласно законам Кеплера, а сам треугольник вращается в фиксированной плоскости вокруг общего центра масс тел, также подчиняясь законам Кеплера. Частные решения этого класса называют треугольными, или лагранжевыми, решениями.

В движениях второго класса все три тела постоянно находятся на одной прямой, вращающейся вокруг общего центра масс тел в соответствии со вторым законом Кеплера, а расстояния между телами изменяются опять же по законам кеплеровских движений. Существование таких частных решений было отмечено Леонардом Эйлером в 1767 году, за пять лет до мемуара Лагранжа. Решения второго класса получили название прямолинейных (коллинеарных), или эйлеровых.

Траектории тел P_1, P_2 и P_3, соответствующие точным решениям задачи трех тел, показаны на рис. 1. Представлен случай эллиптического движения. Точками на рис. 1, *а* (рис. 1, *б*) отмечены положения тел для трех (двух) моментов времени.

Существование упомянутых точных решений задачи трех тел можно доказать элементарными средствами. Особенно просто это можно сделать, когда тела движутся относительно их общего центра масс по круговым орбитам. Не останавливаясь на подробностях, отметим только, что в этом случае доказательство может быть основано на том, что центробежная сила для каждого из тел, вращающихся вокруг общего центра масс, должна уравновешиваться силами притяжения двух других тел.

ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ. ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

Для небесной механики и динамики космических полетов наиболее важна так называемая ограниченная задача трех тел. Она состоит в изучении движения тела P малой массы m_3 под действием ньютоновского притяжения тел S и J, обладающих конечными массами m_1 и m_2 ($m_1 \geq m_2 \gg m_3$) в предположении, что тело малой массы не влияет на движение тел конечных масс.

Тем самым в ограниченной задаче тела S и J движутся по орбитам, определяемым задачей двух тел, так что их движение известно. Таким образом, анализ ограниченной задачи трех тел сводится к исследованию движения только одного тела P малой массы. Например, если пренебречь притяжением Солнца, то движение космического аппарата на трассе Земля–Луна с приемлемой точностью описывается в рамках ограниченной задачи трех тел.

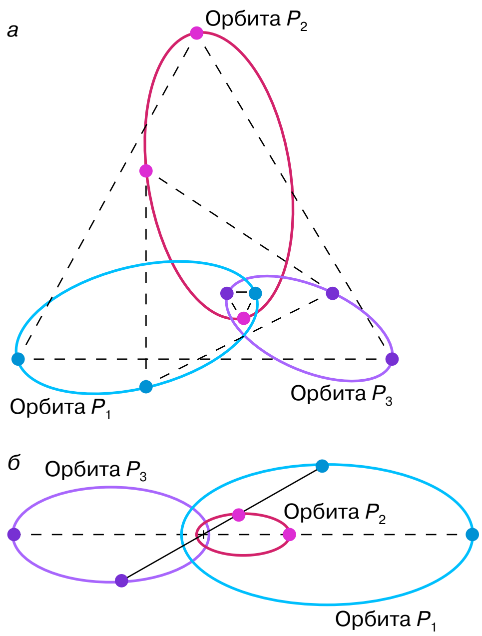

Рис. 1. Траектории для точных решений задачи трех тел: *а* – треугольные решения Лагранжа; *б* – прямолинейные решения Эйлера

Конечно, ограниченная задача значительно проще общей (неограниченной) задачи трех тел, но и ее общее решение не найдено.

В зависимости от формы орбит тел S и J конечных масс можно различать гиперболическую, параболическую и эллиптическую ограниченные задачи трех тел. Когда тела S и J движутся по окружностям, то говорят о круговой ограниченной задаче. Если тело P малой массы во все время движения находится в плоскости движения тел S и J, то говорят, что соответствующая ограниченная задача плоская. Если же тело P в своем движении выходит из плоскости орбит тел S и J, то говорят о пространственной ограниченной задаче.

Со многих точек зрения удобно изучать движение тела P в системе координат, вращающейся вместе с телами S и J, выбрав единицу длины такой, чтобы и для некруговой задачи расстояние между телами S и J было постоянным. В этой системе координат упомянутым выше точным решениям задачи трех тел соответствуют фиксированные точки – положения равновесия тела P. Точки, лежащие на прямой, проходящей через S и J, обозначают через L_1, L_2 и L_3, а точки, образующие равносторонние треугольники с телами S и J, обозначают через L_4 и L_5 (рис. 2). Если тело P поместить в L_i с нулевой (во вращающейся системе координат) скоростью, то оно останется неподвижным. Точки L_i часто называют точками либрации или либрационными центрами; L_4 и L_5 – треугольные, а L_1, L_2, L_3 – прямолинейные (коллинеарные) точки либрации.

“ГРЕКИ”, “ТРОЯНЦЫ” И ОБЛАКА КОРДЫЛЕВСКОГО

Сначала, сразу после обнаружения точных решений задачи трех тел, казалось, что они представляют только теоретический интерес. Сам Лагранж относился к ним не более как к любопытному математическому курьезу, не имеющему значения для астрономии. Но природа распорядилась по-своему.

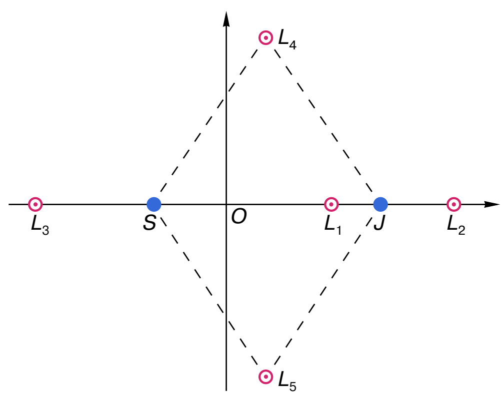

Рис. 2. Точки либрации. *O* – центр масс тел *S* и *J*

В 1907 году в Гейдельберге астрономы открыли астероид, движущийся вблизи орбиты Юпитера впереди него на 60° и образующий вместе с Солнцем и Юпитером равносторонний треугольник (рис. 3). Тем самым в природе было обнаружено движение, существование которого предсказывалось теоретическим исследованием Лагранжа, выполненным 135 годами ранее! Новооткрытому астероиду дали имя Ахиллес.

В результате последующих затем наблюдений были открыты еще восемь астероидов, движущихся недалеко от Ахиллеса в окрестности вершины равностороннего треугольника, а также пять астероидов, отстающих от Юпитера на 60° и образующих с ним и Солнцем другой равносторонний треугольник (рис. 3).

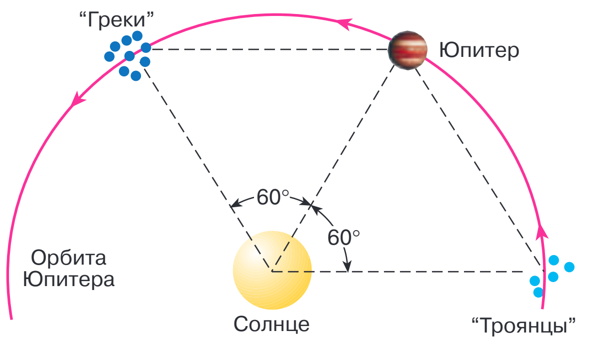

Рис. 3. "Греки" и "троянцы"

Все эти астероиды (малые планеты) получили мужские имена, взятые из древнегреческого эпоса о Троянской войне. Астероиды первой группы названы именами героев греческого войска, поэтому эти астероиды иногда называют греками. Астероиды, отстающие от Юпитера, были названы в честь защитников Трои. Астероиды этой группы именуются троянцами.

Точки либрации могут иметь большое значение для проблемы происхождения и эволюции Земли, Солнца и планет. Так называемые малые тела, интересующие ученых в связи с решением космологических вопросов, могут накапливаться в точках либрации. Так, например, в 1961 году астрономом Краковской обсерватории К. Кордылевским были открыты "тусклые облакоподобные спутники" в окрестности треугольной точки либрации L_5 системы Земля–Луна. Несколько позже он сообщил об открытии аналогичного космического облака вблизи L_4. Эти открытия были вскоре подтверждены наблюдениями американских астрономов.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ

Как ведет себя космическая частица, попав в малую окрестность точки либрации L_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) с малой относительной скоростью? Останется ли она вечно вблизи точки либрации L_i или за конечное время покинет малую окрестность этой точки? В первом случае говорят, что точка либрации устойчива, а во втором – неустойчива.

Задача об устойчивости прямолинейных точек либрации оказалась сравнительно несложной. Она решена давно, причем с отрицательным выводом – все три точки L_1, L_2 и L_3 неустойчивы. Это значит, что частицы космической материи, попадающие в окрестность прямолинейной точки либрации, с течением времени выбрасываются из этой окрестности.

Вопрос об устойчивости треугольных точек либрации оказался более трудным. Рассмотрим только случай плоской круговой ограниченной задачи. Из исследований известного английского механика Э. Рауса и русского математика и механика А. Ляпунова, посвященных общей (неограниченной) задаче трех тел, следует, что для устойчивости треугольных точек либрации круговой ограниченной задачи трех тел необходимо, чтобы отношение масс притягивающих точек $\;\; = m_2/(m_1 + m_2)$ было малым. Более точно, требуется выполнение неравенства

$$0 < \;\; (1 - \;\;) < \frac{1}{27}, \qquad (2)$$

то есть $0 < \;\; < (9 - \sqrt{69})/18 = 0{,}038\,520\,8...$ До Э. Рауса и А. Ляпунова неравенство (2) упоминалось в одной статье Г. Гашо, опубликованной в 1843 году.

Условие (2) было получено из анализа линейных уравнений движения точки P малой массы в окрестности вершины равностороннего треугольника. Но в математической теории устойчивости движения доказано, что во многих случаях (к ним относится и рассматриваемая задача при условии (2)) исследования линейных уравнений недостаточно для получения окончательных строгих выводов об устойчивости: движение, устойчивое в линейной задаче (как говорят специалисты по устойчивости, при выполнении необходимых условий), может быть неустойчивым в полной нелинейной задаче. Поэтому и после исследований Рауса и Ляпунова вопрос об устойчивости треугольных точек либрации плоской круговой ограниченной задачи трех тел оставался открытым еще около ста лет.

Возможность продвижения в исследовании этой задачи возникла лет сорок назад. К тому времени трудами советских ученых А. Колмогорова и В. Арнольда и американского математика Ю. Мозера были получены новые принципиальные результаты в общей теории гамильтоновых систем (к таким системам относится большинство систем, изучаемых в небесной механике, в том числе и задача трех тел). Опираясь на эти результаты, А. Леонтович в 1962 году показал, что для всех значений отношения масс, удовлетворяющих условию (2), имеет место устойчивость, кроме, может быть, некоторого дискретного множества значений этого отношения. Несколько позднее, в 1967 году, американские ученые супруги Андре и Бартоломе Депри доказали, что это исключительное множество состоит всего из трех значений , при которых результаты теории Колмогорова–Арнольда–Мозера неприменимы. Окончательный результат был получен в 1968 году и опубликован в 1969 году. Оказалось, что треугольные точки либрации плоской круговой ограниченной задачи трех тел устойчивы при всех значениях из области (2), кроме двух значений:

$$= \frac{15-\sqrt{213}}{30} = 0{,}013\,516\,0\ldots,$$

$$= \frac{45-\sqrt{1833}}{90} = 0{,}024\,293\,8\ldots,$$

при которых имеет место неустойчивость.

В задаче об устойчивости треугольных решений Лагранжа в других вариантах задачи трех тел (пространственном, эллиптическом) к настоящему времени также достигнуто значительное продвижение, но полного решения задачи нет до сих пор.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В недавнее время интерес к точкам либрации возрос в связи с практическими потребностями космических исследований. Существуют проекты запуска искусственных спутников в окрестности точек либрации Солнечной системы. Все чаще подчеркивается важность необычных динамических свойств точек либрации с астродинамической, геофизической и эксплуатационной точек зрения.

Были проекты создания в точках либрации баз для стоянок и техобслуживания космических станций, проведения космических аварийно-спасательных работ, размещения установок по проведению технологических процессов, требующих невесомости и высокого вакуума. Обсуждались проекты постройки в точках либрации внеатмосферных астрофизических обсерваторий и т.д. Многие из этих проектов кажутся сегодня фантастическими.

Особенно много внимания уделено проектам использования прямолинейной точки либрации L_2 системы Земля–Луна. Точка L_2 расположена на луче Земля–Луна за Луной на расстоянии примерно 65 000 км. Спутник, движущийся вблизи L_2, предполагается использовать как ретранслятор для связи наземного пункта с космическим аппаратом, находящимся на обратной стороне Луны или орбите искусственного спутника Луны, когда последний находится за Луной и непосредственная прямая радиосвязь с ним невозможна. Ведь на Луне в отличие от Земли нет ионосферы, отражающей короткие волны.

На рис. 4 изображена схема использования спутника, движущегося вблизи L_2, для связи между Землей и обратной стороной Луны. На этом рисунке система координат L_2xyz выбрана так, что ось L_2x направлена вдоль луча Земля–Луна, L_2y лежит в плоскости орбиты Луны, а L_2z перпендикулярна плоскости орбиты Луны. Если спутник расположен вблизи плоскости L_2yz, а расстояние от него до L_2

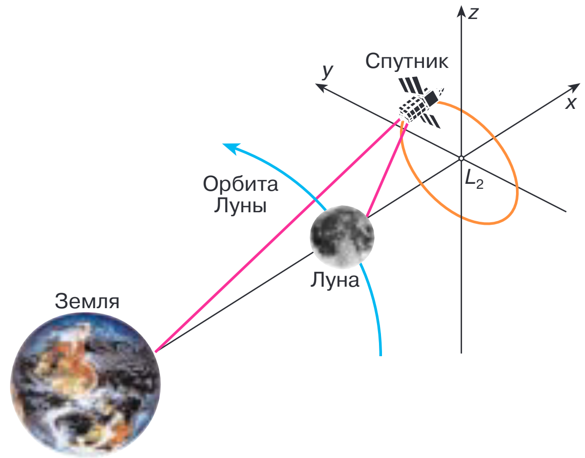

Рис. 4. Искусственный спутник связи в окрестности точки либрации L_2 системы Земля–Луна

превосходит примерно 3100 км, то он может быть использован для создания непрерывной радиосвязи между обратной стороной Луны и любой точкой поверхности Земли. Возможны и многие другие способы использования движущегося вблизи L_2 спутника для окололунных космических операций. Расчеты показали, что энергозатраты на удержание спутника вблизи точки L_2 (из-за ее неустойчивости) вполне приемлемы для современной космической техники.

Независимо от конкретных космических приложений точки либрации имеют и самостоятельный общемеханический и математический интерес. Многочисленные исследования показали, что сами точки либрации и характер движения в их окрестности тесно связаны с общим характером движения в задаче трех тел, что крайне важно ввиду того, что общее решение задачи трех тел, как уже говорилось, не найдено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.

2. *Демин В.Г.* Судьба Солнечной системы. М.: Наука, 1975. 263 с.

3. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

4. *Парс Л.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.

5. *Кононенко А.* Пять замечательных точек // Наука и жизнь. 1973. № 1. С. 42–46.

* * *

Анатолий Павлович Маркеев, доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного авиационного института, главный научный сотрудник Института проблем механики РАН. Область научных интересов – аналитическая динамика, теория устойчивости и нелинейных колебаний, небесная механика. Автор более 100 статей и четырех монографий.