ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Рубинштейн А.И.[1], Городецкая Т.А.[2], Серебренников П.С.[3], Шипов Н.В.[4], Шмаков А.В.[5] Email: Rubinshtein1791@scientifictext.ru

[1]Рубинштейн Александр Иосифович – доктор физико-математических наук, профессор;
[2]Городецкая Татьяна Александровна – старший преподаватель;
[3]Серебренников Павел Семенович – кандидат физико-математических наук, доцент;
[4]Шипов Николай Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент;
[5]Шмаков Андрей Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра высшей математики,
Мытищинский филиал
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Мытищи

Аннотация: *в небесной механике – науке о движении небесных тел под действием сил различной физической природы – известна задача трех тел. Она заключается в описании относительного движения трёх материальных объектов, связанных друг с другом законом всемирного тяготения Ньютона. До сих пор общее решение задачи трех тел не получено. Проблема не имеет решения в виде однозначных аналитических функций в общем случае, как, например, для двух тел. На сегодняшний день можно говорить лишь только о некоторых частных решениях (Лагранж, Эйлер), полученных при определенных заданных условиях – специальных начальных скоростях и координатах объектов. В статье рассматривается элементарный случай решения ограниченной плоской круговой задачи трех тел, очевидным образом неустойчивого движения. Проводится элементарный вывод закона Всемирного тяготения из второго закона Ньютона и законов Кеплера.*
Ключевые слова: *задача трех тел, ограниченная плоская круговая задача, законы Ньютона, законы Кеплера.*

ONE PARTICULAR CASE OF SOLVING THE PROBLEM OF THREE BODIES

Rubinshtein A.I.[1], Gorodetskaya N.A.[2], Serebrennikov P.S.[3], Shipov N.V.[4], Shmakov A.V.[5]

[1]Rubinshtein Aleksandr Iosifovich – DSc in physics and mathematics, Professor;
[2]Gorodetskaya Tat'jana Aleksandrovna – senior teacher;
[3]Serebrennikov Pavel Semenovich – PhD in physics and mathematics, Associate Professor;
[4]Shipov Nikolaj Viktorovich- PhD in physics and mathematics, Associate Professor;
[5]Shmakov Andrej Vyacheslavovich - PhD in physics and mathematics, Associate Professor,
HIGH MATHEMATICS DEPARTMENT,
MYTISHCHI BRANCH OF N.E.BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY, MYTISHCHI

Abstract: *in celestial mechanics, the science of the motion of celestial bodies under the action of forces of different physical nature – there is the famous problem of three bodies. It is the description of relative motion of three material objects in relation to each under the Newtonian law of gravitation. Until now, the general solution of the problem of three bodies is not received. The problem has no solution in the form of simple analytical functions in the general case, as, for example, for two bodies. Today we can speak only about certain special solutions (Lagrange, Euler), obtained for certain specified conditions of special initial velocities and coordinates of objects. The article considers the elementary solution of the restricted planar circular three-body problem, which one is obviously unstable motion. It is given an elementary derivation of the law of universal gravitation from Newton's second law and Kepler's laws.*
Keywords: *the problem of three bodies, restricted planar circular problem, Newton's laws, Kepler's laws.*

УДК 531

Важнейшей задачей небесной механики является задача движения трех точечных масс, между любыми двумя из которых действует сила, определяемая законом всемирного тяготения Ньютона (1687)

$$\overline{F} = k \cdot \frac{m_1 m_2}{R^3} \cdot \overline{R}\ , \qquad (1)$$

где $m_1,\ m_2$ – точечные массы, $\overline{R}$ – вектор, соединяющий эти массы, $R = |\overline{R}|$, k – постоянная всемирного тяготения.

Как известно, эта задача неразрешима – в конце 19 века Брунс доказал, что общее решение задачи трех тел нельзя выразить через алгебраические функции, а Пуанкаре – через однозначные трансцендентные функции координат и скоростей тел. В 1912 году финский математик К. Зундман получил решение в виде ряда разложения по степеням некоторой функции. Но этот ряд столь медленно сходится, что получить ответ с требуемой для астрономических приложений точностью на сколь угодно большом промежутке времени невозможно даже с использованием современных компьютеров.

Вместе с тем еще 1772 г. Лагранж указал на существование двух типов частных решений задачи трех тел. В первом случае тела находятся в вершинах равностороннего треугольника, длина стороны которого изменяется по законам И. Кеплера и треугольники вращаются в одной плоскости вокруг общего центра масс. Второй частный случай относится к тому, когда все три тела постоянно находятся на прямой, вращающейся вокруг центра масс по законам Кеплера. На подобное решение указал ранее (в 1767 году) Л. Эйлер. Такое движение оказывается неустойчивым – конфигурация распадается при изменении параметров.

В 1907 году астрономы в Гейдельберге обнаружили один, а потом еще восемь астероидов вблизи орбиты Юпитера (впереди него), положение которых с Юпитером и Солнцем образует равносторонний треугольник. Эти девять астероидов получили греческие имена участников троянской войны. Были обнаружены и пять астероидов, «отстающих» на 60° от Юпитера, с такими же свойствами орбит, названные именами защитников Трои. Движения «греков» и «троянцев» устойчивы (обо всем этом можно узнать из статьи [1]).

Рассмотрим еще одно (неустойчивое) решение плоской круговой задачи. Пусть точечные массы m_2 и m_3 движутся по плоской круговой орбите радиуса R вокруг массы m_1, и расстояние между m_2 и m_3 остается постоянным, равным r. При этом r столь мало по сравнению с R, а масса m_2 столь велика, что влиянием массы m_1 на малую массу m_3 можно пренебречь. Так как m_2 и m_3 постоянно находятся на одной окружности радиуса R с центром в точке m_1, то круговое вращение по закону всемирного тяготения массы m_3 вокруг массы m_2 имеет тот же период, что и вращение m_2 (и m_3) вокруг m_1.

Если v_1 и v_2 – скорости движения масс m_2 и m_3 вокруг своих центров, то по второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения получим

$$m_2 \cdot \frac{v_2^2}{R} = k \cdot \frac{m_1 m_2}{R^2} \ \Rightarrow\ \frac{4\pi^2 \cdot R^2}{T^2} = k \cdot \frac{m_1}{R} \ \Rightarrow\ T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{k \cdot m_1}; \qquad (2)$$

$$m_3 \cdot \frac{v_3^2}{r} = k \cdot \frac{m_2 m_3}{r^2} \ \Rightarrow\ \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} = k \cdot \frac{m_2}{r} \ \Rightarrow\ T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{k \cdot m_2} \qquad (3)$$

Откуда получаем:

$$\frac{4\pi^2 \cdot R^3}{k \cdot m_1} = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{k \cdot m_2} \qquad (4)$$

или $$\left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{m_1}{m_2} \quad <=> \quad r = R \cdot \sqrt[3]{\frac{m_2}{m_1}}$$

Очевидно, что движение неустойчиво: малейшее изменение массы m_2 ведет к изменению орбиты массы m_3. С материалом по данной тематике можно ознакомиться в следующих литературных источниках: [2] – [8].

В завершение приведем элементарный вывод закона Всемирного тяготения из второго закона Ньютона и законов Кеплера. Если имеет место круговое движение материальной точки с постоянной угловой скоростью, то есть, если

$$\begin{cases} x = R\cos\frac{2\pi}{T}\cdot t \\ y = R\sin\frac{2\pi}{T}\cdot t \end{cases}, \quad 0 \le t \le T, \qquad (5)$$

то по второму закону Ньютона с учетом, того, что $\bar{v} = (-\frac{2\pi}{T}R\cdot\sin\frac{2\pi}{T}t\ ;\ \ \frac{2\pi}{T}R\cdot\cos\frac{2\pi}{T}t)$, имеем (6)

$$\frac{d}{dt}(m\cdot\bar{v}) = m\cdot\frac{d\bar{v}}{dt} = m\cdot R\cdot\frac{d}{dt}(-\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t\ ;\ \ \frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}\cdot t) = -\frac{4\pi^2}{T^2}m\cdot(R\cos\frac{2\pi}{T}t\ ;\ \ R\sin\frac{2\pi}{T}t) =$$

$$= -\frac{4\pi^2}{T^2}m\cdot\bar{R} = \bar{F}(t) \qquad (7)$$

По третьему закону Кеплера

$$\frac{R^3}{T^2} = C \qquad (8)$$

Следовательно,

$$\bar{F}(t) = -\frac{4\pi^2}{T^2}m\cdot\bar{R} = -4\pi^2 m\cdot\frac{C}{R^3}\bar{R} = -4\pi^2 C\cdot m\cdot\frac{\bar{R}}{R^3} \qquad (9)$$

Но в силу относительности движения можно считать, что центр окружности (масса M) движется с постоянной угловой скоростью 2π/ T вокруг фиксированной точки (масса *m*) на окружности, то есть

$$C = M \qquad (10)$$

Отсюда

$$\bar{F}(t) = -(4\pi^2\lambda)\cdot m\cdot M\frac{\bar{R}}{R^3} = -k\cdot m\cdot M\frac{\bar{R}}{R^3}, \qquad (11)$$

что и является законом всемирного тяготения.

Из полученного соотношения следует, что сила

$$F = |\,\bar{F}(t)\,| \text{ пропорциональна } \frac{m\cdot M}{R^2}. \qquad (12)$$

О подобном говорили Коперник, Галилей, Галлей, Гук.

Список литературы / References

1. *Маркеев А.П.* О задаче трех тел и ее точных решениях, Империя математики // Физико-математический журнал для юношества. № 1, 2000. Ижевск, Удмуртский Университет. Стр. 40-54.
2. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Аналитические и качественные методы // М.: Наука, 1964.
3. *Демин В.Г.* Судьба Солнечной системы // М.: Наука, 1975.
4. *Парс Л.* Аналитическая динамика // М.: Наука, 1971.
5. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике // М.: Наука, 1978.
6. *Алексеев В.М.* Обмен и захват в задачах трех тел // ДАН СССР. 108. № 4, 1956. С. 599-602.
7. *Алексеев В.М.* Новые примеры захвата в задачах трех тел // Астрономический журнал. 39. № 4, 1962. С. 724-735.
8. *Арнольд В.И.* О классической теории возмущений в проблеме устойчивости планетных систем // ДАН СССР. 145. № 3, 1962. С. 487-490.