Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 2
по дисциплине «Математическая статистика»

Тема Интервальные оценки

Студент Шахнович Дмитрий Сергеевич

Группа ИУ7-62Б

Вариант №20

Преподаватель Власов П. А.

Москва, 2025

1 Задание

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Задачи:

1) Для выборки объёма n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

— вычисление точечных оценок $\widehat{\mu}(\vec{x_n})$ и $S^2(\vec{x_n})$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

— вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x_n})$, $\overline{\mu}(\vec{x_n})$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;

— вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma^2}(\vec{x_n})$, $\overline{\sigma^2}(\vec{x_n})$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания DX;

2) Вычислить $\widehat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3) Для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:

— на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \widehat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \widehat{\mu}(\vec{x_n})$, $y = \underline{\mu}(\vec{x_N})$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x_N})$ как функции объёма n выборки, где n изменяется от 1 до N;

— на координатной плоскости Ozn построить прямую $z = \widehat{S^2}(\vec{x_N})$, также графики функций $z = \widehat{S^2}(\vec{x_n})$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x_N})$ и $z = \overline{\sigma^2}(\vec{x_N})$ как функции объёма n выборки, где n изменяется от 1 до N;

2 Математические сведения

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ. Пусть $\vec{X} = X_1, \ldots, X_N$ – случайная выборка из генеральной совокупности X.

Интервальной оценкой параметра θ уровня доверия γ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что P{$\theta \in$ ($\underline{\theta}(\vec{X})$;$\overline{\theta}(\vec{X})$) } = γ

$\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ называют верхней и нижней границами интервальной оценки соответственно.

γ-доверительным интервалом параметра θ называется реализация интервальной оценки параметра θ уровня γ, т. е. интервал вида ($\underline{\theta}(\vec{x_n})$;$\overline{\theta}(\vec{x_n})$), где $\vec{x_n}$ - выборка из генеральной совокупности X.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Границы γ-доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины:

$$\underline{\mu}(\vec{x_n}) = \overline{x} - \frac{S(\vec{x_n})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}(\vec{x_n}) = \overline{x} + \frac{S(\vec{x_n})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

где:

— $\overline{(}x)$ – выборочное среднее;

— $S^2(\vec{x_n})$ – исправленная выборочная дисперсия;

— n – объём выборки;

— γ – уровень доверия;

— t_α – квантиль уровня α распределения Стьюдента с n - 1 степенями свободы.

Границы γ-доверительного интервала для дисперсии нормальной случайной величины:

$$\underline{\sigma^2}(\vec{x_n}) = \frac{S^2(\vec{x_n})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma^2}(\vec{x_n}) = \frac{S^2(\vec{x_n})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

где h_α – квантиль уровня α распределения Хи-квадрат с n - 1 степенями свободы.

3 Текст разработанной программы

Листинг 3.1 — Программа лабораторной работы

```
X
   =[14.90,14.40,13.56,15.55,13.97,16.33,14.37,13.46,15.51,14.69,13.41,14.

sortX = sort(X);

function [n, mx, dx] = FindEstimate(x)
  n = length(x);
  mx = sum(x) / length(x); % выборочное среднее
  dx = sum((x - mx).^2) / (length(x) - 1); % несмещённая оценка диспе
     рсии
end

[n, mx, dx] = FindEstimate(X);
fprintf("Математическое ожидание X: %f.\n", mx);
fprintf("Исправленная выборочная дисперсия X: %f.\n", dx);

function mxLow = FindMxLow(x, gamma)
[n, mx, dx] = FindEstimate(x);
  mxLow = mx - (sqrt(dx) * tinv((1 + gamma)/2, n-1) / sqrt(n));
end

function mxHigh = FindMxHigh(x, gamma)
[n, mx, dx] = FindEstimate(x);
  mxHigh = mx + (sqrt(dx) * tinv((1 + gamma)/2, n-1) / sqrt(n));
end

function dxLow = FindDxLow(x, gamma)
[n, ~, dx] = FindEstimate(x);
  dxLow = (n - 1) * dx / (chi2inv((1 + gamma) / 2, n-1));
end

function dxHigh = FindDxHigh(x, gamma)
[n, ~, dx] = FindEstimate(x);
  dxHigh = (n - 1) * dx / (chi2inv((1 - gamma) / 2, n-1));
end

mxLow = FindMxLow(X, 0.9)
mxHigh = FindMxHigh(X, 0.9)
```

```
dxLow = FindDxLow(X, 0.9)
dxHigh = FindDxHigh(X, 0.9)

gamma = 0.9;

MxArr = zeros(1,n);
MxLowArr = zeros(1,n);
MxHighArr = zeros(1,n);
DxArr = zeros(1,n);
DxLowArr = zeros(1,n);
DxHighArr = zeros(1,n);
for i = 1:n
  xArr = X(1:i);
  [~, MxArr(i), DxArr(i)] = FindEstimate(xArr);
  MxLowArr(i) = FindMxLow(xArr, gamma);
  MxHighArr(i) = FindMxHigh(xArr, gamma);
  DxLowArr(i) = FindDxLow(xArr, gamma);
  DxHighArr(i) = FindDxHigh(xArr, gamma);
end

plot(1:n, [MxArr', MxLowArr', MxHighArr']);
xlabel('N');
ylabel('Mx');
xlim([5,n]);
legend('Mx', 'MxLow', 'MxHigh');

figure;

plot(1:n, [DxArr', DxLowArr', DxHighArr']);
xlabel('N');
ylabel('Dx');
xlim([5,n]);
legend('Dx', 'DxLow', 'DxHigh');
```

4 Результаты расчётов

Оценка математического ожидания: $\widehat{\mu}(\vec{x_n}) = 14.349167$.

Оценка дисперсии: $S^2(\vec{x_n}) = 1.277621$.

Границы γ-доверительного интервала для математического ожидания(γ = 0.9): $\underline{\mu}(\vec{x_n}) = 14.1781$, $\overline{\mu}(\vec{x_n}) = 14.5202$.

Границы γ-доверительного интервала для дисперсии (γ = 0.9): $\underline{\sigma^2}(\vec{x_n}) = 1.0452$, $\overline{\sigma^2}(\vec{x_n}) = 1.6036$.

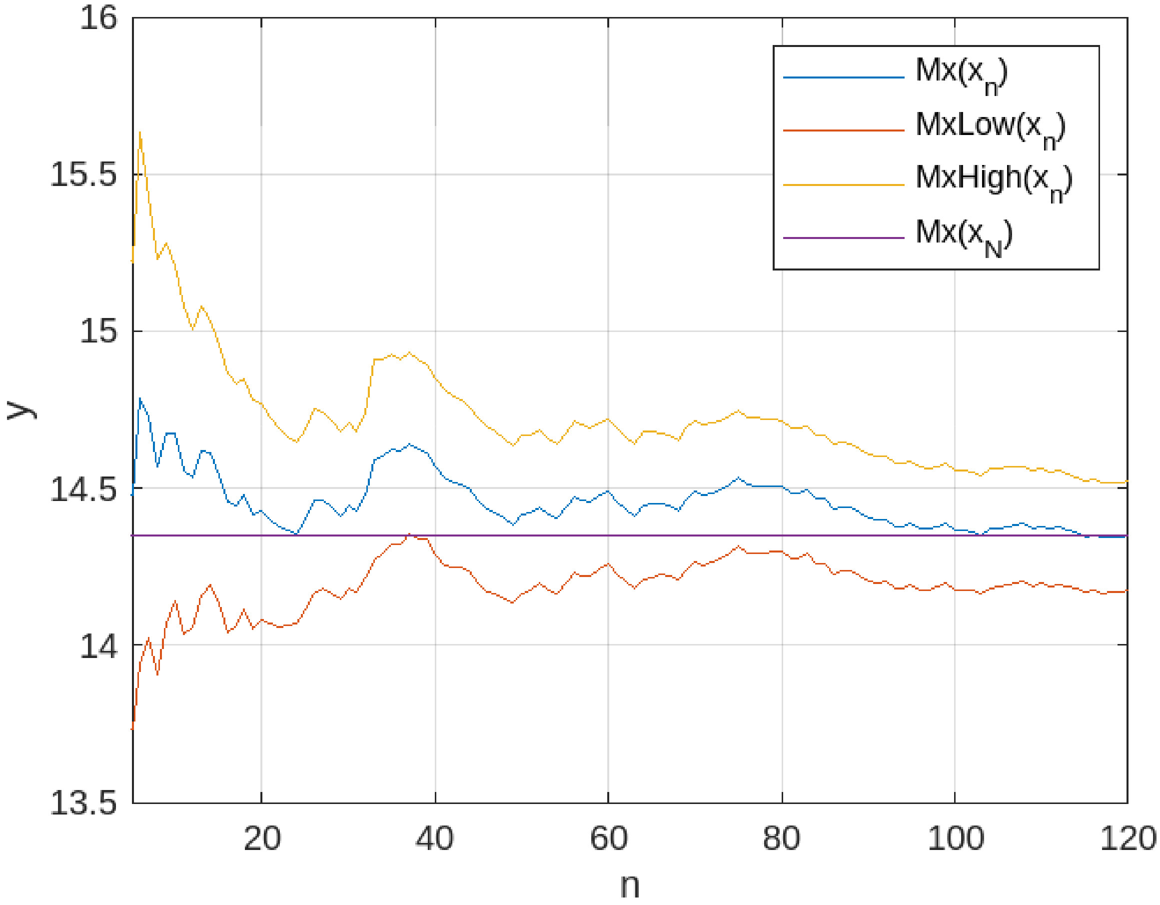

Рисунок 4.1 — Графики зависимости оценки математического ожидания и границ γ-доверительного интервала от размера выборки n

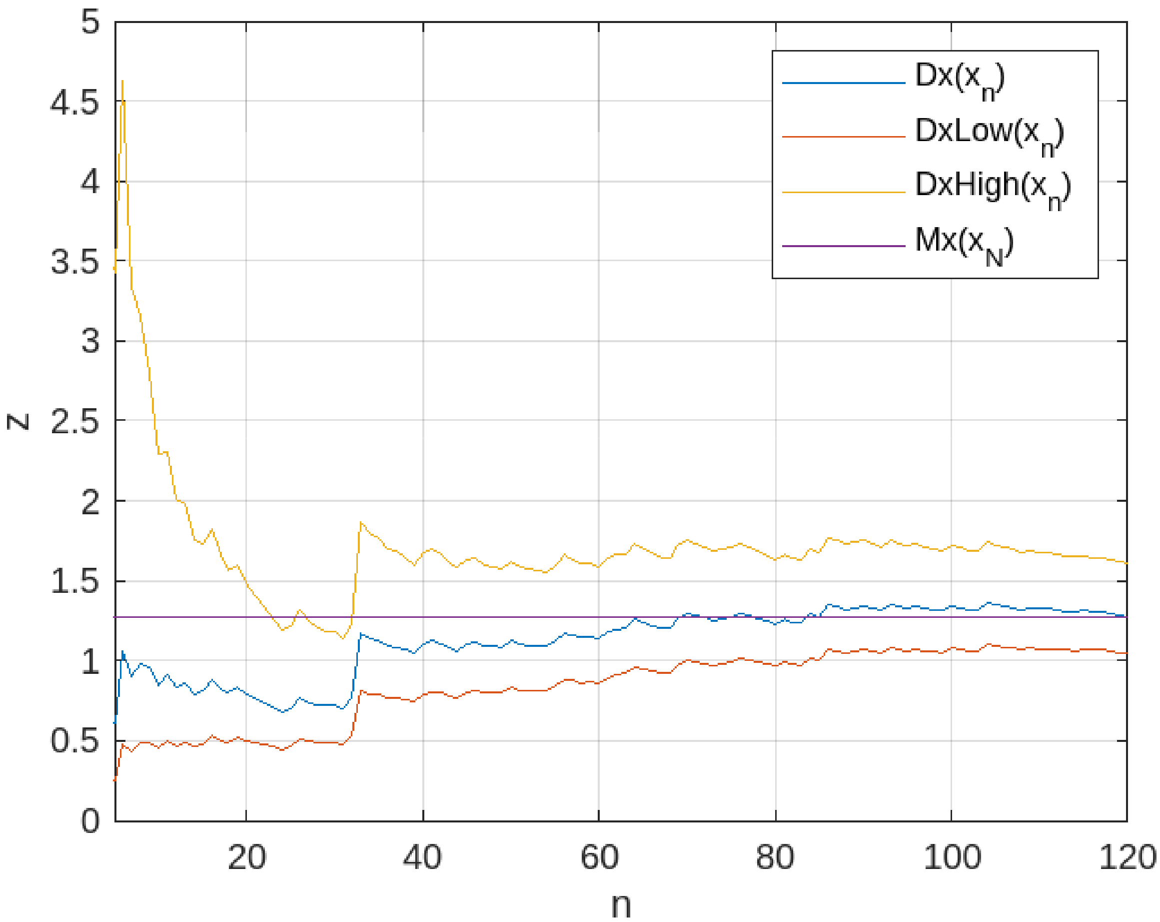

Рисунок 4.2 — Графики зависимости оценки дисперсии и границ γ-доверительного интервала от размера выборки n