Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1

a) Folgende Dualzahlen $(11010101100)_2$, $(1100100111011)_2$ und $(1011001{,}10111)_2$ sind als Zahlen zur Basis 8 und 16 darzustellen.

b) Mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Division-mit-Rest-Methode ist die folgende Dezimalzahl $(X)_{10} = 1398$ in eine Zahl jeweils zur Basis 2, 4, 5, 8 und 16 umzuwandeln.

c) Folgende Dezimalzahl $(X)_{10} = 138{,}69$ ist als 16-stellige Dualzahl, 8-stellige Oktalzahl und 6-stellige Hexadezimalzahl darzustellen. Geben Sie den Restfehler an.

d) Folgende Zahlen $(1010011)_2$, $(1204)_5$, $(237)_8$ und $(AF0B1)_{16}$ sind als Dezimalzahlen mit der Direktmethode und mit dem Horner-Schema umzurechnen.

e) Folgende Zahlen $(11001001{,}011)_2$, $(153{,}14)_8$ und $(C2A{,}83)_{16}$ sind als Dezimalzahlen mit der Direktmethode und mit dem Horner-Schema darzustellen.

f) Die Hexadezimalzahl $(1A{,}F5C)_{16}$ ist als 16-stellige Dualzahl darzustellen.

Lösung 1.1

a) $(11010101100)_2 = (11\ 010\ 101\ 100)_2 = (011\ 010\ 101\ 100)_2 = (3254)_8$

$(11010101100)_2 = (110\ 1010\ 1100)_2 = (0110\ 1010\ 1100)_2 = (6AC)_{16}$

b) gegeben ist $(X)_{10} = 1398$, gesucht wird $(Y)_5 = ?$

$1398 / 5 = 279 + 3/5 \Rightarrow (y_0)_5 := 3$

$279 / 5 = 55 + 4/5 \Rightarrow (y_1)_5 := 4$

$55 / 5 = 11 + 0/5 \Rightarrow (y_2)_5 := 0$

$11 / 5 = 2 + 1/5 \Rightarrow (y_3)_5 := 1$

$2 / 5 = 0 + 2/5 \Rightarrow (y_4)_5 := 2$

$(1398)_{10} = (21043)_5$

c) gegeben ist $(X)_{10} = 138{,}69$ gesucht wird eine Darstellung als 8-stellige Oktalzahl

$(X)_{10} = (138{,}69)_{10} = (V_X, N_X)_{10} \Rightarrow V_X = (138)_{10}$ und $N_X = (0{,}69)_{10}$

$138 / 8 = 17 + 2/8 \Rightarrow (x_0)_8 := 2$

$17 / 8 = 2 + 1/8 \Rightarrow (x_1)_8 := 1$

$2 / 8 = 0 + 2/8 \Rightarrow (x_2)_8 := 2$

$(138)_{10} = (212)_8 \Rightarrow n=3 \Rightarrow m = 8-n = 5$ Nachkommastellen

$0{,}69 \cdot 8 = 5{,}52 = 5 + 0{,}52 \Rightarrow (y_{-1})_8 = 5$

$0{,}52 \cdot 8 = 4{,}16 = 4 + 0{,}16 \Rightarrow (y_{-2})_8 = 4$

$0{,}16 \cdot 8 = 1{,}28 = 1 + 0{,}28 \Rightarrow (y_{-3})_8 = 1$

$0{,}28 \cdot 8 = 2{,}24 = 2 + 0{,}24 \Rightarrow (y_{-4})_8 = 2$

$0{,}24 \cdot 8 = 1{,}92 = 1 + 0{,}92 \Rightarrow (y_{-5})_8 = 1$

$(0{,}69)_{10} = (0{,}54121)_8$ mit $\varepsilon = 0{,}92 \cdot 8^{-5}$

$(138{,}69)_{10} \approx (212{,}54121)_8$

d) gegeben ist $(X)_2 = (1010011)_2$, gesucht wird $(Y)_{10} = ?$

Direktmethode:

$(Y)_{10} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

$(Y)_{10} = 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$

$(Y)_{10} = 64 + 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1$

$(Y)_{10} = 83$

Horner-Schema:

$(Y)_{10} := 0$

$(Y)_{10} := (Y)_{10} \cdot 2 + 1 = 0 \cdot 2 + 1 = 0 + 1 = 1$

$(Y)_{10} := (Y)_{10} \cdot 2 + 0 = 1 \cdot 2 + 0 = 2 + 0 = 2$

$(Y)_{10} := (Y)_{10} \cdot 2 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$(Y)_{10} := (Y)_{10} \cdot 2 + 0 = 5 \cdot 2 + 0 = 10 + 0 = 10$

$(Y)_{10} := (Y)_{10} \cdot 2 + 0 = 10 \cdot 2 + 0 = 20 + 0 = 20$

$(Y)_{10} := (Y)_{10} \cdot 2 + 1 = 20 \cdot 2 + 1 = 40 + 1 = 41$

$(Y)_{10} := (Y)_{10} \cdot 2 + 1 = 41 \cdot 2 + 1 = 82 + 1 = 83$

$(Y)_{10} = 83$

e) gegeben ist $(X)_8 = (153{,}14)_8$, gesucht wird $(Y)_{10} = ?$

Direktmethode:

$(Y)_{10} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^{-1} + 4 \cdot 8^{-2}$

$(Y)_{10} = 1 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}125 + 4 \cdot 0{,}015625$

$(Y)_{10} = 64 + 40 + 3 + 0{,}125 + 0{,}0625$

$(Y)_{10} = 107{,}1875$

Horner-Schema:

$(Y)_{10} = (V_Y,N_Y)_{10}$

$(V_Y)_{10} := 0$

$(V_Y)_{10} := (V_Y)_{10} \cdot 8 + 1 = 0 \cdot 8 + 1 = 0 + 1 = 1$

$(V_Y)_{10} := (V_Y)_{10} \cdot 8 + 5 = 1 \cdot 8 + 5 = 8 + 5 = 13$

$(V_Y)_{10} := (V_Y)_{10} \cdot 8 + 3 = 13 \cdot 8 + 3 = 104 + 3 = 107$

$(N_Y)_{10} := 0{,}0$

$(N_Y)_{10} := 8^{-1} \cdot (4 + (N_Y)_{10}) = 0{,}125 \cdot (4 + 0{,}0) = 0{,}125 \cdot 4 = 0{,}5$

$(N_Y)_{10} := 8^{-1} \cdot (1 + (N_Y)_{10}) = 0{,}125 \cdot (1 + 0{,}5) = 0{,}125 \cdot 1{,}5 = 0{,}1875$

$(Y)_{10} = (V_Y,N_Y)_{10} = 107{,}1875$

Aufgabe 1.2

Mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Tabelle sind $Z1 = X + Y$ und $Z2 = X - Y$ für folgende Werte zu berechnen:

a) $(X)_{10} = 237{,}034$ $(Y)_{10} = 146{,}\ 36$

b) $(X)_2 = 1011{,}011$ $(Y)_2 = 110{,}10101$

c) $(X)_5 = 13201{,}431$ $(Y)_5 = 3244{,}1341$

d) $(X)_8 = 237{,}034$ $(Y)_8 = 146{,}361$

e) $(X)_{16} = 307A{,}456$ $(Y)_{16} = D9B{,}F4C$

Lösung 1.2

a)

Übertrag	0010 000	Übertrag	0101 100
$(X)_{10} =$	237,034	$(X)_{10} =$	237,034
$(Y)_{10} =$	+ 146,360	$(Y)_{10} =$	- 146,360
$(Z1)_{10} =$	383,394	$(Z2)_{10} =$	090,674

b)

Übertrag	11111 11000	Übertrag	01001 01110
$(X)_2 =$	1011,01100	$(X)_2 =$	1011,01100
$(Y)_2 =$	+ 0110,10101	$(Y)_2 =$	- 0110,10101
$(Z1)_2 =$	10010,00001	$(Z2)_2 =$	0100,10111

Aufgabe 1.3

Vorgegeben sind Dualzahlen in der Vorzeichen-Betrag-Darstellung. Mit Hilfe des Zweierkomplements sind $Z = X + Y$ für diese Zahlen zu berechnen. Fällt das Ergebnis der Berechnung negativ aus, so ist es in die Vorzeichen-Betrag-Darstellung zurück zu transformieren.

a) $(X)_2 = -(11001{,}11011)_2$ $(Y)_2 = +(1010{,}011)_2$
b) $(X)_2 = +(11001{,}1101111)_2$ $(Y)_2 = -(10010{,}0011101)_2$
c) $(X)_2 = -(1001{,}1101)_2$ $(Y)_2 = -(101{,}1011)_2$
d) $(X)_2 = -(110{,}011)_2$ $(Y)_2 = -(11101{,}0011)_2$
e) $(X)_2 = +(1110{,}1101)_2$ $(Y)_2 = +(101{,}011)_2$
f) $(X)_2 = +(1010{,}101)_2$ $(Y)_2 = +(11011{,}01)_2$

Lösung 1.3

Hinweis. Vor jeder arithemtischen Operation ist die Anzahl der Stellen vom „kürzeren" Wert an die Anzahl der Stellen vom „längeren" Wert anzupassen. Anschließend werden beide Werte um Vorzeichenstellen erweitert.

a) $Z = -(X) + Y$

$(X)_2 = -(11001{,}11011)_2 = -(0.11001{,}11011)_2$

1er–Komplement von $(X)_2 = (1.00110{,}00100)_2$

2er–Komplement von $(X)_2 = (1.00110{,}00101)_2$

Übertrag	0 11100 11000
$(X)_2$ =	1.00110,00101
$(Y)_2$ =	+ 0.01010,01100
$(Z)_2$ =	1.10000,10001

Ergebnis $(Z)_2$ ist negativ $\Rightarrow$ Umwandlung in Vorzeichen–Betrag–Darstellung

$(1.10000{,}10001)_2 \Rightarrow -(0.01111{,}01110)_2 \Rightarrow -(0.01111{,}01111)_2$

$(Z)_2 = -(1111{,}01111)_2$

Aufgabe 1.4

Vorgegeben sind Dualzahlen in der Vorzeichen-Betrag-Darstellung. Mit Hilfe des Zweierkomplements sind $Z = X - Y$ für diese Zahlen zu berechnen. Fällt das Ergebnis der Berechnung negativ aus, so ist es in die Vorzeichen-Betrag-Darstellung zurück zu transformieren.

a) $(X)_2 = +(101{,}011)_2$ $(Y)_2 = +(1110{,}1101)_2$

b) $(X)_2 = -(11001{,}11011)_2$ $(Y)_2 = +(1010{,}00011)_2$

c) $(X)_2 = -(1011{,}101)_2$ $(Y)_2 = +(110{,}1011)_2$

Lösung 1.4

Hinweis. Vor jeder arithemtischen Operation ist die Anzahl der Stellen vom „kürzeren“ Wert an die Anzahl der Stellen vom „längeren“ Wert anzupassen. Anschließend werden beide Werte um Vorzeichenstellen erweitert.

a) Die Subtraktion $X - Y$ wird durch eine Addition mit einem 2er–Komplement–Wert $X + (-Y)$ ersetzt.

$Z = X - Y = X + (-Y)$

$(Y)_2 = +(1110{,}1101)_2 = +(0.1110{,}1101)_2$

1er–Komplement von $(Y)_2 = (1.0001{,}0010)_2$

2er–Komplement von $(Y)_2 = (1.0001{,}0011)_2$

Übertrag	00 0010 1100
$(X)_2 =$	0.0101,0110
$(Y)_2 =$	+ 1.0001,0011
$(Z)_2 =$	1.0110,1001

Ergebnis $(Z1)_2$ ist negativ $\Rightarrow$ Umwandlung in Vorzeichen–Betrag–Darstellung

$(Z)_2 = (1.0110{,}1001)_2 \Rightarrow -(0.1001{,}0110)_2 \Rightarrow -(0.1001{,}0111)_2$

$(Z)_2 = -(1001{,}0111)_2$

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1

Folgende boolesche Ausdrücke sind mit Hilfe der Wahrheitstabelle sowie mit Axiomen und Gesetzen der booleschen Algebra zu beweisen:

a) $y' + z = (x + y' + z) \cdot (x' + y' + z)$

b) $a \cdot c + b \cdot c + a' \cdot b = a \cdot c + a' \cdot b$

c) $(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)' = a' \cdot b' + b' \cdot c' + c' \cdot a'$

d) $a' \cdot b \cdot d + b \cdot c' \cdot d + a \cdot b \cdot c + b \cdot c \cdot d' = b \cdot (c + d)$

Lösung 2.1

a) Der boolesche Ausdruck $y' + z$ wird mit Hilfe vom Axiom A7 um 0 als neutrales Element zum Ausdruck $0 + y' + z$ erweitert. Mit dem Komplementär-Axiom A10 kann die Null als $x \cdot x'$ notiert werden, was den Ausdruck $x \cdot x' + y' + z$ ergibt. Dieser läßt sich mit Hilfe der Substitution $t := y' + z$ als $x \cdot x' + t$ notieren. Mit Hilfe von Substitutionen $a := x$, $b := x'$ und $c := t$ erhält man nun die aus der Vorlesung bekannte Formel $a \cdot b + c$, die sich wiederum nach dem Axiom A6 als $(a+c) \cdot (b+c)$ darstellen läßt. Durch die Rücksubstitutionen für a, b und c entsteht der Ausruck $(x + t) \cdot (x' + t)$, der schließlich mit der letzten Rücksubstitution für t in die Formel $(x + y' + z) \cdot (x' + y' + z)$ umgeformt wird.

Die Lösung läßt sich auch in einer mathematisch kürzeren Form notieren:

$L = y' + z$	[A7]
$= 0 + y' + z$	[A10]
$= x \cdot x' + y' + z$	[Sub: $t := y' + z$]
$= x \cdot x' + t$	[Sub: $a := x$, $b := x'$, $c := t$]
$= a \cdot b + c$	[A6]
$= (a + c) \cdot (b + c)$	[Sub: $a := x$, $b := x'$, $c := t$]
$= (x + t) \cdot (x' + t)$	[Sub: $t := y' + z$]
$= (x + y' + z) \cdot (x' + y' + z) = R$	

Wahrheitstabelle für den Ausdruck $y' + z = (x + y' + z) \cdot (x' + y' + z)$

Argumente			L–Seite	R–Seite		
x	y	z	y'+z	a = x+y'+z	b = x'+y'+z	a·b
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

b) Beweis mit Axiomen und Gesetzen der booleschen Algebra:

$L = a \cdot c + b \cdot c + a' \cdot b$ [A8]
$= a \cdot c + 1 \cdot b \cdot c + a' \cdot b$ [A9]
$= a \cdot c + (a + a') \cdot b \cdot c + a' \cdot b$ [A5]
$= a \cdot c + a \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c + a' \cdot b$ [2×A8]
$= a \cdot c \cdot 1 + a \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot 1$ [A2]
$= a \cdot c \cdot 1 + a \cdot c \cdot b + a' \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot 1$ [2×A5]
$= a \cdot c \cdot (1 + b) + a' \cdot b \cdot (c + 1)$ [2×G3]
$= a \cdot c \cdot 1 + a' \cdot b \cdot 1$ [2×A8]
$= a \cdot c + a' \cdot b = R$

Wahrheitstabelle für den Ausdruck $a \cdot c + b \cdot c + a' \cdot b = a \cdot c + a' \cdot b$

Argumente			gemeinsame Terme			L–Seite	R–Seite
a	b	c	x = a·c	y = b·c	z = a'·b	x+y+z	x+z
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1

Aufgabe 2.2

Folgende boolesche Funktionen sind mit Axiomen und Gesetzen der booleschen Algebra zu vereinfachen.

a) $y(a, b, c, d) = (a + c) \cdot (b + d) \cdot (d + a) \cdot (c + b)$

b) $y(a, b, c) = (a + b)' + (b \cdot c)' + a$

c) $g(x, y, z) = (x + y) \cdot [x' \cdot (y + z)]' + x \cdot y' + x' \cdot y'$

d) $f(a, b, c) = a + (a + b) \cdot (a' + c) \cdot (a' + b) \cdot (a \cdot b + c)$

Lösung 2.2

a) Schrittweise Vereinfachung der booleschen Funktion:

$$
\begin{aligned}
y &= (a + c) \cdot (b + d) \cdot (d + a) \cdot (c + b) && [A2] \\
&= (a + c) \cdot (d + a) \cdot (b + d) \cdot (c + b) && [A1] \\
&= (a + c) \cdot (a + d) \cdot (b + d) \cdot (b + c) && [2\times A6] \\
&= (a + c \cdot d) \cdot (b + c \cdot d) && [Sub: x := c \cdot d] \\
&= (a + x) \cdot (b + x) && [A6] \\
&= a \cdot b + x && [Sub: x := c \cdot d] \\
&= a \cdot b + c \cdot d
\end{aligned}
$$

b) Antwort: $y(a, b, c) = a + b' + c'$

c) Antwort: $g(x, y, z) = x + y'$

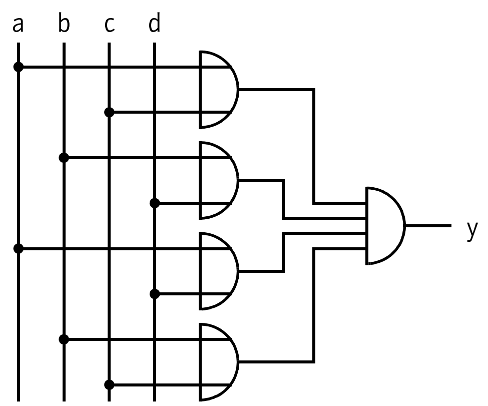
d) Antwort: $f(a, b, c) = a + b \cdot c$

Aufgabe 2.3

Die booleschen Funktion aus der Aufgabe 2.2 sind als Schaltnetz darzustellen.

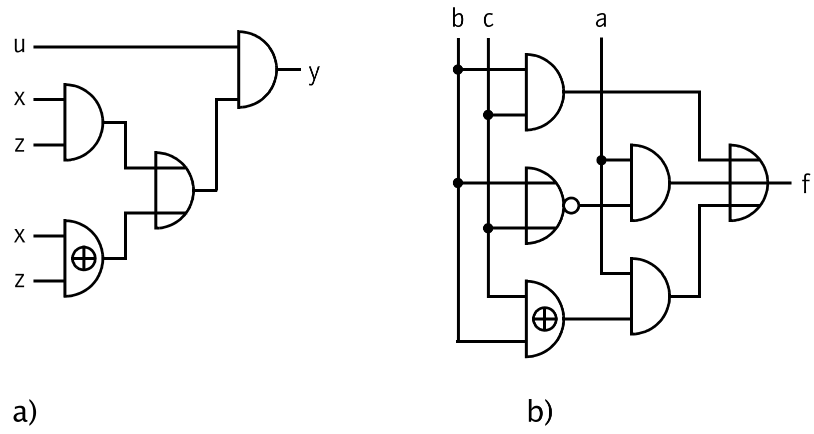
Lösung 2.3

a) $y(a, b, c, d) = (a + c) \cdot (b + d) \cdot (d + a) \cdot (c + b)$



Aufgabe 2.4

Aus den unten dargestellten Schaltnetzen sind boolesche Funktionen zu rekonstruieren, mit den Axiomen und Gesetzen der booleschen Algebra zu vereinfachen und als Schaltnetz wieder zu zeichnen.



a) b) c)

Lösung 2.4

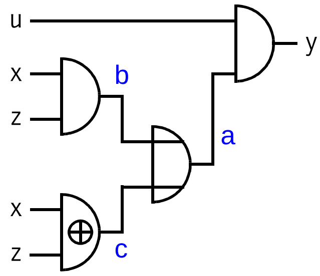
a) Rekonstruktion der Funktion:

$b = x \cdot z$

$c = x \oplus z = x' \cdot z + x \cdot z'$

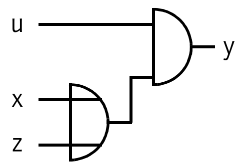
$a = b + c = x \cdot z + x' \cdot z + x \cdot z'$

$y = u \cdot a = u \cdot (x \cdot z + x' \cdot z + x \cdot z')$



Vereinfachung mit den Axiomen und Gesetzen:

$y = u \cdot (x \cdot z + x' \cdot z + x \cdot z')$	[A5]
$= u \cdot (z \cdot (x + x') + x \cdot z')$	[A9]
$= u \cdot (z \cdot 1 + x \cdot z')$	[A8]
$= u \cdot (z + x \cdot z')$	[A6]
$= u \cdot ((z + x) \cdot (z + z'))$	[A9]
$= u \cdot ((z + x) \cdot 1)$	[A8]
$= u \cdot (z + x)$	



b) Antwort: $f(a, b, c) = a + b \cdot c$

c) Antwort: $g(a, b, c) = b' \cdot (a + c)$

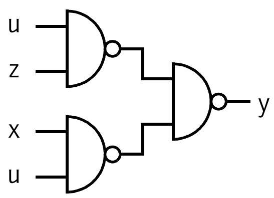
Aufgabe 2.5

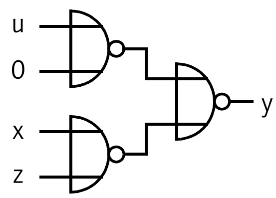
Die minimierten Funktionen aus der Aufgabe 2.4 sind in je zwei Varianten als Schaltnetze bestehend nur aus NAND-Gattern bzw. nur aus NOR-Gattern zu realisieren.

Lösung 2.5

a) Realisierung mit NAND-Gattern und mit NOR-Gattern:

$y = u \cdot (z + x)$	[A5]	$y = u \cdot (z + x)$	[G7]
$= u \cdot z + u \cdot x$	[G7]	$= (u \cdot (z + x))''$	[G9]
$= (u \cdot z + u \cdot x)''$	[G8]	$= ((u' + (z + x)')'$	[A7]
$= ((u \cdot z)' \cdot (u \cdot x)')'$		$= ((u + 0)' + (z + x)')'$	





Aufgabe 2.6

Wandeln sie die folgende Gleichung $f(a, b, c, d) = (a' + b) \cdot d + a \cdot b \cdot c'$ in eine NAND-Realisierung um, und zeichnen Sie das Resultat als Schaltnetz.

Aufgabe 2.7

Wandeln sie die folgende Gleichung $f(a, b, c, d) = a \cdot c + a \cdot b \cdot (c + d)$ in eine NOR-Realisierung um, und zeichnen Sie das Resultat als Schaltnetz.

Aufgabe 2.8

Für die unten stehenden Funktionen sind die KDNF und die KKNF zu finden, sowie Funktionstabellen zu rekonstruieren.

a) $F1(x, y, z) = x' \cdot (y' + z)$

b) $F2(a, b, c) = (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)'$

c) $F3(a, b, c) = a + b' \cdot c + a' \cdot b \cdot c$

d) $F4(x, y, z) = x' \cdot y + (z' + x \cdot y)' \cdot z$

Lösung 2.8

a) gesucht wird die KDNF von $F1(x, y, z) = x' \cdot (y' + z)$

$F1(x, y, z) = x' \cdot (y' + z)$	[A5]
$= x' \cdot y' + x' \cdot z$	[2×A8]
$= x' \cdot y' \cdot 1 + x' \cdot 1 \cdot z$	[2×A9]
$= x' \cdot y' \cdot (z + z') + x' \cdot (y + y') \cdot z$	[2×A5]
$= x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot y' \cdot z' + x' \cdot y \cdot z + x' \cdot y' \cdot z$	[G1: $x' \cdot y' \cdot z$]
$= x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot y' \cdot z' + x' \cdot y \cdot z$	
$F1(x, y, z) = \Sigma(1, 0, 3)$	

gesucht wird die KKNF von $F1(x, y, z) = x' \cdot (y' + z)$

$F1(x, y, z) = x' \cdot (y' + z)$	[3×A7]
$= (x' + 0 + 0) \cdot (0 + y' + z)$	[3×A10]
$= (x' + y \cdot y' + z \cdot z') \cdot (x \cdot x' + y' + z)$	[Sub: $a := x' + y \cdot y'$, $b := y' + z$]
$= (a + z \cdot z') \cdot (x \cdot x' + b)$	[2×A6]
$= (a + z) \cdot (a + z') \cdot (x + b) \cdot (x' + b)$	[Sub: $a := x' + y \cdot y'$, $b := y' + z$]
$= (x' + y \cdot y' + z) \cdot (x' + y \cdot y' + z') \cdot (x + y' + z) \cdot (x' + y' + z)$	[2×A1]
$= (x' + z + y \cdot y') \cdot (x' + z' + y \cdot y') \cdot (x + y' + z) \cdot (x' + y' + z)$	[Sub: $a := x' + z$, $b := x' + z'$]
$= (a + y \cdot y') \cdot (b + y \cdot y') \cdot (x + y' + z) \cdot (x' + y' + z)$	[2×A6]
$= (a + y) \cdot (a + y') \cdot (b + y) \cdot (b + y') \cdot (x + y' + z) \cdot (x' + y' + z)$	[Sub: $a := x' + z$, $b := x' + z'$]
$= (x' + y + z) \cdot (x' + y' + z) \cdot (x' + y + z') \cdot (x' + y' + z') \cdot (x + y' + z) \cdot (x' + y' + z)$	[G1: $(x' + y' + z)$]
$= (x' + y + z) \cdot (x' + y' + z) \cdot (x' + y + z') \cdot (x' + y' + z') \cdot (x + y' + z)$	
$F1(x, y, z) = \Pi(4, 6, 5, 7, 2)$	

Rekonstruktion der Funktionstabelle:

$F1(x{=}0, y{=}0, z{=}0) = 0' \cdot (0' + 0) = 1 \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$

$F1(x{=}0, y{=}0, z{=}1) = 0' \cdot (0' + 1) = 1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 = 1$

$F1(x{=}0, y{=}1, z{=}0) = 0' \cdot (1' + 0) = 1 \cdot (0 + 0) = 1 \cdot 0 = 0$

$F1(x{=}0, y{=}1, z{=}1) = 0' \cdot (1' + 1) = 1 \cdot (0 + 1) = 1 \cdot 1 = 1$

$F1(x{=}1, y{=}0, z{=}0) = 1' \cdot (0' + 0) = 0 \cdot (1 + 0) = 0 \cdot 1 = 0$

$F1(x{=}1, y{=}0, z{=}1) = 1' \cdot (0' + 1) = 0 \cdot (1 + 1) = 0 \cdot 1 = 0$

$F1(x{=}1, y{=}1, z{=}0) = 1' \cdot (1' + 0) = 0 \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 = 0$

$F1(x{=}1, y{=}1, z{=}1) = 1' \cdot (1' + 1) = 0 \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 1 = 0$

x	y	z	F1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1

Folgende boolesche Funktionen sind mit der KV-Methode zu minimieren:

a) $f(a, b, c) = a \cdot b' + b \cdot c' + a' \cdot b' \cdot c'$

b) $s(x, y, z) = \Sigma(3, 5, 6, (1, 4, 7))$

c) $f(a, b, c, d) = \Sigma(3, 8, 9, 14, 15, (1, 2, 6, 11, 12, 13))$

d) $g(a, b, c, d) = b' \cdot (a' + d') + a \cdot c' + a' \cdot b' \cdot (c + d)$

e) $h(a, b, c, d) = \Pi(0, 1, 2, 3, 10, 15, (6, 11, 12, 14))$

f) $u(x, y, z) = (x' + z) \cdot (x + y + z) \cdot (x' + y' + z')$

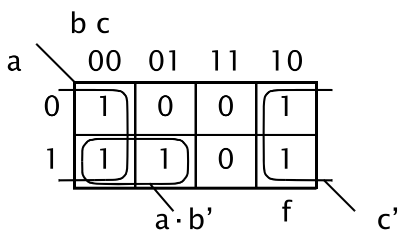
Lösung 3.1

a) Damit man einen booleschen Ausdruck ins KV-Diagramm eintragen kann, muß man entweder die Funktionstabelle aus diesem Ausdruck rekonstruieren, oder diesen Ausdruck in eine KDNF umformen.

$f(a, b, c) = a \cdot b' + b \cdot c' + a' \cdot b' \cdot c'$
$f(a=0, b=0, c=0) = 0 \cdot 0' + 0 \cdot 0' + 0' \cdot 0' \cdot 0' = 0 + 0 + 1 = 1$
$f(a=0, b=0, c=1) = 0 \cdot 0' + 0 \cdot 1' + 0' \cdot 0' \cdot 1' = 0 + 0 + 0 = 0$
$f(a=0, b=1, c=0) = 0 \cdot 1' + 1 \cdot 0' + 0' \cdot 1' \cdot 0' = 0 + 1 + 0 = 1$
$f(a=0, b=1, c=1) = 0 \cdot 1' + 1 \cdot 1' + 0' \cdot 1' \cdot 1' = 0 + 0 + 0 = 0$
$f(a=1, b=0, c=0) = 1 \cdot 0' + 0 \cdot 0' + 1' \cdot 0' \cdot 0' = 1 + 0 + 0 = 1$
$f(a=1, b=0, c=1) = 1 \cdot 0' + 0 \cdot 1' + 1' \cdot 0' \cdot 1' = 1 + 0 + 0 = 1$
$f(a=1, b=1, c=0) = 1 \cdot 1' + 1 \cdot 0' + 1' \cdot 1' \cdot 0' = 0 + 1 + 0 = 1$
$f(a=1, b=1, c=1) = 1 \cdot 1' + 1 \cdot 1' + 1' \cdot 1' \cdot 1' = 0 + 0 + 0 = 0$

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$f(a, b, c) = a \cdot b' + b \cdot c' + a' \cdot b' \cdot c'$
$= a \cdot b' \cdot (c + c') + (a + a') \cdot b \cdot c' + a' \cdot b' \cdot c'$
$= a \cdot b' \cdot c + a \cdot b' \cdot c' + a \cdot b \cdot c' + a' \cdot b \cdot c' + a' \cdot b' \cdot c'$



Die minimierte Funktion nach dem Auslesen der Gruppen aus dem KV-Diagramm:
$f(a, b, c) = a \cdot b' + c'$

b) Antwort: $s(x, y, z) = x + z$

c) Antwort: $f(a, b, c, d) = a \cdot (b + c') + b' \cdot d$

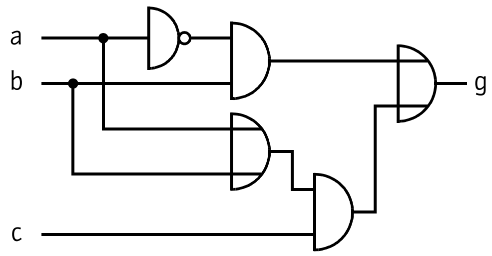
d) Antwort: $g(a, b, c, d) = a \cdot c' + b' \cdot (a' + d')$

e) Antwort: $h(a, b, c, d) = (a + b) \cdot (a' + c')$

f) Antwort: $u(x, y, z) = (y + z) \cdot (x' + y')$

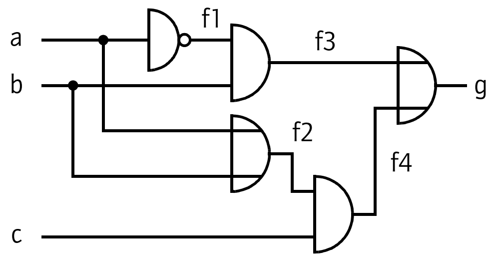
Aufgabe 3.2

Die rechts dargestellten Schaltung ist mit Hilfe der KV-Methode zu minimieren. Dazu sind folgende Schritte notwendig: aus der Schaltung ist die boolesche Funktion zu rekonstruieren, in die KDNF umzuwandeln, mit einem KV-Diagramm zu minimieren und eine neue Schaltung bestehend aus den Gattern AND, OR und NOT zu zeichnen.



Lösung 3.2

Rekonstruktion der booleschen Funktion aus der Schaltung mit Hilfsvariablen f1, f2, f3 und f4:



$f1 = a'$

$f2 = a + b$

$f3 = f1 \cdot b = a' \cdot b$

$f4 = f2 \cdot c = (a + b) \cdot c$

$g(a, b, c) = f3 + f4 = a' \cdot b + (a + b) \cdot c$

Umwandlung in eine KDNF:

$$g(a, b, c) = a' \cdot b + (a + b) \cdot c = a' \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$$
$$= a' \cdot b \cdot (c + c') + a \cdot (b + b') \cdot c + (a + a') \cdot b \cdot c$$
$$= a' \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c' + a \cdot b \cdot c + a \cdot b' \cdot c + a \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c$$
$$= a' \cdot b \cdot c + a' \cdot b \cdot c' + a \cdot b \cdot c + a \cdot b' \cdot c$$

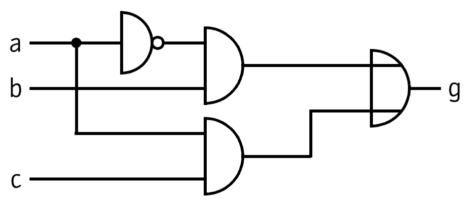
Minimierung mit einem KV-Diagramm und Darstellung der Lösung als Schaltnetz bestehend aus AND-, OR- und NOT-Gattern:

a \ b c	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

$a' \cdot b$

$a \cdot c$

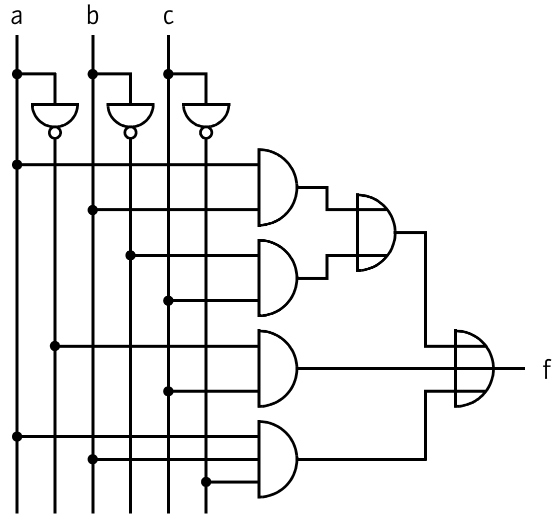
g

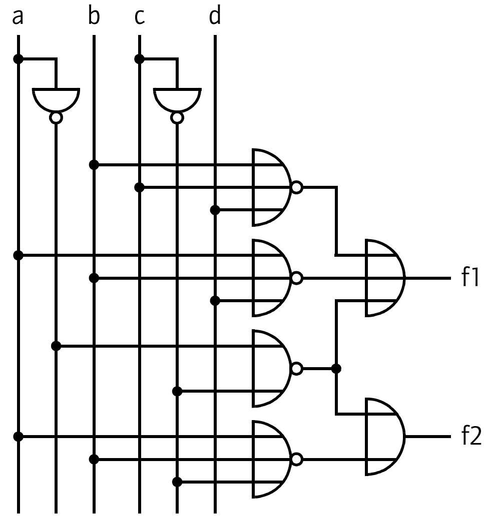


$g(a, b, c) = a \cdot c + a' \cdot b$

Aufgabe 3.3

Die unten dargestellten Schaltungen sind mit der KV-Methode zu minimieren und anschließend als Schaltnetze bestehend aus AND-, OR- NOT- und ggf. NOR-Gattern zu zeichnen.

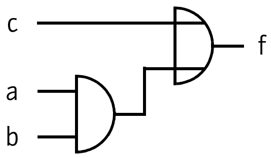


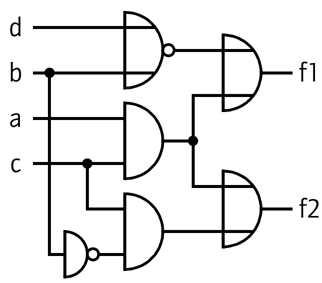


Lösung 3.3

$f(a, b, c) = a \cdot b + c$

$f1(a, b, c, d) = a \cdot c + (b + d)'$
$f2(a, b, c, d) = a \cdot c + b' \cdot c$



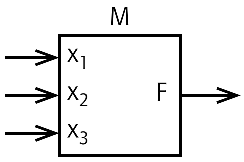


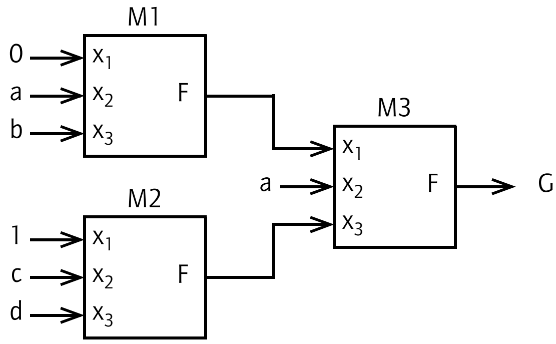
Aufgabe 3.4

Mit Hilfe der beiden Funktionen $F1(a, b, c, d) = \Sigma(1, 4, 7, 8, 12)$ und $F2(a, b, c, d) = \Pi(1, 3, 4, 5, 6, 9, 13, 14)$ sind zwei neue Funktionen $G1 = F1' \cdot F2$ und $G2 = F1' + F2$ zu bestimmen, diese mit KV-Diagrammen zu minimieren und die Resultate als minimale boolesche Funktionen in der DNF und KNF zu notieren.
Hinweis: Vor der Minimierung mit KV-Diagrammen stellen Sie eine Funktionstabelle auf, in der Sie die Funktionen G1 und G2 berechnen.

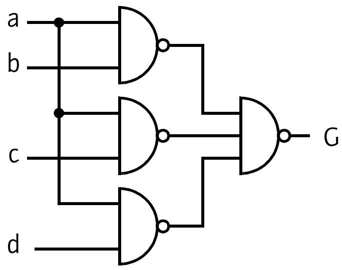
Aufgabe 3.5

Unter der Annahme, daß der Funktionsblock M die Funktion $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3$ realisiert, ist die Funktion $G(a, b, c, d)$ eines aus drei solchen Funktionsblöcken M1, M2 und M3 aufgebauten Systems (so wie im Bild zu sehen) zu bestimmen, mit einem KV-Diagramm zu minimieren und anschließend als Schaltnetz bestehend nur aus NAND-Gattern zu zeichnen.



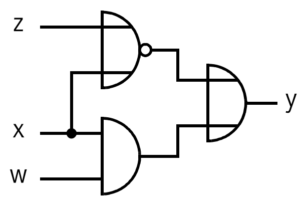


Lösung 3.5



Aufgabe 3.6

Unter den Annahmen, daß $x(a, b, c, d) = b \oplus d$ und $y(a, b, c, d) = \Sigma(0, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 15)$ sind, bestimmen Sie für das rechts dargestellte Schaltnetz die Funktionen $w(a, b, c, d)$ und $z(a, b, c, d)$, und notieren Sie in der dezimalcodierten KDNF mit „don’t care“-Termen, also in der Form Σ(Minterme, („don’t care“-Terme)).
Hinweis: Benutzen Sie eine Funktionstabelle.



Lösung 3.6

$w(a, b, c, d) = \Sigma(4, 9, 11, 12, (0, 2, 5, 7, 8, 10, 13, 15))$
$z(a, b, c, d) = \Sigma(2, 5, 8, 13, (1, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 14))$

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1

Folgende Funktionen sind mit der QM-Methode zu minimieren:

a) f1(a, b, c, d) = Σ(2, 5, 6, 9, 10, 13, (1, 4, 12, 14))

b) f2(a, b, c, d) = Σ(0, 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 15)

c) f3(a, b, c, d) = Σ(1, 3, 4, 5, 9, 11, (6, 8, 10))

d) f4(a, b, c, d) = Π(0, 2, 4, 7, 8, 10, 15, (3, 9, 11, 12))

e) f5(a, b, c, d) = a'·b·(c' + d') + c·d

Lösung 4.1

a) Minimierung mit der QM-Methode

	a	b	c	d	
1	0	0	0	1	v
2	0	0	1	0	v
4	0	1	0	0	v
5	0	1	0	1	v
6	0	1	1	0	v
9	1	0	0	1	v
10	1	0	1	0	v
12	1	1	0	0	v
13	1	1	0	1	v
14	1	1	1	0	v

	a	b	c	d	
(1,5)	0	–	0	1	v
(1,9)	–	0	0	1	v
(2,6)	0	–	1	0	v
(2,10)	–	0	1	0	v
(4,5)	0	1	0	–	v
(4,6)	0	1	–	0	v
(4,12)	–	1	0	0	v
(5,13)	–	1	0	1	v
(6,14)	–	1	1	0	v
(9,13)	1	–	0	1	v
(10,14)	1	–	1	0	v
(12,13)	1	1	0	–	v
(12,14)	1	1	–	0	v

	a	b	c	d	
(1,5,9,13)	–	–	0	1	P1
(1,9,5,13)	–	–	0	1	–
(2,6,10,14)	–	–	1	0	P2
(2,10,6,14)	–	–	1	0	–
(4,5,12,13)	–	1	0	–	P3
(4,6,12,14)	–	1	–	0	P4
(4,12,5,13)	–	1	0	–	–
(4,12,6,14)	–	1	–	0	–

Nach dem zweiten Schritt der Minimierung enthält die dritte Tabelle insgesamt acht Einträge, wovon vier redundante Primimplikanten sind. Die vier übrig gebliebenen Primimplikanten: $P1=(--01)_2$, $P2=(--10)_2$, $P3=(-10-)_2$ und $P4=(-1-0)_2$ werden in die Primimplikantentabelle eingetragen, mit deren Hilfe Kernimplikanten bestimmt werden. In die Primimplikantentabelle werden aber keine „don't-care"-Minterme eingetragen.

Mit Hilfe der Methode von Bowman und McVey wird die Gewichtung der einzelnen Primimplikanten bestimmt. Dies erfolgt mit Hilfe der Stärke der Abdeckung von Mintermen. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis alle Minterme abgedeckt sind.

Primimplikantentabelle:

		2	5	6	9	10	13		
P1	(1,5,9,13)		x		x		x	2.0	**2.0**
P2	(2,6,10,14)	x		x		x		**2.5**	0.0
P3	(4,5,12,13)		x				x	1.0	1.0
P4	(4,6,12,14)			x				0.5	0.0
		1.0	0.5	0.5	1.0	1.0	0.5		
		0.0	0.5	0.0	1.0	0.0	0.5		
		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		

Danach wird die minimierte Funktionsgleichung als disjunktive Verknüpfung der gefundenen Kernimplikanten gebildet:

$f1(a, b, c, d) = P1 + P2 = c \cdot d' + c' \cdot d = c \oplus d$

b) Antwort: $f2(a, b, c, d) = (b' \cdot d' + b \cdot d) + b' \cdot c'$ oder $(b' \cdot d' + b \cdot d) + c' \cdot d$

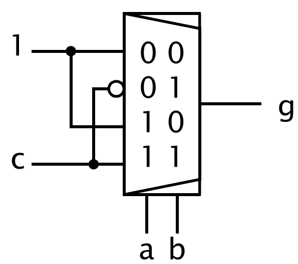
c) Antwort: $f3(a, b, c, d) = a' \cdot b \cdot c' + b' \cdot d$

d) Antwort: $f4(a, b, c, d) = c' \cdot d + b \cdot c \cdot d'$

e) Antwort: $f5(a, b, c, d) = a' \cdot b + c \cdot d$

Aufgabe 4.2

Die boolesche Funktion einer aus einem 1-aus-4-Multiplexer bestehende Schaltung ist zu rekostruieren, zu minimieren und als Schaltnetz bestehend aus möglichst minimaler Anzahl an Gattern zu zeichnen. Zur Verfügung stehen NOT-, OR-, AND-, XOR-, NOR- und NAND-Gatter.



Lösung 4.2

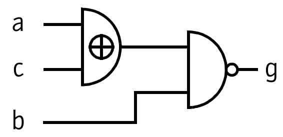
Die Funktionsgleichung eines 1-aus-4-Multiplexers

$$f_{mux} = x0 \cdot (s1' \cdot s0') + x1 \cdot (s1' \cdot s0) + x2 \cdot (s1 \cdot s0') + x3 \cdot (s1 \cdot s0)$$

Aus dem Schaltbild ergibt sich $s1 = a$, $s0 = b$, $x0 = 1$, $x1 = c'$, $x2 = 1$ und $x3 = c$.

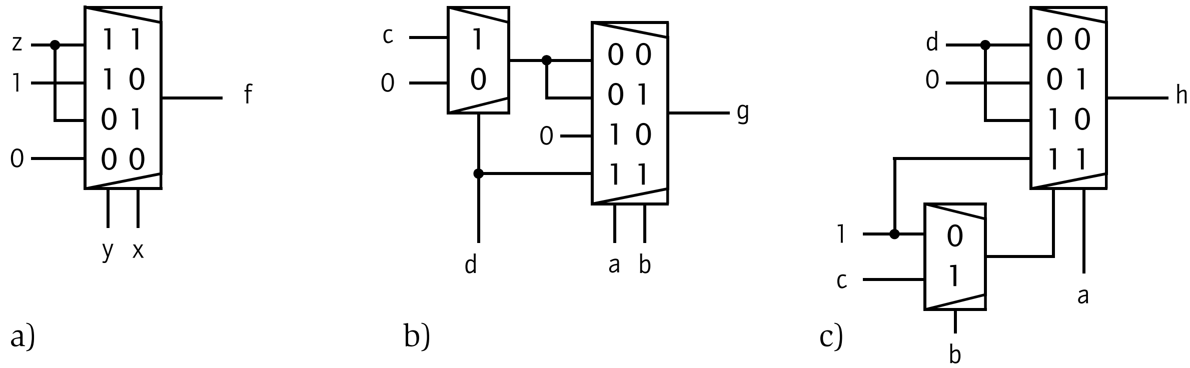
Diese Werte werden anstelle der Variablen in die obige Funktionsgleichung des 1-aus-4-Multiplexers eingesetzt, und so ergibt sich folgende Formel:

$$
\begin{aligned}
g(a, b, c) &= 1\cdot(a'\cdot b') + c'\cdot(a'\cdot b) + 1\cdot(a\cdot b') + c\cdot(a\cdot b)\\
&= a'\cdot b' + a'\cdot b\cdot c' + a\cdot b' + a\cdot b\cdot c\\
&= b'\cdot(a' + a) + b\cdot(a'\cdot c' + a\cdot c)\\
&= b' + b\cdot(a \oplus c)'\\
&= (b' + b)\cdot(b' + (a \oplus c)')\\
&= b' + (a \oplus c)'\\
&= (b\cdot(a \oplus c))'
\end{aligned}
$$



Aufgabe 4.3

Folgende Multiplexer-Schaltungen sind zu analysieren, und ihre booleschen Funktionen in minimalen Formen zu rekonstruieren.



Lösung 4.3

a) Antwort: $f(x, y, z) = x'\cdot y + x\cdot z$

b) Antwort: $g(a, b, c, d) = d\cdot(a'\cdot c + a\cdot b)$

c) Antwort: $h(a, b, c, d) = a'\cdot d + a\cdot(b' + c)$

Aufgabe 4.4

Die boolesche Funktion $f(a, b, c) = (a\cdot b)' + b\cdot(a + c)'$ ist mit einem 1-aus-4-Multiplexer zu realisieren.

Lösung 4.4

Es gibt drei gleichwertige Lösungen als Realisierung der Funktion $f(a, b, c)$ mit einem 1-aus-4-Multiplexer, und zwar in der Abhängigkeit davon, mit welchen Variablen aus der Funktion f die Steuervariablen $s0$ und $s1$ der Multiplexers belegt werden.

für (s1, s0) := (a, b)

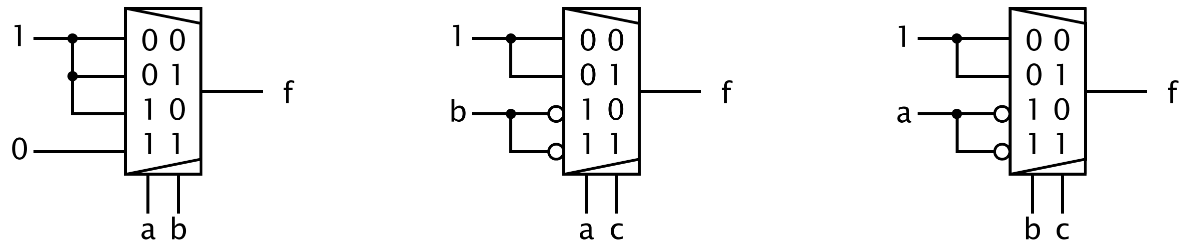
x0 := f(a=0, b=0, c) = (0·0)' + 0·(0 + c)' = 0' + 0·c' = 1 + 0 = 1
x1 := f(a=0, b=1, c) = (0·1)' + 1·(0 + c)' = 0' + 1·c' = 1 + c' = 1
x2 := f(a=1, b=0, c) = (1·0)' + 0·(1 + c)' = 0' + 0·1' = 1 + 0 = 1
x3 := f(a=1, b=1, c) = (1·1)' + 1·(1 + c)' = 1' + 1·1' = 0 + 0 = 0

für (s1, s0) := (a, c)

x0 := f(a=0, b, c=0) = (0·b)' + b·(0 + 0)' = 0' + b·0' = 1 + b = 1
x1 := f(a=0, b, c=1) = (0·b)' + b·(0 + 1)' = 0' + b·1' = 1 + 0 = 1
x2 := f(a=1, b, c=0) = (1·b)' + b·(1 + 0)' = b' + b·1' = b' + 0 = b'
x3 := f(a=1, b, c=1) = (1·b)' + b·(1 + 1)' = b' + b·1' = b' + 0 = b'

für (s1, s0) := (b, c)

x0 := f(a, b=0, c=0) = (a·0)' + 0·(a + 0)' = 0' + 0·a' = 1 + 0 = 1
x1 := f(a, b=0, c=1) = (a·0)' + 0·(a + 1)' = 0' + 0·1' = 1 + 0 = 1
x2 := f(a, b=1, c=0) = (a·1)' + 1·(a + 0)' = a' + 1·a' = a' + a' = a'
x3 := f(a, b=1, c=1) = (a·1)' + 1·(a + 1)' = a' + 1·1' = a' + 0 = a'



Aufgabe 4.5

Die Funktion f(a, b, c) = Σ(1, 2, 5, 6, 7) ist in drei Varianten mit

a) einem 1-aus-8-Multiplexer,
b) einem 1-aus-4-Multiplexer,
c) drei 1-aus-2-Multiplexern

zu realisieren.

Aufgabe 4.6

Die Funktion g(a, b, c, d) = Σ(1, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13) ist mit einem 1-aus-4-Multiplexer zu realisieren.

Aufgabe 4.7

Die Basiszelle des 1-Bit-Addierers aus der Vorlesung ist mit zwei 1-aus-4-Multiplexern zu realisieren.

Lösung 4.7

Die Basiszelle eines 1-Bit-Addierers wird mit zwei booleschen Funktionen beschrieben:

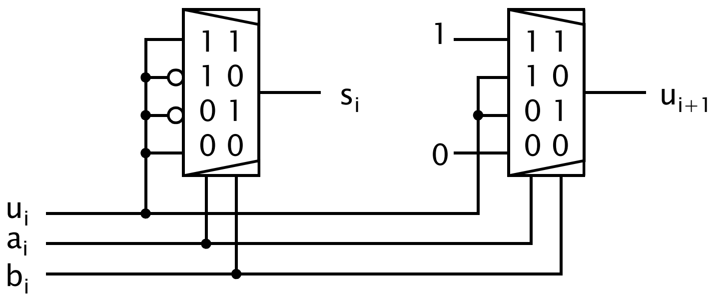
$$s_i(u_i,\ a_i,\ b_i) = u_i \oplus a_i \oplus b_i$$
$$u_{i+1}(u_i,\ a_i,\ b_i) = u_i \cdot (a_i \oplus b_i) + a_i \cdot b_i$$

Für den ersten Multiplexer mit $(s1,\ s0) := (a_i,\ b_i)$

$$x0 := s_i(u_i,\ a_i{=}0,\ b_i{=}0) = u_i \oplus 0 \oplus 0 = u_i \oplus 0 = u_i$$
$$x1 := s_i(u_i,\ a_i{=}0,\ b_i{=}1) = u_i \oplus 0 \oplus 1 = u_i \oplus 1 = u'_i$$
$$x2 := s_i(u_i,\ a_i{=}1,\ b_i{=}0) = u_i \oplus 1 \oplus 0 = u_i \oplus 1 = u'_i$$
$$x3 := s_i(u_i,\ a_i{=}1,\ b_i{=}1) = u_i \oplus 1 \oplus 1 = u_i \oplus 0 = u_i$$

Für den zweiten Multiplexer mit $(s1,\ s0) := (a_i,\ b_i)$

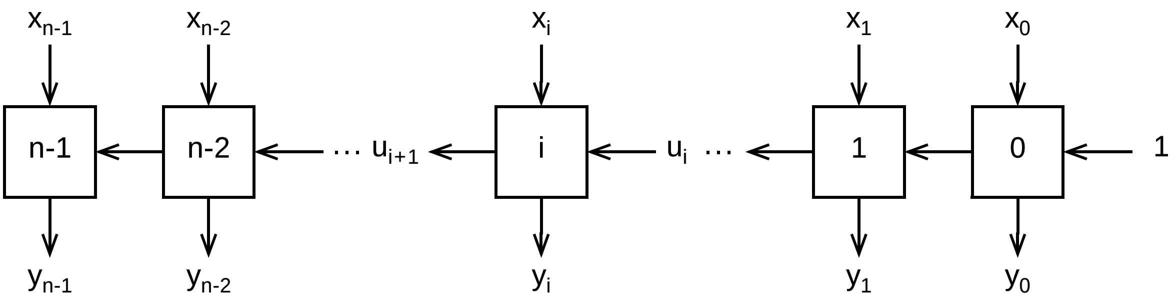
$$x0 := u_{i+1}(u_i,\ a_i{=}0,\ b_i{=}0) = u_i \cdot (0 \oplus 0) + 0 \cdot 0 = u_i \cdot 0 + 0 = 0$$
$$x1 := u_{i+1}(u_i,\ a_i{=}0,\ b_i{=}1) = u_i \cdot (0 \oplus 1) + 0 \cdot 1 = u_i \cdot 1 + 0 = u_i$$
$$x2 := u_{i+1}(u_i,\ a_i{=}1,\ b_i{=}0) = u_i \cdot (1 \oplus 0) + 1 \cdot 0 = u_i \cdot 1 + 0 = u_i$$
$$x3 := u_{i+1}(u_i,\ a_i{=}1,\ b_i{=}1) = u_i \cdot (1 \oplus 1) + 1 \cdot 1 = u_i \cdot 0 + 1 = 1$$



Aufgabe 4.8

Eine Schaltkette, die aus n gleichartigen Basiszellen aufgebaut ist, kann jede beliebige n-stellige Dualzahl $X=(x_{n-1},\ x_{n-2},\ \ldots,\ x_1,\ x_0)_2$ in eine negative Dualzahl in der 2er Komplement-Darstellung umwandeln (z.B. aus $X=(01101)_2$ wird $Y=(10011)_2$). Die höchstwertige Stelle in der Dualzahl ist bereits für das Vorzeichen vorgesehen.

Es ist die i-te Basiszelle der Schaltkette zu entwerfen und das Ergebnis als Funktionstabelle sowie minimierte Funktionsgleichungen für Ausgangs- und Übertragsvariablen anzugeben. Die Zeichnung der i-ten Basiszelle ist nicht erforderlich.

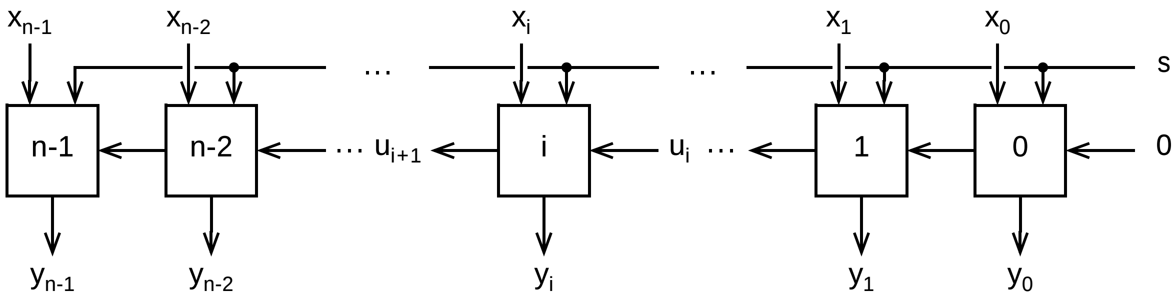


Lösung 4.8

Antwort: $y_i(u_i, x_i) = (u_i \oplus x_i)'$ und $u_{i+1}(u_i, x_i) = u_i \cdot x_i'$

Aufgabe 4.9

Eine Schaltkette, die aus n gleichartigen Basiszellen aufgebaut ist, kann eine n-stellige Dualzahl $X=(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0)_2$ in der Abhängigkeit von einer Steuervariable s wahlweise entweder mit 1 oder mit 2 multiplizieren, d.h. bei $s=0$ bleibt der Wert der Dualzahl unverändert (z.B. aus $X=(01101)_2$ wird $Y=(01101)_2$) und bei $s=1$ wird der Wert der Dualzahl mit 2 multipliziert (z.B. aus $X=(01011)_2$ wird $Y=(10110)_2$), was praktisch einer Verschiebung aller Positionen der Dualzahl um eine Stelle nach links entspricht. Auf der Stelle x_0 wird eine Null plaziert.



Es ist die i-te Basiszelle der Schaltkette zu entwerfen und das Ergebnis als Funktionstabelle sowie minimierte Funktionsgleichungen für Ausgangs- und Übertragsvariablen anzugeben. Die Zeichnung der i-ten Basiszelle ist nicht erforderlich.

Lösung 4.9

Antwort: $y_i(u_i, x_i, s) = u_i \cdot s + x_i \cdot s'$ und $u_{i+1}(u_i, x_i, s) = x_i$

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1

Auf der Basis von flankengesteuerten D-Flipflops sind folgende zyklische Modulo-m-Zähler zu entwerfen:

a) ein Modulo-10-Vorwärtszähler mit 8421-Code,

b) ein Modulo-6-Rückwärtszähler mit 8421-Code,

c) ein umschaltbarer Modulo-4-Zähler mit 8421-Code: die Umschaltung der Zählrichtung erfolgt mit dem Steuersignal R, und zwar so, daß der Zähler bei R = 0 vorwärts und bei R = 1 rückwärts zählt. Die Umschaltung der Zählrichtung ist nur beim Zählerstand 0 möglich. (Versuchen Sie eine Lösung mit 1-aus-4-Multiplexern anzugeben).

Alle Lösungen sollen Funktionstabellen, beim Bedarf auch Zustandagraphen, KV-Diagramme, Funktionsgleichungen und Schaltpläne enthalten.

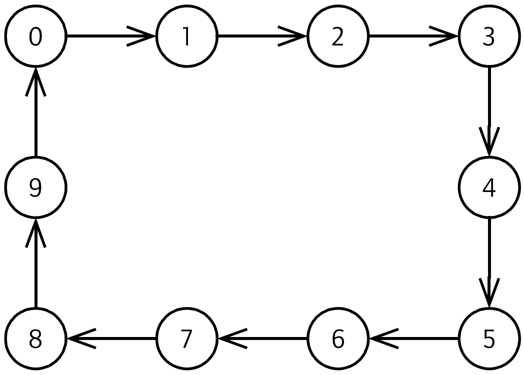
Lösung 5.1

a) Ein Modulo-10-Vorwärtszähler mit 8421-Code benötigt vier Bitstellen. Seine dezimal-codierte Zählsequenz lautet (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Die vier Bitstellen des Zählers werden mit Q3, Q2, Q1 und Q0 bezeichnet und haben entsprechend der Reihenfolge die Wertigkeiten 2^3, 2^2, 2^1 und 2^0. Somit ergibt sich aus der dezimal-codierten Sequenz eine binär-codierte Sequenz (Q3, Q2, Q1, Q0) = $(0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001)_2$.

Funktionstabelle:

Nr.	Q3	Q2	Q1	Q0	Q3$^+$	Q2$^+$	Q1$^+$	Q0$^+$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	1	0
6	0	1	1	0	0	1	1	1
7	0	1	1	1	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	0	0	1
9	1	0	0	1	0	0	0	0

Zustandsgraph:



Nach der Minimierung mit KV-Diagrammen ergeben sich folgende Gleichungen:

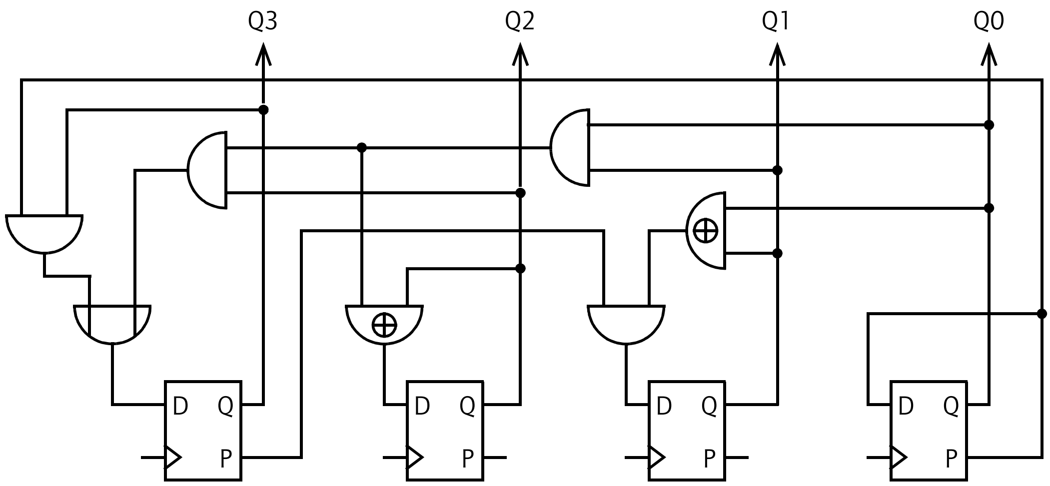
$Q0^+ = Q0'$

$Q1^+ = Q3' \cdot (Q1 \oplus Q0)$

$Q2^+ = Q2 \oplus (Q1 \cdot Q0)$

$Q3^+ = Q3 \cdot Q0' + Q2 \cdot Q1 \cdot Q0$

Schaltplan:



Aufgabe 5.2

Auf der Basis von flankengesteuerten D-Flipflops sind drei zyklische 4-Bit-Zähler mit folgenden Sequenzen

a) (0, 1, 3, 2, 6, 14, 10, 11, 9, 8, 12, 4)
b) (0, 1, 5, 7, 15, 14, 10, 8, 12, 4)
c) (0, 4, 12, 13, 15, 11, 10, 14, 6, 2, 3, 1)

zu entwerfen. Die Lösung soll jeweils eine Funktionstabelle, KV-Diagramme, Funktionsgleichungen und einen Schaltplan umfassen.

Aufgabe 5.3

Es sind folgende zyklische, selbst korrigierende 4-Bit-Zähler

a) Johnson-Zähler mit der Sequenz (0, 8, 12, 14, 15, 7, 3, 1)
b) Zähler mit der Gray-codierten Sequenz (2, 6, 7, 5, 4, 12, 13, 15, 14, 10)
c) Zähler mit der Glixon-codierten Sequenz (0, 1, 3, 2, 6, 7, 5, 4, 12, 8)
d) Zähler mit der einschrittig-codierten Sequenz (0, 1, 5, 7, 15, 13, 9, 11, 3, 2)
e) Zähler mit der einschrittig-codierten Sequenz (0, 2, 6, 4, 12, 14, 10, 8)

bestehend aus flankengesteuerten D-Flipflops zu entwerfen. Die Lösung soll jeweils eine Funktionstabelle, KV-Diagramme, Funktionsgleichungen und einen Schaltplan umfassen.

Lösung 5.3

a) Die vier Bitstellen des Zählers werden mit Q3, Q2, Q1 und Q0 bezeichnet und haben entsprechend der Reihenfolge die Wertigkeiten 2^3, 2^2, 2^1 und 2^0. Somit ergibt sich aus der dezimal-codierten Sequenz eine binär-codierte Sequenz
(Q3, Q2, Q1, Q0) = $(0000, 1000, 1100, 1110, 1111, 0111, 0011, 0001)_2$

Funktionstabelle:

Nr.	Q3	Q2	Q1	Q0	$Q3^+$	$Q2^+$	$Q1^+$	$Q0^+$
0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0
12	1	1	0	0	1	1	1	0
14	1	1	1	0	1	1	1	1
15	1	1	1	1	0	1	1	1
7	0	1	1	1	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0

KV-Diagramme und Gleichungen:

Q3Q2 \ Q1Q0	00	01	11	10
00	1	0	0	–
01	–	–	0	–
11	1	–	0	1
10	1	–	–	–

$Q3^+$

Q3Q2 \ Q1Q0	00	01	11	10
00	0	0	0	–
01	–	–	0	–
11	1	–	1	1
10	1	–	–	–

$Q2^+$

Q3Q2 \ Q1Q0	00	01	11	10
00	0	0	0	–
01	–	–	1	–
11	1	–	1	1
10	0	–	–	–

$Q1^+$

Q3Q2 \ Q1Q0	00	01	11	10
00	0	0	1	–
01	–	–	1	–
11	0	–	1	1
10	0	–	–	–

$Q0^+$

$Q0^+ = Q1$

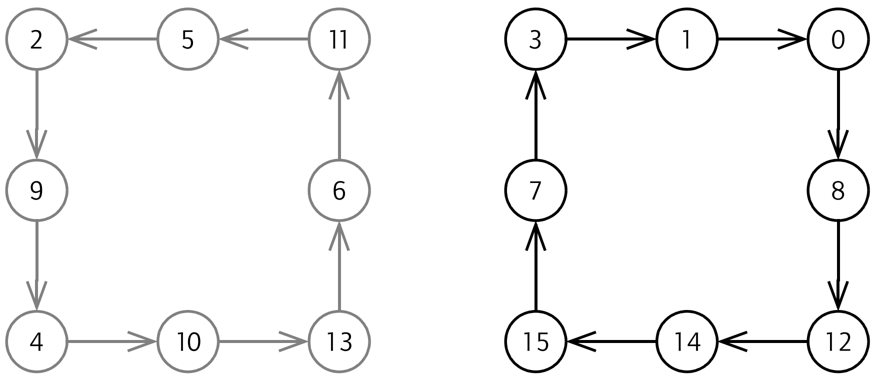
$Q1^+ = Q2$

$Q2^+ = Q3$

$Q3^+ = Q0'$

Bei den gewählten Gruppen in den KV-Diagrammen ergibt sich in dieser Lösung automatisch folgende Zuordnung von fehlerhaften Zählzuständen: 5 → 2 → 9 → 4 → 10 → 13 → 6 → 11 → 5. Diese Zurodung bildet einen geschlossenen Zyklus. Wenn der Zähler durch eine Störung einen von diesen Zählzuständen annimmt, dann gibt es für ihn keine Möglichkeit, diesen Zyklus wieder zu verlassen und in die gewünschte Zählfolge zurück zu kommen, wie das im Zustandsgraphen zu sehen ist.

Zustandsgraph:



Deshalb muß man mindestens eine Verbindung zwischen den beiden Zyklen finden. Hier wird die große Gruppe im KV-Diagramm für $Q0^+$ durch zwei kleinere, sich überlp-pende Gruppen ersetzt. Anschließend muß geprüft werden, wie sich diese Änderung auf den Zyklus der fehlerhaften Zählzustände ausgewirkt hat, und vor allem, ob dieser Zyklus eine Verbindung mit dem Zyklus der korrekten Zählzustände hat.

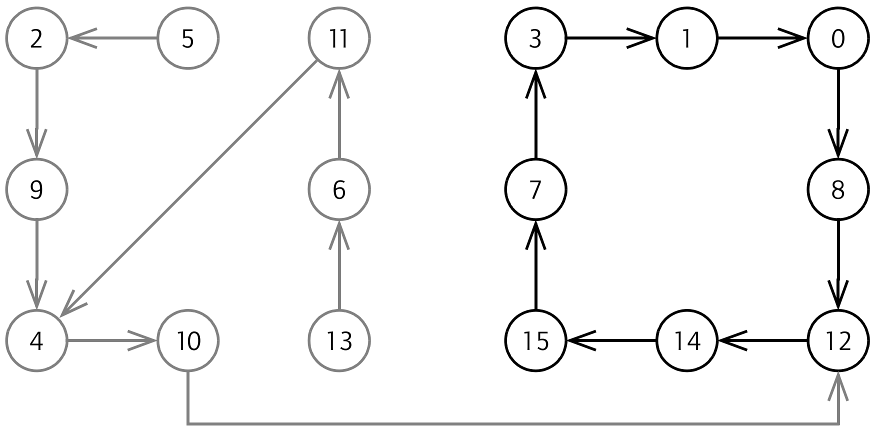
Q3Q2 \ Q1Q0	00	01	11	10
00	0	0	1	–
01	–	–	1	–
11	0	–	1	1
10	0	–	–	–

$Q0^+$

$$Q0^+ = Q3' \cdot Q1 + Q2 \cdot Q1 = Q1 \cdot (Q3' + Q2)$$

Durch diese Änderung wurde der Zyklus fehlerhafter Zustände in zwei Folgen fehlerhafter Zuständen aufgeteilt, die allerdings immer im korrekten Zählzustand 12 münden: 5 → 2 → 9 → 4 → 10 → 12 und 13 → 6 → 11 → 4 → 10 → 12, so wie das graphisch im Zustandsgraphen dargestellt ist.

Zustandsgraph mit korrigierten Zuständen:



Aufgabe 5.4

Die Lösung der Aufgabe 5.2 a) hat leider den großen Nachteil, daß der Zähler im schlechtesten Fall, also dann, wenn er in die fehlerhaften Zählzustande 5 oder 13 gerät, immer fünf Zählschritte braucht, bis er wieder einen richtigen Zählzustand 12 erreicht.

Finden Sie für den zyklischen, selbst korrigierenden 4-Bit-Johnson-Zähler mit der Sequenz (0, 8, 12, 14, 15, 7, 3, 1) eine bessere Lösung, in der der Zähler nach höchstens zwei Zählschritten aus einem fehlerhaften Zählzustand wieder in einen korrekten Zählzustand kommt. Achten Sie darauf, daß der für den Aufbau dieses Zählers notwendige Hardware-Aufwand (also Anzahl der Gatter) möglichst minimal ist.

Die Lösung soll einen Zustandsgraphen mit der von Ihnen gewählten Zuordnung von fehlerhaften Zählzuständen zu korrekten Zählzuständen, eine Funktionstabelle, KV-Diagramme, Funktionsgleichungen und optional einen Schaltplan umfassen

Aufgabe 5.5

Auf der Basis von flankengesteuerten D-Flipflops ist ein Modulo-50-Vorwärtszähler im binär codierten Dezimalsystem (BCD-Darstellung) zu entwerfen. Die Lösung soll einen Blockschaltbild, Funktionstabellen, KV-Diagramme, Funktionsgleichungen und einen Schaltplan enthalten.

Aufgabe 5.6

Auf der Basis von flankengesteuerten D-Flipflops ist ein rückgekoppeltes 4-Bit-Schieberegister zu entwerfen, das zyklisch die Sequenz (8, 4, 2, 1) generiert. Dabei sind zwei Lösungen zu analysieren:

a) die minimale Lösung, in der Pseudozustände (also die nicht angegebenen Zählerstände in der Sequenz) bei der Minimierung der Funktionen als „don’t care“-Terme berücksichtigt werden,

b) eine fehlerkorrigierende Lösung, in der sich das Schieberegister bei einem Störfall selbst „wiederfängt“. Hier sind die Pseudozustände auf die Zählerstände 1, 2, 4 und 8 sinnvoll abzubilden.

Für beide Lösungen sind Zustandsgraphen, Funktionstabellen, KV-Diagramme und Funktionsgleichungen anzugeben.

Aufgabe 5.7

Die Funktionsweise drei synchroner Moore-Automaten mit je zwei Eingängen x und y sowie einem Ausgang z ist durch folgende primitive Zustandstabellen gegeben.

a) xy

	00	01	10	z
1	1	2		0
2	1	2	3	0
3	1	4	3	0
4		4	5	1
5	6	7	5	1
6	6	4		1
7	1	7		1

b) xy

	00	01	11	10	z
1	1	2			0
2	4	2	3		1
3	4		3		1
4	4	2		5	0
5	4	6	3	5	1
6	1	6			1

c) xy

	00	01	11	10	z
1			2	1	0
2	5	3	2	2	1
3		3	4	3	1
4		4	4	2	1
5	5		6		1
6		7	6		1
7	8	7	2		0
8	8	7		1	0

Auf der Grundlage dieser Zustandstabellen sind synchrone Schaltwerke mit flankengesteuerten D-Flipflops zu entwerfen. Dazu soll zuerst die Anzahl der Zustände in diesen Zustandstabellen mit Hilfe von Implikationsmatrizen und Verschmelzungsgraphen minimiert werden. Anschließend sind die Zustände auf geeignete Weise zu codieren und die Resultate als Funktionsgleichungen zu notieren.

Lösung 5.7

a) primitive Zustandstabelle -> Implikationsmatrix

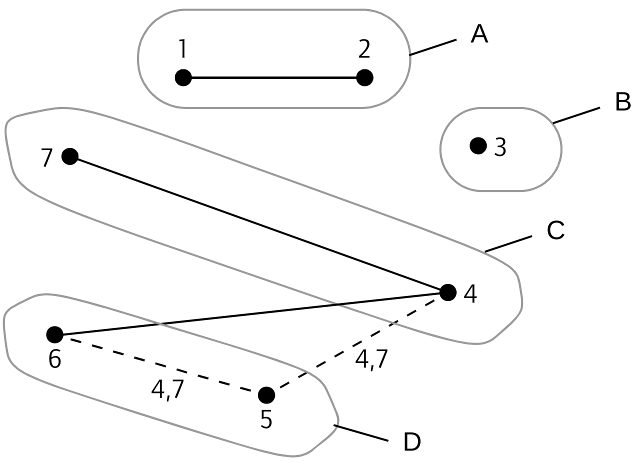
	xy 00	01	10	z
1	1	2		0
2	1	2	3	0
3	1	4	3	0
4		4	5	1
5	6	7	5	1
6	6	4		1
7	1	7		1

⇒

2	=					
3	2,4	2,4				
4	x	x	x			
5	x	x	x	4,7		
6	x	x	x	=	4,7	
7	x	x	x	=	1,6	1,6 4,7
	1	2	3	4	5	6

Es gibt drei äquivalente Zustandspaare (1, 2), (4, 6) und (4, 7) sowie sechs pseudo-äquivalente Zustandspaare. Nicht zusammenfaßbare pseude-äquivalente Zustandspaare sind (1, 3) wegen (2, 4), (2, 3) wegen (2, 4), (5, 7) wegen (1, 6) und (6, 7) wegen (1, 6). Zusammenfaßbare pseudo-äquivalente Zustandspaare sind (4, 5) wenn (4, 7) und (5, 6) wenn (4, 7).

Verschmelzungsgraph:



Folgende Zustände werden zusammengefaßt:
(1, 2) → A, (3) → B, (4, 7) → C und (5, 6) → D.

primitive Zustandstabelle nach der Reduktion und Codierung der Zustände: A := (00), B := (01), C := (11) und D := (10) mit den Zustandsvariablen P und Q.

xy	00	01	10	z
A	A	A		0
A	A	A	B	0
B	A	C	B	0
C		C	D	1
D	D	C	D	1
D	D	C		1
C	A	C		1

⇒

xy	00	01	10	z
A	A	A	B	0
B	A	C	B	0
C	A	C	D	1
D	D	C	D	1

⇒

PQ \ xy	00	01	11	10
00	00	00	--	01
01	00	11	--	01
11	00	11	--	10
10	10	11	--	10

KV-Diagramme:

PQ \ xy	00	01	11	10
00	0	0	–	0
01	0	1	–	0
11	0	1	–	1
10	1	1	–	1

P^+

PQ \ xy	00	01	11	10
00	0	0	–	1
01	0	1	–	1
11	0	1	–	0
10	0	1	–	0

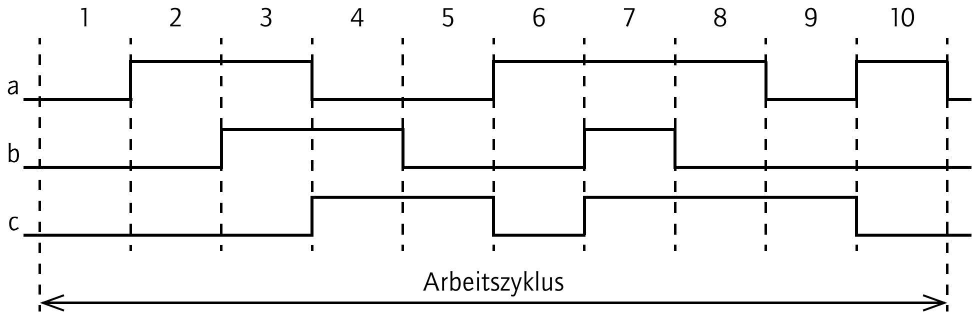
Q^+

Funktionsgleichungen:

$$P^+ = P \cdot Q' + Q \cdot y + P \cdot x$$
$$Q^+ = P' \cdot x + Q \cdot y + P \cdot y$$
$$z = P$$

Aufgabe 5.8

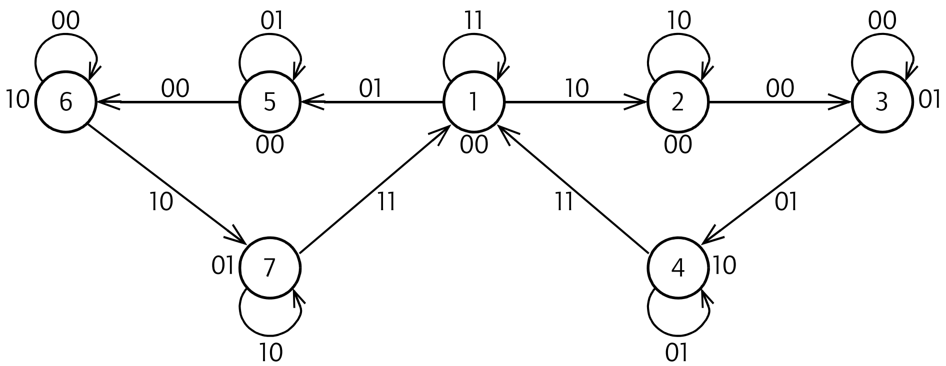
Die Funktionsweise eines synchronen Moore-Automaten mit zwei Eingängen a und b und einem Ausgang c ist durch folgenden Impulsplan gegeben.



Auf der Grundlage dieses Impulsplanes ist ein synchrones Schaltwerk mit flankengesteuerten D-Flipflops zu entwerfen. Zuerst soll eine primitive Zustandstabelle aufgestellt werden, in der anschließend die Anzahl der Zustände mit Hilfe einer Implikationsmatrix und eines Verschmelzungsgraphen zu minimieren ist. Ferner sind die Zustände auf geeignete Weise zu codieren und das Resultat als Funktionsgleichungen zu notieren.

Aufgabe 5.9

Die Funktionsweise eines synchronen Moore-Automaten mit zwei Eingängen a und b sowie zwei Ausgängen u und v ist durch einen Zustandsgraphen vorgegeben. Werte von Ausgangsvariablen (u, v) sind paarweise an den Zuständen notiert. An den Übergängen sind Werte von Eingangsvariablen (a, b) ebenfalls paarweise notiert.



Auf der Grundlage dieses Zustandsgraphen ist ein synchrones Schaltwerk mit flankengesteuerten D-Flipflops zu entwerfen. Zuerst soll eine primitive Zustandstabelle aufgestellt werden, und anschließend ist die Anzahl der Zustände mit Hilfe einer Implikationsmatrix und eines Verschmelzungsgraphen zu minimieren. Ferner sind die Zustände auf geeignete Weise zu codieren und das Resultat als PLA-Steuerwerk zu zeichnen.

Aufgabe 5.10

Das untere Bild zeigt schematisch einen Richtungsdetektor mit zwei in einem bestimmten Abstand angebrachten Sensoren S1 und S2, z.B. zwei Lichtschranken, an einem Transportband. Zwischen den beiden Lichtschranken werden Pakete mit genügendem Abstand hin und her transportiert. Ein synchrones Schaltwerk soll durch Impulse auf zwei Ausgängen L und R ihre Bewegungsrichtung anzeigen. (R = 1: von links nach rechts; L = 1: von rechts nach links). Die Impulse können z.B. zur Steuerung eines Vor-/Rückwärtszählers benutzt werden, der die Anzahl der transportierten Pakete anzeigt.