Dynamisches Modell

28.März.14 / ANFR

Aufstellen und Lösen der DGL:

Die Gleichung zum Ausschleifen ergibt eine lineare homogene Differenzialgleichung 1. Grades 1. Ordnung

$\Sigma F = 0$ Kräfte bezogen auf das **Glasteil**

$F_{Schleif} = \left(\frac{d}{dt}x\right) \cdot \frac{A_g}{K_p \cdot v_s}$ Preston Gleichung (vereinfachtes, lineares Modell)

Allgemein bekannte Form:

$$\text{Dämpfungsfaktor} \cdot \left(\frac{d}{dt}x\right) + \text{Steifigkeit} \cdot (x - y) = 0$$

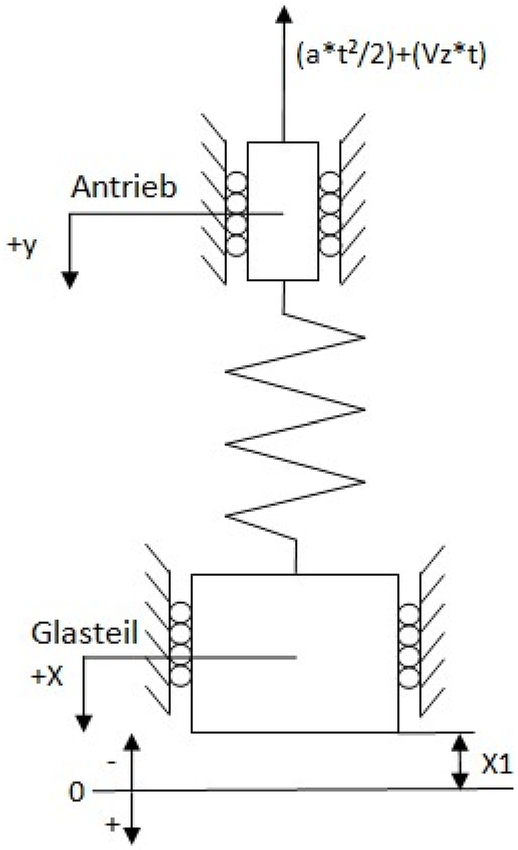
$$\frac{A_g}{K_p \cdot v_s} \cdot \frac{d}{dt}x + k_f \cdot (x - y) = 0 \qquad y = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_z \cdot t$$

Zum Zeitpunkt t=0, der Beginn des Bremsens, hat der Antrieb die Geschwindigkeit v.z nach unten, verzögert auf Null und beschleunigt dann wieder nch oben.

$$\frac{A_g}{K_p \cdot v_s} \cdot \left(\frac{d}{dt}x\right) + k_f \cdot x - k_f\left(\frac{a \cdot t^2}{2} + v_z \cdot t\right) = 0 \qquad C = \frac{A_g}{K_p \cdot v_s}$$

$$\left(\frac{d}{dt}x\right) + \frac{k_f}{C} \cdot x = \frac{k_f}{C} \cdot \left(\frac{a \cdot t^2}{2} + v_z \cdot t\right)$$

Schemaskizze:



Allgemeine Lösungsformel dieser DGL:

$$x = C_1 \cdot \eta(t) + \eta(t) \cdot \int \frac{c(t)}{a(t) \cdot \eta(t)}\, dt$$

C.1 ist die Randbedingung

$$x = \text{Homogene\_Lösung} + \text{Partikuläre\_Lösung}$$

$$a(t) \cdot \left(\frac{d}{dt}x\right) + b(t) \cdot x = c(t)$$

$$a(t) = 1$$

$$b(t) = \frac{k_f}{C}$$

$$c(t) = \frac{k_f}{C} \cdot \left(\frac{a \cdot t^2}{2} + v_z \cdot t\right)$$

$$\eta(t) = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} = e^{-\frac{k_f}{C} \cdot t}$$

Partikuläre Lösung:

$$\text{Partikuläre\_Lösung} = \eta(t) \cdot \int \frac{c(t)}{a(t)}\,dt$$

$$\text{Partikuläre\_Lösung} = e^{-\frac{k_f}{C} \cdot t} \cdot \int \frac{\frac{k_f}{C} \cdot \left(\frac{a \cdot t^2}{2} + v_z \cdot t\right)}{e^{-\frac{k_f}{C} \cdot t}}\,dt = \left[\frac{a \cdot t^2}{2} + \frac{C^2 \cdot a - C \cdot k_f \cdot v_z}{k_f^2} - \frac{t \cdot \left(C \cdot a - k_f \cdot v_z\right)}{k_f}\right]$$

Anfangsbedingungen:

$$t = 0$$

$$x(0) = -\frac{v_z \cdot C}{k_f}$$ <== "Vorspannung" des Systems unter Schleifkraft

$$-\frac{v_z \cdot C}{k_f} = C_1 \cdot e^{-\frac{k_f}{C} \cdot t} + \left[\frac{a \cdot t^2}{2} + \frac{C^2 \cdot a - C \cdot k_f \cdot v_z}{k_f^2} - \frac{t \cdot \left(C \cdot a - k_f \cdot v_z\right)}{k_f}\right]$$

Für t=0 eingesetzt...

$$-\frac{v_z \cdot C}{k_f} = C_1 \cdot 1 + \left(0 + \frac{C^2 \cdot a - C \cdot k_f \cdot v_z}{k_f^2} - 0\right)$$

$$C_1 = -\frac{C^2 \cdot a}{k_f^2}$$

Homogene Lösung:

$$\text{Homogene\_Lösung} = -\frac{C^2 \cdot a}{k_f^2} \cdot e^{-\frac{k_f}{C} \cdot t}$$

Lösung:

$$x(t) = \text{Homogene\_Lösung} + \text{Partikuläre\_Lösung}$$

$$x(t) = -\frac{C^2 \cdot a}{k_f^2} \cdot e^{-\frac{k_f}{C} \cdot t} + \left[\frac{a \cdot t^2}{2} + \frac{C^2 \cdot a - C \cdot k_f \cdot v_z}{k_f^2} - \frac{t \cdot \left(C \cdot a - k_f \cdot v_z\right)}{k_f}\right]$$