Fourierova transformace s výpočty

Fourierova transformace

- Fourierova analýza slouží ke zjištění, z jakých harmonických funkcí se daná funkce skládá.
- Harmonická funkce: $y(x) = A.\sin(\omega x + \varphi)$, kde
  - A je **amplituda**
  - ω je kruhová **frekvence**, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T je perioda
  - φ je **fázový posun** (fáze)
- Výsledkem Fourierovy analýzy je seznam (tabulka) amplitud a fázových posunů pro jednotlivé frekvence.
- Grafu závislosti amplitudy na frekvenci se říká **amplitudové spektrum**.
- Grafu závislosti fázového posunu na frekvenci se říká **fázové spektrum**.

Fourierova transformace

- Fourierova **řada** se používá pro vyjádření **periodického** signálu.
- Fourierova **transformace** (Fourierův integrál) se používá pro vyjádření **neperiodického** signálu.

- Dále se rozlišuje, zda pracujeme se **spojitou** nebo **diskrétní funkcí** (posloupností čísel).

Fourierova transformace

Příklad Fourierovy řady periodického signálu

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \cdots$$

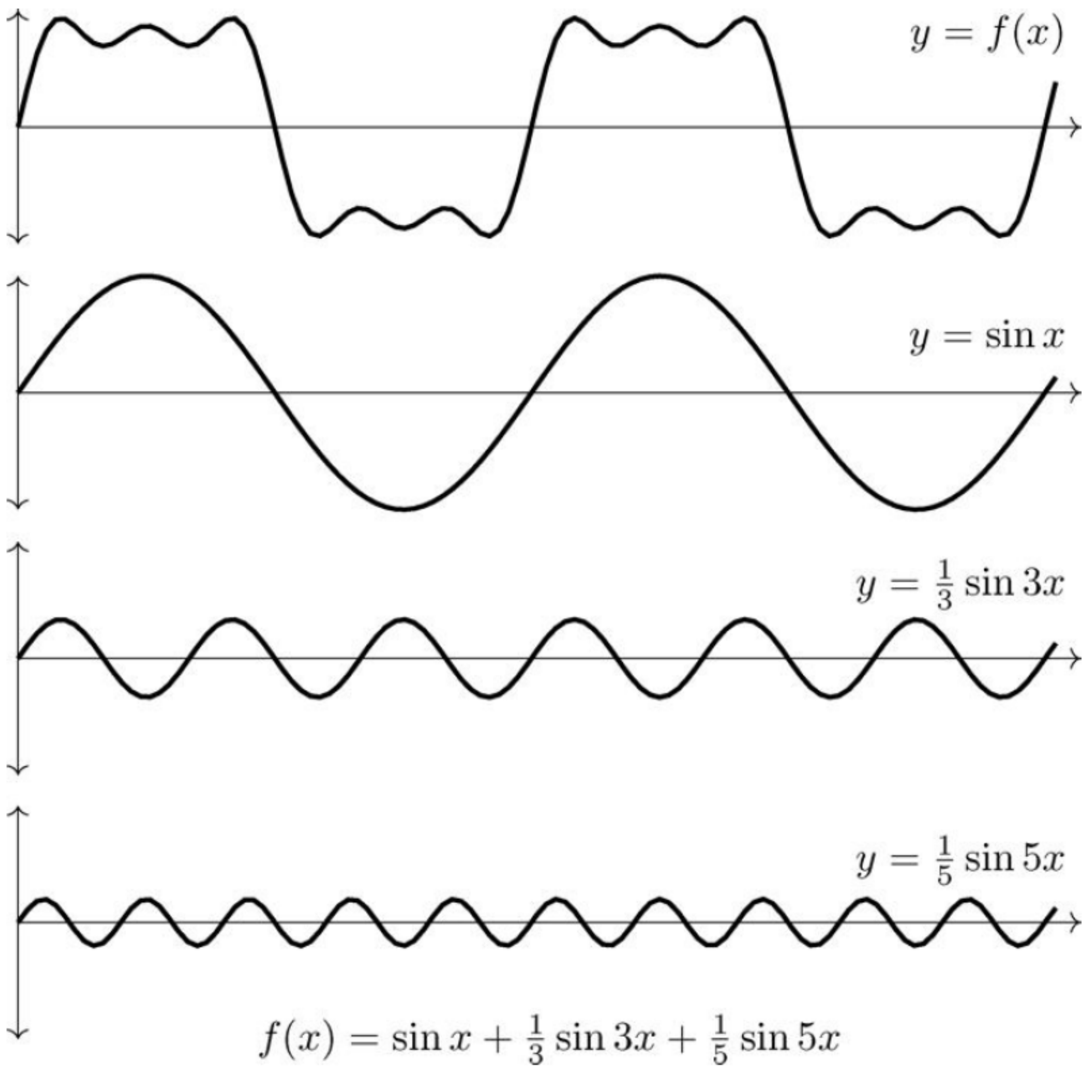
- Rozvoj Fourierovy řady (s periodou *2T*)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

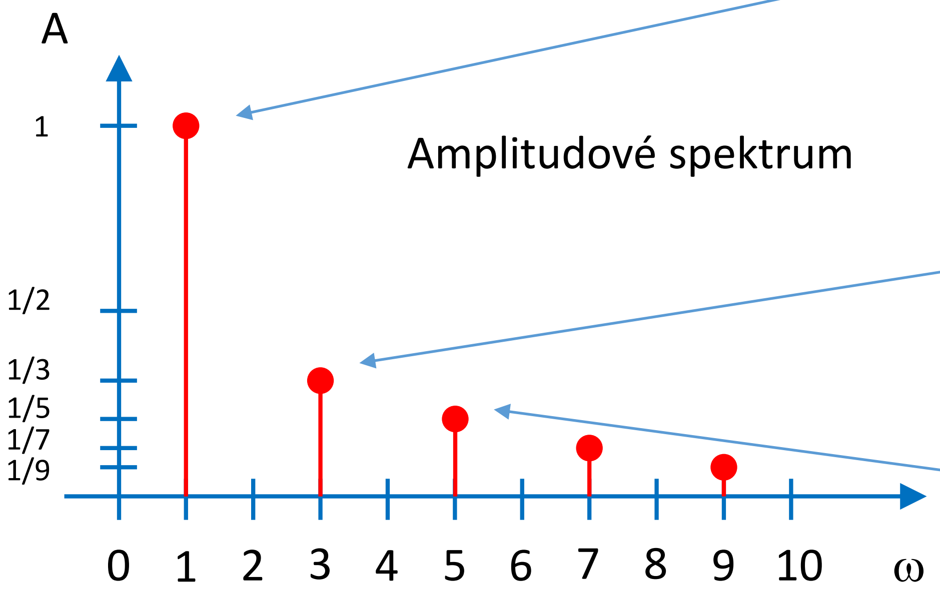
$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

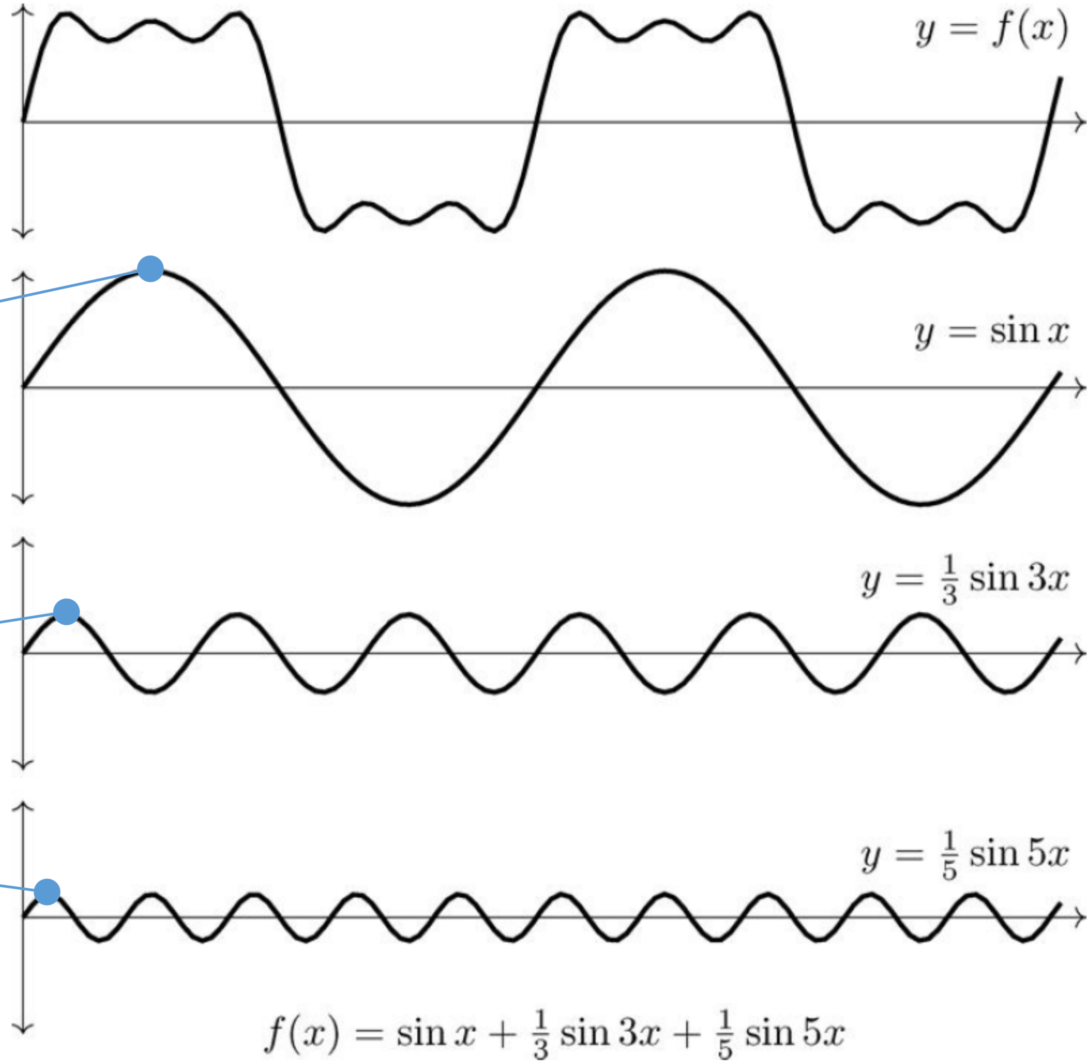


Fourierova transformace

Příklad Fourierovy řady periodického signálu

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \cdots$$

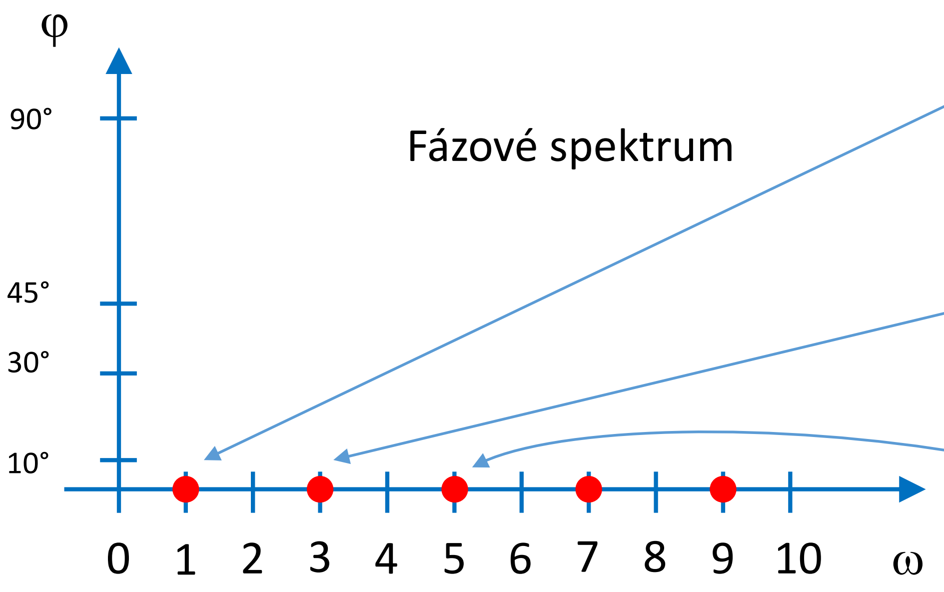


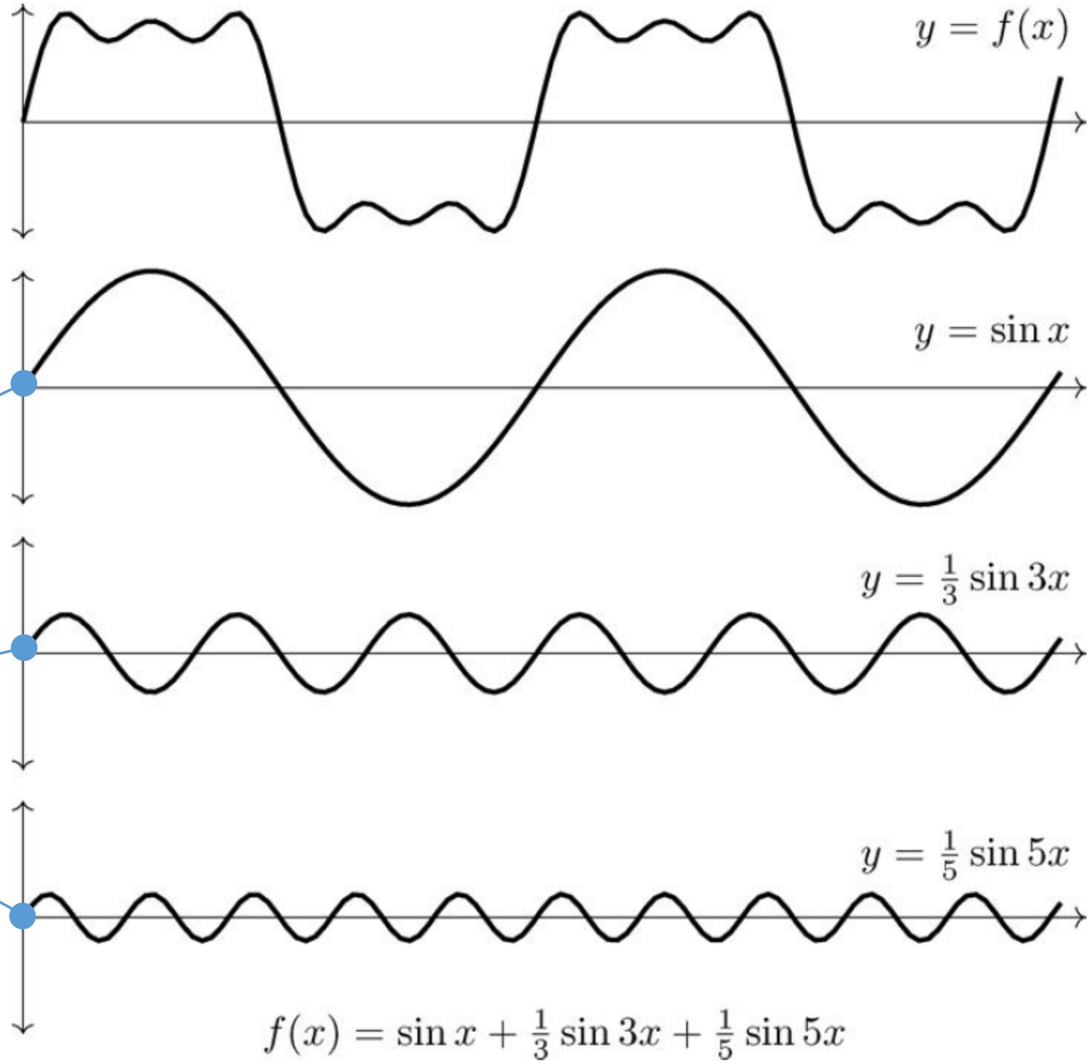


Fourierova transformace

Příklad Fourierovy řady periodického signálu

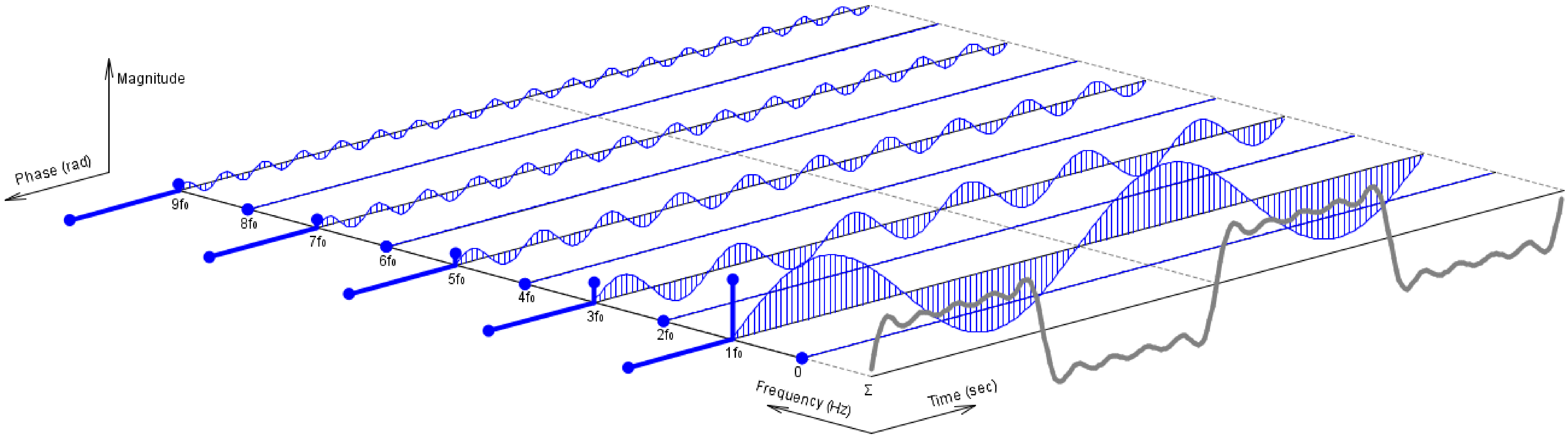
$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \cdots$$





Fourierova transformace

- Rozklad 1D funkce na jednotlivé harmonické složky



http://www.tomasboril.cz/fourierseries3d/cz/

Fourierova transformace

- Rozvoj **Fourierovy řady** (**periodické funkce**) může zapsat i v komplexní podobě

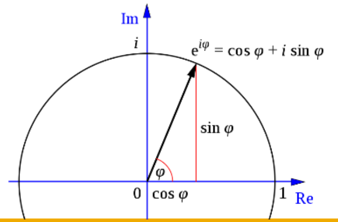
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{in\pi x}{T}\right)dx \quad \text{kde} \quad c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\exp\left(\frac{-in\pi x}{T}\right)dx$$

Ukázka odvození komplexního tvaru jednoduché harmonické funkce

$$f(x) = \underline{\cos x} = \cos \omega x\Big|_{\omega=1} = \underbrace{\frac{1}{2}\cos \omega x + i\frac{1}{2}\sin \omega x}_{\frac{1}{2}e^{i\omega x}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos \omega x - i\frac{1}{2}\sin \omega x}_{\frac{1}{2}e^{-i\omega x}} = \sum_{n\in\{1;-1\}} \frac{1}{2} e^{in\omega x} = \underline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega x}}, \text{ kde}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } n = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } n = -1 \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

Eulerův vzorec: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

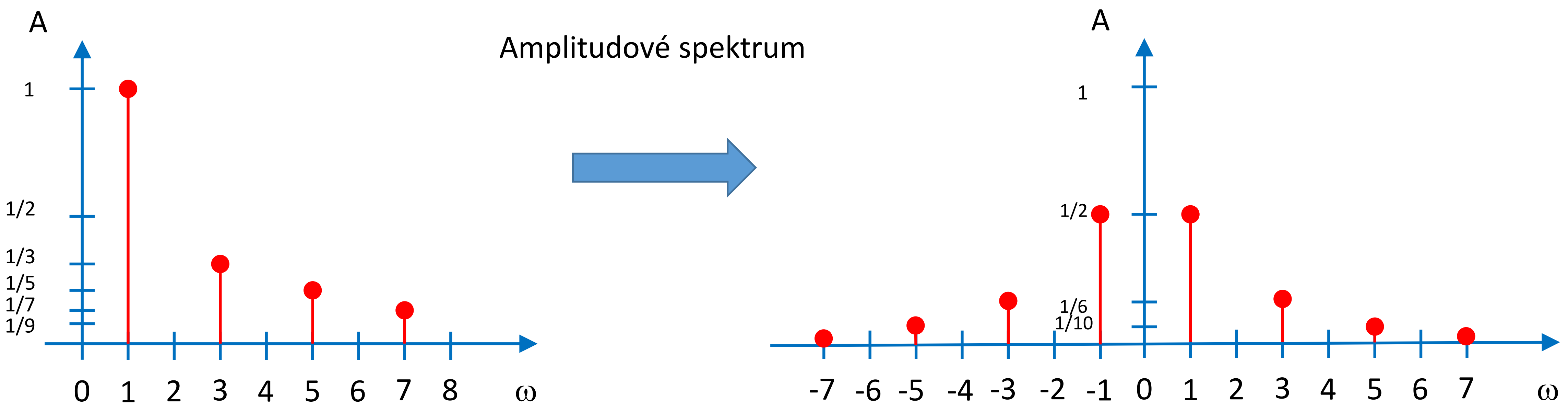


$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

Fourierova transformace

Pokud jsou využita komplexní čísla pro vyjádření Fourierovy řady/transformace, vyskytují se ve vzorcích automaticky i komplexně sdružená čísla, což vede k tomu, že se amplitudy vyskytují 2x (pro danou frekvenci a pro symetrickou zápornou frekvenci). Proto také původně jedna amplituda je nyní reprezentována dvěma amplitudami poloviční velikosti.



Fourierova transformace

- Pokud je funkce **neperiodická**, potom T -> ∞, jedná se o **Fourierovu transformaci**, a dostaneme vztahy

$$f(x) = \int_0^\infty [a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

kde

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,$$
$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx.$$

(složkový, trigonometrický tvar)

Fourierova transformace

- **Fourierova transformace** pro **neperiodickou funkci** lze také vyjádřit v **komplexní podobě**:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

- Využití komplexních čísel je výhodné z důvodu kompaktnějšího zápisu a snazších matematických operací.

Fourierova transformace

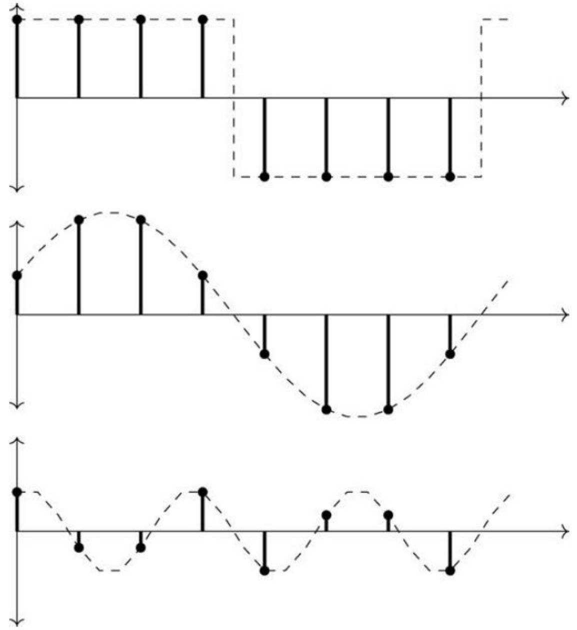
- Protože nás zajímá využití FT při zpracování obrazu, který je reprezentován maticí a je tedy diskrétní, omezíme se na **diskrétní Fourierovu transformaci** (**DFT**)
- Pro diskrétní **funkce jedné proměnné** (např. časové řady) je DFT dána těmito vztahy:

$$F_u = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left[-2\pi i \frac{xu}{N}\right] f_x$$

DFT

$$x_u = \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left[2\pi i \frac{xu}{N}\right] F_u$$

inverzní DFT (IDFT)



Fourierova transformace

- FT 2D obrázku (spektrum obrázku)

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp\left[-2\pi i\left(\frac{xu}{M}+\frac{yv}{N}\right)\right]$$

FT

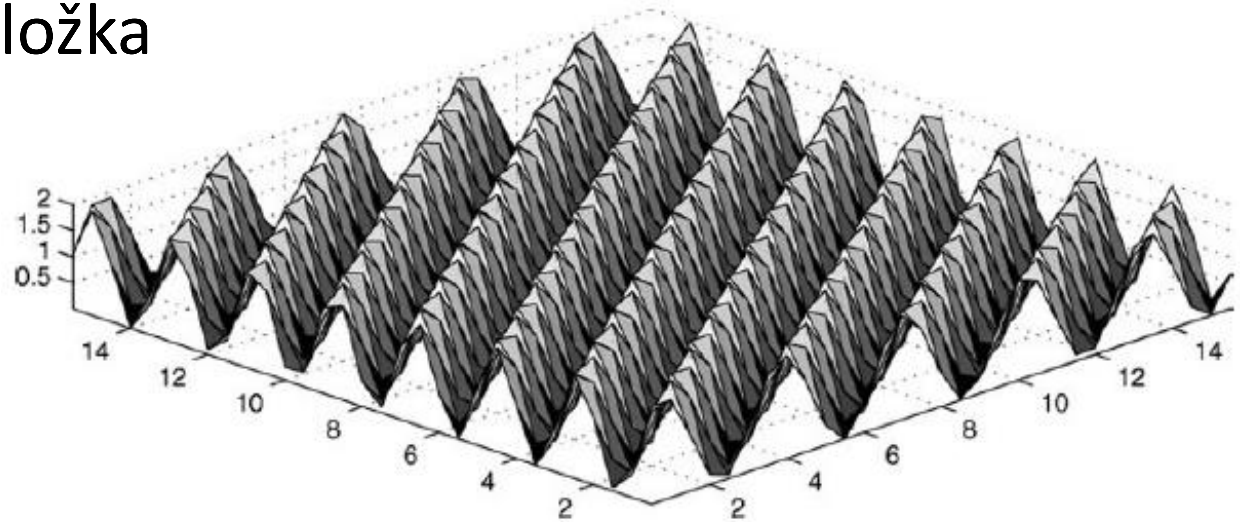
FT^{-1}

- Zpětná FT 2D obrázku (rekonstrukce obrázku ze spektra)

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\exp\left[2\pi i\left(\frac{xu}{M}+\frac{yv}{N}\right)\right]$$

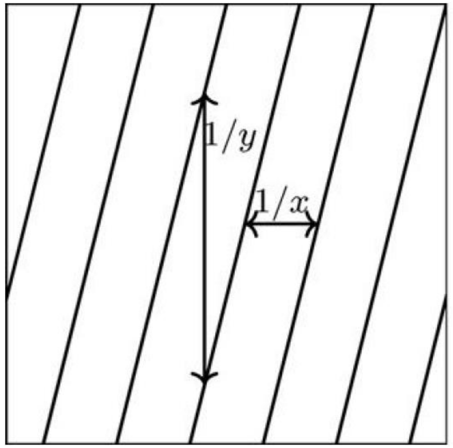
Fourierova transformace

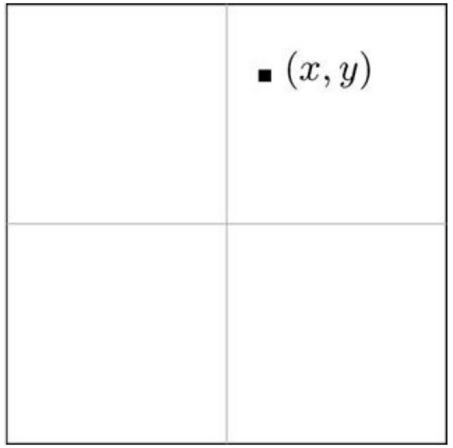
- 2D harmonická složka



$$z = a\sin(bx + cy)$$

- Pozice ve spektru





Fourierova transformace

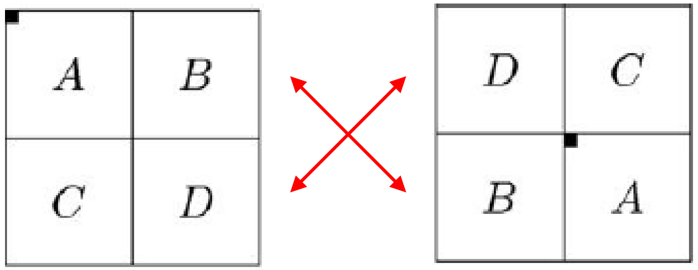
- Vlastnosti Fourierovy transformace
  - Linearita: $F(f+g) = F(f) + F(g)$ - výhodné pro odstranění známého šumu
  - Konvoluce: $F(M*S) = F(M) \cdot F(S)$ - výhodné pro filtraci
  - Posun: Spektrum se posune do středu, pokud pronásobíme obraz maticí $\{(-1)^{x+y}\}$

- Vizualizace spektra
  - Snížení vlivu stejnosměrné složky, např. $\log(1+|F(u,v)|)$

- FFT (Fast Fourier Transform)
  - Efektivní implementace DFT (2^{2n} -> $n2^n$ operací násobení)
  - Postavena na rekurzivním dělení dat -> výhodné pro matice o rozměrech 2^k

Fourierova transformace

- Posun spektra
  - Po FT je standardně stejnosměrná složka v levém horním rohu matice spektra
  - Okolí stejnosměrné složky odpovídá složkám s nižší frekvencí, která se zvyšuje jak se od levého horního roku vzdalujeme
  - Pro snazší interpretaci je výhodné provést posun spektra tak, aby stejnosměrná složka byla uprostřed a okolní hodnoty FT odpovídající složkám o nižších frekvencích. Větší vzdálenosti od středu odpovídají složkám o vyšších frekvencích.
  - Posun spektra využívá skutečnosti, že pokud obrázek pronásobíme stejně velkou maticí ve tvaru šachovnice s hodnotami +1 a -1, dojde k žádanému posunu.



Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 1: Mějme obrázek o rozměru 8x8 pixelů, který obsahuje samé jedničky (jednolitá plocha)

```
a1 =

     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
```

obrázek jako matice

```
ans =

    64     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
```

spektrum obrázku (neposunuté)

- Pokud dosadíme do vztahu pro F(u,v) za u=0 a v=0, vypadne exponenciální člen (e^0=1) a zůstane součet prvků matice, tj. hodnota 64.
- Pokud dosadíme do vztahu pro F(u,v) např. za u=0 a v=1, výpočtem zjistíme, že se vyruší a bude platit, že F(0,1)=0.
- F(u,v)=0 dostaneme pro všechny hodnoty u a v vyjma prvního případu, kdy u=0 a v=0.

Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 1: Mějme obrázek o rozměru 8x8 pixelů, který obsahuje samé jedničky (jednolitá plocha)

```
a1 =

     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1
```

obrázek jako matice

```
ans =

     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0    64     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0
```

spektrum obrázku (posunuté)

- Pokud dosadíme do vztahu pro F(u,v) za u=0 a v=0, vypadne exponenciální člen (e^0=1) a zůstane součet prvků matice, tj. hodnota 64.
- Pokud dosadíme do vztahu pro F(u,v) např. za u=0 a v=1, výpočtem zjistíme, že se vyruší a bude platit, že F(0,1)=0.
- F(u,v)=0 dostaneme pro všechny hodnoty u a v vyjma prvního případu, kdy u=0 a v=0.

Fourierova transformace

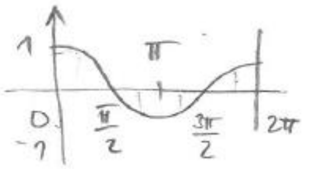
- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 1 – pokračování

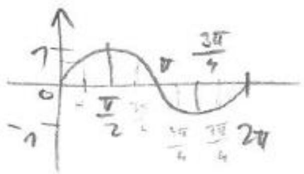
$$F(0,1) = \sum_x \sum_y \underbrace{f(x,y)}_{=1} \cdot e^{-2\pi i \cdot \frac{y \cdot v}{8}} =$$

$$= \sum_x \sum_y e^{-2\pi i \cdot \frac{y}{8}} = 8 \cdot \sum_y e^{-2\pi i \cdot \frac{y}{8}} =$$

$$= 8 \cdot \sum_y e^{-\frac{\pi y}{4} \cdot i} = 8 \cdot \sum_{y=0}^{7} \cos\frac{\pi y}{4} - i \cdot \sin\frac{\pi y}{4} =$$

$$\begin{aligned} = 8 \cdot \Big(& \overbrace{\cos 0}^{=1} - i \cdot \sin 0 + \\ + & \cos\frac{\pi}{4} - i \cdot \sin\frac{\pi}{4} + \\ + & \cos\frac{\pi}{2} - i \cdot \overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1} + \\ + & \cos\frac{3\pi}{4} - i \cdot \sin\frac{3\pi}{4} + \\ + & \overbrace{\cos \pi}^{-1} - i \cdot \sin \pi + \\ + & \cos\frac{5\pi}{4} - i \cdot \sin\frac{5\pi}{4} + \\ + & \cos\frac{3\pi}{2} - i \cdot \overbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}^{-1} + \\ + & \cos\frac{7\pi}{4} - i \cdot \sin\frac{7\pi}{4} \Big) = 8 \cdot (1 - i - 1 + i) \\ & = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$





Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 2: Mějme obrázek o rozměru 8x8 pixelů, který obsahuje následující hodnoty:

```
a2 =

   100   200   100   200   100   200   100   200
   100   200   100   200   100   200   100   200
   100   200   100   200   100   200   100   200
   100   200   100   200   100   200   100   200
   100   200   100   200   100   200   100   200
   100   200   100   200   100   200   100   200
   100   200   100   200   100   200   100   200
   100   200   100   200   100   200   100   200
```

obrázek jako matice

```
af2 =

   9600      0      0      0  -3200      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
```

spektrum obrázku (neposunuté)

- Pokud dosadíme do vztahu pro F(u,v) za u=0 a v=0, vypadne exponenciální člen (e^0=1) a zůstane dvojnásobný součet prvků matice, tj. hodnota 9600.
- Pokud dosadíme do vztahu pro F(u,v) např. za u=4 a v=0, výpočtem zjistíme, že F(0,1)=-3200.
- Pro ostatní hodnoty u a v dostaneme F(u,v)=0.
- Matice F(u,v) obsahuje v tomto případě reálná čísla. To však nemusí být vždy pravda. V tom případě je F(u,v) matice komplexních čísel a vyjadřujeme ji dvěma maticemi: maticí amplitud a maticí fází.

Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 2: Mějme obrázek o rozměru 8x8 pixelů, který obsahuje následující hodnoty:

a2 =

100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200

obrázek jako matice

af2 =

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-3200	0	0	0	9600	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

spektrum obrázku (posunuté)

- Pokud dosadíme do vztahu pro F(u,v) za u=0 a v=0, vypadne exponenciální člen (e^0=1) a zůstane dvojnásobný součet prvků matice, tj. hodnota 9600.
- Pokud dosadíme do vztahu pro F(u,v) např. za u=4 a v=0, výpočtem zjistíme, že F(0,1)=-3200.
- Pro ostatní hodnoty u a v dostaneme F(u,v)=0.
- Matice F(u,v) obsahuje v tomto případě reálná čísla. To však nemusí být vždy pravda. V tom případě je F(u,v) matice komplexních čísel a vyjadřujeme ji dvěma maticemi: maticí amplitud a maticí fází.

Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 2 – pokračování

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \exp\left[-2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N}\right)\right]$$

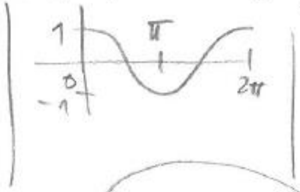
$M = 8,\ N = 8$

$u = 0,\ v = 4$:

$$F(0,4) = \sum \sum f(x,y) \cdot \exp\left[-2\pi i \cdot \frac{y \cdot 4}{8}\right] =$$

$$= \sum_{x=0}^{7} \sum_{y=0}^{7} f(x,y) \cdot e^{-\pi \cdot i \cdot y} =$$

$$= \sum_{x=0}^{7} \sum_{y=0}^{7} f \cdot \Big(\underbrace{\cos(\pi y)}_{\{1; -1; 1; -1; \dots\} = (-1)^y} - j \underbrace{\sin(\pi y)}_{=0} \Big) =$$

$=$ 

$$= \sum_{x=0}^{7} \sum_{y=0}^{7} f(x,y) \cdot (-1)^y =$$

$$= \sum_{y=0}^{7} \sum_{x=0}^{7} f(x,y) \cdot (-1)^y = \sum_{y=0}^{7} (-1)^y \sum_{x=0}^{7} f(x,y) =$$

$$= \sum_{x=0}^{7} f(x,0) - \sum_{x=0}^{7} f(x,1) + \sum f(x,2) - \sum f(x,3) + \dots - \sum_{x=0}^{7} f(x,7)$$

sloupcové součty

$$= \underbrace{800 - 1600}_{-800} + 800 - 1600 + \dots =$$

$$= \underline{-3200}$$

$A = 3200$

$\varphi = -\pi$

Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 2 – pokračování: Pokud dosadíme do vztahu pro zpětnou FT dostaneme
    - $F(x,y) = \ldots = 150 - 50 \cdot \cos(\pi y) = 150 - 50 \cdot (-1)^y$
    - Pro liché hodnoty y dostaneme f(x,y) = 100 a pro sudé hodnoty f(x,y) = 200
    - Vztah je nezávislý na x, tj. pro každé x budou platit hodnoty výše.
    - Dostáváme tedy původní matici hodnot (obrázek).

$$f(x,y) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot \exp\left[2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N}\right)\right] =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} F(0,0) = 9600 & \text{jinak } F(u,v) = 0 \\ F(0,4) = -3200 & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{8 \cdot 8} \left(F(0,0) \cdot \underbrace{\exp[2\pi i \cdot 0]}_{=1} + F(0,4) \cdot \exp\left[2\pi i \cdot \left(0 + \frac{4y}{8}\right)\right] \right) =$$

$$= \frac{1}{64} \left(9600 - 3200 \cdot e^{i\pi y} \right) =$$

$$= 150 - 50 \cdot e^{i\pi y} =$$

$$= 150 - 50 \left(\underbrace{\cos \pi y}_{=(-1)^y} + \underbrace{i \sin \pi y}_{=0} \right) =$$

$$= 150 - 50 \cdot (-1)^y$$

$$y = 0,2,4,6 : \quad f(x,y) = 150 - 50 = 100$$

$$y = 1,3,5,7 : \quad f(x,y) = 150 + 50 = 200$$

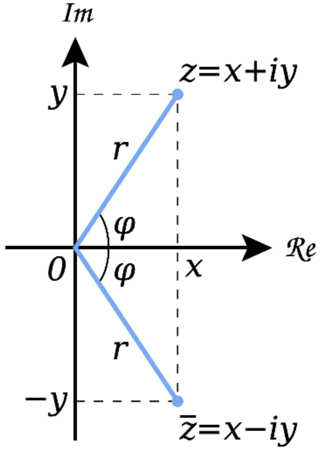
Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 3: Mějme obrázek jednotkového skoku, tj. matici:

a3 =

0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

obrázek jako matice



af3 =

spektrum obrázku (tentokrát už obsahuje komplexní čísla a je posunuté)

0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	-8.0000 - 3.3137i	0.0000 + 0.0000i	-8.0000 -19.3137i	32.0000 + 0.0000i	-8.0000 +19.3137i	0.0000 + 0.0000i	-8.0000 + 3.3137i
0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i

Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 3: FT obrázku s posunem stejnosměrné složky na střed (shift):

2x poloviční amplituda
1. harmonické složky

```
ans =

         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0    8.6591         0   20.9050   32.0000   20.9050         0    8.6591
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
```

amplitudové spektrum (posunuté)

stejnosměrná složka

2x poloviční amplituda
3. harmonické složky

```
ans =

         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0 -157.5000         0 -112.5000         0  112.5000         0  157.5000
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
```

fázové spektrum (ve stupních, posunuté)