

Filtrace v prostorové a frekvenční oblasti

Filtrace v prostorové a frekvenční oblasti

- Filtrace

- soubor lokálních transformací obrazu
- úroveň jasu se převádí na jiné
- cílem je potlačit nežádoucí jasové složky

Original



Filtered



- Filtrace

- v prostorové (obrazové) nebo časové oblasti - využití konvoluce
- ve frekvenční oblasti – využití Fourierovy transformace

Filtrace v prostorové oblasti

- Filtry

- Pracují s více pixely v obraze (nejsou zaměřeny na jeden pixel), tj. počítají novou hodnotu pixelu na základě hodnot více pixelů v obraze.
- Díky tomu umožňují takové operace, jako je např. zaostření nebo rozmazání obrazu
- Filtry potlačují část neužitečné informace a ponechávají (zdůrazňují) tu užitečnou.
- Filtrace nebývá vratnou operací, tj. dochází díky ní ke ztrátě informace.

- Příklad průměrovacího filtru (rozmazání)

$$I'(u, v) \leftarrow \frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8}{9}$$

- Kde p_i jsou sousední pixely středového pixelu p_0 .

Filtrace v prostorové oblasti

- Jiný zápis téhož, ale pomocí relativních odkazů na sousední pixely

$$I'(u, v) \leftarrow \frac{1}{9} \cdot [I(u-1, v-1) + I(u, v-1) + I(u+1, v-1) + \\ I(u-1, v) + I(u, v) + I(u+1, v) + \\ I(u-1, v+1) + I(u, v+1) + I(u+1, v+1)] .$$

- resp. v kompaktní formě:

$$I'(u, v) \leftarrow \frac{1}{9} \cdot \sum_{j=-1}^1 \sum_{i=-1}^1 I(u+i, v+j)$$

- (Obrazový) filtr je charakterizován zejména
 - množinou pixelů, které zohledňuje ve výpočtu
 - velikostí této množiny
 - tvarem oblasti, kterou tyto pixely vymezují (nemusí být spojitá)
 - vahami (mírou vlivu) jednotlivých pixelů

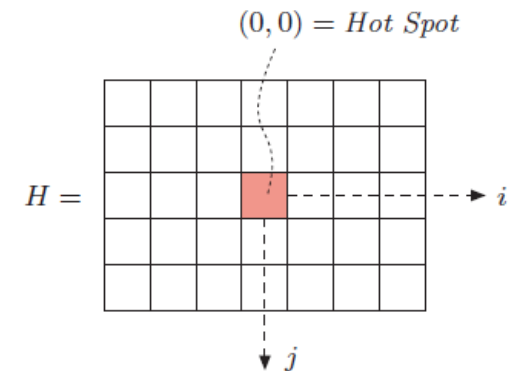
Filtrace v prostorové oblasti

- Lineární filtry

- Lineární filtry jsou postaveny na váženém součtu hodnot uvažovaných pixelů
- Velikost, tvar a váhy jsou určeny tzv. filtrační maticí, resp. filtrační maskou $H(i, j)$
- Např. zmíněný průměrovací filtr velikosti 3x3 má masku:

$$H(i, j) = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Filtr sám je dvourozměrnou diskrétní funkcí $H: Z \times Z \rightarrow R$
pozice míra vlivu
- Filtr bývá zvykem indexovat od jeho středu.
- Pro matematické operace se uvažuje automatické doplnění nulami okolo filtru.
- Pro výpočty je výhodné mít v matici celá čísla.
- Lineární filtry mají svá omezení při vyhlazování a odstraňování šumu (rozmazání).



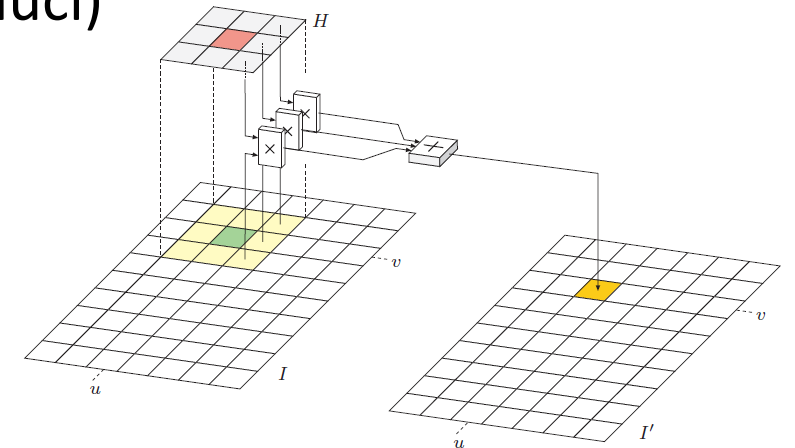
Filtrace v prostorové oblasti

- Aplikace filtru

- Maska filtru (dále jen filtr) je umístěna na uvažované pozici v obrázku.
- Všechny hodnoty filtru $H(i, j)$ jsou pronásobeny s odpovídajícími hodnotami v obraze $I(u+i, v+j)$ a následně sečteny.
- Výsledná hodnota je uložena do nového obrázku (nejsou přepisovány hodnoty ve stávajícím obraze) a celý proces se opakuje pro další pixely v obraze
- Proces aplikace filtru lze vyjádřit vztahem (tzv. lin. konvolucí)

$$I'(u, v) \leftarrow \sum_{(i,j) \in R_H} I(u+i, v+j) \cdot H(i, j)$$

$$I'(u, v) \leftarrow \sum_{i=-1}^{i=1} \sum_{j=-1}^{j=1} I(u+i, v+j) \cdot H(i, j)$$

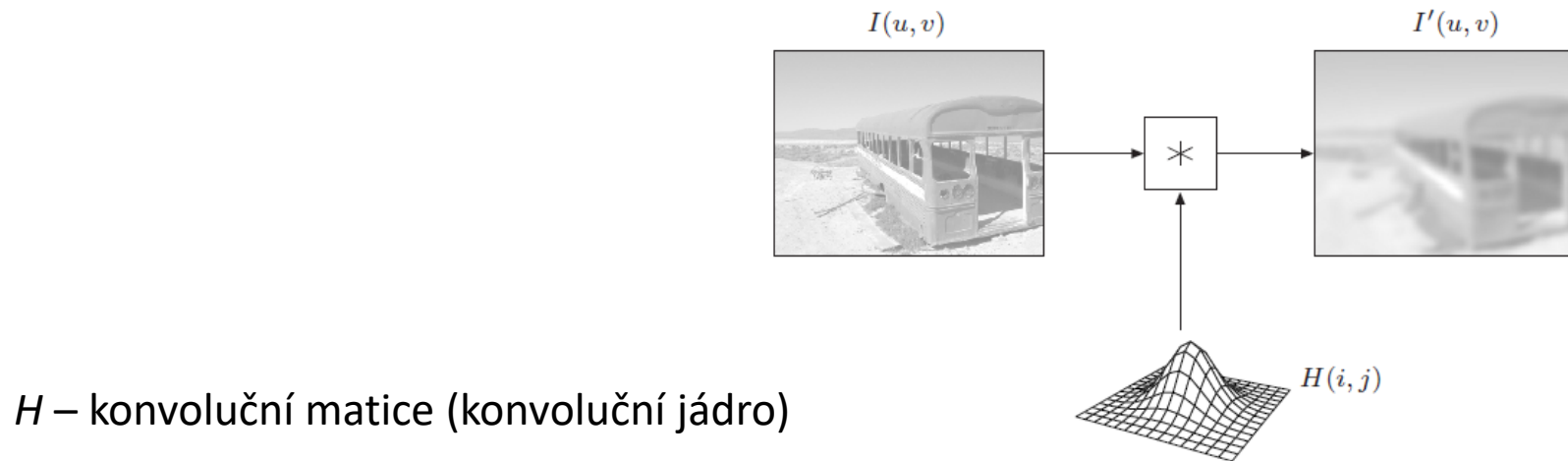


Filtrace v prostorové oblasti

- (Lineární) konvoluce
 - Kombinace (pronásobení) dvou diskrétních nebo spojitých funkcí mezi sebou při různém vzájemném překryvu a následné sečtení

$$I * H = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I(u-i, v-j) \cdot H(i, j)$$

symbol konvoluce



Filtrace v prostorové oblasti

- Vlastnosti konvoluce

- Komutativita $I * H = H * I$
- Linearita $(s \cdot I) * H = I * (s \cdot H) = s \cdot (I * H)$
- Distributivita $(I_1 + I_2) * H = (I_1 * H) + (I_2 * H)$
- Asociativita $A * (B * C) = (A * B) * C$
- Separabilita $H = H_1 * H_2 * \dots * H_n$

$$H_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ušetření počtu operací,
než u výpočtu s maticí

$$I' \leftarrow (I * H_x) * H_y = I * \underbrace{(H_x * H_y)}_{H_{xy}}$$

$$H_{xy} = H_x * H_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtrace v prostorové oblasti

- Ne každý filtr (reprezentovaný maticí) lze rozložit na dva dílčí filtry reprezentované vektory.
- Pokud má filtr (matice) hodnotu 1, potom ho lze rozložit na součin dvou vektorů (pomocí SVD) a příslušný filtr je tak separovatelný.
- Separabilita sníží výpočetní složitost z $O(MNmn)$ na $O(MN(m + n))$, kde M, N jsou rozměry obrázku a m, n jsou rozměry filtru.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
[u,s,v] = svd(H);  
s = diag(s); % převod matice na vektor diagonalních hodnot  
hodnost = sum(s > 0); % nebo přímo příkazem rank(H)  
if (hodnost == 1)  
    hcol = u(:,1) * sqrt(s(1));  
    hrow = conj(v(:,1)) * sqrt(s(1));  
else  
    % filtr není separabilní  
end
```

Filtrace v prostorové oblasti

0	0	0	0	0	0
0	105	102	100	97	96
0	103	99	103	101	102
0	101	98	104	102	100
0	99	101	106	104	99
0	104	104	104	100	98

Image Matrix

Kernel Matrix		
0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

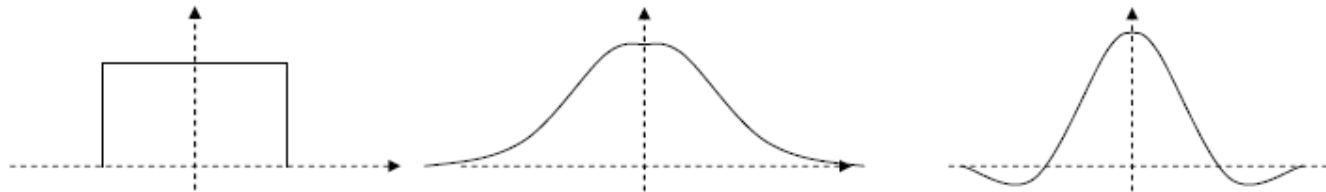
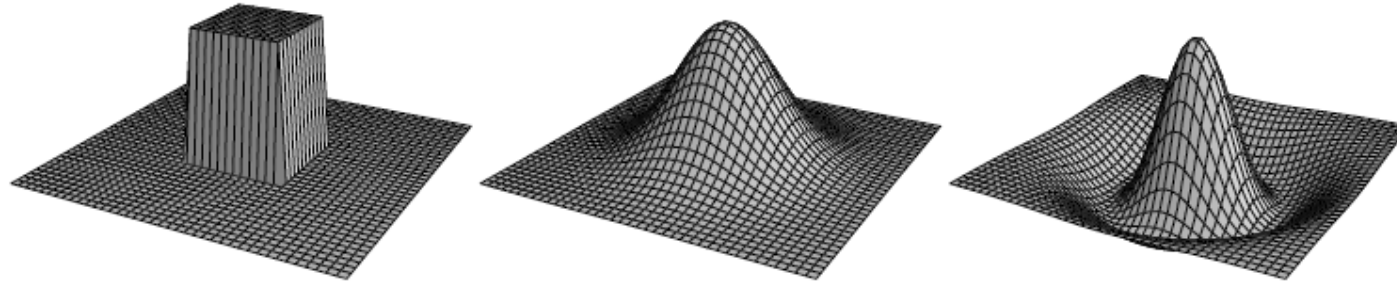
320					

Output Matrix

$$\begin{aligned} &0 * 0 + 0 * -1 + 0 * 0 \\ &+ 0 * -1 + 105 * 5 + 102 * -1 \\ &+ 0 * 0 + 103 * -1 + 99 * 0 = 320 \end{aligned}$$

Filtrace v prostorové oblasti

- Tvary/typy filtrů (konvolučních jader)



0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

Krabicový filtr

0	1	2	1	0
1	3	5	3	1
2	5	9	5	2
1	3	5	3	1
0	1	2	1	0

Gaussův filtr

0	0	-1	0	0
0	-1	-2	-1	0
-1	-2	16	-2	-1
0	-1	-2	-1	0
0	0	-1	0	0

Laplaceův filtr

Filtrace v prostorové oblasti

- Vyhlazovací filtry

- Krabicový (průměrovací) filtr (Mean/Box filter)

- Jednoduchá implementace
 - Nevýhodou jsou ostré přechody -> zvlnění obrazu
 - Neizotropní (nechová se stejně ve všech směrech)

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Gaussův filtr (Gaussian filter)

- Izotropní
 - „měkké“ okraje, bez zvlnění obrazu

$$G_{\sigma}(x, y) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



box filter

gaussian

https://docs.opencv.org/2.4/doc/tutorials/imgproc/gaussian_median_blur_bilateral_filter/gaussian_median_blur_bilateral_filter.html

Filtrace v prostorové oblasti

- Diferenční filtry

- Některé koeficienty filtrační matice mohou být záporné
- Výpočet lze interpretovat jako rozdíl dvou součtů: součet hodnot pro kladné hodnoty filtru minus součet hodnot pro záporné hodnoty filtru

$$I'(u, v) = \sum_{(i, j) \in R_H^+} I(u+i, v+j) \cdot |H(i, j)| \\ - \sum_{(i, j) \in R_H^-} I(u+i, v+j) \cdot |H(i, j)|$$

- Příkladem je např. Laplaceův filtr
- Zatímco vyhlazovací filtry potlačují výrazné osamělé hodnoty, diferenční filtry je naopak zvýrazňují -> zaostřování obrázku, detekce hran

Filtrace v prostorové oblasti

- Nelineární filtry
 - Hodnoty pixelů jsou kombinovány pomocí nelineární funkce.
- Minimální a maximální filtr

$$I'(u, v) \leftarrow \min \{I(u+i, v+j) \mid (i, j) \in R\}$$

$$I'(u, v) \leftarrow \max \{I(u+i, v+j) \mid (i, j) \in R\}$$

Př. Impulzní šum („pepř a sůl“)

Min. filtr (potlačení bílé, zvýraznění černé)

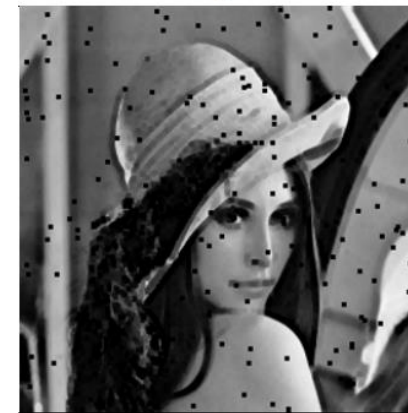
Max. filtr (potlačení černé, zvýraznění bílé)



(a)



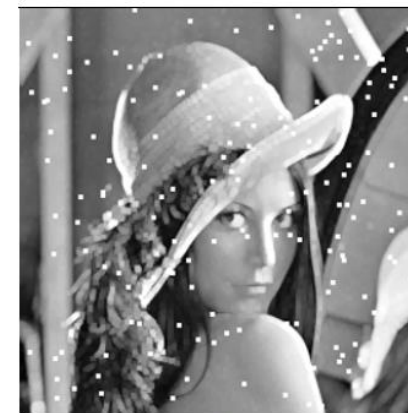
(b)



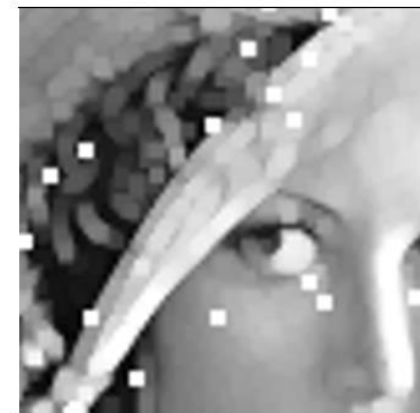
(c)



(d)



(e)

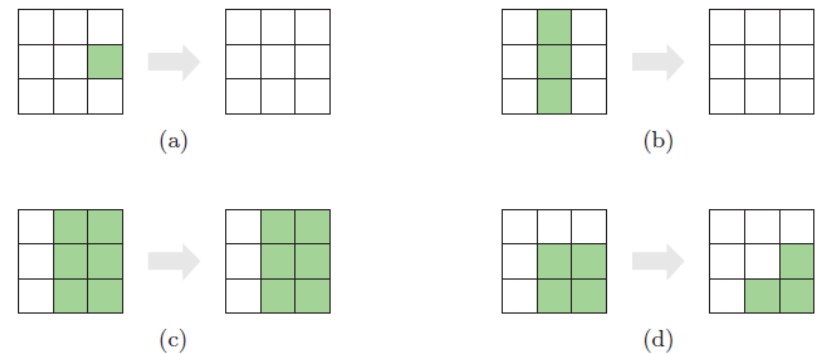
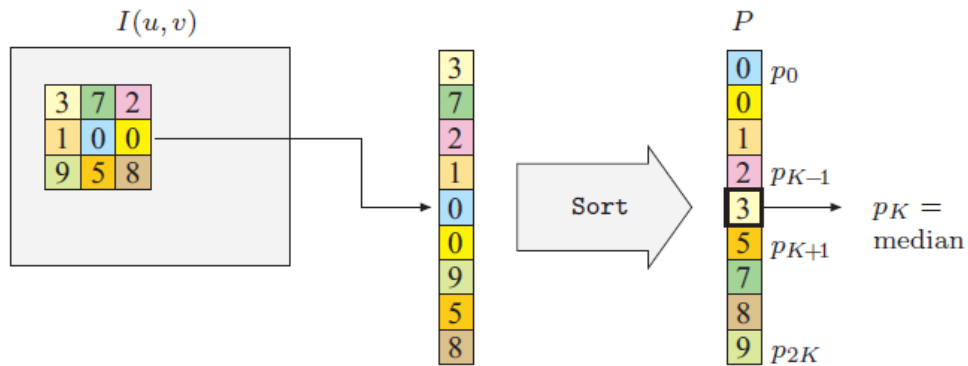


(f)

Filtrace v prostorové oblasti

- Mediánový filtr
 - Nahrazuje hodnotu daného pixlu mediánem hodnot sousedních pixelů

$$I'(u, v) \leftarrow \text{median} \{I(u+i, v+j) \mid (i, j) \in R\}$$



- Pro výpočet mediánu je potřeba provést seřazení hodnot → časově náročné.
- Robustní – nerozhodí ho extrémní hodnoty.
- Zachovává hrany, bohužel je někdy i vytváří.

Filtrace v prostorové oblasti

- Srovnání lineárního krabicového (průměrovacího) filtru 3x3 a mediánového filtru



(a)



(b)

Průměrovací lin. filtr 3x3



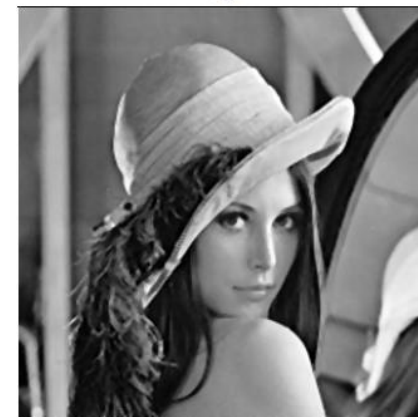
(c)



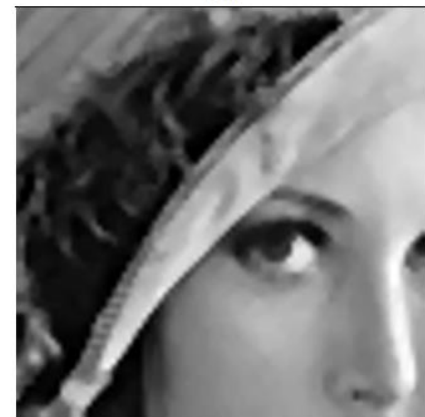
(d)

Př. Impulzní šum („pepř a sůl“)

Mediánový filtr



(e)

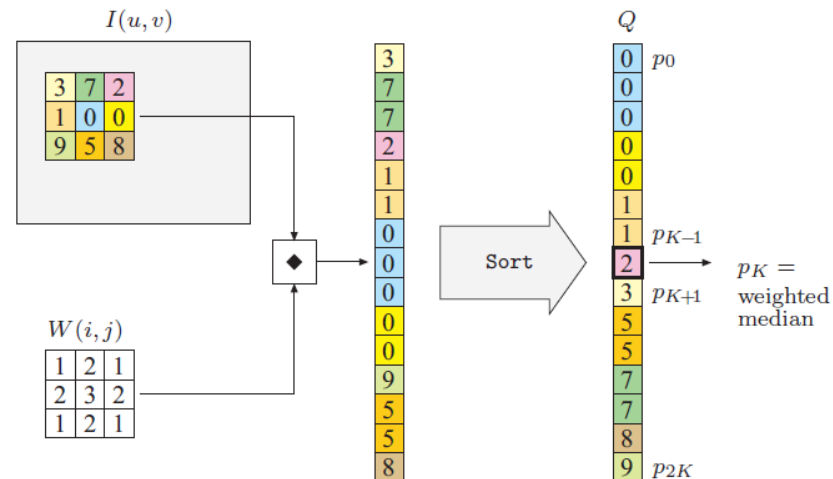


(f)

Filtrace v prostorové oblasti

- Vážený mediánový filtr

- Jednotlivým pozicím ve filtru jsou přiřazeny váhy, tj. důležitosti jednotlivých hodnot
- Většinou váhy blízko uvažovaného pixelu jsou větší, než vzdálenější pixely
- Váhová matice $W(i, j) \in \mathbb{N}$
- Výpočet probíhá tak, že každá hodnota obrazu je nakopírována do pomocného vektoru tolikrát, jaké je číslo na odpovídající pozici ve váhové matici.
- Teprve poté je vypočten medián vektoru.



Filtrace v prostorové oblasti

- Hraniční oblasti
 - Problém: Jak počítat hodnoty na okrajích obrázku
 - Několik způsobů řešení:
 - Okrajové hodnoty doplnit nějakou konstantou, např. 0 = černá
 - Okrajové hodnoty doplnit hodnotami nejbližšího pixelu obrázku
 - Použít zrcadlově obrácený obraz
 - Periodicky rozšířit obraz (výhodné, pokud pracujeme ve frekvenční oblasti)



(a)



(b)



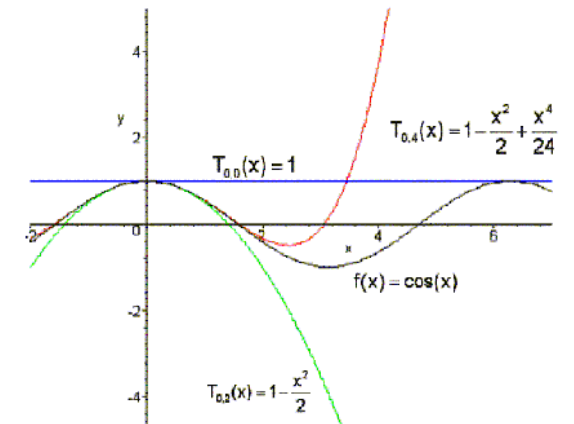
(c)



(d)

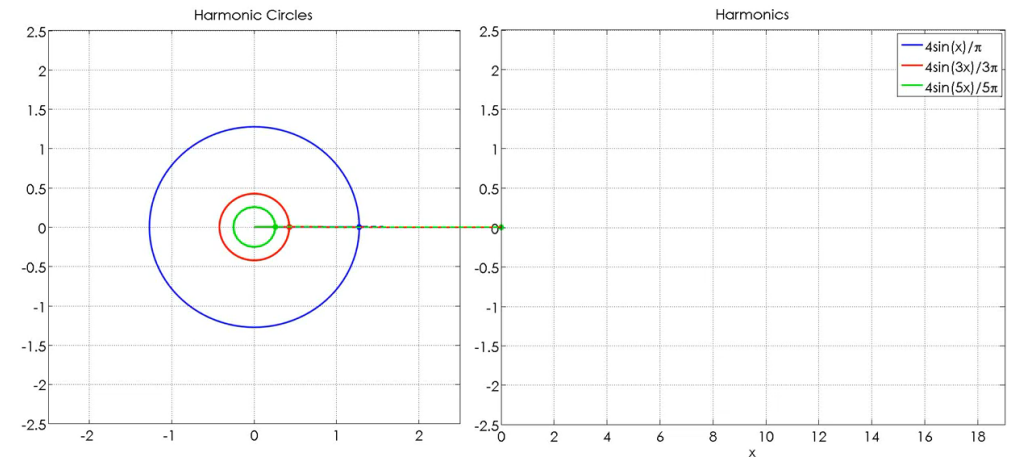
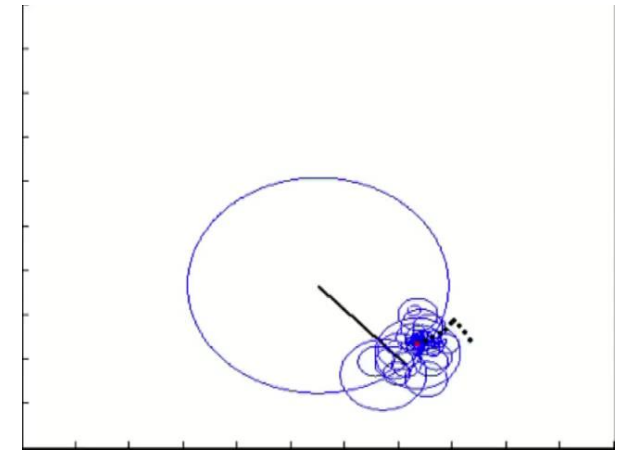
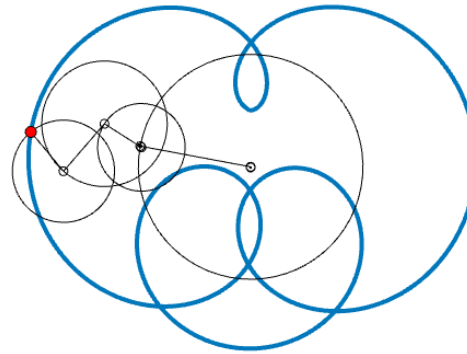
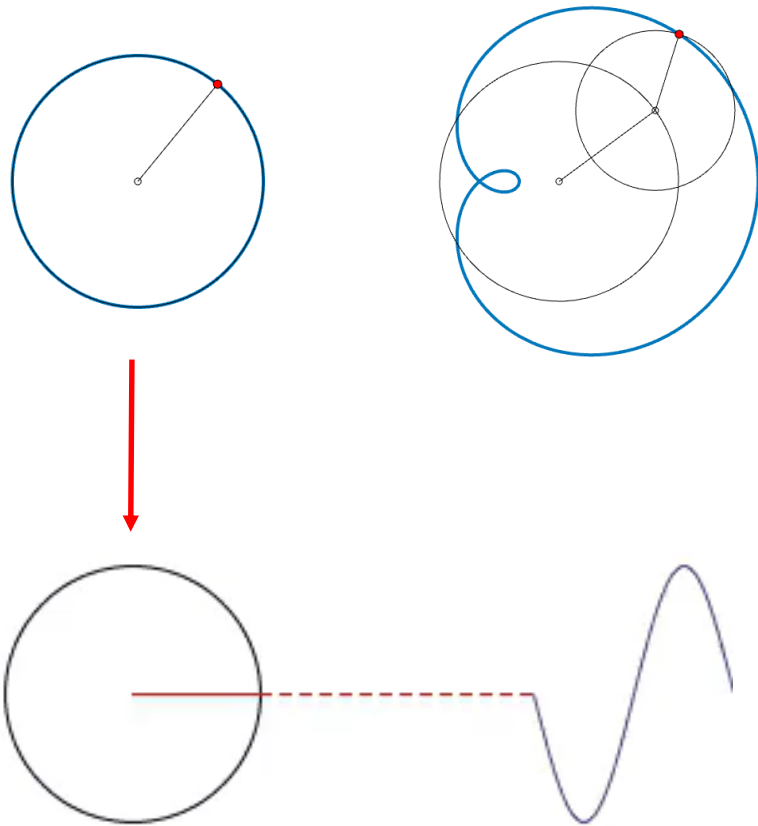
Filtrace ve frekvenční oblasti

- Filtrace v prostorové oblasti
 - Snazší představivost, ale ne vždy výhodné, nemusí být vidět skryté závislosti
- Filtrace ve frekvenční oblasti
 - Převod obrazu do jiného prostoru, následná filtrace v tomto prostoru a převod zpět
 - Obraz je nejprve dekomponován na složky a filtrace se provádí nad těmito složkami
 - Existuje více způsobů, jak obraz (dvourozměrnou funkci) rozložit na složky, např.
 - na jednotlivé barevné kanály,
 - pomocí Taylorova rozvoje,
 - pomocí Ptolemaiových kružnic,
 - na harmonické složky pomocí Fourierovy transformace apod.



Ptolemaiovy kružnice

<https://www.youtube.com/watch?v=8Q0Nxft-s7Y>



<https://www.youtube.com/watch?v=LznjC4Lo7IE>

Fourierova transformace

- Fourierova analýza slouží ke zjištění, z jakých harmonických funkcí se daná funkce skládá.
- Harmonická funkce: $y(x) = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$, kde
 - A je **amplituda**
 - ω je kruhová **frekvence**, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T je perioda
 - φ je **fázový posun** (fáze)
- Výsledkem Fourierovy analýzy je seznam (tabulka) amplitud a fázových posunů pro jednotlivé frekvence.
- Grafu závislosti amplitudy na frekvenci se říká **amplitudové spektrum**.
- Grafu závislosti fázového posunu na frekvenci se říká **fázové spektrum**.

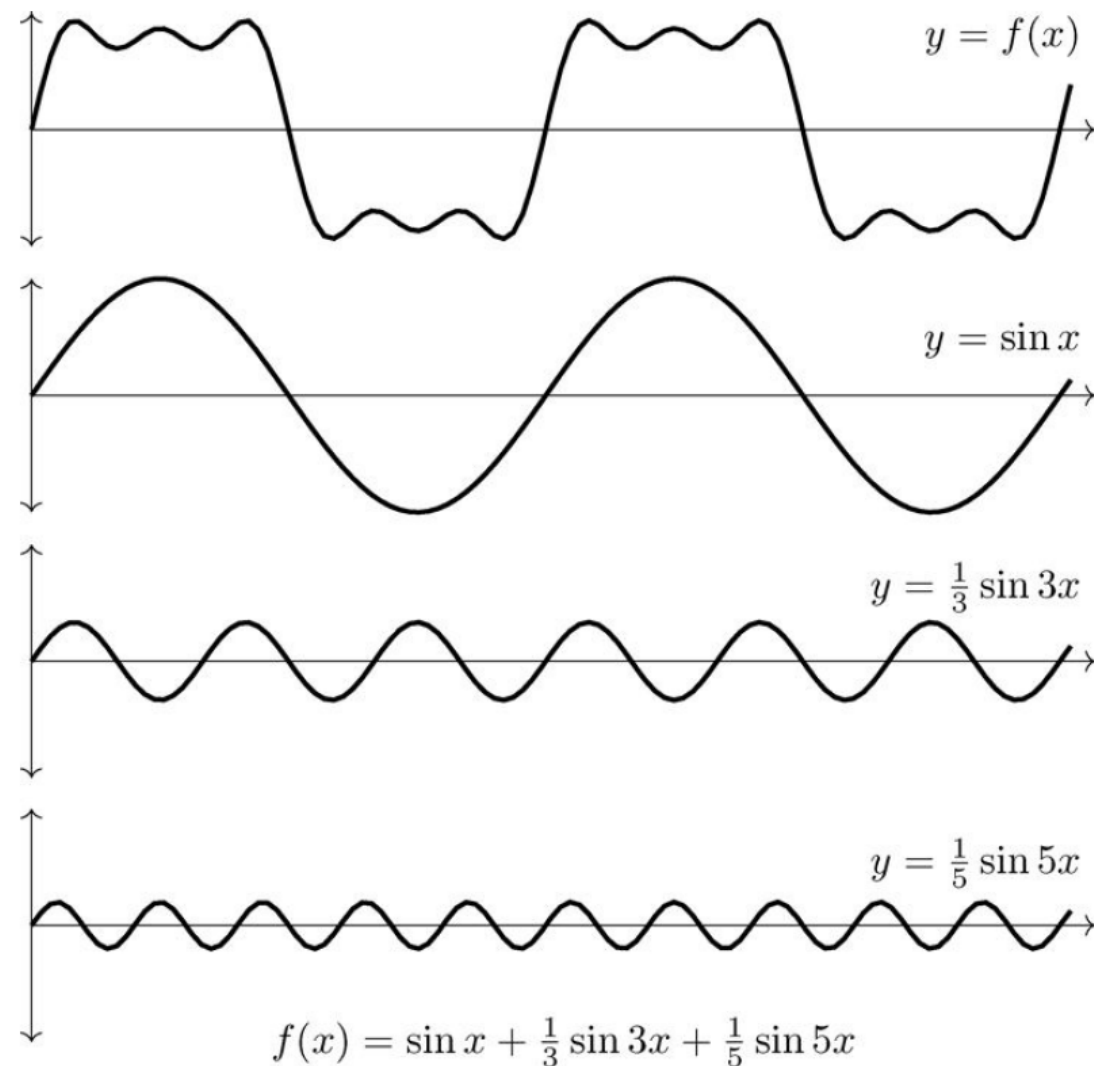
Fourierova transformace

- Fourierova **řada** se používá pro vyjádření **periodického** signálu.
- Fourierova **transformace** (Fourierův integrál) se používá pro vyjádření **neperiodického** signálu.
- Dále se rozlišuje, zda pracujeme se **spojitou** nebo **diskrétní funkcí** (posloupností čísel).

Fourierova transformace

Příklad Fourierovy řady periodického signálu

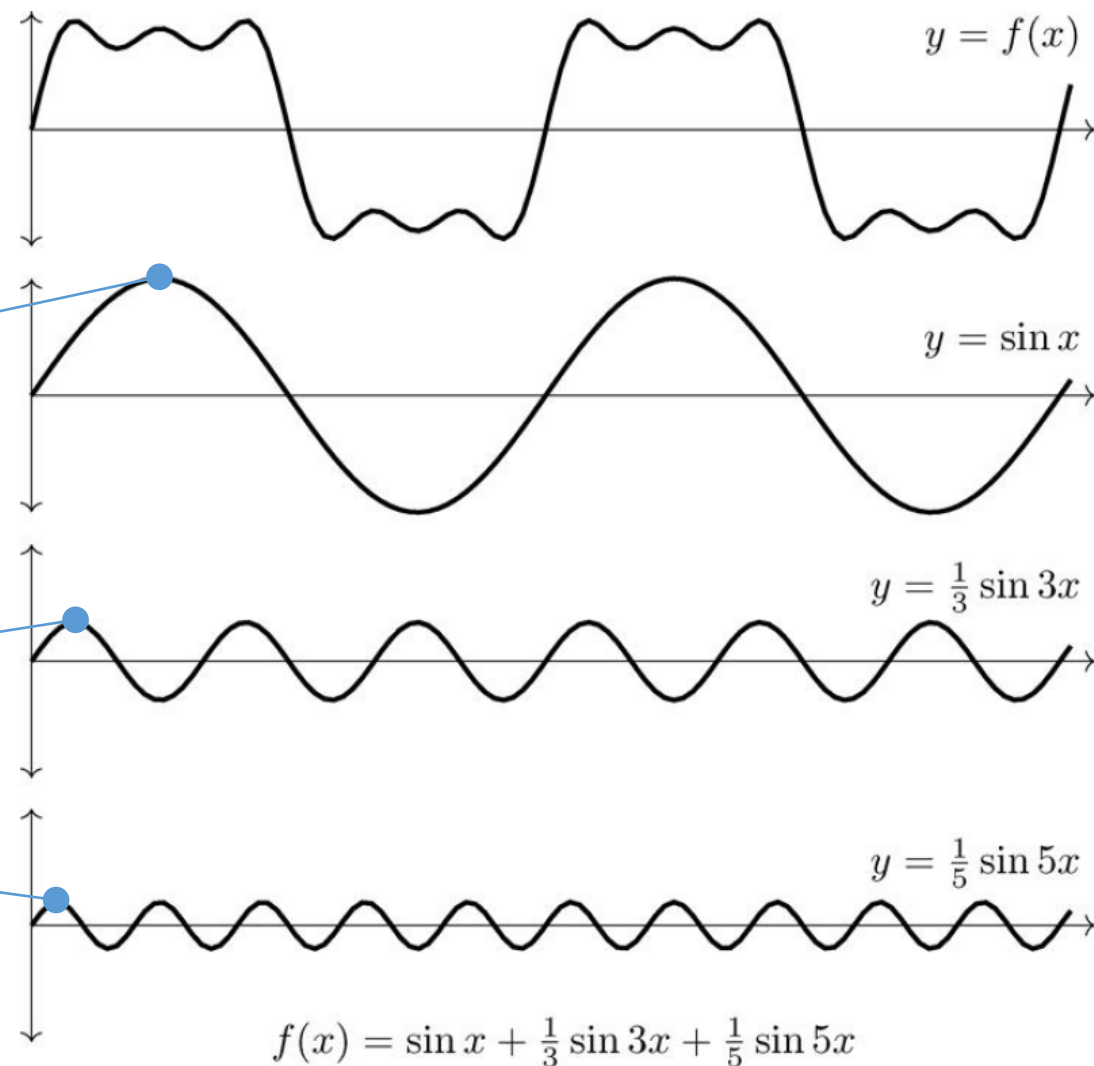
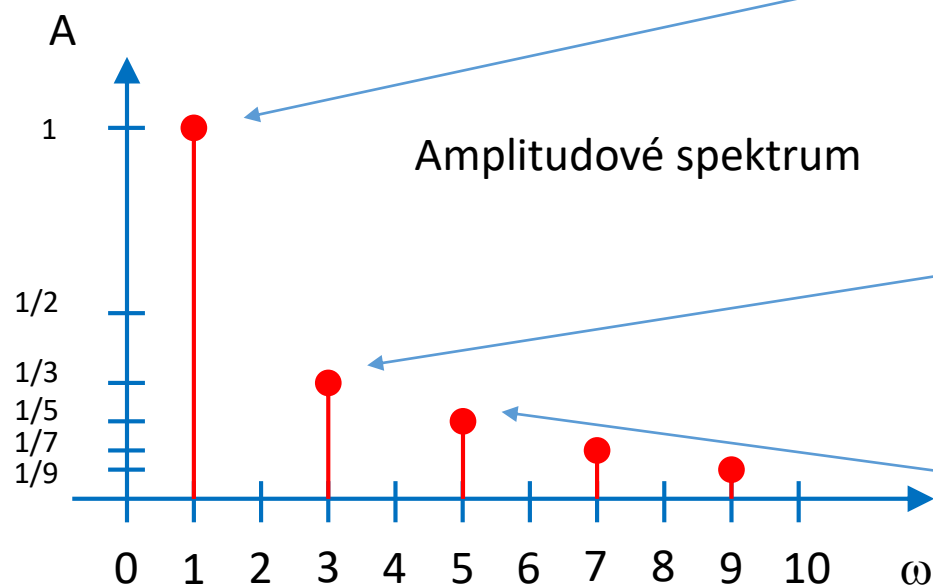
$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x + \dots$$



Fourierova transformace

Příklad Fourierovy řady periodického signálu

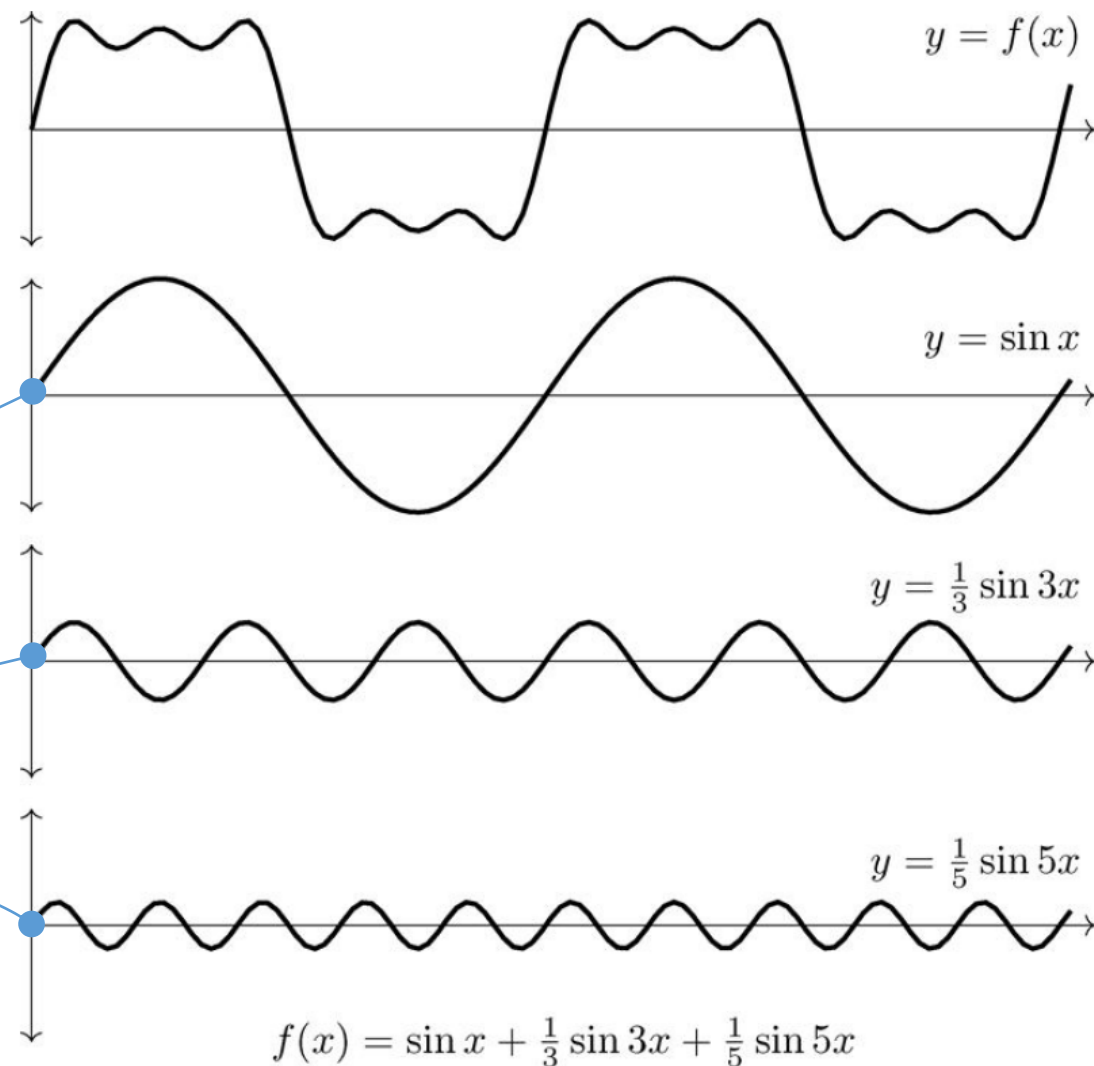
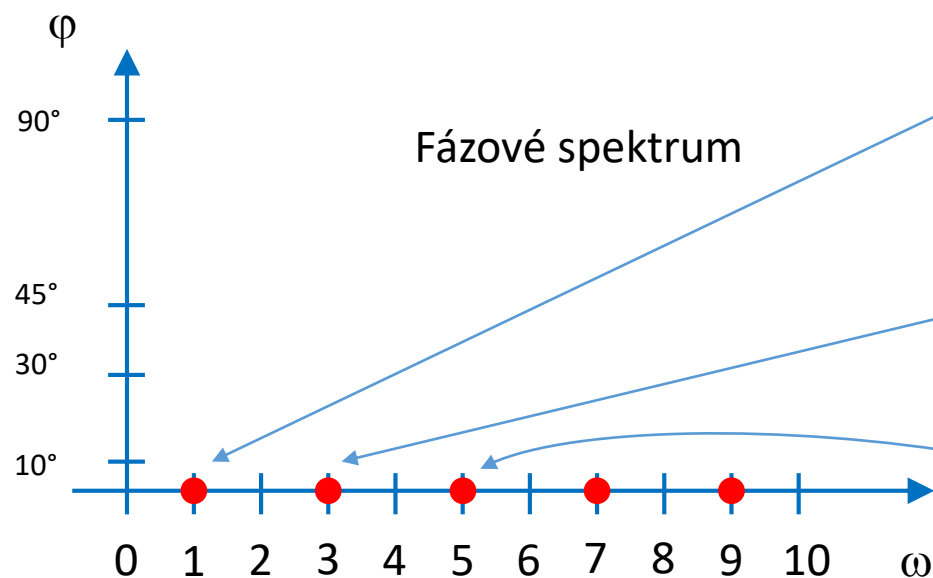
$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x + \dots$$



Fourierova transformace

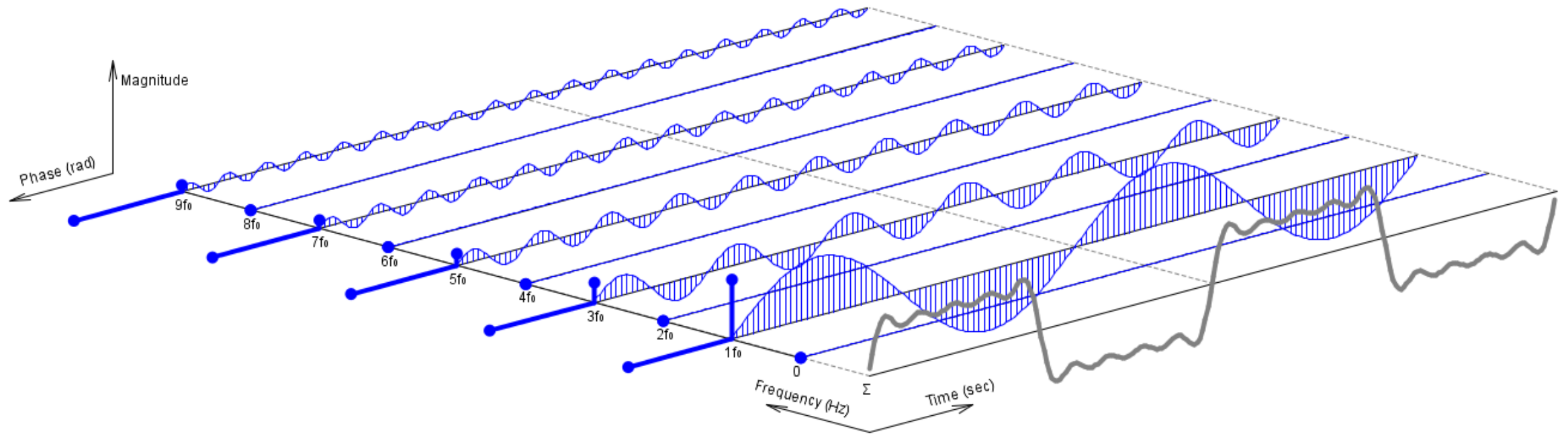
Příklad Fourierovy řady periodického signálu

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x + \dots$$



Fourierova transformace

- Rozklad 1D funkce na jednotlivé harmonické složky



<http://www.tomasboril.cz/fourierseries3d/cz/>

Fourierova transformace

- Rozvoj **Fourierovy řady (periodické funkce)** může zapsat i v komplexní podobě

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{in\pi x}{T}\right) \quad \text{kde} \quad c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \exp\left(\frac{-in\pi x}{T}\right) dx$$

Ukázka odvození komplexního tvaru jednoduché harmonické funkce

$$\underline{f(x) = \cos x = \cos \omega x} \Big|_{\omega=1} = \underbrace{\frac{1}{2} \cos \omega x + i \frac{1}{2} \sin \omega x}_{\frac{1}{2} e^{i\omega x}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos \omega x - i \frac{1}{2} \sin \omega x}_{\frac{1}{2} e^{-i\omega x}} = \sum_{n \in \{1, -1\}} \frac{1}{2} e^{in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega x}, \text{ kde}$$

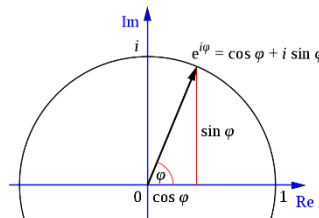
Eulerův vzorec: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } n=1 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } n=-1 \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

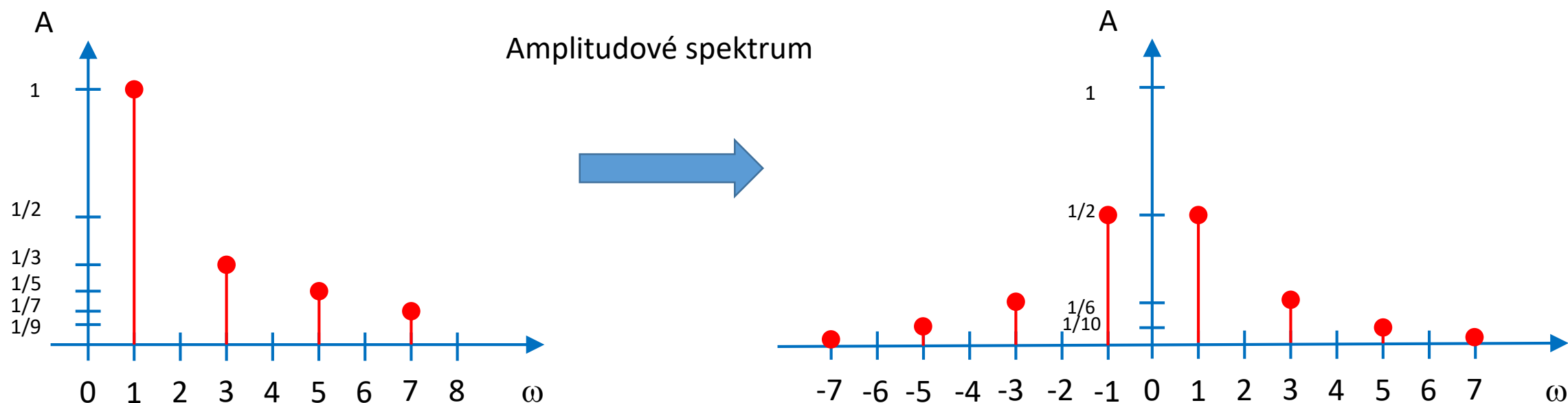
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Fourierova transformace

Pokud jsou využita komplexní čísla pro vyjádření Fourierovy řady/transformace, vyskytují se ve vzorcích automaticky i komplexně sdružená čísla, což vede k tomu, že se amplitudy vyskytují 2x (pro danou frekvenci a pro symetrickou zápornou frekvenci). Proto také původně jedna amplituda je nyní reprezentována dvěma amplitudami poloviční velikosti.



Fourierova transformace

- **Fourierova transformace** pro **neperiodickou funkci** lze také vyjádřit v **komplexní podobě**:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

- Využití komplexních čísel je výhodné z důvodu kompaktnějšího zápisu a snazších matematických operací.

Fourierova transformace

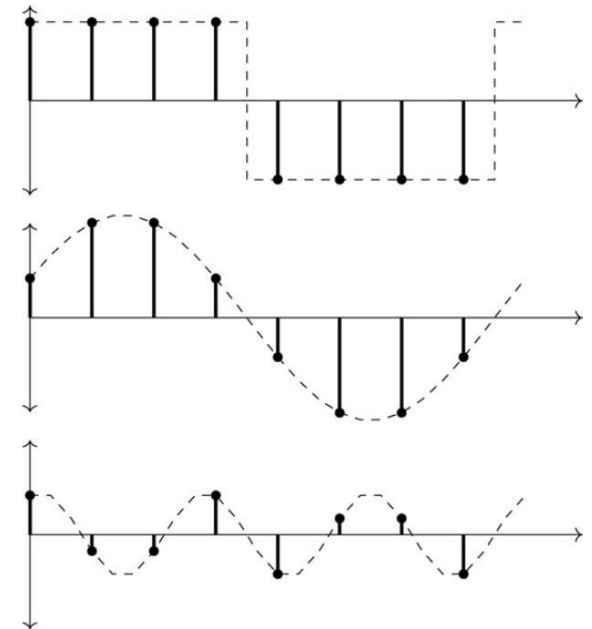
- Protože nás zajímá využití FT při zpracování obrazu, který je reprezentován maticí a je tedy diskrétní, omezíme se na **diskrétní Fourierovu transformaci (DFT)**
- Pro diskrétní **funkce jedné proměnné** (např. časové řady) je DFT dána těmito vztahy:

$$F_u = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \exp \left[-2\pi i \frac{xu}{N} \right] f_x$$

DFT

$$x_u = \sum_{x=0}^{N-1} \exp \left[2\pi i \frac{xu}{N} \right] F_u$$

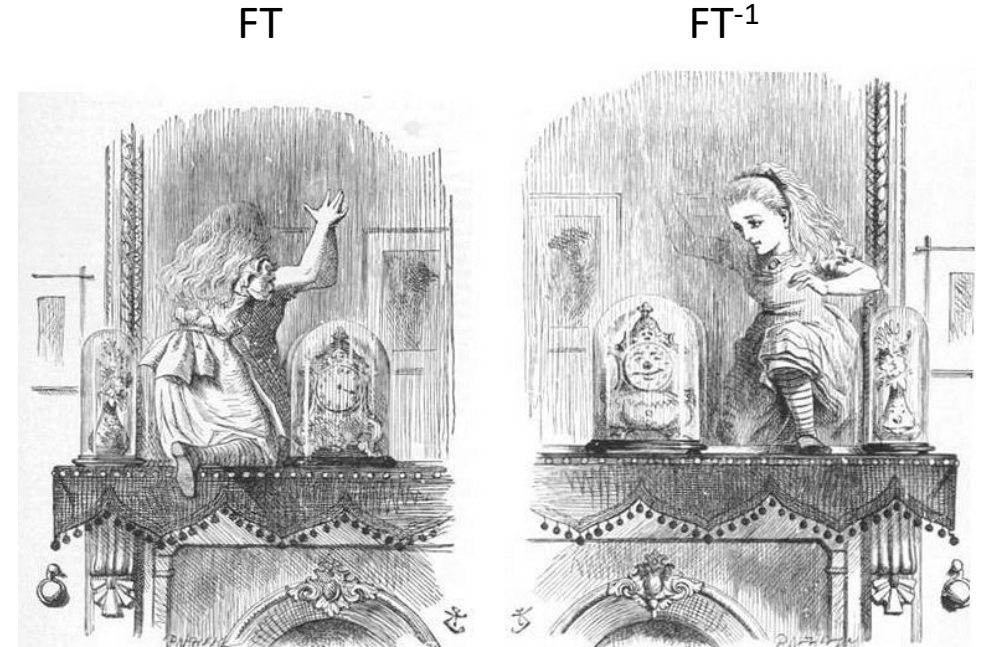
inverzní DFT (IDFT)



Fourierova transformace

- FT 2D obrázku (spektrum obrázku)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right]$$

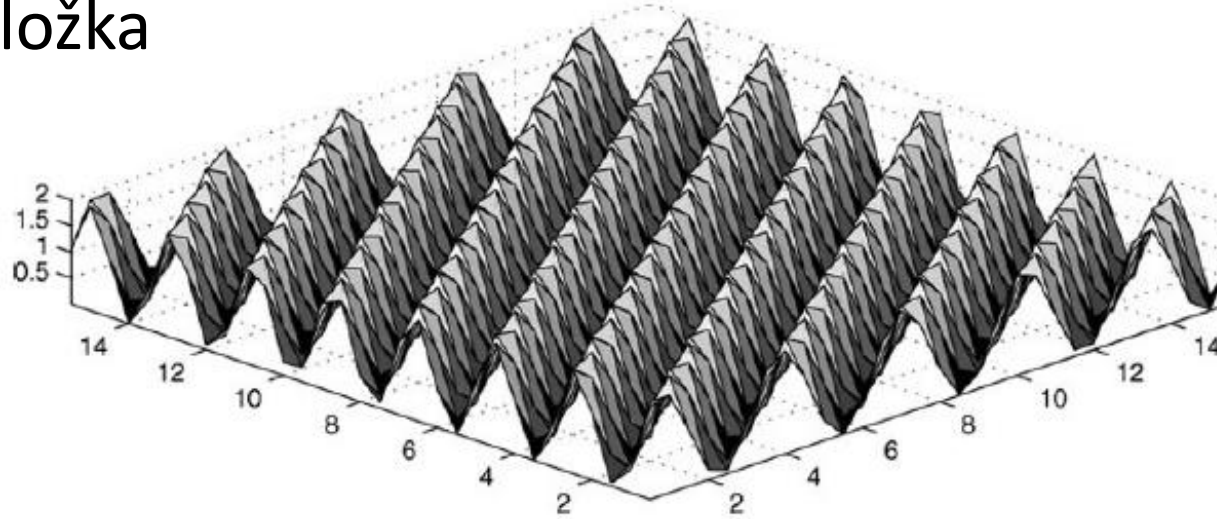


- Zpětná FT 2D obrázku (rekonstrukce obrázku ze spektra)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left[2\pi i \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right]$$

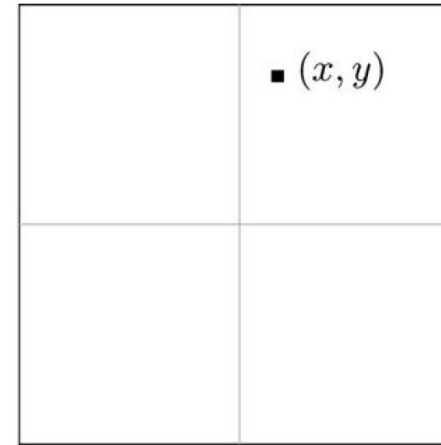
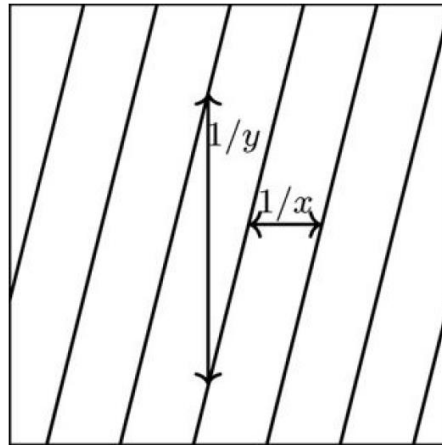
Fourierova transformace

- 2D harmonická složka



$$z = a \sin(bx + cy)$$

- Pozice ve spektru



Fourierova transformace

- Vlastnosti Fourierovy transformace

- Linearita: $F(f+g) = F(f) + F(g)$ - výhodné pro odstranění známého šumu
- Konvoluce: $F(M*S) = F(M) \cdot F(S)$ - výhodné pro filtraci
- Posun: Spektrum se posune do středu, pokud pronásobíme obraz maticí $\{(-1)^{x+y}\}$

- Vizualizace spektra

- Snížení vlivu stejnosměrné složky, např. $\log(1 + |F(u,v)|)$

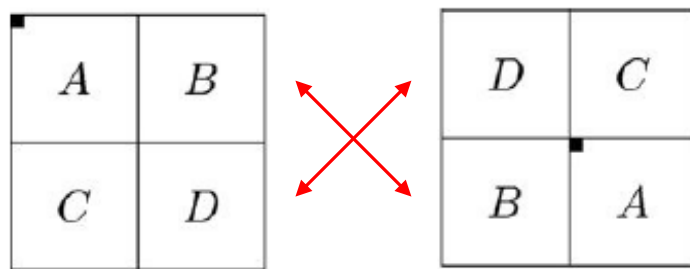
- FFT (Fast Fourier Transform)

- Efektivní implementace DFT ($2^{2n} \rightarrow n2^n$ operací násobení)
- Postavena na rekurzivním dělení dat \rightarrow výhodné pro matice o rozměrech 2^k

Fourierova transformace

- Posun spektra

- Po FT je standardně stejnosměrná složka v levém horním rohu matice spektra
- Okolí stejnosměrné složky odpovídá složkám s nižší frekvencí, která se zvyšuje jak se od levého horního rohu vzdalujeme
- Pro snazší interpretaci je výhodné provést posun spektra tak, aby stejnosměrná složka byla uprostřed a okolní hodnoty FT odpovídající složkám o nižších frekvencích. Větší vzdálenosti od středu odpovídají složkám o vyšších frekvencích.
- Posun spektra využívá skutečnosti, že pokud obrázek pronásobíme stejně velkou maticí ve tvaru šachovnice s hodnotami +1 a -1, dojde k žádanému posunu.



Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

- Příklad 1: Mějme obrázek o rozměru 8x8 pixelů, který obsahuje samé jedničky (jednotvá plocha)

a1 =

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

obrázek jako matice

ans =

64	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

spektrum obrázku
(neposunuté)

- Pokud dosadíme do vztahu pro $F(u,v)$ za $u=0$ a $v=0$, vypadne exponenciální člen ($e^0=1$) a zůstane součet prvků matice, tj. hodnota 64.
- Pokud dosadíme do vztahu pro $F(u,v)$ např. za $u=0$ a $v=1$, výpočtem zjistíme, že se vyruší a bude platit, že $F(0,1)=0$.
- $F(u,v)=0$ dostaneme pro všechny hodnoty u a v vyjma prvního případu, kdy $u=0$ a $v=0$.

Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

- Příklad 1: Mějme obrázek o rozměru 8x8 pixelů, který obsahuje samé jedničky (jednotvá plocha)

a1 =

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

obrázek jako matice

ans =

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	64	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

spektrum obrázku
(posunuté)

- Pokud dosadíme do vztahu pro $F(u,v)$ za $u=0$ a $v=0$, vypadne exponenciální člen ($e^0=1$) a zůstane součet prvků matice, tj. hodnota 64.
- Pokud dosadíme do vztahu pro $F(u,v)$ např. za $u=0$ a $v=1$, výpočtem zjistíme, že se vyruší a bude platit, že $F(0,1)=0$.
- $F(u,v)=0$ dostaneme pro všechny hodnoty u a v vyjma prvního případu, kdy $u=0$ a $v=0$.

Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

- Příklad 2: Mějme obrázek o rozměru 8x8 pixelů, který obsahuje následující hodnoty:

a2 =

100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200

obrázek jako matice

af2 =

9600	0	0	0	-3200	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

spektrum obrázku
(neposunuté)

- Pokud dosadíme do vztahu pro $F(u,v)$ za $u=0$ a $v=0$, vypadne exponenciální člen ($e^0=1$) a zůstane dvojnásobný součet prvků matice, tj. hodnota 9600.
- Pokud dosadíme do vztahu pro $F(u,v)$ např. za $u=4$ a $v=0$, výpočtem zjistíme, že $F(0,1)=-3200$.
- Pro ostatní hodnoty u a v dostaneme $F(u,v)=0$.
- Matice $F(u,v)$ obsahuje v tomto případě reálná čísla. To však nemusí být vždy pravda. V tom případě je $F(u,v)$ matice komplexních čísel a vyjadřujeme ji dvěma maticemi: maticí amplitud a maticí fází.

Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

- Příklad 2: Mějme obrázek o rozměru 8x8 pixelů, který obsahuje následující hodnoty:

a2 =

100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200

obrázek jako matice

af2 =

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-3200	0	0	0	9600	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

spektrum obrázku
(posunuté)

- Pokud dosadíme do vztahu pro $F(u,v)$ za $u=0$ a $v=0$, vypadne exponenciální člen ($e^0=1$) a zůstane dvojnásobný součet prvků matice, tj. hodnota 9600.
- Pokud dosadíme do vztahu pro $F(u,v)$ např. za $u=4$ a $v=0$, výpočtem zjistíme, že $F(0,1)=-3200$.
- Pro ostatní hodnoty u a v dostaneme $F(u,v)=0$.
- Matice $F(u,v)$ obsahuje v tomto případě reálná čísla. To však nemusí být vždy pravda. V tom případě je $F(u,v)$ matice komplexních čísel a vyjadřujeme ji dvěma maticemi: maticí amplitud a maticí fází.

Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

- Příklad 3: Mějme obrázek jednotkového skoku, tj. matici:

a3 =

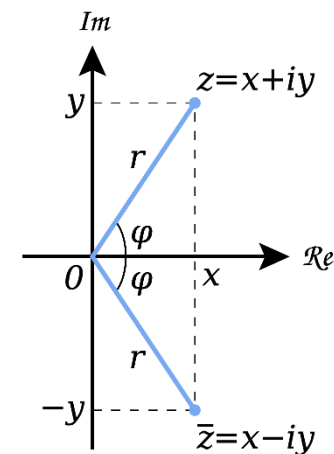
```
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
```

obrázek jako matice

af3 =

spektrum obrázku (tentokrát už obsahuje komplexní čísla a je posunuté)

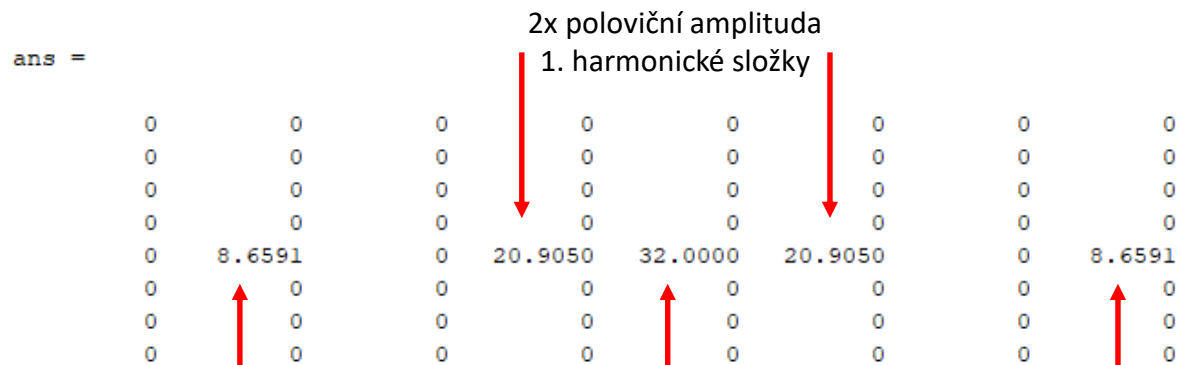
```
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i -8.0000 - 3.3137i 0.0000 + 0.0000i -8.0000 -19.3137i 32.0000 + 0.0000i -8.0000 +19.3137i 0.0000 + 0.0000i -8.0000 + 3.3137i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
```



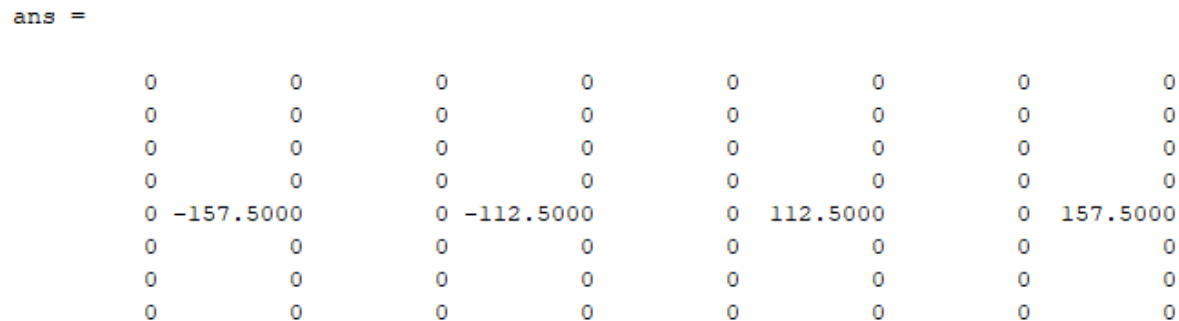
Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

- Příklad 3: FT obrázku s posunem stejnosměrné složky na střed (shift):



amplitudové spektrum (posunuté)

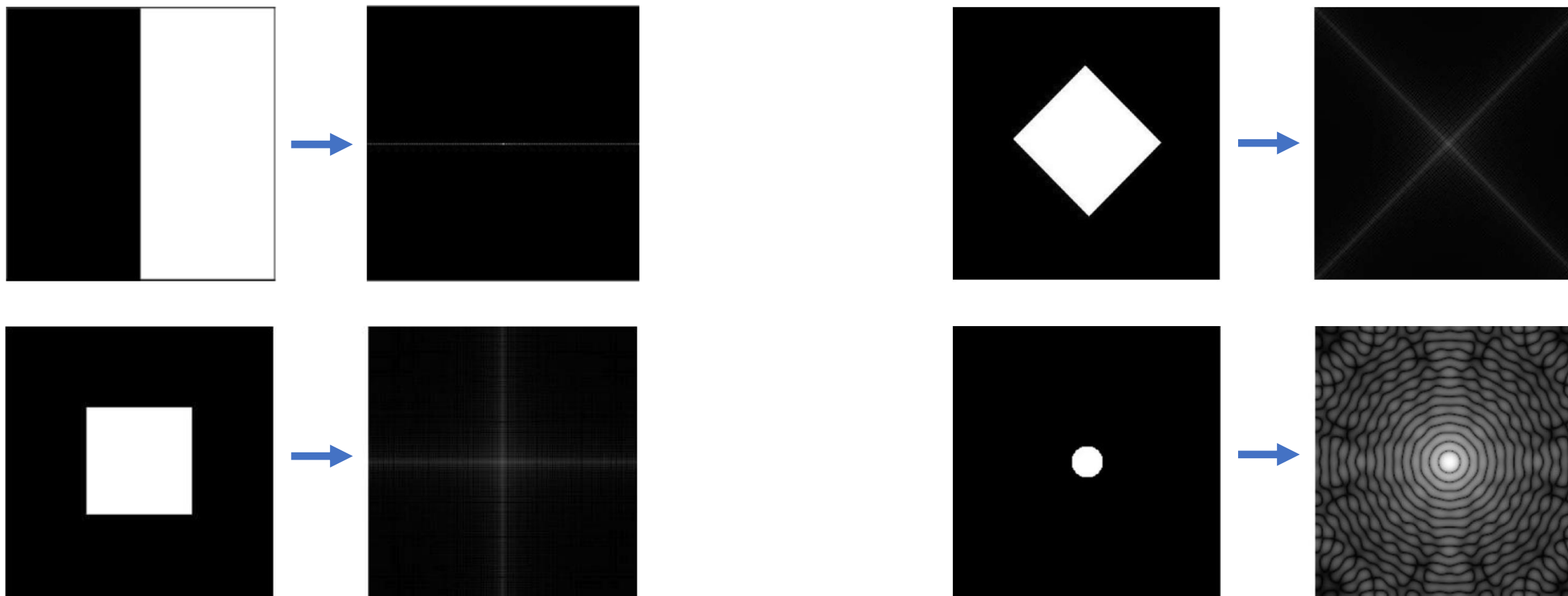


fázové spektrum (ve stupních, posunuté)

Fourierova transformace

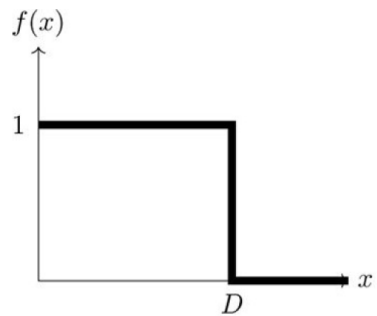
- Jednoduché příklady DFT

- Příklady umělých obrázků (všechna spektra jsou již po posunu)

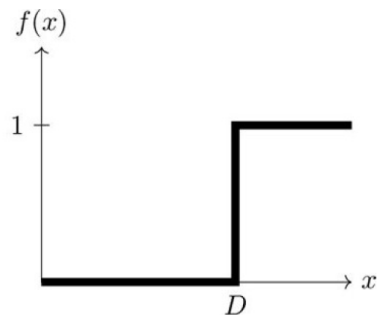


Filtrace ve frekvenční oblasti

- Ideální filtr
 - Low-pass filter (dolnofrekvenční propust')



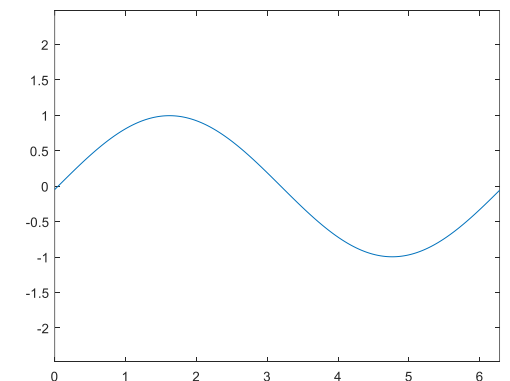
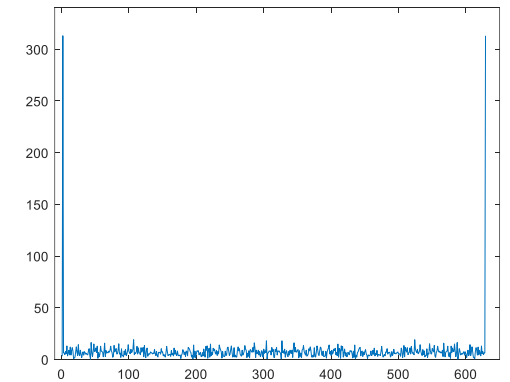
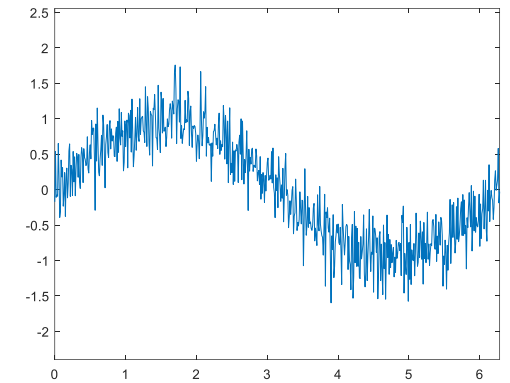
- High-pass filter (hornofrekvenční propust')



stejnoseměrná složka

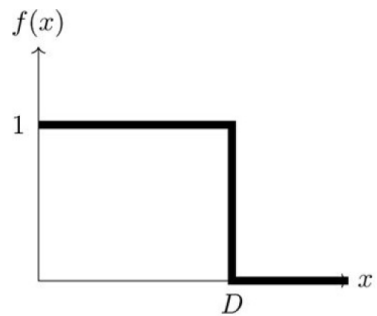
3.5610	0	0
315.3958	1	315.3958
4.6472	0	0
5.6448	0	0
4.6713	0	0
5.8070	0	0
9.1820	0	0
9.6404	0	0
12.6469	0	0
5.3635	0	0
.	.	.
.	.	.
.	.	.
4.8689	0	0
7.6546	0	0
5.3635	0	0
12.6469	0	0
9.6404	0	0
9.1820	0	0
5.8070	0	0
4.6713	0	0
5.6448	0	0
4.6472	0	0
315.3958	1	315.3958

\times $=$



Filtrace ve frekvenční oblasti

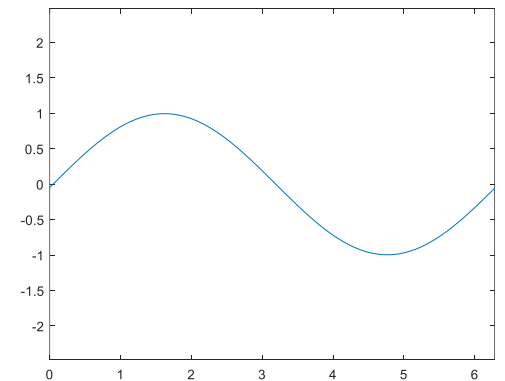
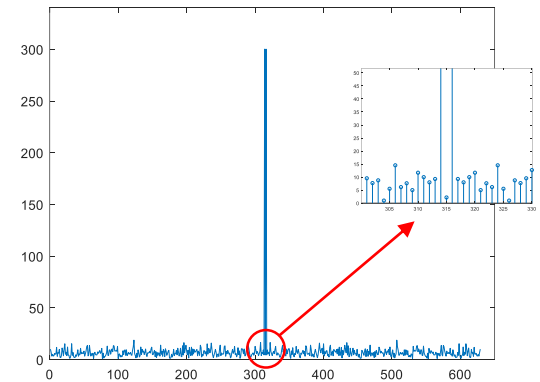
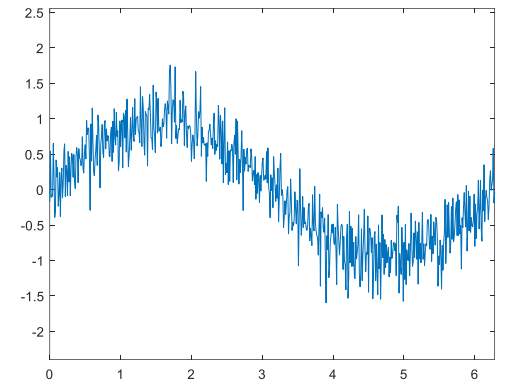
- Ideální filtr
 - Low-pass filter (dolnofrekvenční propust')



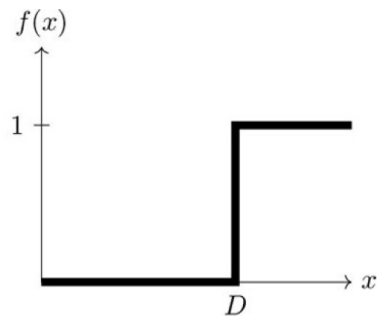
stejnosečná složka →

•	•	•
•	•	•
•	•	•
4.8689	0	0
7.6546	0	0
5.3635	0	0
12.6469	0	0
9.6404	0	0
9.1820	0	0
5.8070	0	0
4.6713	0	0
5.6448	0	0
4.6472	0	0
315.3958	1	315.3958
3.5610	0	0
315.3958	1	315.3958
4.6472	0	0
5.6448	0	0
4.6713	0	0
5.8070	0	0
9.1820	0	0
9.6404	0	0
12.6469	0	0
5.3635	0	0
•	•	•
•	•	•
•	•	•

$\times =$



- High-pass filter (hornofrekvenční propust')

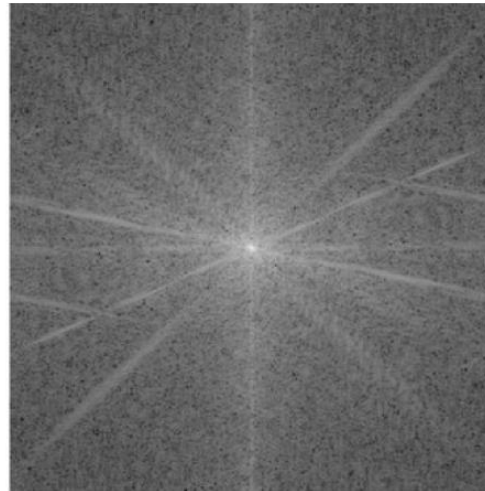


Filtrace ve frekvenční oblasti

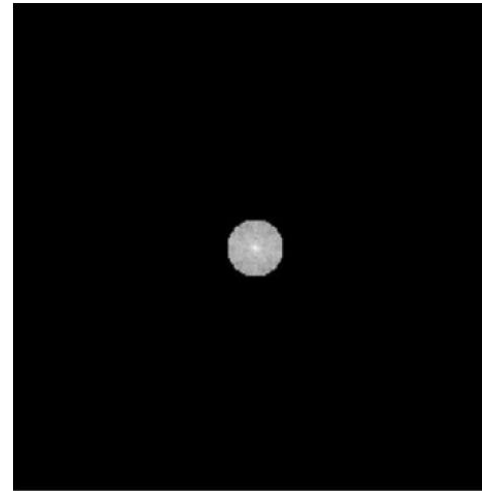
- Ideální filtr – Low-pass filter (dolnofrekvenční propust')



(amplitudové) spektrum
původního obrázku



dolnofrekvenční ideální
propust', $D = 15$



zpětná transformace
z vyfiltrovaného spektra



Filtrace ve frekvenční oblasti

- Ideální filtr – High-pass filter (hornofrekvenční propust')



Filtrace ve frekvenční oblasti

- Butterworthův filtr

- Ideální filtr – snadná SW implementace, artefakty zvlnění obrazu
- BF – postupný přechod -> snížení zvlnění obrazu

dolnofrekvenční propuť

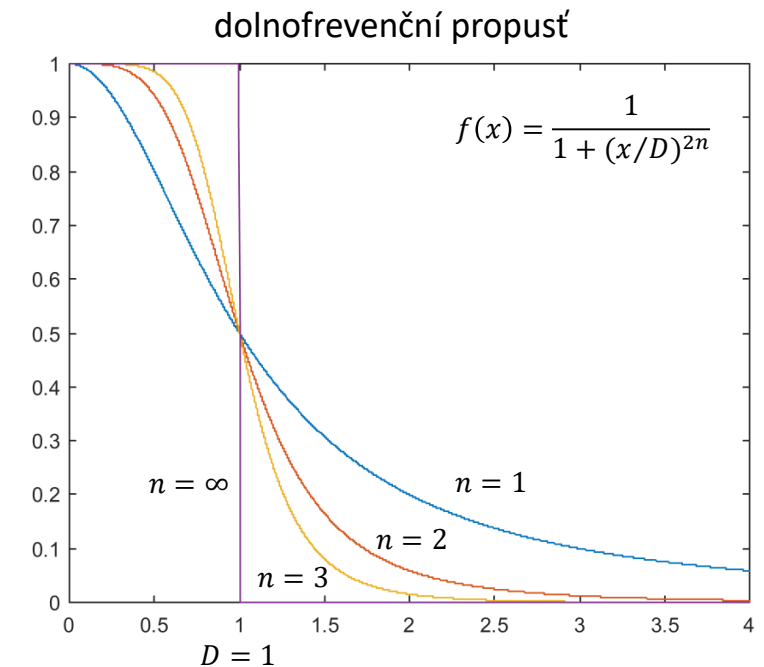
$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/D)^{2n}}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 + y^2}{D^2}\right)^n}$$

hornofrekvenční propuť

$$f(x) = \frac{1}{1 + (D/x)^{2n}}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D^2}{x^2 + y^2}\right)^n}$$

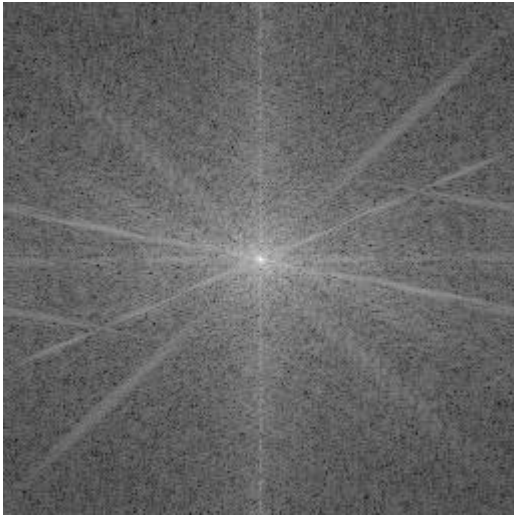


n je řád filtru, D je místo přechodu přes 0,5 (odpovídá hraniční frekvenci)

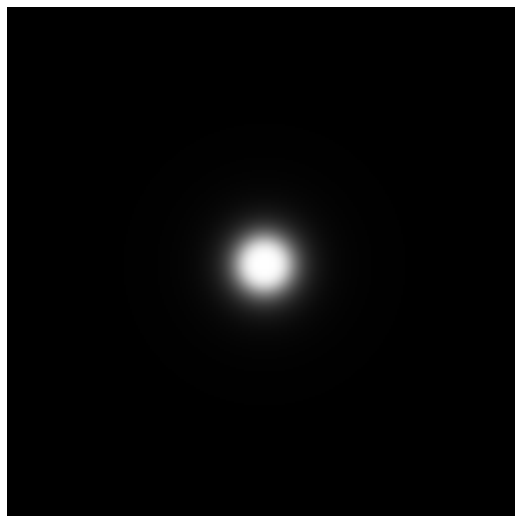
Filtrace ve frekvenční oblasti

- Butterworthův filtr

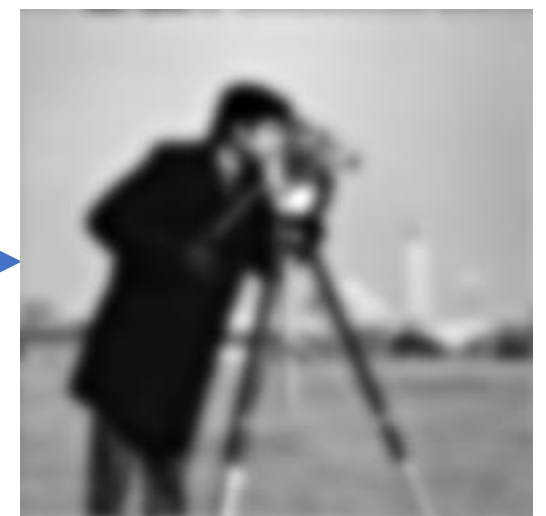
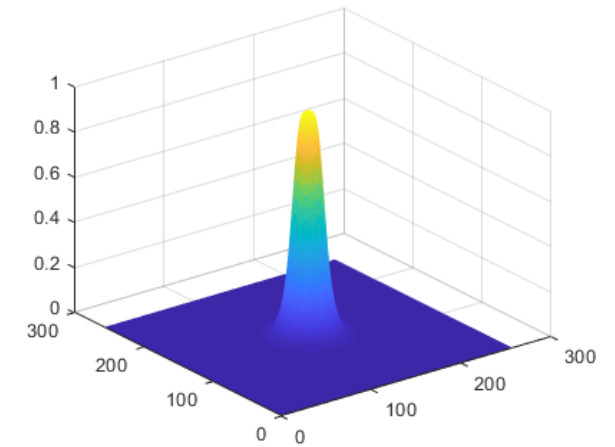
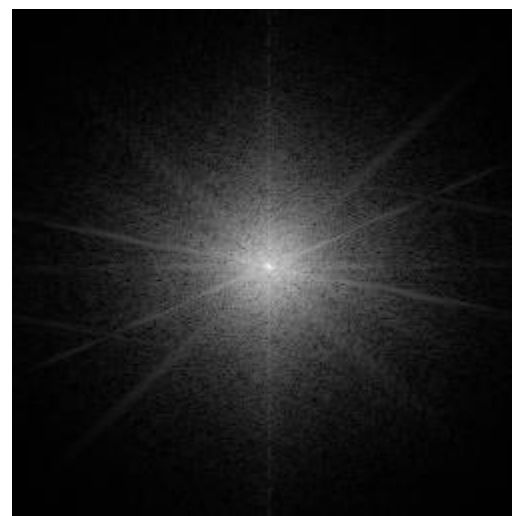
(amplitudové) spektrum
původního obrázku



dolnofrekvenční propust'
 $D = 15, n = 2$



=

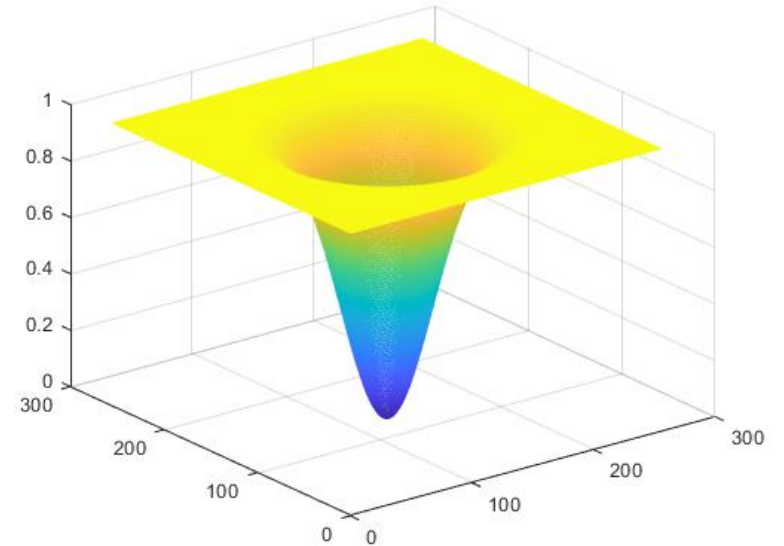
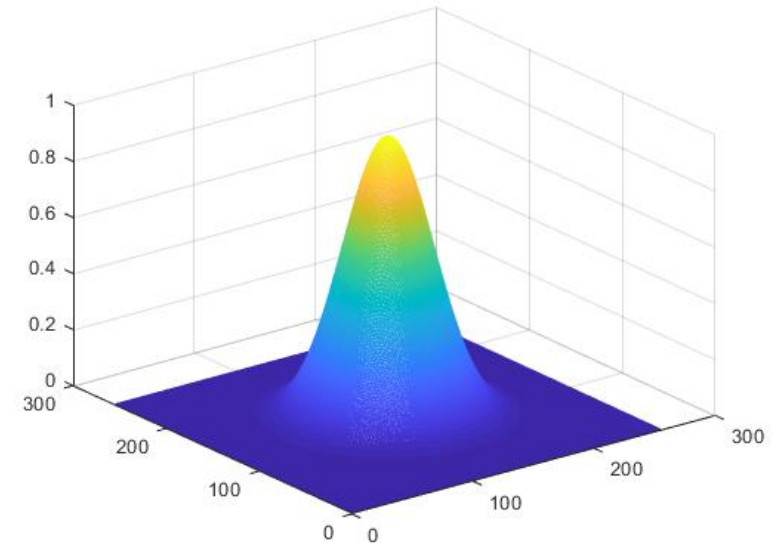


Filtrace ve frekvenční oblasti

- Gaussův filtr
 - „Hladký“ filtr
 - Tvar Gaussovy funkce (pro 2D tvar „klobouku“)

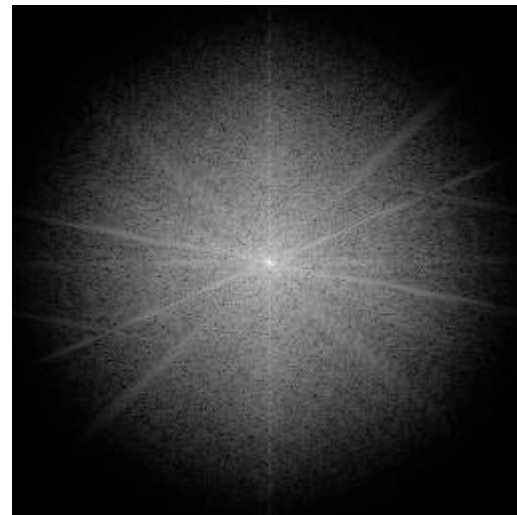
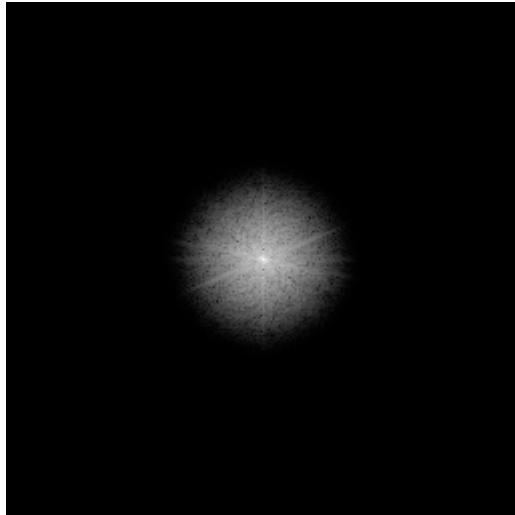
$$f(x, y) = A \exp \left(- \left(\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right)$$

- FT obrázku po prvcích pronásobíme hodnotami filtru a na výsledek aplikujeme zpětnou FT



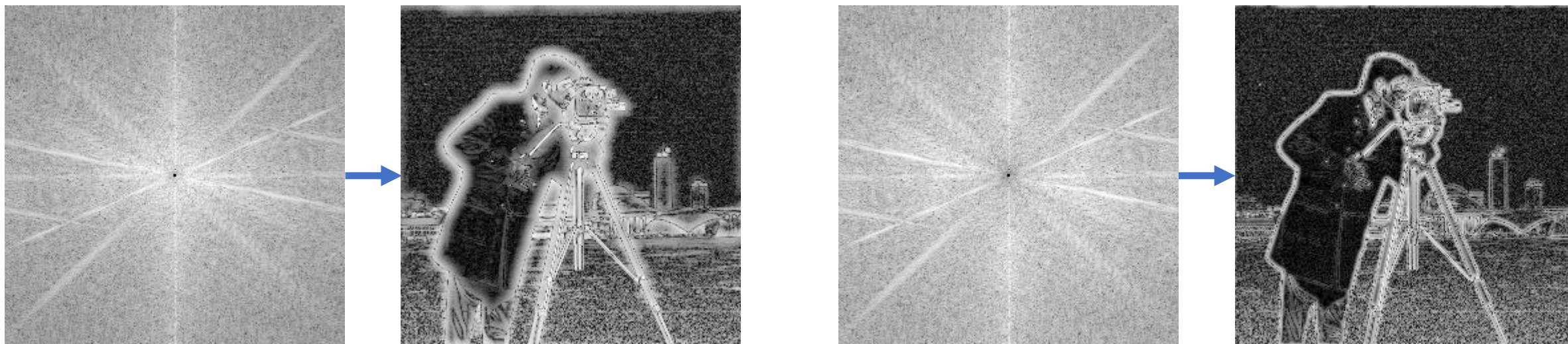
Filtrace ve frekvenční oblasti

- Gaussův filtr – low-pass filtr



Filtrace ve frekvenční oblasti

- Gaussův filtr – high-pass filtr



Diskrétní kosinová transformace - DCT

- Podobná diskrétní Fourierově transformaci (DFT)
- Používá se při kompresi obrázků a dat – formát JPEG, MPEG, MP3, ...
- Místo komplexní exponenciály jak je to u FT využívá reálnou funkci $\cos(x)$.
- Odpadá tak komplexní člen se $\sin(x)$ a díky tomu DCT generuje pouze reálné koeficienty.
- Díky separabilitě lze snadno optimalizovat výpočet vícerozměrných dat pomocí série jednorozměrných výpočtů
- Transformace většinou po blocích -> šetří paměť

Diskrétní kosinová transformace - DCT

- Existuje více variant DCT, nepoužívanější je:
 - Pro 1D případ

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right) k \right]$$

- Pro 2D případ (matici/snímek) - může být spočítána jako série jednorozměrných transformací postupně v každém rozměru. Pro 2D například nejprve po řádcích a pak po sloupcích (nebo naopak).

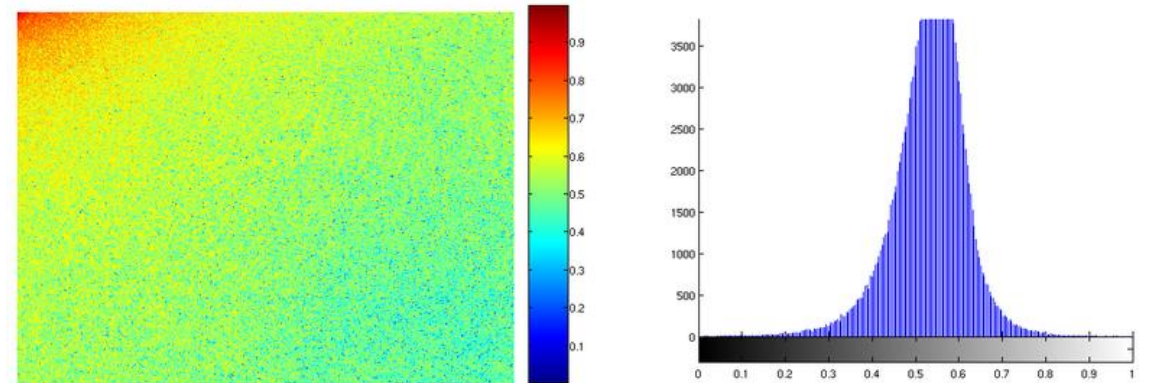
$$X_{k_1, k_2} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_{n_1, n_2} \cos \left[\frac{\pi}{N_1} \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) k_1 \right] \cos \left[\frac{\pi}{N_2} \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) k_2 \right]$$

Diskrétní kosinová transformace - DCT

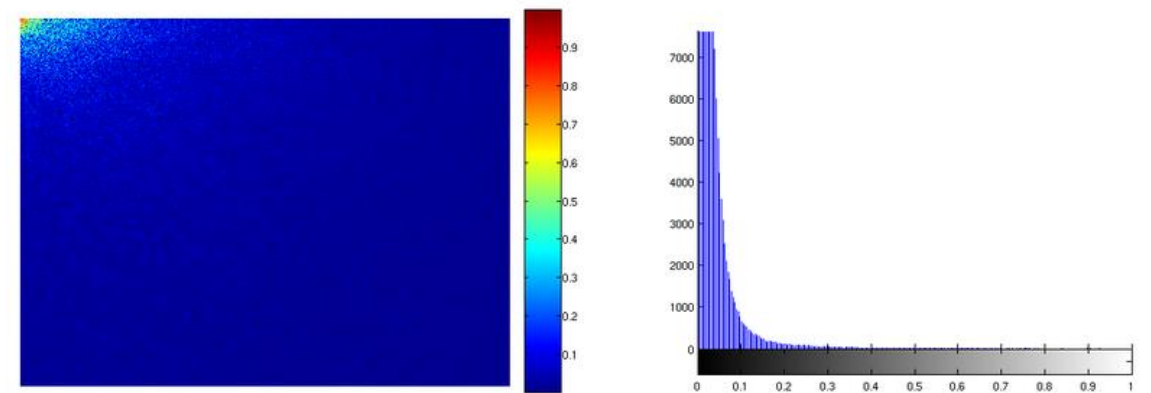


DCT koncentruje nejvíce energie (= amplitudy)
na nejnižších frekvencích

DFT



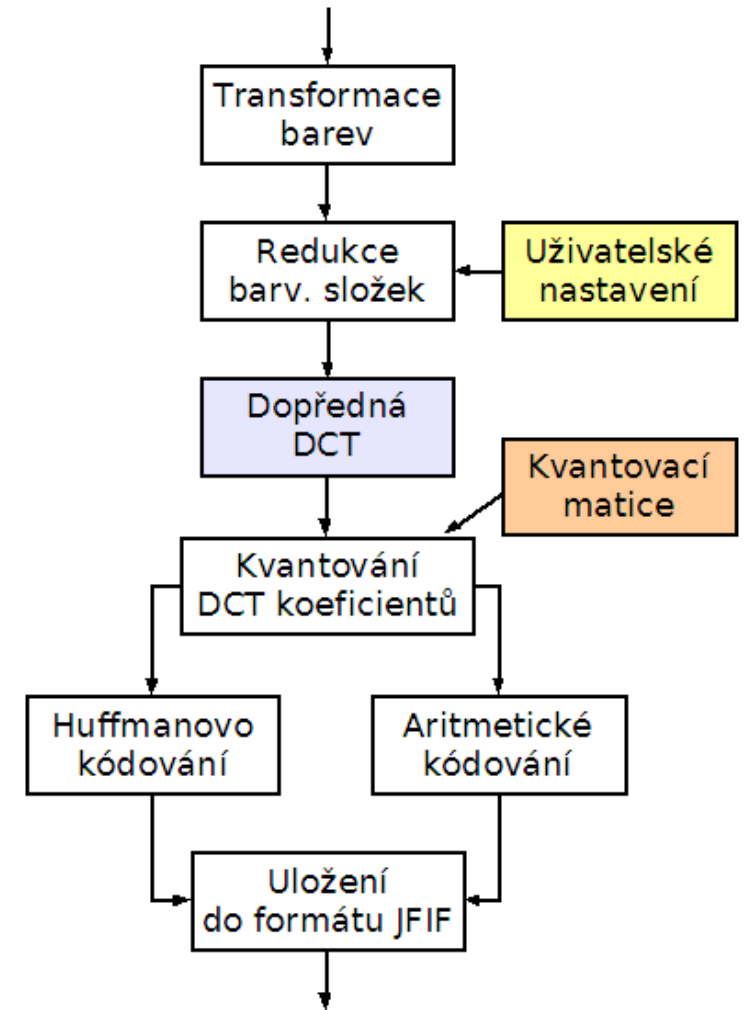
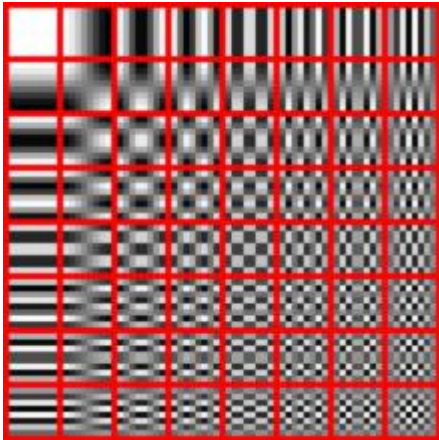
DCT



Diskrétní kosinová transformace - DCT

- DCT a standard JPEG

- je prováděna odděleně pro jednotlivé barvové složky barvového modelu $Y C_b C_r$
- rozdělení celého obrázku na pravidelné bloky o velikosti 8×8 hodnot



Literatura

- McAndrew A., Computational Introduction to Digital Image Processing, CRC Press, 2. vydání, 2016
- Sundararajan D., Digital Image Processing: A Signal Processing and Algorithmic Approach, Springer, 2017
- Birchfield S., Image Processing and Analysis, Cengage Learning, 2016
- Acharya T., Ray A. K., Image Processing: Principles and Applications, Wiley, 2005
- Burger W., Burge M. J., Principles of Digital Image Processing: Fundamental Techniques, Springer-Verlag, 2009
- https://docs.opencv.org/master/de/dbc/tutorial_py_fourier_transform.html
- https://docs.opencv.org/master/d8/d01/tutorial_discrete_fourier_transform.html