

# Filtrace v prostorové a frekvenční oblasti

# Filtrace v prostorové a frekvenční oblasti

- Filtrace

- soubor lokálních transformací obrazu
- úrovně jasu se převádí na jiné
- cílem je potlačit nežádoucí jasové složky

- Filtrace

- v prostorové (obrazové) nebo časové oblasti (konvoluce)
- ve frekvenční oblasti (Fourierova transformace)

# Filtrace v prostorové oblasti

- Filtry

- Pracují s více pixely v obraze (nejsou zaměřeny na jeden pixel), tj. počítají novou hodnotu pixelu na základě hodnot více pixelů v obraze.
- Díky tomu umožňují takové operace, jako je např. zaostření nebo rozmazání obrazu
- Filtry potlačují část neužitečné informace a zdůrazňují tu užitečnou.
- Filtrace nebývá vratnou operací, tj. dochází díky ní ke ztrátě informace.

- Příklad průměrovacího filtru (rozmazání)

$$I'(u, v) \leftarrow \frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8}{9}$$

- Kde  $p_i$  jsou sousední pixely středového pixelu  $p_0$ .

# Filtrace v prostorové oblasti

- Jiný zápis téhož, ale pomocí relativních odkazů na sousední pixely

$$I'(u, v) \leftarrow \frac{1}{9} \cdot [ I(u-1, v-1) + I(u, v-1) + I(u+1, v-1) + \\ I(u-1, v) + I(u, v) + I(u+1, v) + \\ I(u-1, v+1) + I(u, v+1) + I(u+1, v+1) ] .$$

- resp. v kompaktní formě:

$$I'(u, v) \leftarrow \frac{1}{9} \cdot \sum_{j=-1}^1 \sum_{i=-1}^1 I(u+i, v+j)$$

- (Obrazový) filtr je charakterizován zejména
  - množinou pixelů, které zohledňuje ve výpočtu
  - velikostí této množiny
  - tvarem oblasti, kterou tyto pixely vymezují (nemusí být spojitá)
  - váhami (vlivem) jednotlivých pixelů

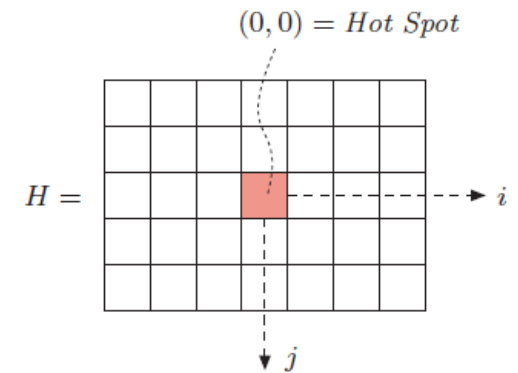
# Filtrace v prostorové oblasti

- Lineární filtry

- Lineární filtry jsou postaveny na váženém součtu hodnot uvažovaných pixelů
- Velikost, tvar a váhy jsou určeny tzv. filtrační maticí, resp. filtrační maskou  $H(i,j)$
- Např. zmíněný průměrovací filtr velikosti 3x3 má masku:

$$H(i,j) = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Filtr sám je dvourozměrnou diskrétní funkcí  $H: Z \times Z \rightarrow R$
- Filtr bývá zvykem indexovat od jeho středu.
- Pro matematické operace se uvažuje automatické doplnění nulami okolo filtru.
- Pro výpočty je výhodné mít v matici celá čísla.
- Lin. filtry mají svá omezení při vyhlazování a odstraňování šumu (rozmazání).



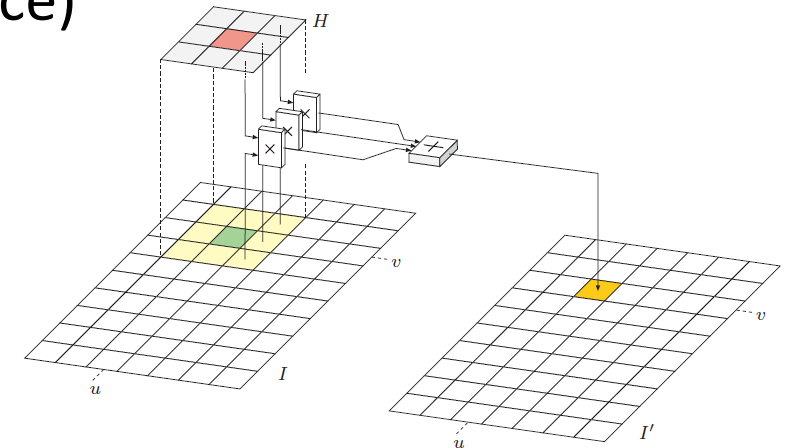
# Filtrace v prostorové oblasti

- Aplikace filtru

- Maska filtru (dále jen filtr) je umístěna na uvažované pozici v obrázku.
- Všechny hodnoty filtru  $H(i, j)$  jsou pronásobeny s odpovídajícími hodnotami v obraze  $I(u+i, v+j)$  a následně sečteny.
- Výsledná hodnota je uložena do nového obrázku (nejsou přepisovány hodnoty ve stávajícím obraze) a celý proces se opakuje pro další pixely v obraze
- Proces aplikace filtru lze vyjádřit vztahem (tzv. lin. korelace)

$$I'(u, v) \leftarrow \sum_{(i,j) \in R_H} I(u+i, v+j) \cdot H(i, j)$$

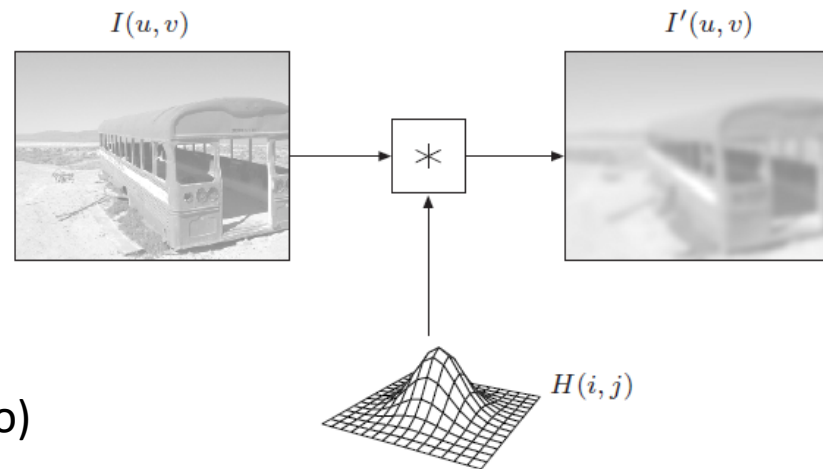
$$I'(u, v) \leftarrow \sum_{i=-1}^{i=1} \sum_{j=-1}^{j=1} I(u+i, v+j) \cdot H(i, j)$$



# Filtrace v prostorové oblasti

- (Lineární) konvoluce
  - Kombinace (pronásobení) dvou diskrétních nebo spojitých funkcí mezi sebou při různém vzájemném překryvu

$$I * H = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I(u-i, v-j) \cdot H(i, j)$$



$H$  – konvoluční matice (konvoluční jádro)

# Filtrace v prostorové oblasti

- Vlastnosti konvoluce

- Komutativita  $I * H = H * I$

- Linearita  $(s \cdot I) * H = I * (s \cdot H) = s \cdot (I * H)$

$$(I_1 + I_2) * H = (I_1 * H) + (I_2 * H)$$

- Asociativita  $A * (B * C) = (A * B) * C$

- Separabilita  $H = H_1 * H_2 * \dots * H_n$

$$H_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ušetření počtu operací,  
než u výpočtu s maticí

$$I' \leftarrow (I * H_x) * H_y = I * \underbrace{(H_x * H_y)}_{H_{xy}}$$

$$H_{xy} = H_x * H_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



# Filtrace v prostorové oblasti

0	0	0	0	0	0
0	105	102	100	97	96
0	103	99	103	101	102
0	101	98	104	102	100
0	99	101	106	104	99
0	104	104	104	100	98

Image Matrix

Kernel Matrix		
0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

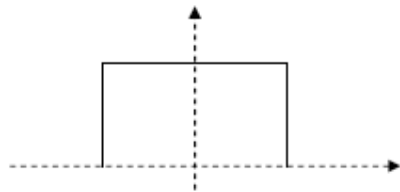
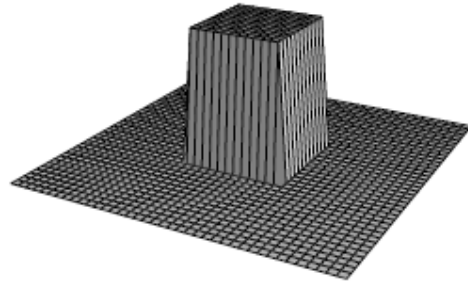
320					

Output Matrix

$$\begin{aligned} &0 * 0 + 0 * -1 + 0 * 0 \\ &+ 0 * -1 + 105 * 5 + 102 * -1 \\ &+ 0 * 0 + 103 * -1 + 99 * 0 = 320 \end{aligned}$$

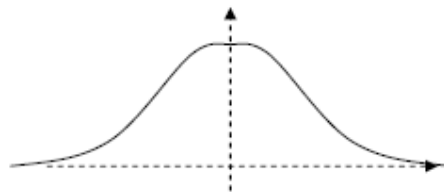
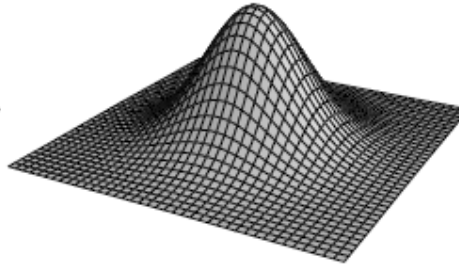
# Filtrace v prostorové oblasti

- Tvary/typy filtrů (konvolučních jader)



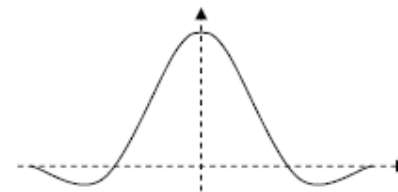
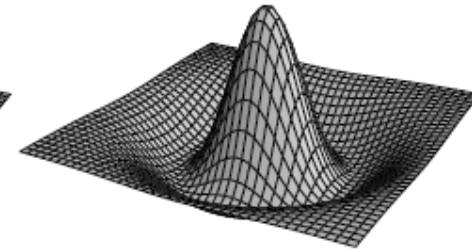
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

Krabicový filtr



0	1	2	1	0
1	3	5	3	1
2	5	9	5	2
1	3	5	3	1
0	1	2	1	0

Gaussův filtr



0	0	-1	0	0
0	-1	-2	-1	0
-1	-2	16	-2	-1
0	-1	-2	-1	0
0	0	-1	0	0

Laplaceův filtr

# Filtrace v prostorové oblasti

- Vyhlazovací filtry
  - Krabicový filtr (Box filter)
    - Jednoduchá implementace
    - Nevýhodou jsou ostré přechody -> zvlnění obrazu
    - Neizotropní (nechová se stejně ve všech směrech)
  - Gaussovský filtr (Gaussian filter)
    - Izotropní
    - „měkké“ okraje, bez zvlnění obrazu

$$G_{\sigma}(x, y) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

# Filtrace v prostorové oblasti

- Diferenční filtry
  - Některé koeficienty filtrační matice jsou záporné
  - Výpočet lze interpretovat jako rozdíl dvou součtů: součet hodnot pro kladné hodnoty filtru mínus součet hodnot pro záporné hodnoty filtru

$$I'(u, v) = \sum_{(i, j) \in R_H^+} I(u+i, v+j) \cdot |H(i, j)| \\ - \sum_{(i, j) \in R_H^-} I(u+i, v+j) \cdot |H(i, j)|$$

- Příkladem je např. Laplaceův filtr
- Zatímco vyhlazovací filtry potlačují výrazné osamělé hodnoty, diferenční filtry je naopak zvýrazňují → zaostřování obrázku, detekce hran

# Filtrace v prostorové oblasti

- Nelineární filtry
  - Hodnoty pixelů jsou kombinovány pomocí nelineární funkce.
- Minimální a maximální filtr

$$I'(u, v) \leftarrow \min \{I(u+i, v+j) \mid (i, j) \in R\}$$

$$I'(u, v) \leftarrow \max \{I(u+i, v+j) \mid (i, j) \in R\}$$

Př. Impulzní šum („sůl a pepř“)

Min. filtr (potlačení bílé, zvýraznění černé)

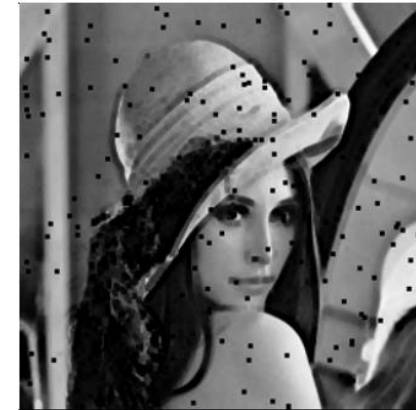
Max. filtr (potlačení černé, zvýraznění bílé)



(a)



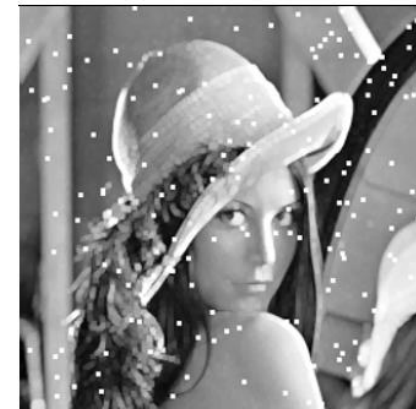
(b)



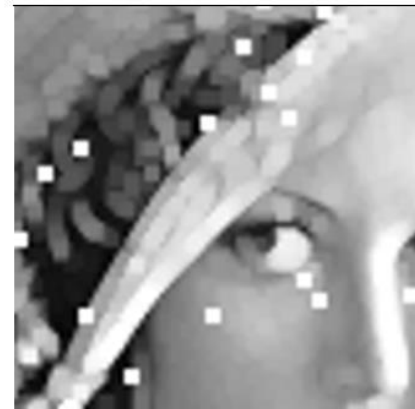
(c)



(d)



(e)

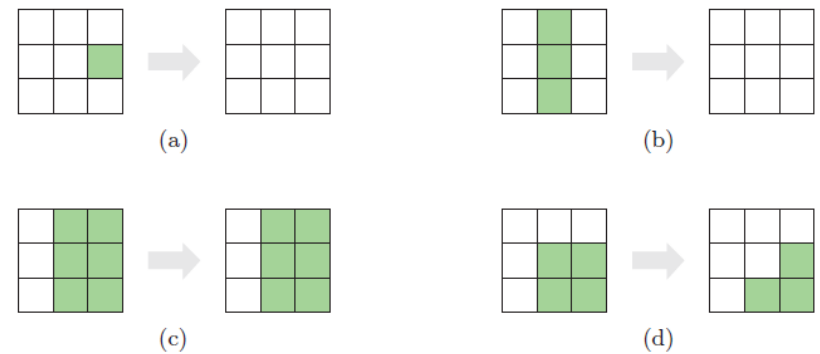
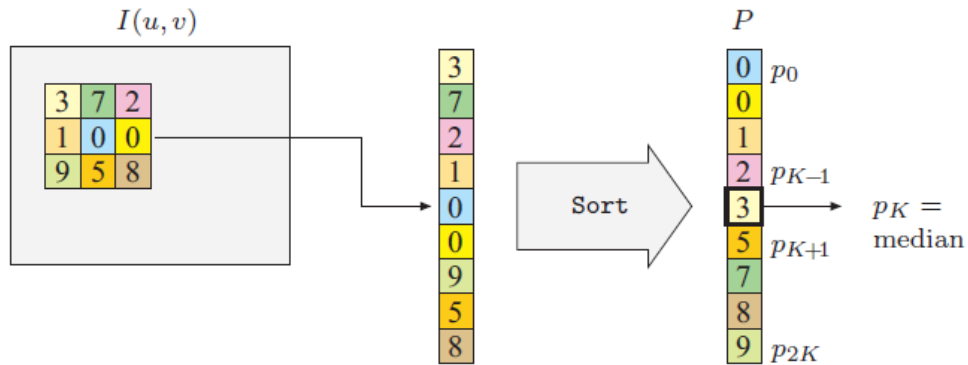


(f)

# Filtrace v prostorové oblasti

- Mediánový filtr
  - Nahrazuje hodnotu daného pixlu mediánem hodnot sousedních pixelů

$$I'(u, v) \leftarrow \text{median} \{I(u+i, v+j) \mid (i, j) \in R\}$$



- Pro výpočet mediánu je potřeba provést seřazení hodnot → časově náročné.
- Robustní – nerozhodí ho extrémní hodnoty.
- Zachovává hrany, bohužel je někdy i vytváří.

# Filtrace v prostorové oblasti

- Srovnání lineárního filtru (matice jedniček 3x3) a mediánového filtru



(a)



(b)

Průměrovací lin. filtr 3x3



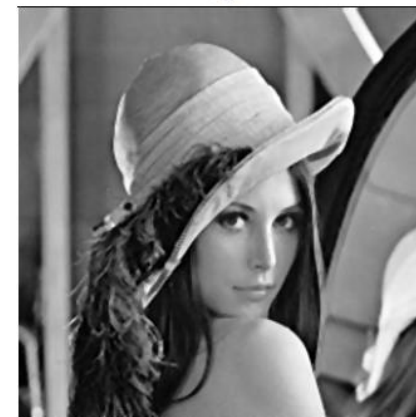
(c)



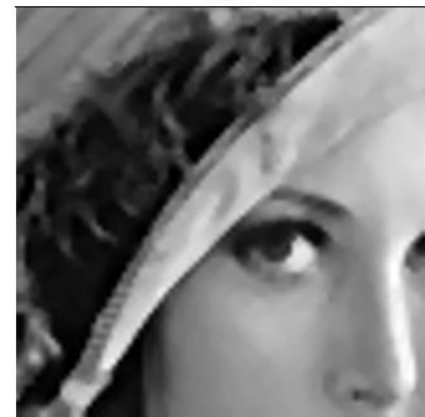
(d)

Př. Impulzní šum („sůl a pepř“)

Mediánový filtr



(e)



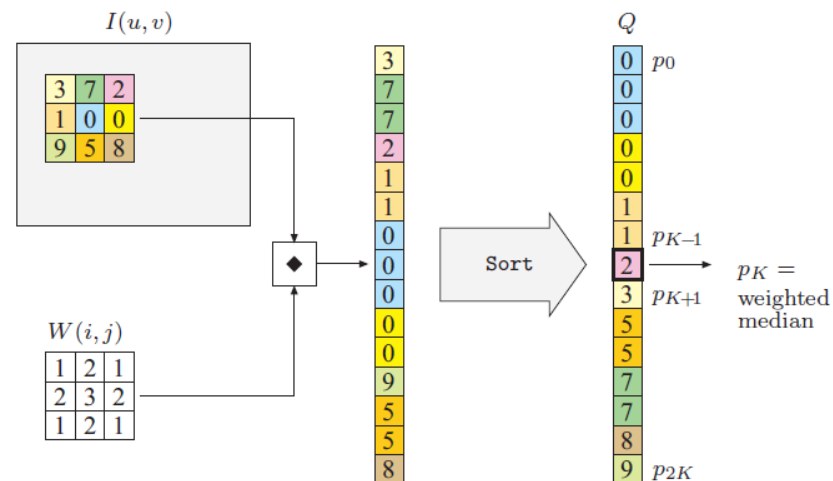
(f)



# Filtrace v prostorové oblasti

- Vážený mediánový filtr

- Jednotlivým pozicím ve filtru jsou přiřazeny váhy, tj. důležitosti jednotlivých hodnot
- Většinou váhy blízko uvažovaného pixelu jsou větší, než vzdálenější pixely
- Váhová matice  $W(i, j) \in \mathbb{N}$
- Výpočet probíhá tak, že každá hodnota obrazu je nakopírována do pomocného vektoru tolikrát, jaké je číslo na odpovídající pozici ve váhové matici.
- Teprve poté je vypočten medián vektoru.





# Filtrace v prostorové oblasti

- Hraniční oblasti
  - Problém: Jak počítat hodnoty na okrajích obrázku
  - Několik způsobů řešení:
    - Okrajové hodnoty doplnit nějakou konstantou, např. 0 = černá
    - Okrajové hodnoty doplnit hodnotami nejbližšího pixelu obrázku
    - Použít zrcadlově obrácený obraz
    - Periodicky rozšířit obraz (výhodné, pokud pracujeme ve frekvenční oblasti)



(a)



(b)



(c)



(d)

# Fourierova transformace

- Fourierova analýza slouží ke zjištění, z jakých harmonických funkcí se daná funkce skládá.
- Harmonický signál:  $y(x) = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ , kde
  - $A$  je **amplituda**
  - $\omega$  je kruhová **frekvence**,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  je perioda
  - $\varphi$  je **fázový posun** (fáze)
- Výsledkem Fourierovy analýzy je seznam (tabulka) amplitud a fázových posunů pro jednotlivé frekvence.
- Grafu závislosti amplitudy na frekvenci se říká **amplitudové spektrum**.
- Grafu závislosti fázového posunu na frekvenci se říká **fázové spektrum**.

# Fourierova transformace

- Fourierova **řada** se používá pro vyjádření **periodického** signálu.
- Fourierova **transformace** (Fourierův integrál) se používá pro vyjádření **neperiodického** signálu.
- Dále je se rozlišuje, zda pracujeme se **spojitou** nebo **diskrétní funkcí** (posloupností čísel).

# Fourierova transformace

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \dots$$

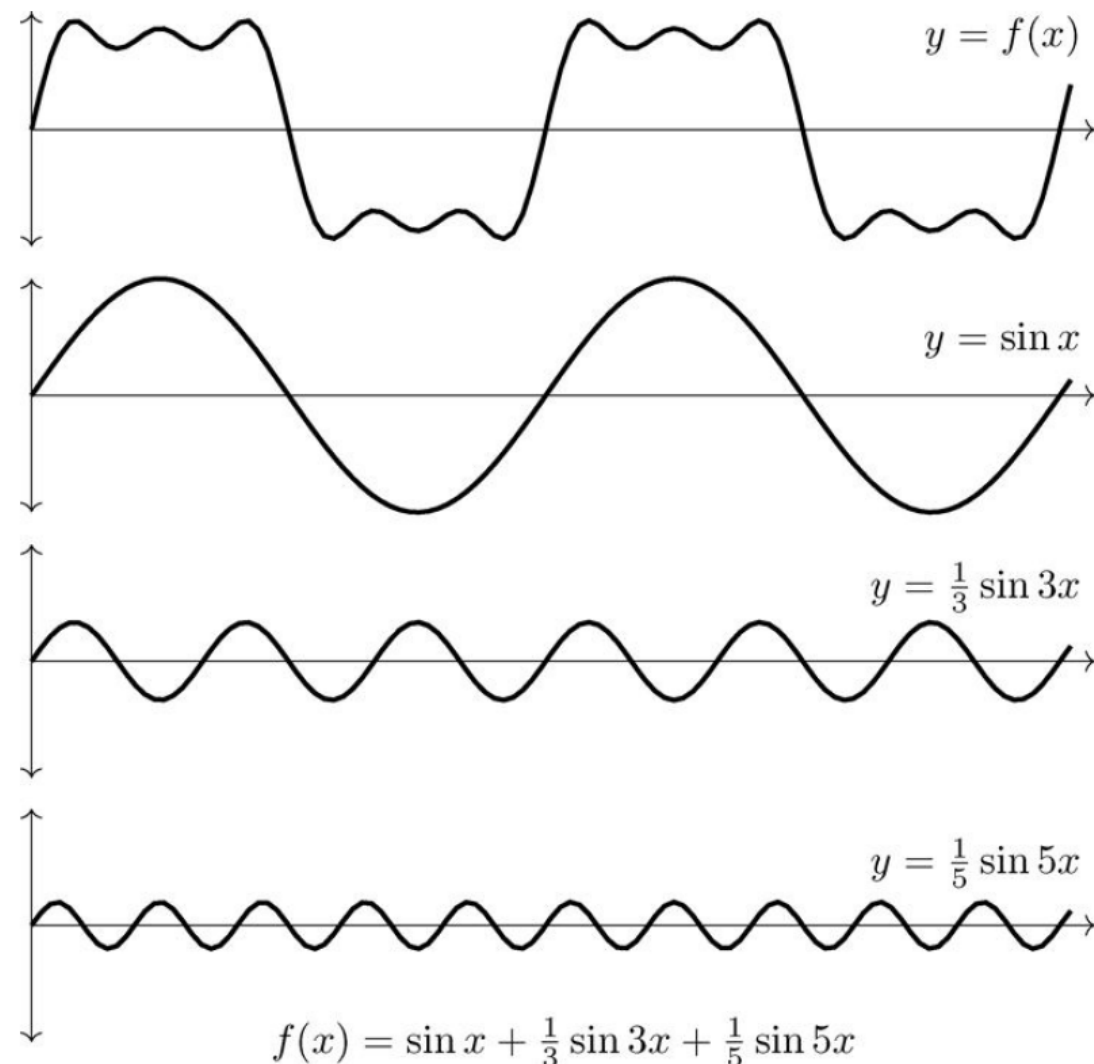
- Rozvoj Fourierovy řady (s periodou  $2T$ )

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) dx$$

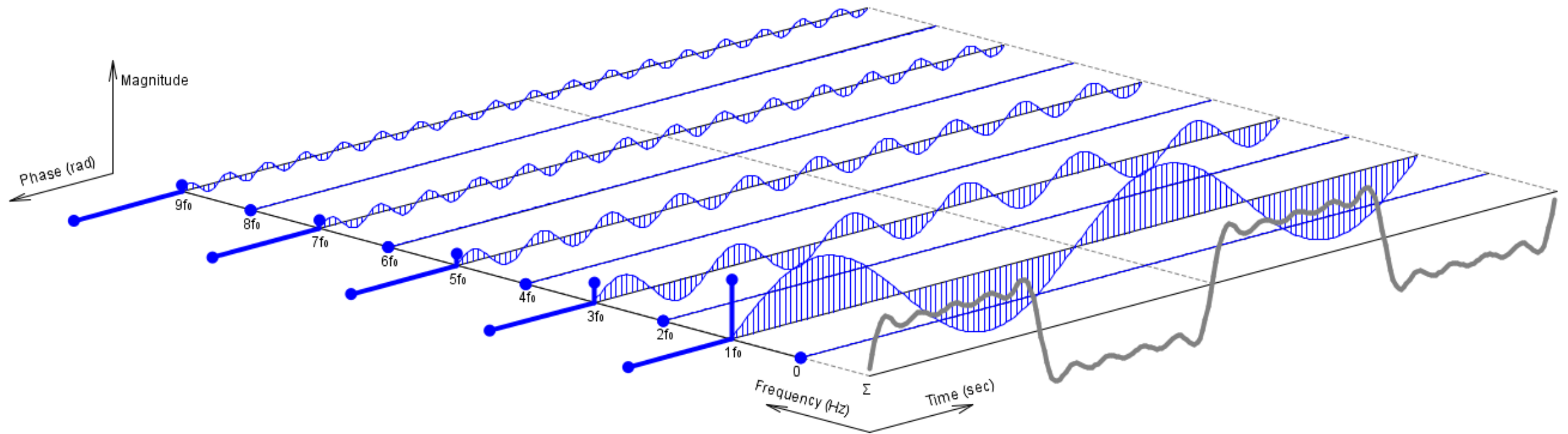
$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



# Fourierova transformace

- Rozklad 1D funkce na jednotlivé harmonické složky



<http://www.tomasboril.cz/fourierseries3d/cz/>

# Fourierova transformace

- Rozvoj **Fourierovy řady (periodické funkce)** může zapsat i v komplexní podobě

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{in\pi x}{T}\right) \quad \text{kde} \quad c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \exp\left(\frac{-in\pi x}{T}\right) dx$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x = \cos \omega x \Big|_{\omega=1} = \\ &= \frac{1}{2} \cos \omega x + i \frac{1}{2} \sin \omega x + \frac{1}{2} \cos \omega x - i \frac{1}{2} \sin \omega x = \\ &\quad \underbrace{\frac{1}{2} e^{i\omega x}}_{\frac{1}{2} e^{i\omega x}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-i\omega x}}_{\frac{1}{2} e^{-i\omega x}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n \in \{1, -1\}} \frac{1}{2} e^{in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \text{ kde}$$

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n=1 \\ -1 & \text{pro } n=-1 \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

# Fourierova transformace

- Pokud je funkce **neperiodická**, potom  $T \rightarrow \infty$ , jedná se o **Fourierovu transformaci**, a dostaneme vztahy

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x] d\omega$$

kde

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx,$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx.$$

(složkový, trigonometrický tvar)

# Fourierova transformace

- **Fourierova transformace pro neperiodickou funkci** lze také vyjádřit v komplexní podobě:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

- Využití komplexních čísel je výhodné z důvodu kompaktnějšího zápisu a snazších matematických operací.



# Fourierova transformace

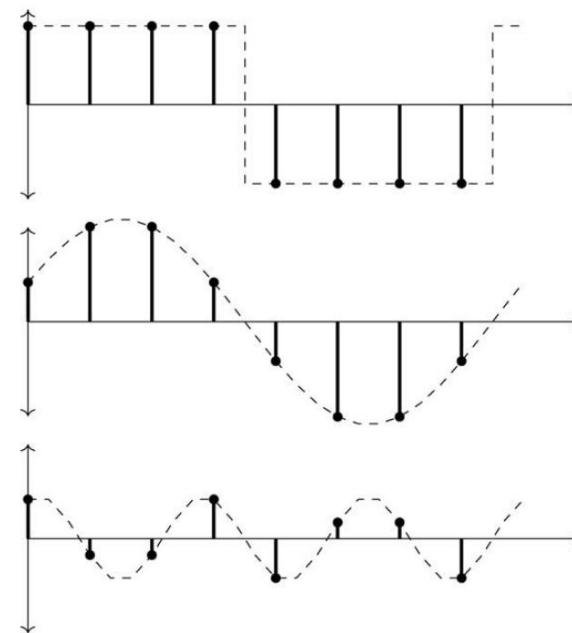
- Protože nás zajímá využití FT při zpracování obrazu, který je reprezentován maticí a je tedy diskrétní, omezíme se na **diskrétní Fourierovu transformaci (DFT)**
- Pro diskrétní **funkce jedné proměnné** (např. časové řady) je DFT dána těmito vztahy:

$$F_u = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \exp \left[ -2\pi i \frac{xu}{N} \right] f_x$$

DFT

$$x_u = \sum_{x=0}^{N-1} \exp \left[ 2\pi i \frac{xu}{N} \right] F_u$$

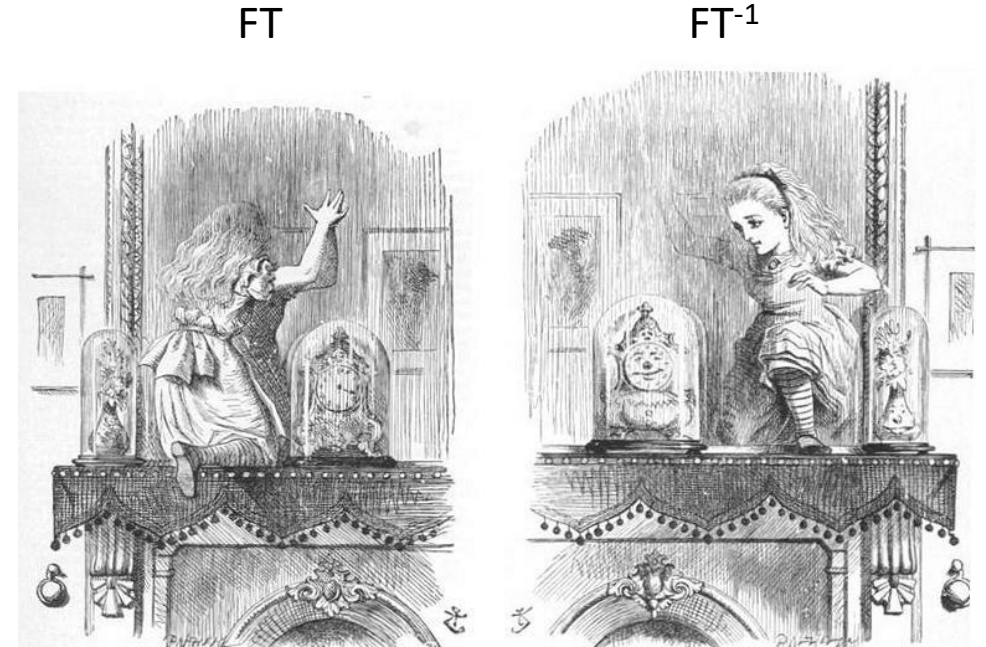
inverzní DFT (IDFT)



# Fourierova transformace

- FT 2D obrázku (spektrum obrázku)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right]$$

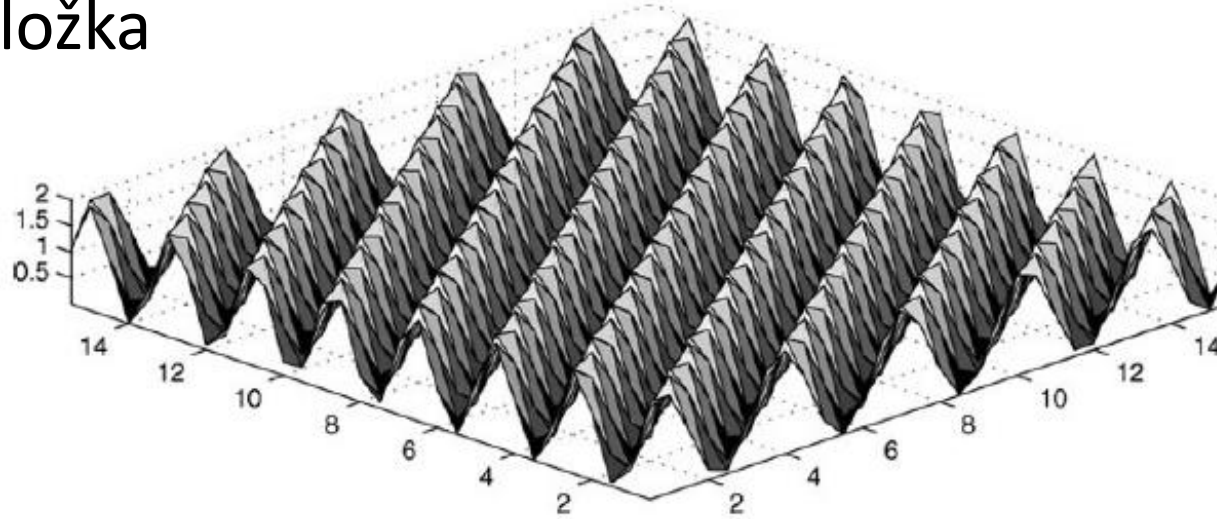


- Zpětná FT 2D obrázku (rekonstrukce obrázku ze spektra)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right]$$

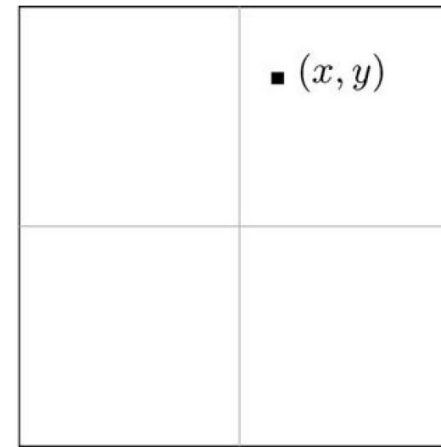
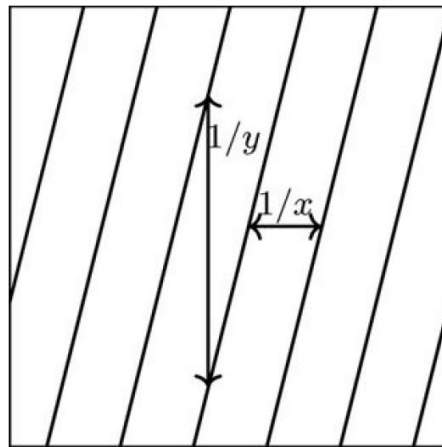
# Fourierova transformace

- 2D harmonická složka



$$z = a \sin(bx + cy)$$

- Pozice ve spektru



# Fourierova transformace

- Vlastnosti Fourierovy transformace

- Linearita:  $F(f+g) = F(f) + F(g)$  - výhodné pro odstranění známého šumu
- Konvoluce:  $F(M*S) = F(M) \cdot F(S)$  - výhodné pro filtraci
- Posun: Spektrum se posune do středu, pokud pronásobíme obraz maticí  $\{(-1)^{x+y}\}$

- Vizualizace spektra

- Snížení vlivu stejnosměrné složky, např.  $\log(1 + |F(u,v)|)$

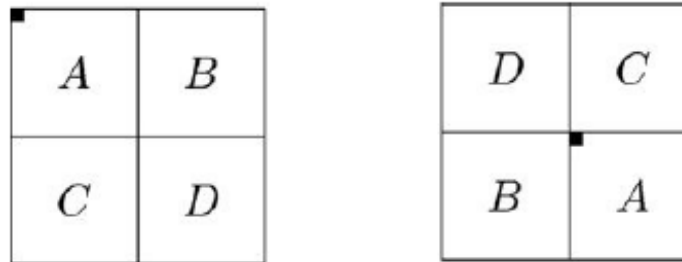
- FFT (Fast Fourier Transform)

- Efektivní implementace DFT ( $2^{2n} \rightarrow n2^n$  operací násobení)
- Postavena na rekurzivním dělení dat  $\rightarrow$  výhodné pro matice o rozměrech  $2^k$

# Fourierova transformace

- Posun spektra

- Po FT je standardně stejnosměrná složka v levém horním rohu matice spektra
- Okolí stejnosměrné složky odpovídá složkám s nižší frekvencí, která se zvyšuje jak se od levého horního rohu vzdalujeme
- Pro snazší interpretaci je výhodné provést posun spektra tak, aby stejnosměrná složka byla uprostřed a okolní hodnoty FT odpovídající složkám o nižších frekvencích. Větší vzdálenosti od středu odpovídají složkám o vyšších frekvencích.
- Posun spektra využívá skutečnosti, že pokud obrázek pronásobíme stejně velkou maticí ve tvaru šachovnice s hodnotami +1 a -1, dojde k žádanému posunu.



# Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

- Příklad 1: Mějme obrázek o rozměru 8x8 pixelů, který obsahuje samé jedničky (jednotvá plocha)

```
a1 =  
  
  1  1  1  1  1  1  1  1  
  1  1  1  1  1  1  1  1  
  1  1  1  1  1  1  1  1  
  1  1  1  1  1  1  1  1  
  1  1  1  1  1  1  1  1  
  1  1  1  1  1  1  1  1  
  1  1  1  1  1  1  1  1  
  1  1  1  1  1  1  1  1  
  
ans =  
  
64  0  0  0  0  0  0  0  
  0  0  0  0  0  0  0  0  
  0  0  0  0  0  0  0  0  
  0  0  0  0  0  0  0  0  
  0  0  0  0  0  0  0  0  
  0  0  0  0  0  0  0  0  
  0  0  0  0  0  0  0  0  
  0  0  0  0  0  0  0  0
```

obrázek jako matice

spektrum obrázku  
(neposunuté)

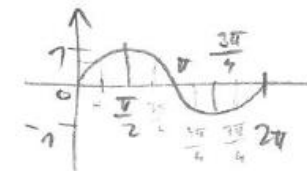
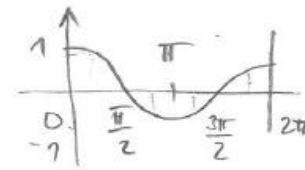
- Pokud dosadíme do vztahu pro  $F(u,v)$  za  $u=0$  a  $v=0$ , vypadne exponenciální člen ( $e^0=1$ ) a zůstane součet prvků matice, tj. hodnota 64.
- Pokud dosadíme do vztahu pro  $F(u,v)$  např. za  $u=0$  a  $v=1$ , výpočtem zjistíme, že se vyruší a bude platit, že  $F(0,1)=1$ .
- $F(u,v)=0$  dostaneme pro všechny hodnoty  $u$  a  $v$  vyjma prvního případu, kdy  $u=0$  a  $v=0$ .

# Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

$$\begin{aligned}
 F(0,1) &= \sum_x \sum_y f(x,y) \cdot e^{-2\pi i \cdot \frac{y \cdot x}{8}} = \\
 &= \sum_x \sum_y e^{-2\pi i \cdot \frac{y}{8}} = 8 \cdot \sum_y e^{-2\pi i \cdot \frac{y}{8}} = \\
 &= 8 \cdot \sum_y e^{-\frac{\pi y}{4} \cdot i} = 8 \cdot \sum_{y=0}^7 \cos \frac{\pi y}{4} - i \cdot \sin \frac{\pi y}{4} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 8 \cdot \left( \cos 0 - i \cdot \sin 0 + \right. \\
 &\quad + \cos \frac{\pi}{4} - i \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \\
 &\quad + \cos \frac{\pi}{2} - i \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \\
 &\quad + \cos \frac{3\pi}{4} - i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} + \\
 &\quad + \cos \pi - i \cdot \sin \pi + \\
 &\quad + \cos \frac{5\pi}{4} - i \cdot \sin \frac{5\pi}{4} + \\
 &\quad + \cos \frac{3\pi}{2} - i \cdot \sin \frac{3\pi}{2} + \\
 &\quad \left. + \cos \frac{7\pi}{4} - i \cdot \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 8 \cdot (1 - i - 1 + i) \\
 &= \underline{\underline{0}}
 \end{aligned}$$



# Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

- Příklad 2: Mějme obrázek o rozměru 8x8 pixelů, který obsahuje následující hodnoty:

a2 =

100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200
100	200	100	200	100	200	100	200

obrázek jako matice

af2 =

9600	0	0	0	-3200	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

spektrum obrázku  
(neposunuté)

- Pokud dosadíme do vztahu pro  $F(u,v)$  za  $u=0$  a  $v=0$ , vypadne exponenciální člen ( $e^0=1$ ) a zůstane dvojnásobný součet prvků matice, tj. hodnota 9600.
    - Pokud dosadíme do vztahu pro  $F(u,v)$  např. za  $u=4$  a  $v=0$ , výpočtem zjistíme, že  $F(0,1)=-3200$ .
    - Pro ostatní hodnoty  $u$  a  $v$  dostaneme  $F(u,v)=0$ .
    - Matice  $F(u,v)$  obsahuje v tomto případě reálná čísla. To však nemusí být vždy pravda. V tom případě je  $F(u,v)$  matice komplexních čísel a vyjadřujeme ji dvěma maticemi: maticí amplitud a maticí fází.



# Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 2 - pokračování

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right]$$

$M=8, N=8$

$$u=0, v=4:$$

$$F(0, 4) = \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \cdot \exp \left[ -2\pi i \cdot \frac{y \cdot 4}{8} \right] =$$

$$= \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \cdot e^{-\pi i \cdot y} =$$

$$= \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f \cdot \left( \underbrace{\cos(\pi y)}_{\{1, -1, 1, -1, \dots\}} - j \underbrace{\sin(\pi y)}_{=0} \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right| \begin{array}{c} \pi \\ 2\pi \end{array} = \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \cdot (-1)^y =$$

$$= \sum_{y=0}^7 \sum_{x=0}^7 f(x, y) \cdot (-1)^y = \sum_{y=0}^7 (-1)^y \cdot \sum_{x=0}^7 f(x, y) =$$

$$= \sum_{x=0}^7 f(x, 0) - \sum_{x=0}^7 f(x, 1) + \sum_{x=0}^7 f(x, 2) - \sum_{x=0}^7 f(x, 3) + \dots - \sum_{x=0}^7 f(x, 7)$$

↑  
sloupce rovně

$$= \underbrace{800 - 1600 + 800 - 1600 + \dots}_{-800} =$$

$$= \underline{\underline{-3200}}$$

$$\Lambda = 3200$$

$$\varphi = -\pi$$

# Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT
  - Příklad 2 – pokračování: Pokud dosadíme do vztahu pro zpětnou FT dostaneme
    - $F(x,y) = \dots = 150 - 50 \cdot \cos(\pi y) = 150 - 50 \cdot (-1)^y$
    - Pro liché hodnoty  $y$  dostaneme  $f(x,y) = 100$  a pro sudé hodnoty  $f(x,y) = 200$
    - Vztah je nezávislý na  $x$ , tj. pro každé  $x$  budou platit hodnoty výše.
    - Dostáváme tedy původní matici hodnot (obrázek).

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{M \cdot N} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right) \right] \\ &= \left| \begin{array}{l} F(0,0) = 9600 \quad \text{jinak } F(u,v) = 0 \\ F(0,4) = -3200 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{8 \cdot 8} \cdot \left( F(0,0) \cdot \underbrace{\exp[2\pi i \cdot 0]}_{=1} + F(0,4) \cdot \exp \left[ 2\pi i \cdot \left( 0 + \frac{4y}{8} \right) \right] \right) = \\ &= \frac{1}{64} (9600 - 3200 \cdot e^{i\pi y}) = \\ &= 150 - 50 \cdot e^{i\pi y} = \\ &= 150 - 50 (\underbrace{\cos \pi y}_{=(-1)^y} + \underbrace{i \sin \pi y}_{=0}) = \\ &= \underline{\underline{150 - 50 \cdot (-1)^y}} \\ &\quad y = 0, 2, 4, 6 : f(x,y) = 150 - 50 = 100 \\ &\quad y = 1, 3, 5, 7 : f(x,y) = 150 + 50 = 200 \end{aligned}$$

# Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

- Příklad 3: Mějme obrázek jednotkového skoku, tj. matici:

a3 =

```
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1
```

obrázek jako matice

af3 =

Columns 1 through 4

```
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i -8.0000 - 3.3137i 0.0000 + 0.0000i -8.0000 -19.3137i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
```

Columns 5 through 8

```
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
32.0000 + 0.0000i -8.0000 +19.3137i 0.0000 + 0.0000i -8.0000 + 3.3137i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
```

spektrum obrázku (tentokrát už obsahuje komplexní čísla a je posunuté)

# Fourierova transformace

- Jednoduché příklady DFT

- Příklad 3: FT obrázku s posunem stejnosměrné složky na střed (shift):

ans =

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	8.6591	0	20.9050	32.0000	20.9050	0	8.6591
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

amplitudové spektrum (posunuté)

ans =

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	-157.5000	0	-112.5000	0	112.5000	0	157.5000
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

fázové spektrum (ve stupních, posunuté)

ans =

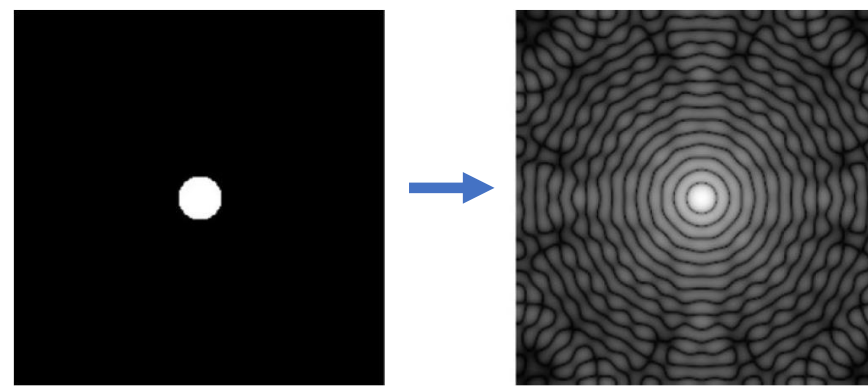
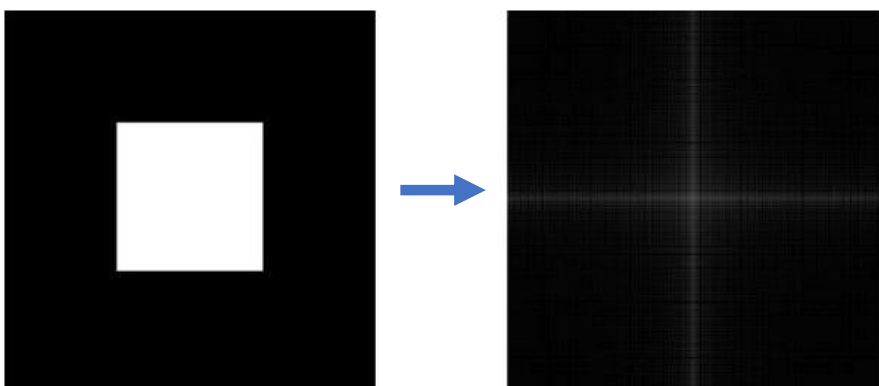
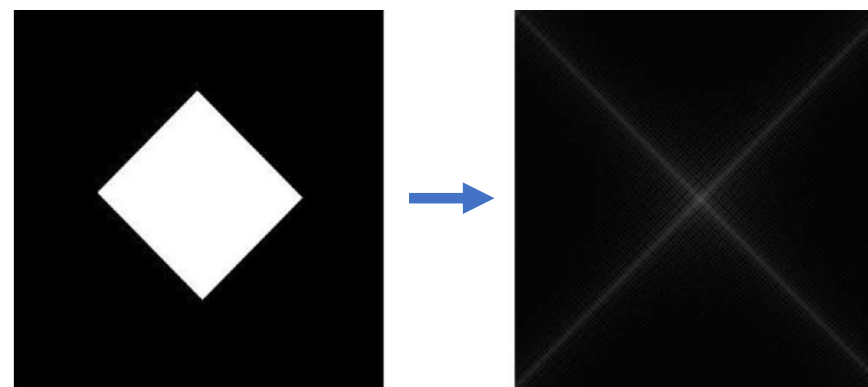
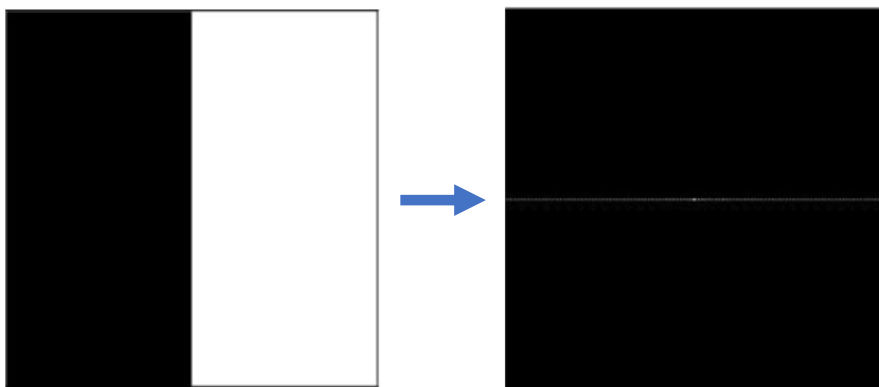
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	9	0	21	32	21	0	9
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

(posunuté) amplitudové spektrum obrázku po zaokrouhlení (pro snazší interpretaci)  
existuje více prostorových vln, teoreticky nekonečně mnoho (díky ostrému přechodu hodnot)

# Fourierova transformace

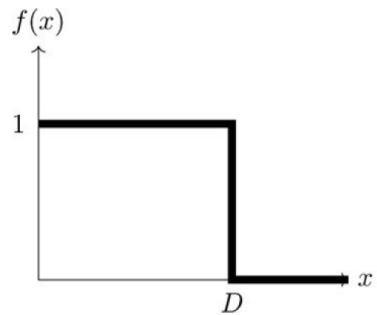
- Jednoduché příklady DFT

- Příklady umělých obrázků (všechna spektra jsou již po posunu)

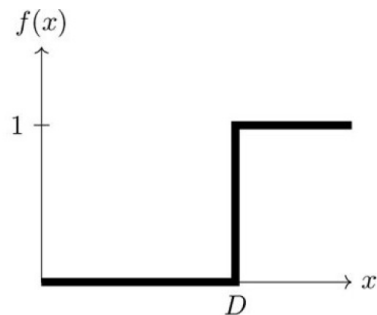


# Filtrace ve frekvenční oblasti

- Ideální filtr
  - Low-pass filter (dolnofrekvenční propust')



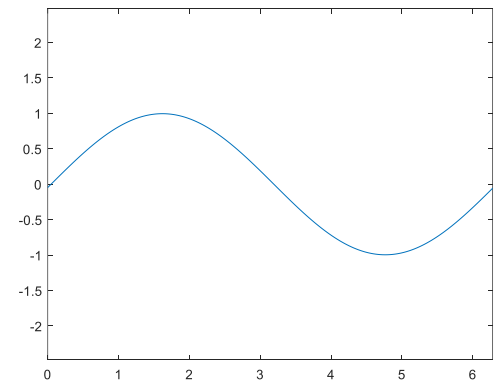
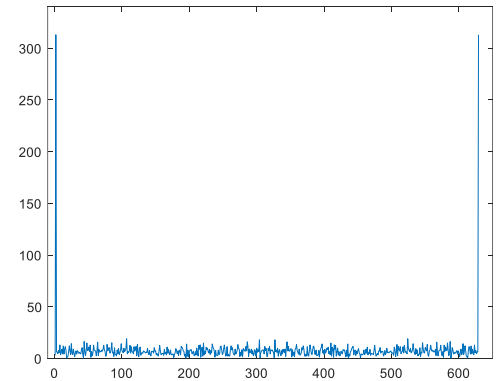
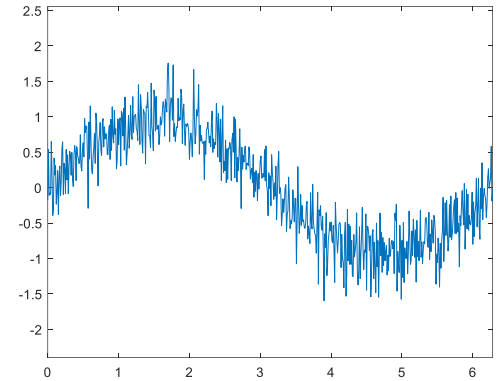
- High-pass filter (hornofrekvenční propust')



stejnoseměrná složka

3.5610	0	0
315.3958	1	315.3958
4.6472	0	0
5.6448	0	0
4.6713	0	0
5.8070	0	0
9.1820	0	0
9.6404	0	0
12.6469	0	0
5.3635	0	0
.	.	.
.	.	.
.	.	.
4.8689	0	0
7.6546	0	0
5.3635	0	0
12.6469	0	0
9.6404	0	0
9.1820	0	0
5.8070	0	0
4.6713	0	0
5.6448	0	0
4.6472	0	0
315.3958	1	315.3958

$\times =$

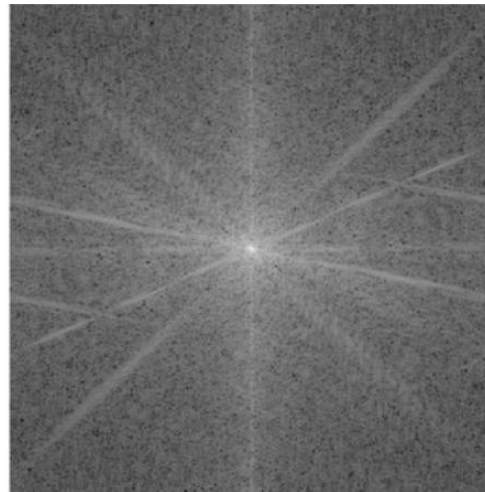


# Filtrace ve frekvenční oblasti

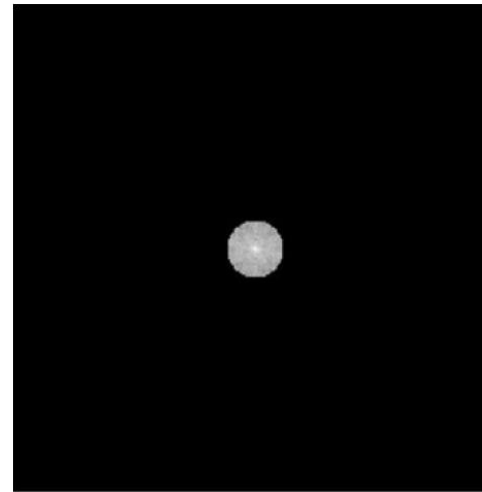
- Ideální filtr – Low-pass filter (dolnofrekvenční propust')



(amplitudové) spektrum  
původního obrázku



dolnofrekvenční ideální  
propust',  $D = 15$

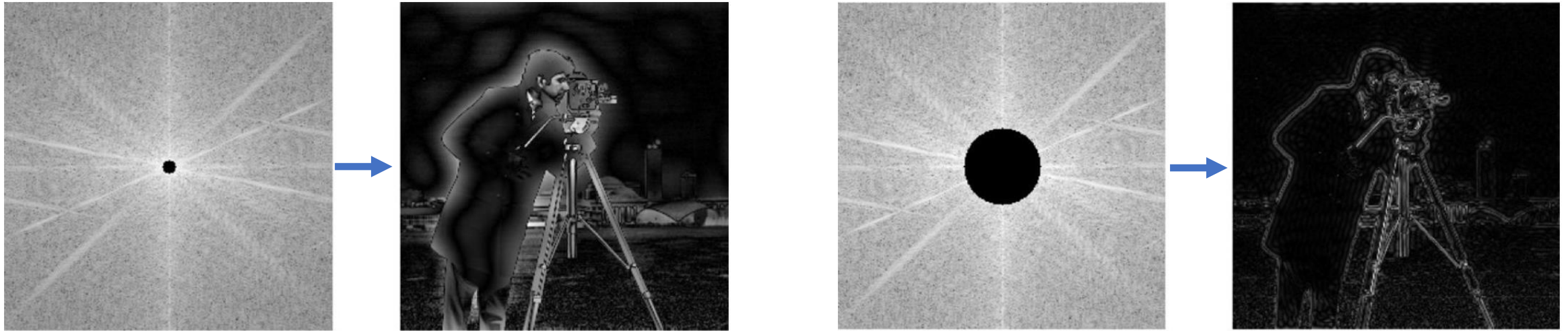


zpětná transformace  
z vyfiltrovaného spektra



# Filtrace ve frekvenční oblasti

- Ideální filtr – High-pass filter (hornofrekvenční propust')





# Filtrace ve frekvenční oblasti

- Butterworthův filtr

- Ideální filtr – snadná SW implementace, artefakty zvlnění obrazu
- BF – postupný přechod → snížení zvlnění obrazu

dolnofrekvenční propuť

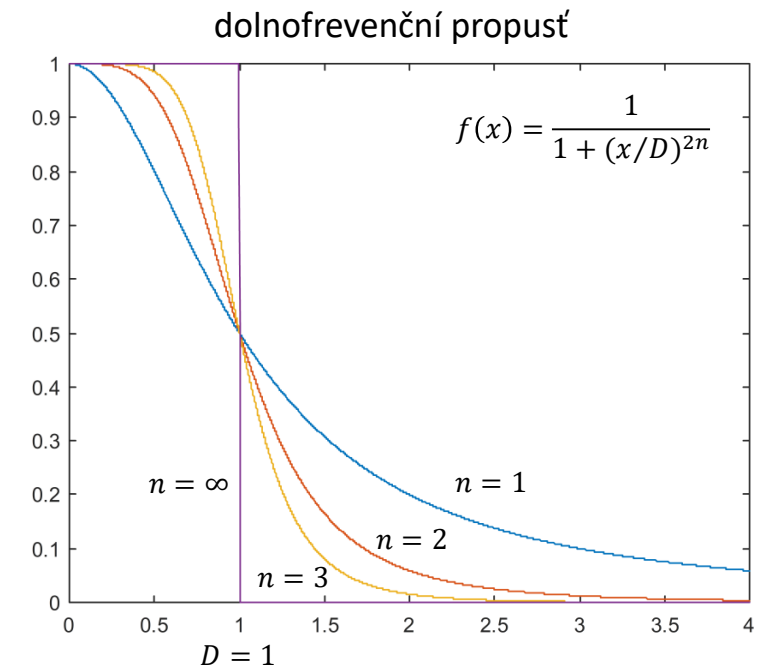
$$f(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{D}\right)^{2n}}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 + y^2}{D^2}\right)^n}$$

hornofrekvenční propuť

$$f(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D}{x}\right)^{2n}}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D^2}{x^2 + y^2}\right)^n}$$

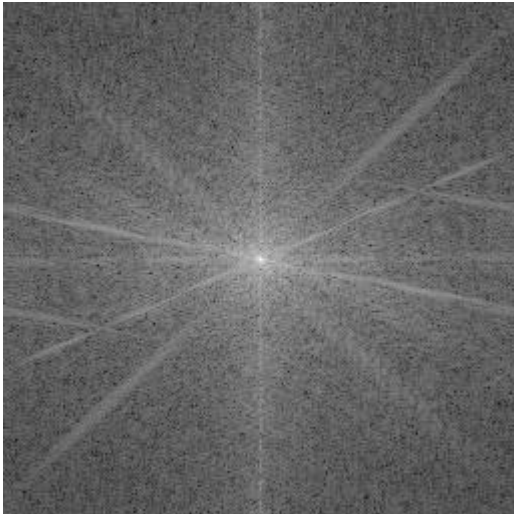


$n$  je řád filtru,  $D$  je místo přechodu přes 0,5 (odpovídá hraniční frekvenci)

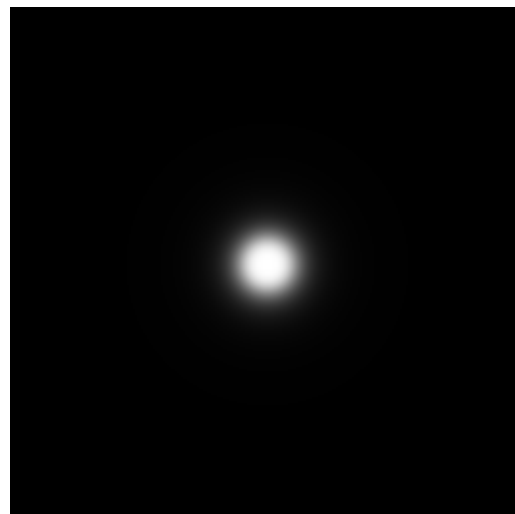
# Filtrace ve frekvenční oblasti

- Butterworthův filtr

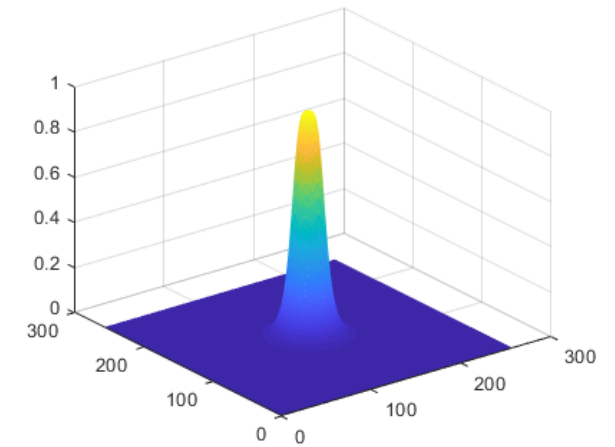
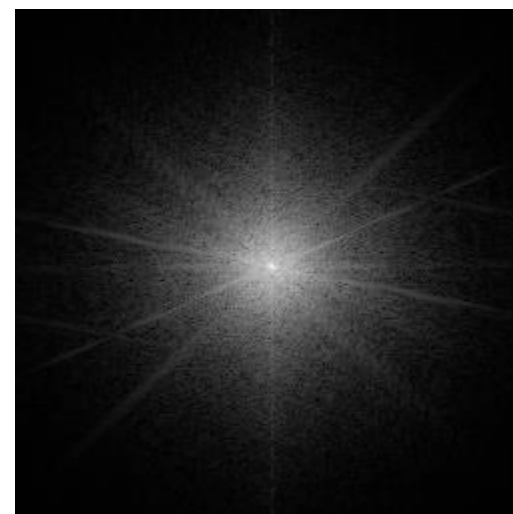
(amplitudové) spektrum  
původního obrázku



dolnofrekvenční propust'  
 $D = 15, n = 2$



=

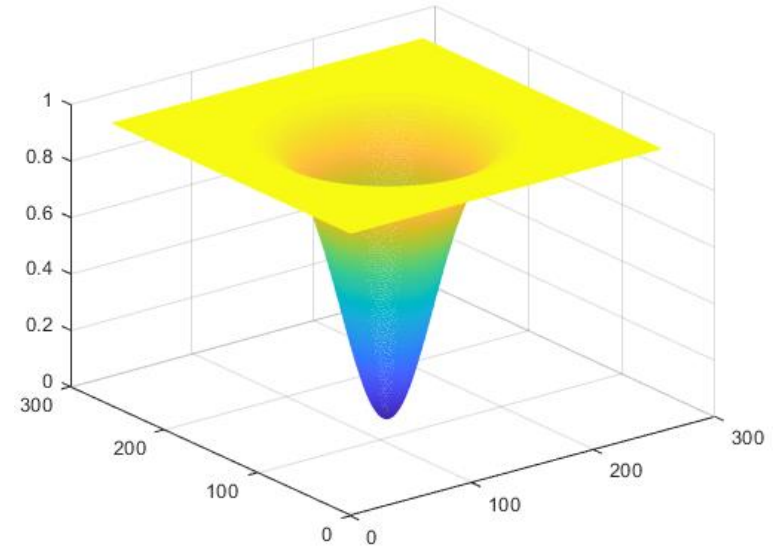
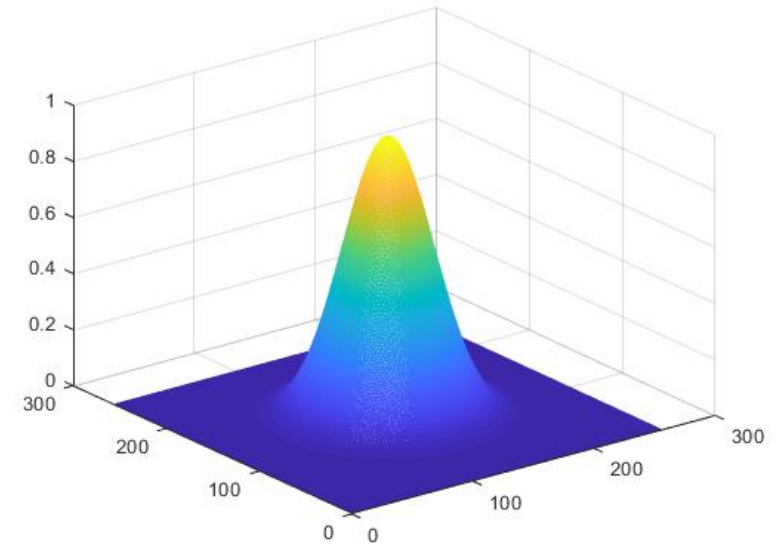


# Filtrace ve frekvenční oblasti

- Gaussův filtr
  - „Hladký“ filtr
  - Tvar Gaussovy funkce (pro 2D tvar „klobouku“)

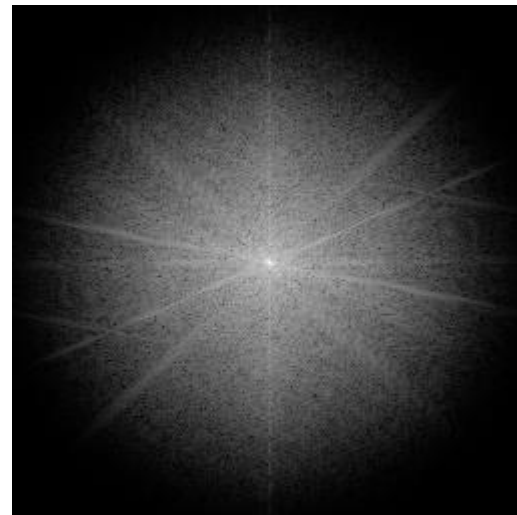
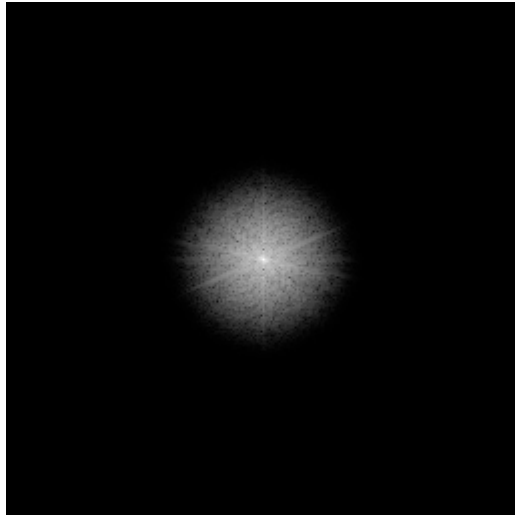
$$f(x, y) = A \exp \left( - \left( \frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right)$$

- FT obrázku po prvcích pronásobíme hodnotami filtru a na výsledek aplikujeme zpětnou FT



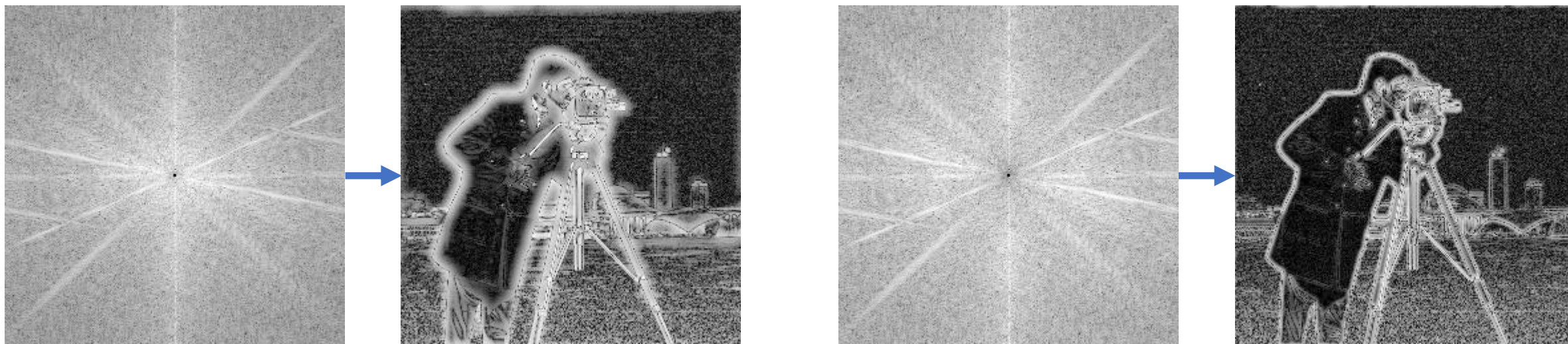
# Filtrace ve frekvenční oblasti

- Gaussův filtr – low-pass filtr



# Filtrace ve frekvenční oblasti

- Gaussův filtr – high-pass filtr



# Literatura

- McAndrew A., Computational Introduction to Digital Image Processing, CRC Press, 2. vydání, 2016
- Sundararajan D., Digital Image Processing: A Signal Processing and Algorithmic Approach, Springer, 2017
- Birchfield S., Image Processing and Analysis, Cengage Learning, 2016
- Acharya T., Ray A. K., Image Processing: Principles and Applications, Wiley, 2005
- Burger W., Burge M. J., Principles of Digital Image Processing: Fundamental Techniques, Springer-Verlag, 2009