

Основы электротехники

Отчёт по лабораторной работе №2

Исследование переходных процессов в электрических цепях

Группа *P3331*
Вариант *9*

Выполнил: *Дворкин Борис Александрович*

Дата сдачи отчёта: *07.10.2024*

Дата защиты: *09.10.2024*

Контрольный срок защиты: 09.10.2024

Количество баллов:

Содержание

Цель работы	2
Часть 1	2
1.1 Исследование RC-цепи	2
1.1.1 Схема исследуемой цепи	2
1.1.2 Расчётные формулы и расчёты	2
1.1.3 График переходного процесса в RC-цепи	3
1.1.4 Таблица результатов 4.2	4
1.2 Исследование RL-цепи	5
1.2.1 Схема исследуемой цепи	5
1.2.2 Расчётные формулы и расчёты	5
1.2.3 График переходного процесса в RL-цепи	6
1.2.4 Таблица результатов 4.3	7
1.3 Выводы по первой части	7
Часть 2	8
2.1 Введение	8
2.2 Исследование апериодического процесса	9
2.2.1 Схема исследуемой цепи	9
2.2.2 Расчётные формулы и расчёты	9
2.2.3 График апериодического переходного процесса	10
2.2.4 Таблица результатов 4.4	11
2.3 Исследование колебательного процесса	12
2.3.1 Схема исследуемой цепи	12
2.3.2 Расчётные формулы и расчёты	12
2.3.3 График колебательного переходного процесса	13
2.3.4 Таблица результатов 4.5	14
2.4 Выводы по второй части	14

Цель работы

Исследование переходных процессов в электрических цепях первого и второго порядков с источником постоянного и переменного напряжения.

Часть 1

1.1 Исследование RC-цепи

1.1.1 Схема исследуемой цепи

На рисунке 1.1 представлена схема замещения генератора прямоугольного напряжения с резистивной и ёмкостной нагрузкой, созданная в приложении LTspice.

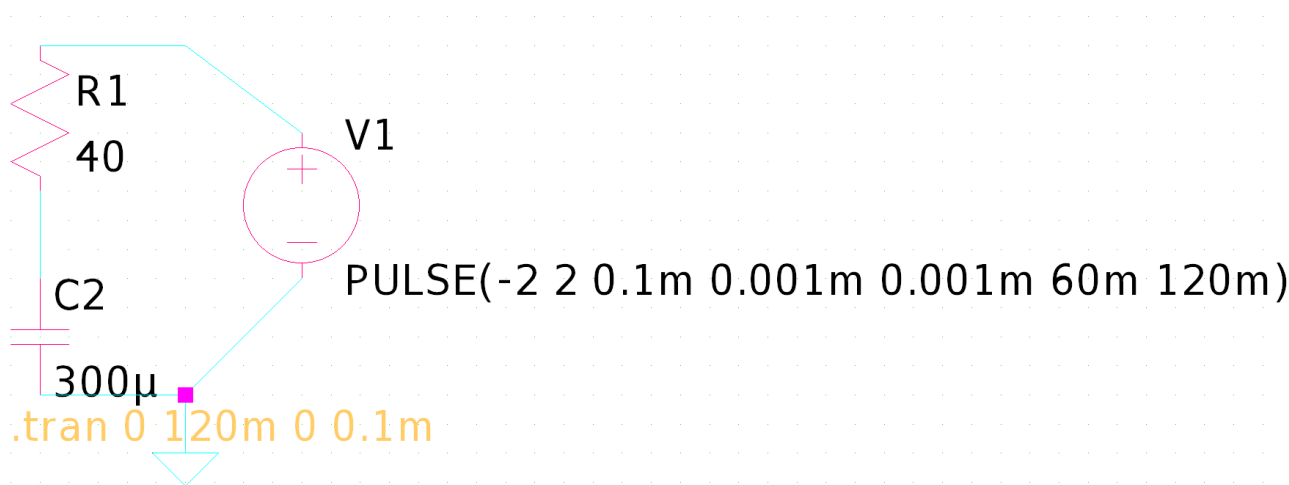


Рис. 1: Схема замещения RC-цепи в LTspice.

1.1.2 Расчётные формулы и расчёты

1. Постоянная времени τ в RC-цепи рассчитывается по формуле:

$$\tau = R \cdot C$$

где $R = 40 \Omega$ и $C = 300 \mu F$.

Подставим значения:

$$\tau = 40 \Omega \cdot 300 \cdot 10^{-6} F \cdot 10^{-3} = 12 \text{ мс}$$

2. Расчётные значения тока и напряжения на конденсаторе после коммутации, а также установившиеся значения напряжения на конденсаторе и тока в цепи для RC-цепи рассчитываются по следующим формулам:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} U_C(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} E(t) = -2 \text{ В}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} I(t) = \frac{E + U_C}{R} = \frac{2 \text{ В} + 2 \text{ В}}{40 \Omega} = 100 \text{ мА}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} I(t) = 0 \text{ мА}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_C(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} E(t) = 2 \text{ В}$$

3. Значение времени переходного процесса $t_{0.5}$ определяется как время, за которое ток достигает *половины* своего амплитудного значения. Постоянная времени τ определяется как:

$$\tau = \frac{t_{0.5}}{\ln 2}$$

Вычисление постоянной времени τ :

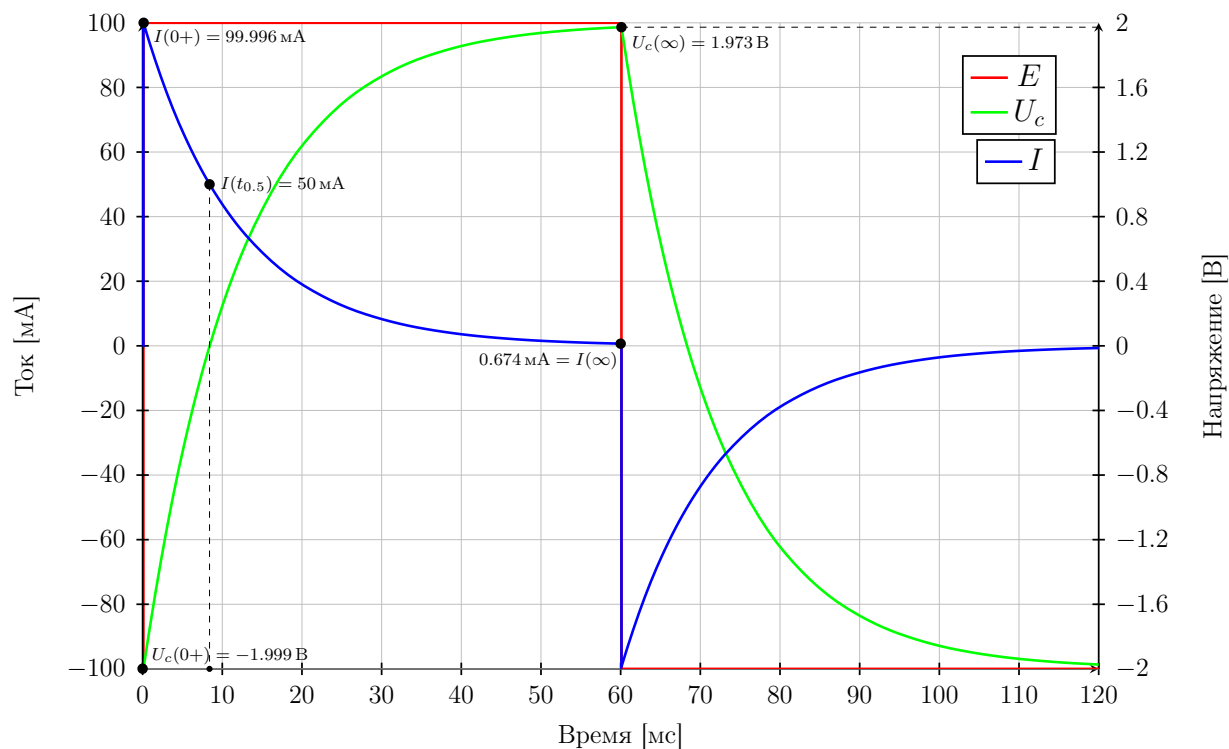
$$\tau = \frac{t_{0.5I}}{\ln 2} = \frac{8.418554 \text{ мс}}{0.69314718} = 12.144 \text{ мс}$$

1.1.3 График переходного процесса в RC-цепи

На графике показан переходной процесс в RC-цепи. Красная линия — это ЭДС источника E , зелёная — напряжение на конденсаторе U_C , а синяя — ток I через цепь.

1. В момент коммутации напряжение на конденсаторе остаётся на уровне $U_C(0^+) = -1.999 \text{ В}$, так как напряжение на конденсаторе не может измениться мгновенно.
2. Ток через цепь $I(0^+)$ сразу после коммутации резко возрастает до $I(0^+) = 99.996 \text{ мА}$, что видно на графике, так как ток в RC-цепи может изменяться мгновенно.
3. Постепенно ток начинает снижаться, а напряжение на конденсаторе увеличивается, стремясь к установившемуся значению.
4. В установившемся режиме $t \rightarrow \infty$, напряжение на конденсаторе достигает $U_C(\infty) = 1.973 \text{ В}$, а ток в цепи $I(\infty) = 0.674 \text{ мА}$, что подтверждается графиком.

Таким образом, график иллюстрирует процесс заряда конденсатора в RC-цепи, где конденсатор препятствует мгновенному изменению напряжения, а сопротивление влияет на скорость затухания переходного процесса.



1.1.4 Таблица результатов 4.2

Таблица 4.2 содержит экспериментальные и расчётные результаты длительности переходного процесса в RC-цепи, а также тока и напряжения в момент коммутации и в установившемся режиме.

R [Ом]	C [мкФ]	Тип данных	$I(0+)$ [мА]	$I(\infty)$ [мА]	$U_C(0+)$ [В]	$U_C(\infty)$ [В]	τ [мкс]
40	300	эксп.	99.996	0.674	-1.999	1.973	12 144
		расч.	100	0	-2	2	12 000

Таблица 1: Результаты измерений и расчётов для RC-цепи

1.2 Исследование RL-цепи

1.2.1 Схема исследуемой цепи

На рисунке 1.1 представлена схема замещения генератора прямоугольного напряжения с активно-индуктивной нагрузкой, созданная в приложении LTspice.

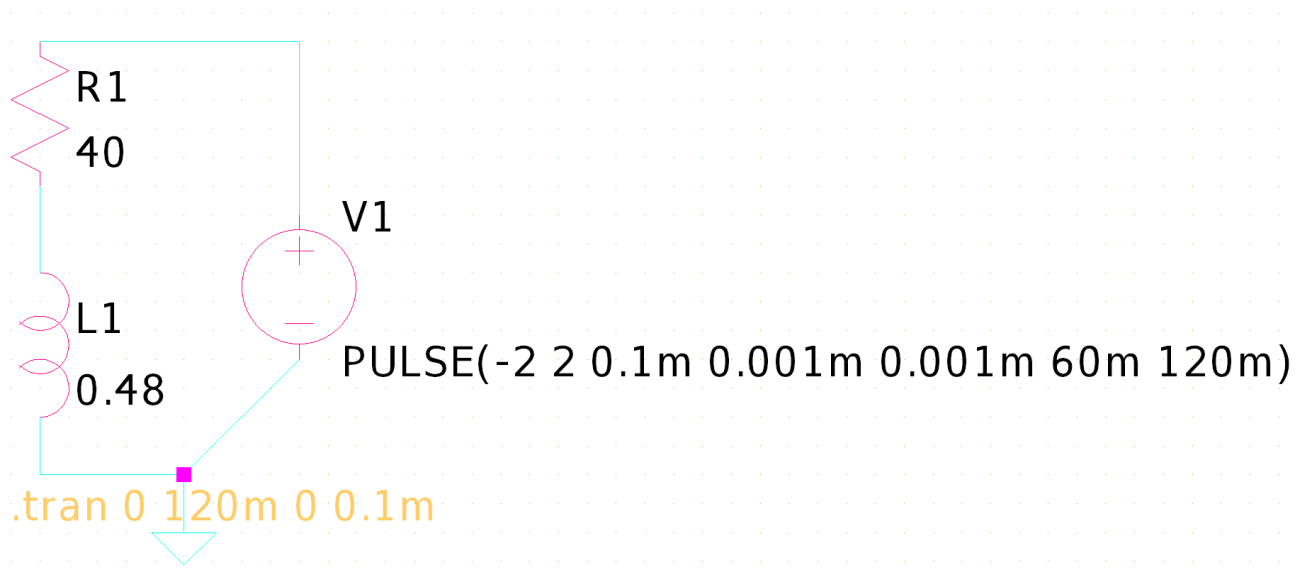


Рис. 2: Схема замещения RL-цепи в LTspice.

1.2.2 Расчётные формулы и расчёты

1. Постоянная времени:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.48}{40} = 0.012 \text{ с} = 12 \text{ мс}$$

2. Ток после коммутации:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} I(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} I(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{E(t)}{R} = \frac{-2}{40} = -0.05 \text{ А} = -50 \text{ мА}$$

3. Напряжение на катушке после коммутации:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} U_L(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} E(t) - \lim_{t \rightarrow 0^-} I(t) \cdot R = 2 - (-0.05 \cdot 40) = 2 + 2 = 4 \text{ В}$$

4. Установившийся ток:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{E}{R} = \frac{2}{40} = 0.05 \text{ А} = 50 \text{ мА}$$

5. Напряжение на катушке в установившемся режиме:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) \cdot R_k = 50 \cdot 0 = 0 \text{ В}$$

Значение времени переходного процесса $t_{0.5}$ определяется как время, за которое напряжение достигает половины своего амплитудного значения. Постоянная времени τ определяется как:

$$\tau = \frac{t_{0.5}}{\ln 2}$$

Вычисление постоянной времени τ :

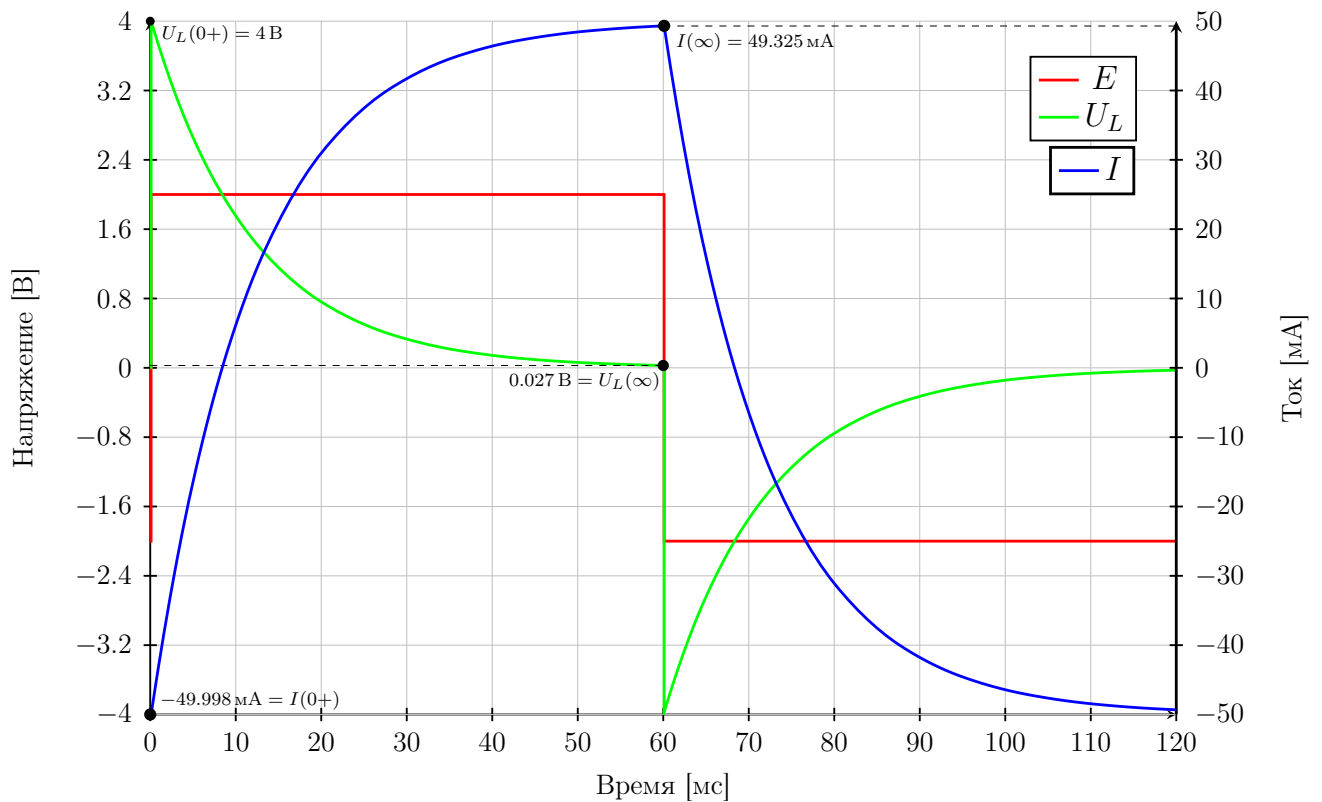
$$\tau = \frac{t_{0.5U_L}}{\ln 2} = \frac{8.418331 \text{ мс}}{0.69314718} = 12.143 \text{ мс}$$

1.2.3 График переходного процесса в RL-цепи

На графике показан переходной процесс в RL-цепи. Красная линия — это ЭДС источника E , зелёная — напряжение на катушке U_L , а синяя — ток I через цепь.

1. В момент коммутации $t = 0$, напряжение на катушке резко возрастает до $U_L(0^+) = 4 \text{ В}$, что подтверждается на графике.
2. Ток в цепи сразу после коммутации составляет $I(0^+) = -49.998 \text{ мА}$, после чего ток начинает постепенно увеличиваться.
3. По мере того как ток через цепь нарастает, напряжение на катушке уменьшается и стремится к нулю. Это происходит за время, характеризующееся постоянной времени RL-цепи.
4. В установившемся режиме $t \rightarrow \infty$, напряжение на катушке стремится к $U_L(\infty) = 0.027 \text{ В}$, а ток достигает значения $I(\infty) = 49.325 \text{ мА}$, что можно увидеть на графике.

Таким образом, график иллюстрирует затухание переходного процесса в RL-цепи, где индуктивность препятствует мгновенному изменению тока, а сопротивление и индуктивность совместно влияют на временные характеристики процесса.



1.2.4 Таблица результатов 4.3

Таблица 4.3 содержит экспериментальные и расчётные результаты длительности переходного процесса в RL-цепи, а также тока и напряжения в момент коммутации и в установившемся режиме.

R [Ом]	L [мГн]	Тип данных	$I(0+)$ [мА]	$I(\infty)$ [мА]	$U_L(0+)$ [В]	$U_L(\infty)$ [В]	τ [мкс]
40	480	эксп.	-49.998	49.325	4	0.027	12 143
		расч.	-50	50	4	0	12 000

Таблица 2: Результаты измерений и расчётов для RC-цепи

1.3 Выводы по первой части

В результате выполнения первой части лабораторной работы я исследовал переходные процессы в RC и RL цепях и выяснил, что постоянная времени τ , равная 12 мс, описывает скорость изменения токов и напряжений. За это время величины изменяются примерно на 63% от максимального значения. Экспоненциальный характер графиков обусловлен свойствами дифференциальных уравнений, описывающих процессы зарядки и разрядки конденсатора, а также роста и спада тока через индуктивность.

Экспериментальные значения τ , полученные аппроксимацией на основе ближайших точек графика, экспортированных из LTSpice, составили 12.144 мс для RC-цепи и 12.143 мс для RL-цепи, что близко к расчётным 12 мс. Отклонение менее 1.2% говорит о высокой точности эксперимента. Кроме того, отклонения

других величин (токов и напряжений в момент коммутации и в установившемся режиме) также оказались небольшими: ток в RC-цепи составил 99.996 мА против расчётных 100 мА, а напряжение на катушке в RL-цепи было 0.027 В против теоретических 0 В в установившемся режиме. Эти результаты показывают, что эксперименты подтвердили теоретические модели с минимальными расхождениями.

При этом я заметил, что в каждом эксперименте ток и напряжение на катушке и конденсаторе соответственно достигают половины своих амплитуд $t_{0.5}$ *не мгновенно*. Это объясняется тем, что конденсатор и катушка сопротивляются резким изменениям: электростатическое поле конденсатора замедляет изменение напряжения на нём, так как при накоплении заряда на обкладках возникает сильное электростатическое поле, которое требует времени для изменения (перемещения зарядов через цепь). Катушка же сопротивляется изменению тока за счёт магнитного поля, которое индуцирует ЭДС (самоиндукция), противодействующую изменению тока (закон Ленца).

Также в будущем можно было бы учесть полное сопротивление (импеданс) катушки и конденсатора для более точного моделирования, но в наших опытах эти эффекты не рассматривались (пренебрегали реактивными сопротивлениями).

Часть 2

2.1 Введение

Чтобы понять, при каком значении сопротивления в цепи будет наблюдаться **колебательный** процесс, а при каком **апериодический**, нужно найти характеристическое сопротивление, которое для цепи второго порядка определяется как:

$$p = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0,48}{300 \cdot 10^{-6}}} = 40 \text{ Ом}$$

На основе этой величины можно понять какой будет процесс: Если $R > p$, то затухания колебаний ускоряются и энергия системы не возвращается в исходное состояние, если $R = 2 \cdot p$ – это критический момент, когда процесс перестаёт быть апериодическим, но возвращается в равновесное состояние без колебаний, а при $R < 2 \cdot p$ энергия будет поочерёдно передаваться между индуктивностью и ёмкостью, вызывая затухающие колебания.

Таким образом, при $R = 4 \cdot p = 4 \cdot 40 = 160 \text{ Ом}$ наблюдается *апериодический* процесс, а при $R = \frac{p}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ Ом}$ – *колебательный*.

2.2 Исследование апериодического процесса

2.2.1 Схема исследуемой цепи

На рисунке 3 представлена схема замещения цепи второго порядка, состоящей из генератора прямоугольного напряжения с резистивной, ёмкостной и индуктивной нагрузками, созданная в приложении LTspice.

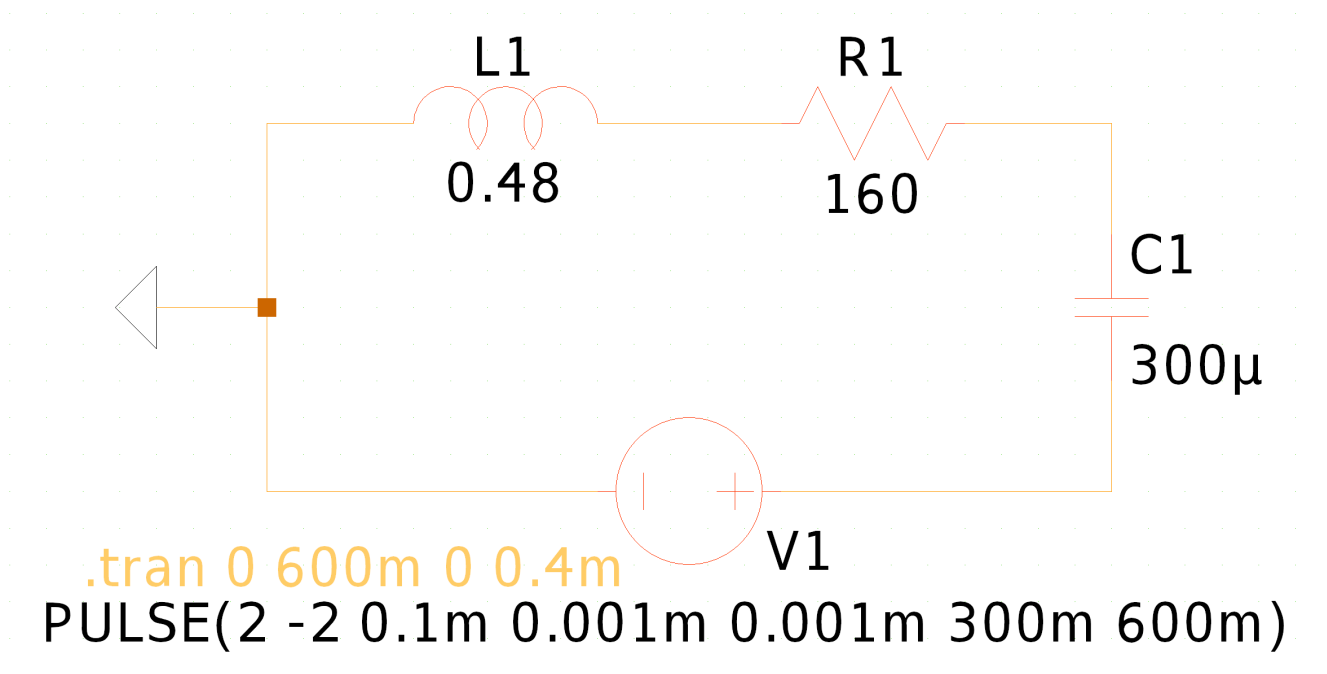


Рис. 3: Схема замещения RCL-цепи в LTspice.

2.2.2 Расчётные формулы и расчёты

1. Коэффициент затухания:

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{160}{2 \cdot 0,48} = \frac{500}{3} \text{ c}^{-1}$$

2. Резонансная частота:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0,48 \cdot 300 \cdot 10^{-6}}} = \frac{250}{3} \text{ c}^{-1}$$

3. Корни характеристического уравнения:

$$s_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}$$
$$s_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} = -\frac{500}{3} - \sqrt{\frac{500^2}{3^2} - \frac{250^2}{3^2}} \approx -311,004$$
$$s_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} = -\frac{500}{3} + \sqrt{\frac{500^2}{3^2} - \frac{250^2}{3^2}} \approx -22,329$$

4. Общее изменение напряжения при коммутации:

$$E_{\Sigma} = (|E(0-)| + |E(0+)|) \cdot \text{sign}(E(0+)) = (2 + 2) \cdot 1 = 4 \text{ В}$$

5. Напряжение на конденсаторе после коммутации:

$$\begin{aligned} U_C(t) &= E(0+) - \frac{E_{\Sigma}}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} U_C(t) &= 2 - \frac{4}{-311,004 + 22,329} (-311,004 \cdot e^{-22,329 \cdot 0} + 22,329 \cdot e^{-311,004 \cdot 0}) = \\ &= 2 - \frac{4}{-311,004 + 22,329} (-311,004 \cdot 1 + 22,329 \cdot 1) = -2 \text{ В} \end{aligned}$$

6. Напряжение на индуктивном элементе после коммутации:

$$\begin{aligned} U_L(t) &= \frac{E_{\Sigma}}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} U_L(t) &= \frac{4}{-311,004 + 22,329} (-311,004 \cdot e^{-22,329 \cdot 0} + 22,329 \cdot e^{-311,004 \cdot 0}) = \\ &= \frac{4}{-311,004 + 22,329} (-311,004 \cdot 1 + 22,329 \cdot 1) = 4 \text{ В} \end{aligned}$$

7. Ток в цепи:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{E_{\Sigma}}{L(s_1 - s_2)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} I(t) &= \frac{4}{0,48 \cdot (-311,004 + 22,329)} (e^{-22,329 \cdot 0} - e^{-311,004 \cdot 0}) = \\ &= \frac{4}{0,48 \cdot (-311,004 + 22,329)} \cdot 0 = 0 \text{ мА} \end{aligned}$$

8. Длительность переходного процесса:

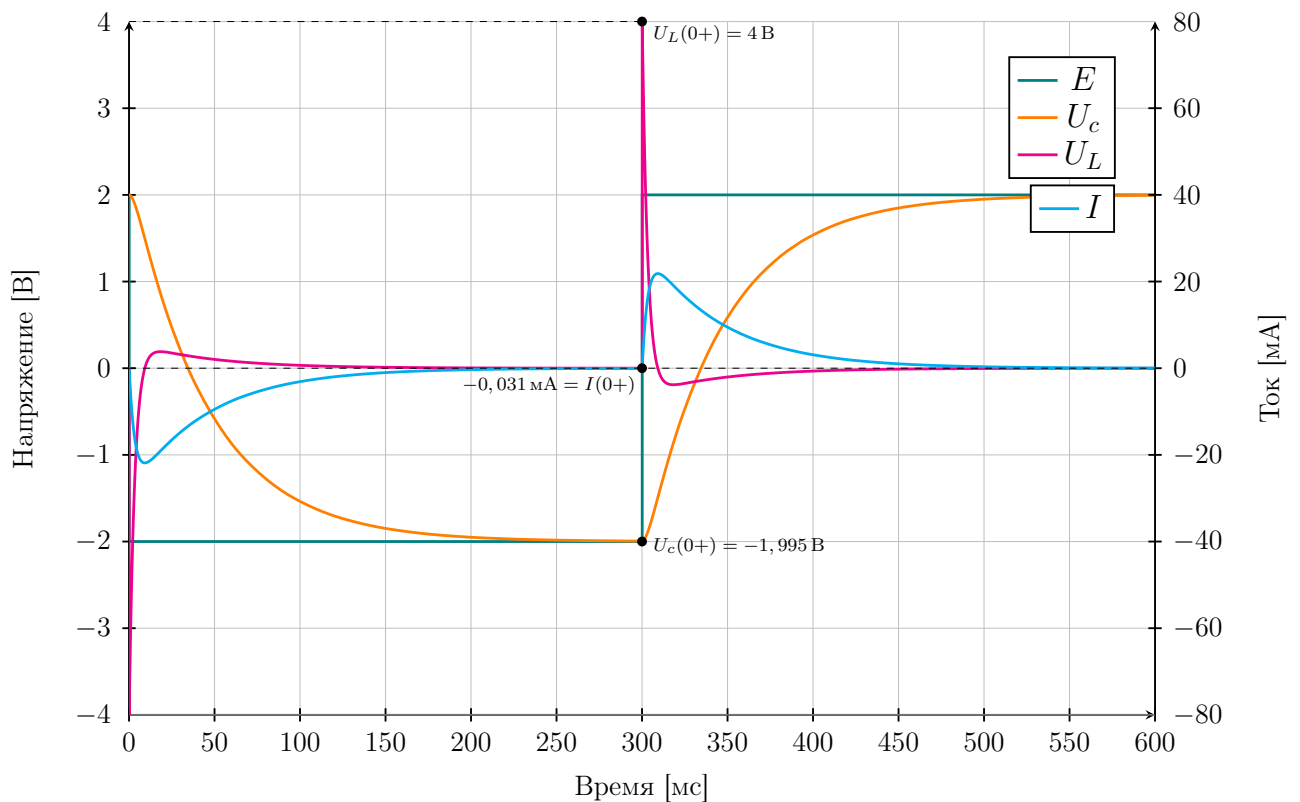
$$t_p = \frac{3}{\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}} = \frac{3}{\frac{500}{3} - \sqrt{\frac{500^2}{3^2} - \frac{250^2}{3^2}}} = 0,134 \text{ с} = 134000 \text{ мкс}$$

2.2.3 График апериодического переходного процесса

На графике показан апериодический переходной процесс в RLC-цепи. Голубая линия — это ток I через цепь, оранжевая — напряжение на конденсаторе U_C , пурпурная — напряжение на индуктивности U_L , а бирюзовая — ЭДС источника E .

1. В момент коммутации $t = 0$, напряжение на катушке резко возрастает до $U_L(0^+) = 4 \text{ В}$, а напряжение на конденсаторе остаётся на уровне $U_C(0^+) = -1.995 \text{ В}$, как показано на графике.
2. Ток через цепь $I(0^+) = -0.031 \text{ мА}$ сразу после коммутации очень мал, что характерно для тока в цепи 2 порядка с индуктивным элементом, который сопротивляется мгновенному его изменению.
3. Постепенно напряжение на катушке U_L устанавливается в ноль, а напряжение на конденсаторе плавно увеличивается, система стремится к равновесию.
4. В установившемся режиме $t \rightarrow \infty$, напряжение на конденсаторе достигает значения $U_C(\infty) = 40 \text{ В}$, а ток в цепи постепенно выходит на постоянное значение в 0 А .

Таким образом, график иллюстрирует апериодический переходный процесс в RLC-цепи, где затухание происходит без колебаний из-за больших потерь на сопротивление в цепи.



2.2.4 Таблица результатов 4.4

Таблица 4.3 содержит экспериментальные и расчётные результаты длительности переходного процесса в RLC-цепи, а также тока и напряжения в момент коммутации.

R [Ом]	L [мГн]	C [мКф]	Тип данных	$U_c(0+)$ [В]	$U_L(0+)$ [В]	$I(0+)$ [мА]	t_p [мкс]
160	480	300	эксп.	-1,995	4	-0,031	134000
			расч.	-2	4	0	134000

Таблица 3: Результаты измерений и расчётов для апериодического процесса

2.3 Исследование колебательного процесса

2.3.1 Схема исследуемой цепи

На рисунке 4 представлена схема замещения генератора прямоугольного напряжения с резистивной, ёмкостной и индуктивной нагрузками, созданная в приложении LTspice.

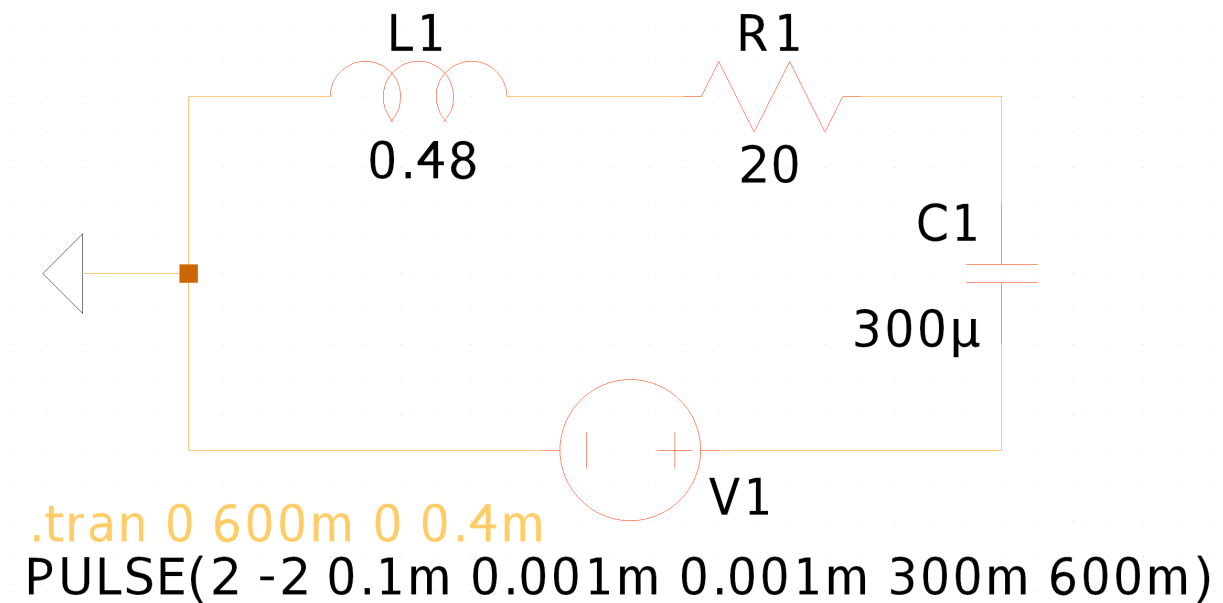


Рис. 4: Схема замещения RCL-цепи в LTspice.

2.3.2 Расчётные формулы и расчёты

1. Коэффициент затухания:

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{20}{2 \cdot 0,48} = 20,833 \text{ с}^{-1}$$

2. Резонансная частота:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{0,48 \cdot 300 \cdot 10^{-6}} - \frac{125^2}{6^2}} \approx 80,687 \text{ с}^{-1}$$

3. Экспериментальное определение коэффициента затухания:

$$\delta^* = \frac{\ln\left(\frac{I_{m1}}{I_{m2}}\right)}{T} = \frac{\ln\left(\frac{0,071082}{0,031584}\right)}{0,0781} = 10,386 \text{ с}^{-1}$$

4. Экспериментальное определение резонансной частоты:

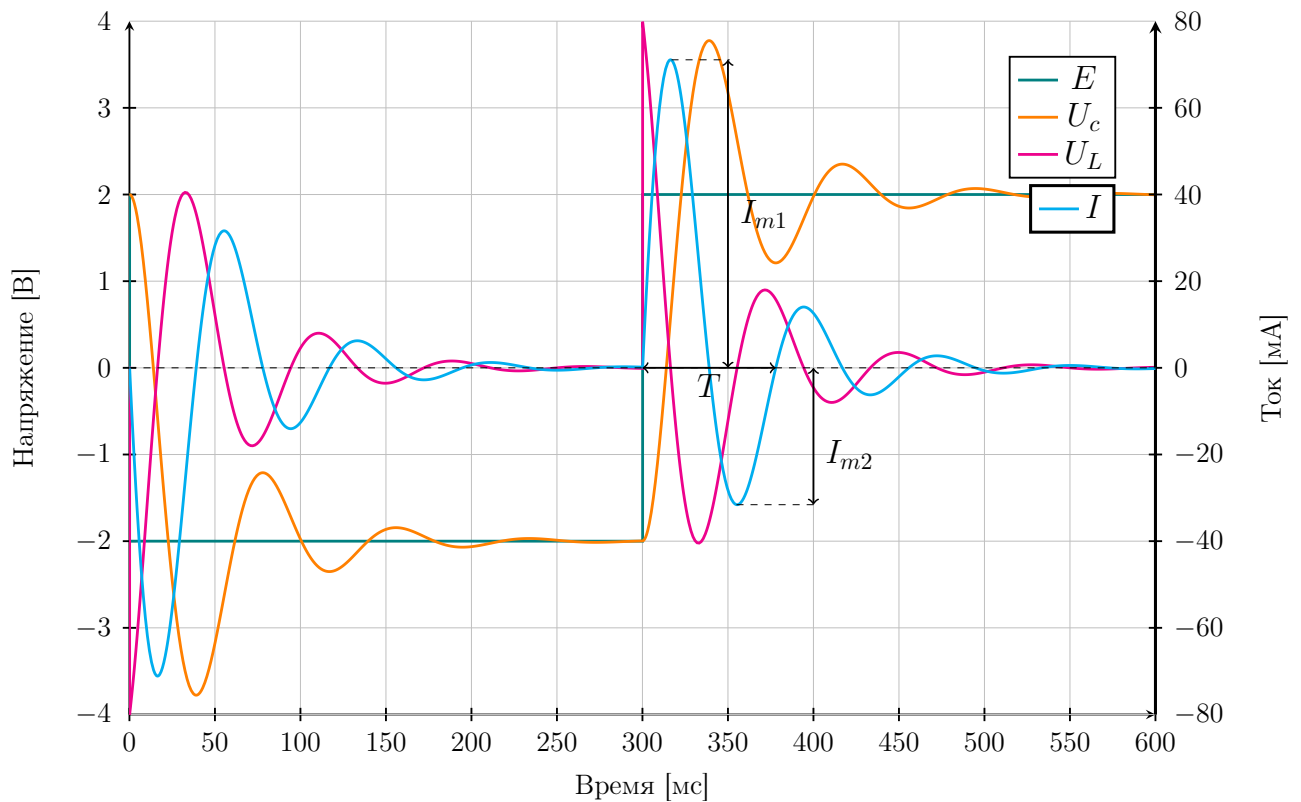
$$\omega_c^* = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,0781} = 80,451 \text{ с}^{-1}$$

2.3.3 График колебательного переходного процесса

На графике показан колебательный переходной процесс в RCL-цепи. Голубая линия — это ток I через цепь, оранжевая — напряжение на конденсаторе U_C , пурпурная — напряжение на индуктивности U_L , а бирюзовая — ЭДС источника E .

1. В момент коммутации $t = 0$, напряжение на катушке U_L резко возрастает, а ток через цепь практически не изменяется, что характерно для тока в цепи 2 порядка с индуктивным элементом, который сопротивляется мгновенному его изменению.
2. После коммутации напряжение на катушке начинает уменьшаться, а ток в цепи и напряжение на конденсаторе — увеличиваться. Возникают первые колебания, можно наблюдать как энергия быстро перетекает из магнитного поля индуктивного элемента в электростатическое поле ёмкостного элемента и обратно.
3. На графике отчётливо видны амплитуды соседних колебаний I_{m1} и I_{m2} , которые уменьшаются по мере затухания колебательного процесса.
4. Период колебаний T измерен на графике и соответствует времени между двумя соседними пиками колебаний. С течением времени колебания затухают, и система приближается к установившемуся состоянию.

График демонстрирует колебательный процесс, который возникает в RLC-цепи, где индуктивность и ёмкость создают условия для затухающих колебаний, а сопротивление влияет на скорость их затухания.



2.3.4 Таблица результатов 4.5

Таблица 4.3 содержит экспериментальные и расчётные результаты коэффициента затухания и резонансной частоты в колебательном контуре RCL-цепи.

R [Ом]	L [мГн]	C [мКф]	Тип данных	δ [с ⁻¹]	ω_c [с ⁻¹]
160	480	300	эксп.	10,386	80,451
			расч.	20,833	80,687

Таблица 4: Результаты измерений и расчётов для колебательного процесса

2.4 Выводы по второй части

В результате выполнения второй части лабораторной работы я исследовал два различных режима переходных процессов в RLC-цепи: апериодический и колебательный. Оба режима были получены путём изменения сопротивления R , что существенно влияло на характер процесса.

В апериодическом режиме при $R = 160$ Ом система не демонстрировала колебаний, а плавно (экспоненциально) стремилась к равновесию. Эксперимент показал, что напряжение на конденсаторе $U_C(0^+) = -1.995$ В после коммутации практически не изменялось мгновенно, что подтверждает теоретические ожидания для апериодического процесса, как уже было сказано выше, электростатическое поле конденсатора препятствует мгновенному изменению напряжения. Ток через цепь был малым сразу после коммутации ($I(0^+) = -0.031$ мА), что также выше объяснялось индуктивностью, которая противодействует резким

изменениям тока. Система затухала без колебаний, стремясь к установившемуся значению напряжения на конденсаторе и индуктивном элементе и току через цепь.

В колебательном режиме при $R = 20 \text{ Ом}$ наблюдались затухающие колебания. Экспериментальные данные подтвердили наличие первых колебаний, когда энергия поочерёдно передавалась между ёмкостью и индуктивностью. Амплитуды соседних колебаний I_{m1} и I_{m2} уменьшались с течением времени, что указывает на затухание процесса. Величины колебаний и их периоды T , измеренные на графике, соответствуют расчётным значениям, что подтверждает точность математической модели.

Таким образом, в апериодическом процессе энергия системы рассеивается быстрее из-за высокого сопротивления, а в колебательном — энергия переходит между элементами с постепенным затуханием. Оба режима были экспериментально подтверждены, а расхождения между расчётными и экспериментальными данными оказались минимальными, что говорит о корректности проведённых вычислений и точности модели.