Лабораторные работы по теории движения космических аппаратов

Задачи и методические рекомендации для их решения

Лабораторная работа №1

Определение элементов орбиты спутника

Постановка задачи

Траектория КА в окрестности Земли рассматривается в рамках ограниченной задачи двух тел. КА в некоторый момент времени (*12:00:00 UTC для даты* t_0) расположен в точке с геоцентрическими экваториальными координатами (x, y, z). Вектор скорости КА в этот момент имеют компоненты в той же невращающейся системе координат (v_x, v_y, v_z). Гравитационный параметр Земли μ = 398600 км^3/сек^2.

Найдите элементы орбиты космического аппарата:

– фокальный параметр (p);

– эксцентриситет (e);

– наклонение (i);

– долгота восходящего узла (Ω);

– аргумент перицентра (ω);

– время прохождения перицентра (t_π).

Таблица 1 - Исходные данные для различных вариантов

Вариант	x [км]	y [км]	z [км]	v_x [км/с]	v_y [км/с]	v_z [км/с]	t_o
1	-3200	8200	5800	5	-2	6	18.07.2025
2	400	6100	-3300	7	3	4	21.09.2025
3	8600	-5500	3400	0	-4	-5	05.09.2022
4	-5700	-7200	-4700	3	-4	6	18.03.2028
5	5700	8500	-9000	-4	0	-3	22.08.2025
6	7800	-8600	6800	-3	-2	-4	30.01.2027
7	1900	8300	-8600	4	-6	0	14.04.2023
8	8700	-5800	7000	-4	1	6	07.05.2026
9	-4700	7200	-5500	-5	-4	-2	26.05.2027
10	1400	0	7700	5	-7	1	19.04.2026
11	9100	-7500	5500	6	2	0	04.06.2023
12	-6800	0	9300	4	-2	6	08.06.2022
13	8200	9600	-1000	4	-5	3	22.12.2026
14	4700	8800	-8900	-2	3	6	15.07.2029
15	5700	-2200	8700	0	8	1	18.03.2029
16	1700	-8700	-1100	5	0	7	13.11.2029
17	-9700	9100	-3500	-3	0	-5	10.08.2024
18	-1800	-9200	7300	-3	1	5	27.06.2027
19	-3900	-4400	-3700	6	-8	2	03.06.2027
20	5700	-4100	-4600	6	-4	5	13.06.2026
21	-5500	-8300	2400	-5	5	-3	07.05.2026
22	-6200	4500	6700	-1	5	-3	13.07.2023
23	6700	-1900	-7100	0	-6	0	18.04.2022

24	-7600	-2700	-9000	4	-5	1	13.04.2022
25	-2800	-5700	-8600	5	-3	4	18.02.2026
26	2000	-8500	9300	7	2	0	10.08.2024
27	9000	7300	-9000	0	4	4	30.09.2023
28	7300	7600	7300	3	-1	-6	25.03.2029
29	4500	9300	-700	7	0	0	27.08.2028
30	8400	-4800	-5100	1	6	4	10.04.2024
31	1100	-6700	-8700	3	6	-1	24.07.2029
32	9400	1000	-8600	0	6	-3	22.06.2022
33	-5400	-5200	9200	-7	-2	0	24.02.2030
34	2700	7500	9500	-5	-1	2	06.11.2029
35	-2900	-6500	5700	-4	-5	-5	23.01.2024
36	-5200	7500	-900	0	1	7	16.02.2028
37	2200	1600	-7200	-6	6	-1	24.11.2029
38	1700	4600	7100	0	7	-3	08.02.2023
39	100	6700	-4500	-3	2	8	15.10.2027
40	-800	-8600	1400	-5	-3	-5	02.02.2025
41	4900	2200	7500	-1	-6	2	01.02.2027
42	9200	-500	7100	-2	7	-1	08.04.2025
43	7000	700	-800	0	7	6	17.11.2027
44	3300	-3700	7700	-7	-3	0	01.01.2023
45	6700	8500	-5200	-6	1	-2	21.10.2028
46	9400	7700	-1200	4	-1	-6	25.09.2028
47	9600	-600	-7800	-2	-6	1	21.07.2028
48	-6000	-5400	-3400	3	-2	-6	27.11.2026
49	2100	9600	-6800	-4	0	-6	09.06.2027
50	0	5000	9300	-2	6	-1	14.08.2025
51	400	-8200	-2200	7	-1	2	12.11.2025
52	9800	9400	-9100	-2	1	5	11.01.2030
53	-3600	-6900	-4200	-2	4	-5	02.04.2025
54	1500	-6700	-7900	-8	-1	1	01.06.2024
55	-1500	-9200	4200	-8	0	-2	16.11.2023
56	9300	5900	1900	-4	4	0	01.08.2022
57	-5200	-1300	-8800	7	-2	-1	10.08.2023
58	-9700	-2200	4500	4	-5	2	19.07.2027
59	-9100	4300	5500	5	-1	4	30.07.2028
60	9800	-600	-1900	4	-7	1	21.07.2028
61	-6500	9800	8100	-4	-3	0	28.12.2024
62	-5800	-500	7000	2	5	5	09.03.2024
63	-8000	4700	2500	1	8	-2	27.10.2027
64	6900	-1500	4400	-6	2	5	12.03.2027
65	-8200	8400	-4000	3	2	-5	08.06.2024
66	-7900	-5600	-4600	7	-3	2	10.03.2027
67	4900	-6600	6400	0	1	8	24.03.2024
68	-2900	-9300	-2100	0	-4	7	23.09.2023
69	8800	3300	-6100	-2	-4	-5	07.06.2028
70	9600	-300	-2200	0	5	-6	09.11.2027
71	-200	7900	5600	7	-3	0	13.11.2022
72	500	-8000	-2700	2	5	-7	07.09.2029

Алгоритм решения

Вычисление орбитальных элементов КА по известным векторам его положения $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ и скорости $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ в геоцентрической экваториальной системе координат производится следующим образом.

1) Вычисляются значения геоцентрического удаления $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и орбитальной скорости КА $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

2) Вычисляются постоянные интегрирования:

- постоянная энергии $h = v^2 - \dfrac{2\mu}{r}$,

- вектор площадей $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix}$,

- вектор Лапласа $\mathbf{f} = \mathbf{v} \times \mathbf{c} - \dfrac{\mu}{r}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} v_y c_z - v_z c_y - \dfrac{\mu}{r} x \\ v_z c_x - v_x c_z - \dfrac{\mu}{r} y \\ v_x c_y - v_y c_x - \dfrac{\mu}{r} z \end{pmatrix}$

и абсолютные значения постоянной площадей $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$ и постоянной Лапласа $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$.

3) Вычисляются значения фокального параметра $p = \dfrac{c^2}{\mu}$ и эксцентриситета $e = \dfrac{f}{\mu}$ орбиты КА.

4) Вычисляется наклонение орбиты КА $i = \arccos \dfrac{c_z}{c}$.

5) Вводятся обозначения:

$\mathbf{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и вычисляется единичный вектор в направлении восходящего узла орбиты КА (см. рисунок 1):

$$\mathbf{e_N} = \frac{\mathbf{e_z} \times \mathbf{c}}{\left|\mathbf{e_z} \times \mathbf{c}\right|} = \frac{1}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} \begin{pmatrix} -c_y \\ c_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляется косинус долготы восходящего узла: $\cos\Omega = \mathbf{e_x} \cdot \mathbf{e_N} = -\frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}$.

Если $\left(\mathbf{e_x} \times \mathbf{e_N}\right) \cdot \mathbf{e_z} = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} > 0$, то $\Omega = \arccos\left(-\frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}\right)$, иначе $\Omega = 2\pi - \arccos\left(-\frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}\right)$.

6) Вычисляется косинус аргумента перицентра $\cos\omega = \frac{\mathbf{e_N} \cdot \mathbf{f}}{f} = \frac{e_{Nx} f_x + e_{Ny} f_y}{f}$ (рисунок 1).

Если $\left(\mathbf{e_N} \times \mathbf{f}\right) \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} \left[f_z \cdot \left(c_x^2 + c_y^2\right) - c_z \cdot \left(f_x c_x + f_y c_y\right)\right] > 0,$ то $\omega = \arccos \frac{e_{Nx} f_x + e_{Ny} f_y}{f}$, иначе $\omega = 2\pi - \arccos \frac{e_{Nx} f_x + e_{Ny} f_y}{f}$.

7) Вычисляется косинус истинной аномалии: $\cos\nu = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}}{fr} = \frac{f_x x + f_y y + f_z z}{fr}$ (рисунок 1).

Если $\left(\mathbf{f} \times \mathbf{r}\right) \cdot \mathbf{c} = \left[\left(f_y z - f_z y\right) c_x + \left(f_z x - f_x z\right) c_y + \left(f_x y - f_y x\right) c_z\right] > 0,$ то $\nu = \arccos \frac{f_x x + f_y y + f_z z}{fr}$, иначе $\nu = 2\pi - \arccos \frac{f_x x + f_y y + f_z z}{fr}$.

8) Вычисляются аргумент широты $u = \omega + \nu$, большая полуось $a = -\frac{\mu}{h}$, эксцентрическая аномалия данной точки орбиты $\mathrm{E}_0 = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}} \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\right)$, среднее движение $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ и время прохождения перицентра $t_\pi = t_0 - \frac{E_0 - e\sin E_0}{n}$.

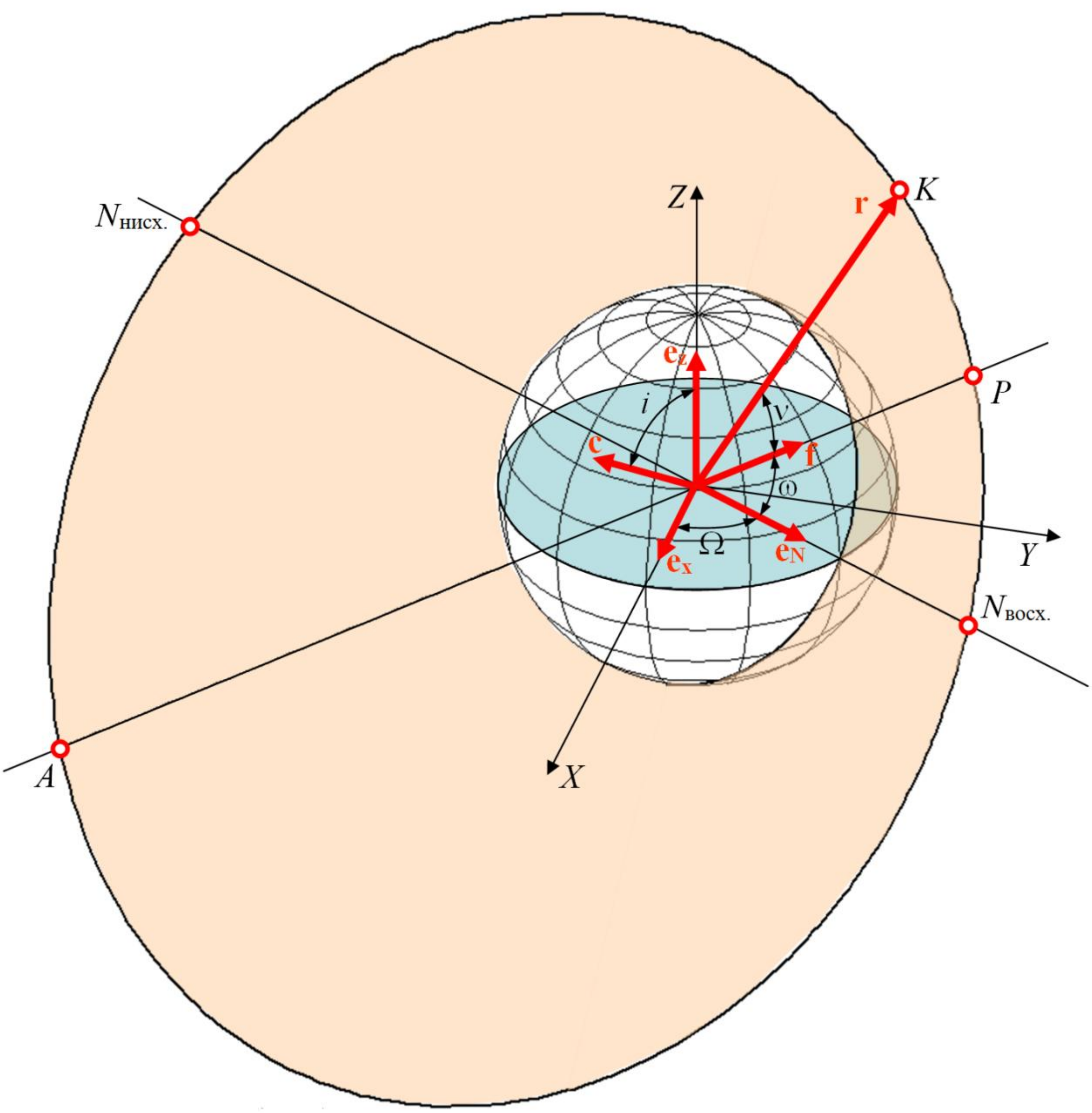

Рисунок 1 – K – текущее положение КА, P – перигей, A – апогей, $N_{восх.}$ – восходящий узел, $N_{нисх.}$ – нисходящий узел

Самостоятельная проверка правильности выполнения задания

Для проверки правильности выполнения задания используйте программу *TestLAB1.exe*, расположенную в той же папке, что и настоящий документ.

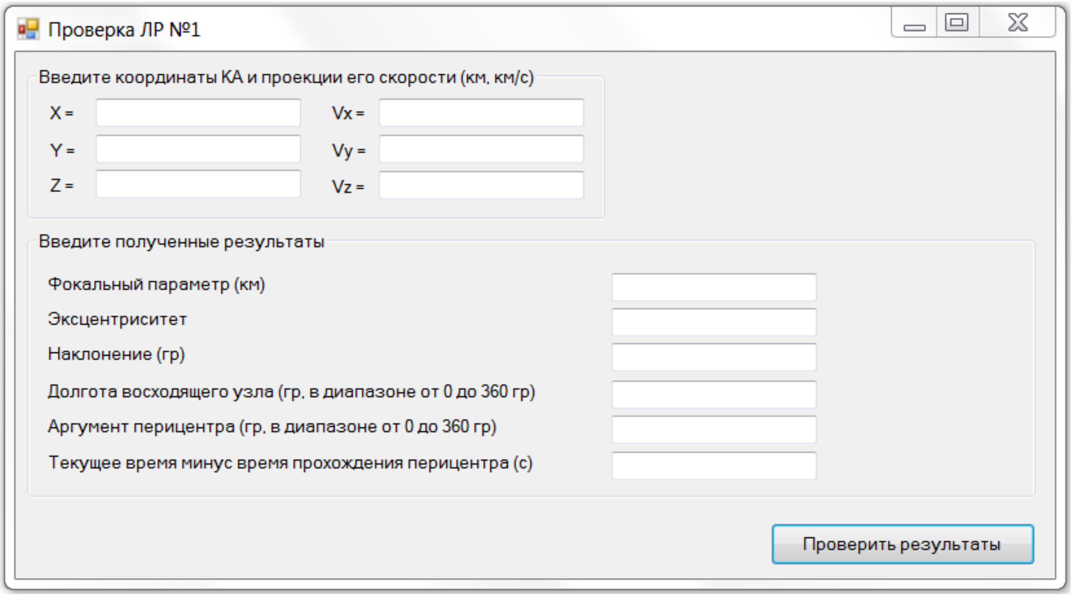

Рисунок 2 - Интерфейс программы TestLAB1.exe

В текстовые поля данной программы необходимо ввести координаты КА и проекции его скорости (из Вашего задания), а также полученные результаты и после этого нажать кнопку "Проверить результаты".

Замечание 1: десятичным разделителем чисел в программе должна быть ТОЧКА (например, 12.123, а не 12,123!);

Замечание 2: необходимо обеспечить высокую точность вычислений. Программа примет Ваш результат как верный, если будет обеспечена относительная точность не хуже 1%. При выполнении вычислений округляйте результаты до 5-го знака после точки.

Лабораторная работа №2

Прогнозирование положения и скорости спутника в заданный момент времени

Постановка задачи

Используя элементы орбиты, найденные в *лабораторной работе № 1,* определите координаты и компоненты вектора скорости КА в геоцентрической экваториальной системе координат через $\boldsymbol{N}$ часов после момента времени $\boldsymbol{t_o}$, где $\boldsymbol{N}$ – номер Вашего варианта задания.

Алгоритм решения

Вычисление координат и компонент вектора скорости КА в геоцентрической экваториальной системе координат в некоторый новый момент времени по его орбитальным элементам производится следующим образом.

1) Вычисляется значение эксцентрической аномалии КА в новый момент времени ($t = t_0 + N \cdot 3600c$). Для этого численно решается уравнение Кеплера:

$$E - e\sin E = n\left(t - t_\pi\right)$$

относительно эксцентрической аномалии *E*. При этом эксцентриситет *e*, среднее движение *n*, и время прохождения перицентра t_π найдены из решения задачи *лабораторной работы №1.*

Для численного решения уравнения Кеплера может быть использован, например, метод неподвижной точки:

а) Задается начальное приближение по эксцентрической аномалии:

$$E_0 = 0;$$

б) Вычисляется новое значение эксцентрической аномалии:

$$E_{j+1} = n\left(t - t_\pi\right) + e\sin E_j$$

где *j* - номер итерации.

в) Если $\left|E_{j+1} - E_j\right| > \varepsilon$ (здесь ε - малое число, характеризующее точность решения, например $\varepsilon = 0.001$), то следует переход к шагу "б", иначе стоп.

Эксцентрическая аномалия в момент времени *t* – это значение E_j, полученное на последней итерации.

2) Вычисляется значение истинной аномалии КА в момент времени *t*:

$$\nu = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right)$$

3) Вычисляются значения радиальной и трансверсальной скорости КА, а также модуль радиуса-вектора КА в момент времени *t*:

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot e \cdot \sin\nu;$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \left(1 + e \cdot \cos\nu\right);$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\nu};$$

Напомним, что фокальный параметр *p* найден в *лабораторной работе №1*.

4) Вычисление координат и компонент вектора скорости КА в геоцентрической экваториальной системе координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} V_r \\ V_n \\ 0 \end{pmatrix};$$

где A - перехода от орбитальной к геоцентрической экваториальной системе координат:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos(\omega+\nu)\cdot\cos(\Omega) - \sin(\omega+\nu)\cdot\cos(i)\cdot\sin(\Omega) & -\sin(\omega+\nu)\cdot\cos(\Omega) - \cos(\omega+\nu)\cdot\cos(i)\cdot\sin(\Omega) & \sin(i)\cdot\sin(\Omega) \\ \cos(\omega+\nu)\cdot\sin(\Omega) + \sin(\omega+\nu)\cdot\cos(i)\cdot\cos(\Omega) & -\sin(\omega+\nu)\cdot\sin(\Omega) + \cos(\omega+\nu)\cdot\cos(i)\cdot\cos(\Omega) & -\sin(i)\cdot\cos(\Omega) \\ \sin(\omega+\nu)\cdot\sin(i) & \cos(\omega+\nu)\cdot\sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix}$$

Долгота восходящего узла Ω, наклонение орбиты i, а также аргумент перицентра ω найдены в рамках *лабораторной работы №1*.

Самостоятельная проверка правильности выполнения задания

Для проверки правильности выполнения задания используйте программу *TestLAB2.exe*.

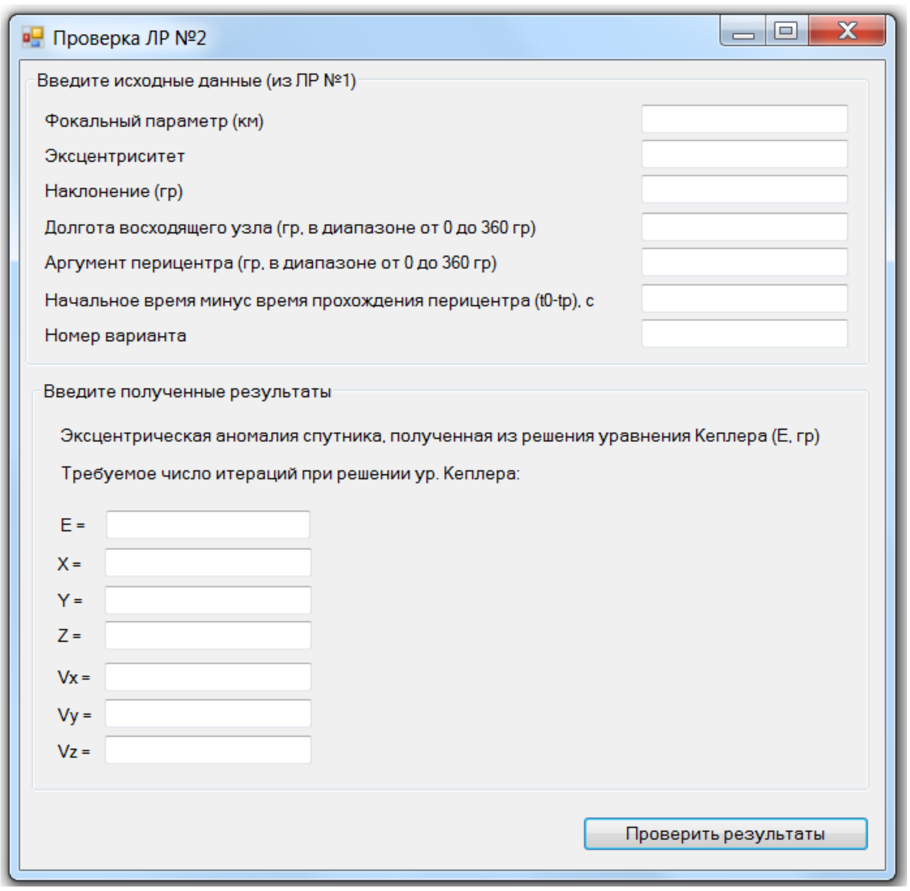

Рисунок 3 - Интерфейс программы TestLAB2.exe

В текстовые поля данной программы необходимо ввести элементы орбиты КА, полученные в рамках *лабораторной работы №1*, номер Вашего варианта, а также полученные результаты: эксцентрическую аномалию КА в заданный момент времени, координаты КА и проекции его скорости в геоцентрической экваториальной системе координат и после этого нажать кнопку "Проверить результаты".

Замечание 1: десятичным разделителем чисел в программе должна быть ТОЧКА (например, 12.123, а не 12,123!);

Замечание 2: необходимо обеспечить высокую точность вычислений. Программа примет Ваш результат как верный, если будет обеспечена относительная точность не хуже 1%. При выполнении вычислений округляйте результаты до 5-го знака после точки.

Лабораторная работа №3

Построение трассы движения искусственного спутника Земли

<u>*Постановка задачи*</u>

Траектория спутника Земли рассматривается в рамках ограниченной задачи двух тел. Элементы орбиты спутника (фокальный параметр, эксцентриситет, наклонение орбиты, долгота восходящего узла, аргумент перигея) известны - они получены при решении задачи *лабораторной работы №1*.

Эксцентрическая аномалия точки орбиты, которая рассматривается в качестве начальной (E_0) также получена в рамках *лабораторной работы №1*. Географическая долгота начальной точки трассы (λ_0) дана в таблице 2.

Известны: гравитационный параметр Земли μ = 398600 км^3/сек^2; угловая скорость вращения Земли относительно звездного пространства $\omega_З$ = 7.292116×10^{-5} 1/с; средний радиус Земли $R_з$ = 6371 км.

Необходимо построить трассу искусственного спутника Земли на двух витках его орбиты.

Таблица 2 - Географические долготы начальной точки трассы

Вариант	**λ_0, град**	**Вариант**	**λ_0, град**	**Вариант**	**λ_0, град**
1	-4.80	**25**	-84.10	**49**	0.29
2	-94.10	**26**	143.97	**50**	-52.55
3	163.10	**27**	-149.68	**51**	41.31
4	-124.50	**28**	43.40	**52**	113.09
5	-94.65	**29**	-91.69	**53**	-128.23
6	3.01	**30**	-48.59	**54**	-147.37
7	54.89	**31**	157.44	**55**	25.69
8	-78.74	**32**	-84.29	**56**	-97.38
9	59.59	**33**	-110.23	**57**	55.69
10	-27.26	**34**	-155.20	**58**	76.07
11	-111.89	**35**	-56.15	**59**	26.48
12	103.45	**36**	159.08	**60**	-122.89
13	138.79	**37**	152.44	**61**	-153.48
14	-51.46	**38**	111.86	**62**	-162.43
15	-17.13	**39**	-114.38	**63**	-65.66
16	48.59	**40**	-47.93	**64**	-1.83
17	-2.33	**41**	73.16	**65**	57.24
18	163.81	**42**	-19.78	**66**	-132.20
19	157.17	**43**	129.76	**67**	-55.62
20	-117.13	**44**	31.00	**68**	70.94
21	-168.55	**45**	-158.38	**69**	-55.51
22	33.30	**46**	-145.13	**70**	130.15
23	-42.09	**47**	-122.96	**71**	-140.74
24	178.24	**48**	-24.03	**72**	107.18

<u>*Алгоритм решения*</u>

Проекцию положения искусственного спутника Земли на ее поверхность называют подспутниковой точкой. Совокупность подспутниковых точек - есть трасса спутника. Иначе можно сказать, что трасса - это проекция орбиты спутника на развертку поверхности вращающейся Земли.

Для построения трассы ИСЗ рекомендуется использовать какую-либо вычислительную среду (например, MathCAD, Matlab, Excel и т.д.), т.к. данная задача является наиболее трудоемкой с вычислительной точки зрения.

Для построения трассы спутника необходимо с некоторым малым шагом ΔE (например, 1°) перебрать все значения эксцентрической аномалии в диапазоне $E \in [E_0; E_0 + 2\pi k]$, где E_0 - эксцентрическая аномалия начальной точки орбиты, найденная в рамках *лабораторной работы №1*; k - число витков (k = 2 в соответствии с заданием).

Для каждого значения E из указанного диапазона необходимо выполнить следующие действия.

1) Вычислить координаты КА (x, y, z) в геоцентрической экваториальной системе координат (см. п.п. 2 - 4 *лабораторной работы №2*).

2) Вычислить геоцентрическую широту подспутниковой точки:

$$\phi = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right);$$

3) Вычислить геоцентрическую долготу подспутниковой точки:

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\theta - \omega_з \cdot \Delta t; \tag{1}$$

где

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0;$$

θ - угол между проекцией радиуса-вектора КА на плоскость земного экватора и осью X геоцентрической экваториальной системы координат для текущей точки орбиты (этот угол называется прямое восхождение радиус-вектора):

$$\theta = \begin{cases} \mathrm{arctg}(y/x), & \text{если } x > 0 \\ \mathrm{arctg}(y/x) + \pi, & \text{если } x < 0 \text{ и } y \geq 0 \\ \mathrm{arctg}(y/x) - \pi, & \text{если } x < 0 \text{ и } y < 0 \\ \pi/2, & \text{если } x = 0 \text{ и } y > 0 \\ -\pi/2, & \text{если } x = 0 \text{ и } y < 0 \\ \text{не определен}, & \text{если } x = 0 \text{ и } y = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Здесь x, y - экваториальные координаты КА в геоцентрической экваториальной системе координат (найденные в п.№1 данного алгоритма). Отметим, что функция (2) реализована во многих вычислительных средах, она называется круговой арктангенс. Например, в MathCAD ее можно вызвать следующим образом:

$$\theta := \mathrm{atan2}(x, y)$$

Аналогично находится угол θ_0 - угол между проекцией радиуса-вектора КА на плоскость земного экватора и осью X геоцентрической экваториальной системы координат для НАЧАЛЬНОЙ точки орбиты:

$$\theta0 := \mathrm{atan2}(x0, y0)$$

Здесь $x0$, $y0$ - экваториальные координаты начальной точки орбиты. Они заданы в *лабораторной работе №1* (см. таблицу 1)

Последний неизвестный параметр в (1) Δt - время движения КА от начального момента времени до текущей точки орбиты. Он может быть найден с помощью использования уравнения Кеплера:

$$\Delta t = \frac{1}{n}\left[E - E_0 - e\left(\sin E - \sin E_0\right)\right];$$

Напомним, что эксцентрическая аномалия начальной точки орбиты E_0, среднее движение n и эксцентриситет e уже найдены в *лабораторной работе №1*.

Таким образом, должна быть получена таблица такого вида:

Эксцентрическая аномалия (E)	Геоцентрическая долгота (λ)	Геоцентрическая долгота (ϕ)
E_0		
$E_0+\Delta E$		
$E_0+2\cdot\Delta E$		
...		
$E_0+4\pi$		

Затем необходимо нанести полученные точки на цилиндрическую развертку по поверхности Земли. Отметим, что геоцентрическая долгота должна быть при этом нормирована в диапазоне от −180° до +180°. Пример построения трассы дан в файле "Пример построения трассы.xlsx". График трассы не должен иметь разрывов.

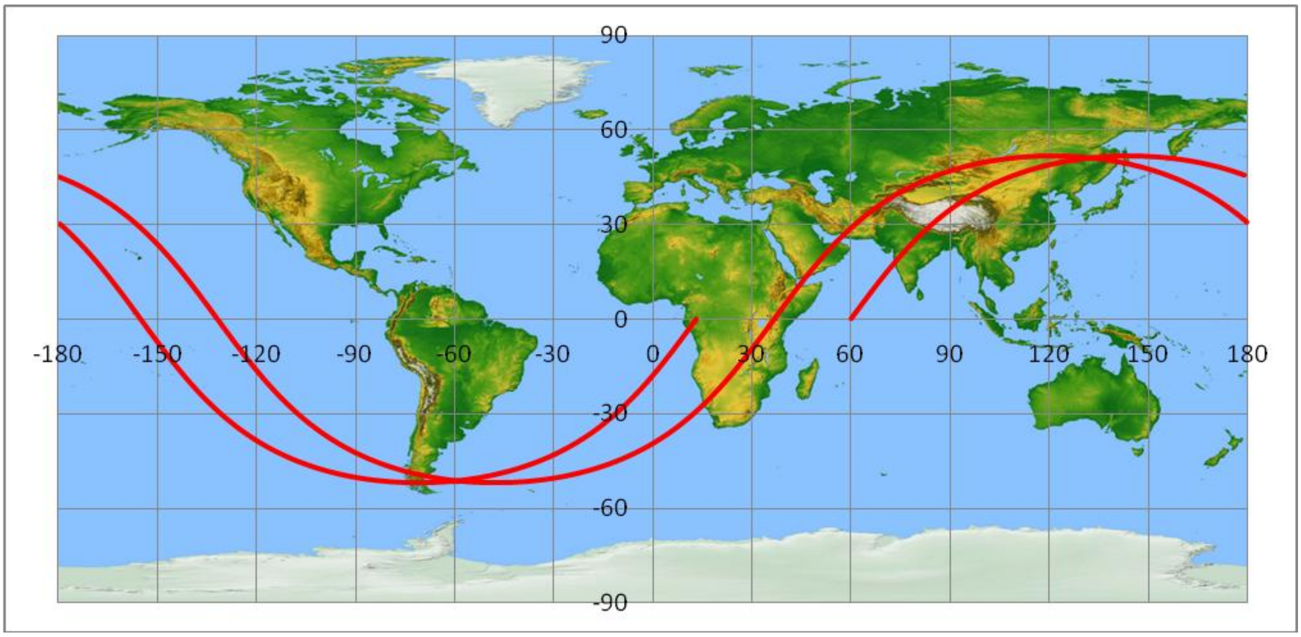

Рисунок 4 - Пример построения трассы низкой круговой орбиты ИСЗ

Результаты, полученные в рамках решения задач лабораторных работ, должны быть оформлены в виде пояснительной записки, которая должна содержать следующие материалы:

- Титульный лист;
- Задания для лабораторных работ;
- Краткое изложение методик расчета с необходимыми пояснениями использованных формул;
- Результаты расчетов, оформленные в виде таблиц (для лабораторных работ №1 и №2) и рисунка трассы (лабораторная работа №3).

Пояснительные записки прошу направлять по e-mail: elnikov_rv@mail.ru.
Если у Вас возникнут какие-либо дополнительные вопросы, то можно обращаться письменно по этому же адресу.

С уважением, Ельников Роман Викторович