1. Uvjetne razdiobe i uvjetna očekivanja

Uvjetne vjerojatnosti, razdiobe i očekivanja su temeljni alat koji ćemo koristiti tijekom cijelog kolegija. U ovom ćemo poglavlju ponoviti i nadopuniti znanje o slučajnim varijablama i uvjetnim razdiobama.

1.1 Uvjetne razdiobe

1.1.1 Uvjetna vjerojatnost

Uvjetnu vjerojatnost možemo razumjeti kao redefiniranje apriornih vjerojatnosti na temelju novodobivenih informacija. Te su informacije sadržane u događaju H koji se zbio. Onda se apriorna vjerojatnost događaja A mijenja u

$$\mathbf{P}(A \mid H) := \frac{\mathbf{P}(AH)}{\mathbf{P}(H)}.$$

Događaj H je preuzeo ulogu kompletnog vjerojatnosnog prostora, budući da elementarni događaji van H nisu više interesantni.

Uvjetne se vjerojatnosti zapravo koriste u računanju vjerojatnosti umnoška (presjeka) dvaju događaja:

$$\mathbf{P}(AH) = \mathbf{P}(H)\mathbf{P}(A \mid H).$$

Važnost ove formule najbolje zapažamo u **formuli potpune vjerojatnosti**, kad se vjerojatnost događaja A računa ovisno o hipotezama koje se mogu dogoditi:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A \mid H_i).$$

Sad ćemo naučiti kako se ove formule transformiraju u nove, u slučaju kad događaj H ovisi o vrijednostima slučajne varijable X.

Zbog različitih načina zapisivanja promatrat ćemo odvojeno slučaj diskretnih kao i slučaj neprekinutih slučajnih varijabli.

1.1.2 Marginalne razdiobe diskretnog slučajnog vektora

Neka su X i Y diskretne slučajne varijable, X poprima vrijednosti u skupu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a Y poprima vrijednosti u skupu $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Razdioba vektora (X, Y) određena je ako poznajemo vjerojatnosti

$$r_{ij} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j),$$

za sve vrijednosti indeksa i i j. Ta razdioba opisuje vektor u potpunosti, uključujući i međuovisnosti varijabli X i Y. Zapisujemo je u sljedećoj tablici **dvodimenzionalne razdiobe**:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	
x_1	r_{11}	r_{12}	$\dots$	r_{1m}	p_1
x_2	r_{21}	r_{22}	$\dots$	r_{2m}	p_2
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	
x_n	r_{n1}	r_{n2}	$\dots$	r_{nm}	p_n
	q_1	q_2	$\dots$	q_m	1

Na marginama ove tablice zapisane su **marginalne razdiobe** varijabli X i Y,

$$p_i = \mathbf{P}(X = x_i), \qquad q_j = \mathbf{P}(Y = y_j).$$

Znamo da onda vrijedi

$$p_i = \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_j \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j r_{ij}$$

i također

$$q_j = \mathbf{P}(Y = y_j) = \sum_i \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i r_{ij}.$$

Marginalne razdiobe varijabli X i Y su

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix},$$

Razdioba vektora (X, Y) nije određena ako poznajemo marginalne razdiobe, pomoću margina *ne možemo* općenito rekonstruirati vjerojatnosti u tablici. To je moguće učiniti u slučaju kad su komponente slučajnog vektora *nezavisne*, jer onda vrijedi

$$r_{ij} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = y_j) = p_i q_j.$$

Ukoliko je $r_{ij} \neq p_i q_j$ barem za jedan par indeksa, onda su varijable X i Y zavisne.

1.1.3 Uvjetne razdiobe diskretnog slučajnog vektora

Ako je slučajna varijabla Y poprimila vrijednost y_j, što možemo onda reći o varijabli X? Njezine vrijednosti se i dalje nalaze unutar skupa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ali vjerojatnosti su se možda promijenile. Te vjerojatnosti čitamo iz j-tog stupca tablice dvodimenzionalne razdiobe. Naime, varijabla Y je poprimila vrijednost y_j, pa su u daljnjem relevantne samo vjerojatnosti koje odgovaraju tom događaju.

Uvjetna vjerojatnost događaja $\{X = x_i \mid Y = y_j\}$ dana je sa

$$\mathbf{P}(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{\mathbf{P}(X = x_i,\ Y = y_j)}{\mathbf{P}(Y = y_j)} = \frac{r_{ij}}{q_j}.$$

Često se ove vjerojatnosti označavaju na sljedeći simbolički način, pogotovo u tehničkoj literaturi:

$$p_{i|j} = \mathbf{P}(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{r_{ij}}{q_j}.$$

Analogno ovome, vrijedi

$$q_{j|i} = \mathbf{P}(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{r_{ij}}{p_i}.$$

Skup svih takvih vjerojatnosti za sve i daje **uvjetnu razdiobu** varijable X uz uvjet $Y = y_j$:

$$X \mid Y = y_j \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ \frac{r_{1j}}{q_j} & \frac{r_{2j}}{q_j} & \dots \end{pmatrix}.$$

Ta se razdioba čita iz j-tog stupca razdiobe vektora (X, Y). Elementi tog stupca podijeljeni su odgovarajućom marginom.

Analogno je

$$Y \mid X = x_i \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ \frac{r_{i1}}{p_i} & \frac{r_{i2}}{p_i} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Ta se razdioba čita iz i-tog retka razdiobe vektora (X, Y). Elementi tog retka podijeljeni su odgovarajućom marginom.

1.2 Uvjetno očekivanje diskretnih slučajnih varijabli

Znajući uvjetnu razdiobu varijable $X \mid Y = y_j$, možemo odrediti njezino očekivanje:

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y_j) = \sum_i x_i \cdot \mathbf{P}(X = x_i \mid Y = y_j) = \sum_i x_i \cdot \frac{r_{ij}}{q_j}.$$

Lakše se pamti ovaj zapis

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y_j) = \sum_i x_i p_{i|j}.$$

Iskažimo sad temeljni pojam u ovom poglavlju.

Uvjetno očekivanje

Definicija 1.1 **Uvjetno očekivanje varijable X uz uvjet Y** je slučajna varijabla $\mathbf{E}(X \mid Y)$ koja za $Y = y_j$ poprima vrijednost $\mathbf{E}(X \mid Y = y_j)$.

Primjer 1.2 Razdioba vektora (X, Y) dana je u tablici

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$

Odredi **1.** Marginalne razdiobe varijabli X i Y; **2.** Uvjetna očekivanja $E(X \mid Y)$ i $\mathbf{E}(Y \mid X)$; **3.** Izračunaj obje strane u jednakosti (1.1).

▷**1.** Nadopunimo tablicu marginama:

$X \backslash Y$	-1	0	1	
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{7}{12}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	1

Odavde čitamo marginalne razdiobe

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Možemo dati i prvi dio odgovora na pitanje u 3.:

$$\mathbf{E}(X) = 1 \cdot \tfrac{5}{12} + 2\tfrac{7}{12} = \tfrac{19}{12},$$
$$\mathbf{E}(Y) = (-1) \cdot \tfrac{1}{4} + 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{4}.$$

2. Računamo $\mathbf{E}(X \mid Y)$. U tu svrhu trebamo odrediti sljedeće tri vrijednosti. Množimo vrijednosti varijable X s uvjetnim vjerojatnostima koje čitamo iz stupaca tablice:

$$\mathbf{E}(X \mid Y = -1) = 1 \cdot \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{\frac{2}{12}}{\frac{1}{4}} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3},$$
$$\mathbf{E}(X \mid Y = 0) = 1 \cdot \frac{\frac{2}{12}}{\frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$
$$\mathbf{E}(X \mid Y = 1) = 1 \cdot \frac{\frac{2}{12}}{\frac{2}{4}} + 2 \cdot \frac{\frac{4}{12}}{\frac{2}{4}} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Dobili smo razdiobu uvjetnog očekivanja. Ove vrijednosti odgovaraju vjerojatnostima za varijablu Y:

$$\mathbf{E}(X \mid Y) \sim \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}.$$

Sada je

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid Y)) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{19}{12}.$$

Napravimo to isto za uvjetnom očekivanje $\mathbf{E}(Y \mid X)$. Ta slučajna varijabla poprima dvije vrijednosti:

$$\mathbf{E}(Y \mid X = 1) = (-1) \cdot \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} + 0 \cdot \frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}} + 1 \cdot \frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5},$$
$$\mathbf{E}(Y \mid X = 2) = (-1) \cdot \frac{\frac{2}{12}}{\frac{7}{12}} + 0 \cdot \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} + 1 \cdot \frac{\frac{4}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7}.$$

Razdiobu uvjetnog očekivanja je

$$\mathbf{E}(Y \mid X) \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}.$$

Sada je

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y \mid X)) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{4}.$$

◁

Teorem 1.3 Za uvjetno očekivanje varijable X uz uvjet Y vrijedi formula

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid Y)) = \mathbf{E}(X). \tag{1.1}$$

Dokaz. Očekivanje slučajne varijable je broj, ali uvjetno očekivanje nije. To je slučajna varijabla, čija vrijednost ovisi o realizacijama varijable Y. Dokažimo formulu (1.1):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid Y)) &= \sum_j \mathbf{E}(X \mid Y{=}y_j)q_j \\
&= \sum_j \Big(\sum_i x_i p_{i|j}\Big) q_j \\
&= \sum_j \sum_i x_i \cdot \frac{r_{ij}}{q_j} \cdot q_j \\
&= \sum_i x_i \sum_j r_{ij} \\
&= \sum_i x_i p_i \\
&= \mathbf{E}(X).
\end{aligned}$$

■

Naravno, formula vrijedi i u sljedećem obliku

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y \mid X)) = \mathbf{E}(Y).$$

U primjenama se najčešće koristi sljedeća formula sadržana u ovom dokazu.

Računanje očekivanja uvjetovanjem

Očekivanje slučajne varijable X možemo računati uvjetovanjem po drugoj varijabli Y:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_j \mathbf{E}(X \mid Y{=}y_j)\mathbf{P}(Y = y_j).$$

Zadatak 1.1 Hrčak se nalazi zarobljen u labirintu. Pred njim su troja vrata. Prva vode do prolaza kojim nakon 2 minute izlazi vani. Druga vrata vode do tunela kojim se vraća na početak nakon 3 minute. Treća vode do tunela koji ga vraća na isto mjesto nakon 5 minuta. Uz pretpostavku da svaki put s jednakom vjerojatnošću bira bilo koja vrata, odredite očekivano vrijeme do izlaska iz labirinta.

▷Označimo s N vrijeme potrebno hrčku da izađe iz labirinta. Neka slučajna varijabla Y predstavlja izbor vrata. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N) &= \mathbf{E}(N \mid Y = 1)\mathbf{P}(Y = 1) + \mathbf{E}(N \mid Y = 2)\mathbf{P}(Y = 2) + \mathbf{E}(N \mid Y = 3)\mathbf{P}(Y = 3) \\
&= \frac{1}{3}(2 + 3 + \mathbf{E}(N) + 5 + \mathbf{E}(N)).
\end{aligned}$$

Stoga je $\mathbf{E}(N) = 10$. ◁

Primjer 1.4 Baca se prva kocka, a zatim druga onoliko puta koliko je pokazao rezultat na prvoj kocki. Koliko je očekivanje zbroja brojeva na drugoj kocki?

▷Neka je X rezultat na prvoj kocki, a Y zbroj brojeva na bacanjima druge kocke. Što je u ovom primjeru zadano? Za razliku od prethodnog primjera, sad ne znamo distribuciju vektora (X, Y). Umjesto toga, zadane su nam **1.** razdioba varijable X, i **2.** uvjetne razdiobe varijable Y uz uvjet X. Ova je situacija prirodna jer ona opisuje tijek nekog eksperimenta u kojem pratimo jednu varijablu (ovdje Y), a njezino ponašanje ovisi o realizacijama druge varijable (ovdje X).

Napišimo što je poznato, razdioba od X:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

i vrijednosti uvjetnog očekivanja

$$\mathbf{E}(Y \mid X{=}k) = \frac{7k}{2}, \qquad 1 \le k \le 6.$$

Naime, ako prva kocka pokaže broj k, onda se druga baca k puta, pa je očekivana vrijednost zbroja k puta veća od očekivanja rezultata na jednoj kocki, a taj je jednak $\mathbf{E}(X) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$. Vjerojatnost da će uvjetno očekivanje poprimiti svaku od ovih vrijednosti jednaka je $\frac{1}{6}$ — taj je podatak određen razdiobom varijable X.

Sad imamo

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Y \mid X)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{2}(1+2+3+4+5+6) = \frac{49}{4}.$$

◁

Uvjetno očekivanje $\mathbf{E}(Y \mid X)$ *funkcija je* slučajne varijable X. Ako definiramo funkciju ψ na sljedeći način

$$\psi(x_i) = \mathbf{E}(Y \mid X = x_i)$$

i ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

razdioba varijable X, onda je razdioba uvjetnog očekivanja

$$\mathbf{E}(Y \mid X) \sim \begin{pmatrix} \psi(x_1) & \psi(x_2) & \dots & \psi(x_n) \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$\mathbf{E}(Y \mid X) = \psi(X).$$

U prethodnom primjeru smo pisali:

$$\mathbf{E}(Y \mid X{=}k) = \frac{7k}{2}, \qquad 1 \le k \le 6.$$

pa je $\psi(k) = \frac{7}{2}k$, odnosno

$$\mathbf{E}(T \mid X) = \frac{7}{2}X.$$

Sada imamo

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Y \mid X)) = \mathbf{E}(\frac{7}{2}X) = \frac{7}{2}\mathbf{E}(X) = \frac{49}{4}.$$

Primjer 1.5 Vjerojatnost pojavljivanja događaja A u jednom pokusu iznosi p. Koliko je očekivanje broja pokusa koje treba načiniti do pojave događaja A?

▷Neka X mjeri broj pokusa. Onda X ima geometrijsku razdiobu s parametrom p, to je varijabla s distribucijom

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ p & pq & pq^2 & \dots & pq^{n-1} & \dots \end{pmatrix}$$

Njezino je očekivanje

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} pnq^{n-1}.$$

Tu vrijednost ćemo sad odrediti koristeći uvjetovanje. U tu svrhu ćemo definirati pomoćnu slučajnu varijablu Y ovako:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{ako se u prvom pokusu događaj } A \text{ ostvario,} \\ 0, & \text{ako se u prvom pokusu događaj } A \text{ nije ostvario.} \end{cases}$$

Sad imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}[\mathbf{E}(X \mid Y)] \\ &= \mathbf{E}(X \mid Y{=}1)\mathbf{P}(Y = 1) + \mathbf{E}(X \mid Y{=}0)\mathbf{P}(Y = 0) \\ &= p\mathbf{E}(X \mid Y{=}1) + q\mathbf{E}(X \mid Y{=}0) \end{aligned}$$

Uvjetna očekivanja su

$$\mathbf{E}(X \mid Y{=}1) = 1$$

jer uvjet znači da se događaj ostvario u prvom pokusu, pa mu je i očekivanje jednako 1. Nadalje

$$\mathbf{E}(X \mid Y{=}0) = 1 + \mathbf{E}(X)$$

jer se događaj u prvom pokusu nije ostvario. To znači, zbog nezavisnosti pojedinih pokusa, da moramo početi brojati ispočetka, pa je od tog trenutka očekivani broj ponavljanja ponovo jednak $\mathbf{E}(X)$. Tome treba dodati broj 1, jer je prvi pokus već obavljen.

Dobili smo

$$\mathbf{E}(X) = p + q(1 + E(X))$$

i odavde lagano slijedi

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

◁

Poopćimo ovaj primjer.

Primjer 1.6 Uz uvjete u prethodnom primjeru, koliko je očekivanje broja ponavljanja pokusa do pojave događaja A uzastopce k puta?

▷Razdiobu slučajne varijable sad nećemo određivati (to je neusporedivo teži zadatak u odnosu na prethodni). Očekivanje ćemo izračunati ponovo tehnikom uvjetovanja.

Neka je N_k slučajna varijabla koja registrira broj ponavljanja pokusa do k-tog uzastopnog pojavljivanja događaja A. Označimo očekivanje koje trebamo odrediti s $m_k := \mathbf{E}(N_k)$. Varijablu N_k ćemo uvjetovati s N_{k-1}:

$$\mathbf{E}(N_k) = \mathbf{E}[\mathbf{E}(N_k \mid N_{k-1})].$$

Razdiobu varijable N_{k-1} ne znamo, zato ne možemo direktno primijeniti standardnu formulu, umjesto toga ćemo prvo računati nutarnje uvjetno očekivanje $\mathbf{E}[N_k \mid N_{k-1}]$. To očekivanje je slučajna varijabla čiju ćemo vrijednost ovako izračunati:

$$\mathbf{E}(N_k \mid N_{k-1}) = N_{k-1} + X.$$

Tu se radi o sljedećem: Ako je poznato da se ostvarila varijabla N_{k-1}, to znači da je se posljednjih $(k-1)$ puta realizirao događaj A. U sljedećem pokusu se s vjerojatnošću p može ostvariti A, u kojem slučaju se realizira N_k. S vjerojatnošću q se A neće ostvariti, pa brojanje mora početi ispočetka, s tim da je jedan pokus upravo obavljen. To znači da vrijednostima varijable N_{k-1} moramo dodati slučajnu varijablu koja broji ponavljanja pokusa od ovog trenutka nadalje, a ona prema ovom razmatranju ima oblik

$$X \sim \begin{cases} 1, & \text{s vjerojatnošću } p, \\ 1 + N_k, & \text{s vjerojatnošću } q. \end{cases}$$

Sada dobivamo

$$\mathbf{E}[N_k] = \mathbf{E}[\mathbf{E}(N_k \mid N_{k-1})] = \mathbf{E}(N_{k-1}) + \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(N_{k-1}) + p + q\mathbf{E}(1 + N_k),$$

pa je

$$m_k = m_{k-1} + p + q(1 + m_k).$$

Odavde

$$m_k = \frac{1}{p} m_{k-1} + \frac{1}{p}.$$

Vrijedi $m_1 = \frac{1}{p}$, to je rezultat prethodnog primjera. Iteriranjem ove rekurzivne relacije dobivamo

$$m_k = \frac{1}{p^k} + \cdots + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

◁

Zadatak 1.2 Koliki je očekivani broj bacanja kocke dok ne padne 3 puta uzastopno paran broj?

1.3 Uvjetno očekivanje neprekinutih slučajnih varijabli

1.3.1 Marginalne razdiobe

Izvedene formule imaju svoje analogone i u kontinuiranom slučaju. Podsjetit ćemo se kako se definiraju marginalne i uvjetne gustoće, a zatim opisati uvjetno očekivanje u ovom slučaju.

Neka je sada (X, Y) neprekinuti slučajni vektor. To znači da je definirana njegova *gustoća*, funkcija $f(x, y)$ koja ima svojstvo

$$\mathbf{P}((X, Y) \in G) = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

za svako područje G u ravnini.

Marginalne razdiobe određene su onda formulama

$$F_X(x) := \mathbf{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{x} f_X(x) dx,$$
$$F_Y(y) := \mathbf{P}(Y < y) = \int_{-\infty}^{y} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y) dy,$$

Ovdje su f_X i f_Y marginalne gustoće varijabli X i Y pa za njih onda vrijedi

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$$
$$f_Y(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Dobivene su formule po smislu identične onima kod diskretnih varijabli. Formalno, i diskretni slučaj se može opisivati istim ovim formulama ukoliko slučajnom vektoru pridružimo gustoću

$$f(x, y) = \sum_{i,j} r_{ij} \delta(x - x_i) \delta(y - y_j).$$

Tu su δ Diracove funkcije. Ovakav je zapis čest u inžinjerskoj literaturi. Tako na primjer, možemo pisati

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i x_i p_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

pri čemu je "gustoća" poopćena funkcija

$$f_X(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i).$$

1.3.2 Uvjetne gustoće

Neka je $f(x,y)$ gustoća razdiobe slučajnog vektora (X,Y). Ako je poznata realizacija $Y=y$ varijable Y, tada se **uvjetna gustoća** varijable X uz uvjet $Y=y$ definira formulom

$$f_{X|Y=y}(x) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}.$$

Uglavnom pišemo jednostavnije $f(x \mid y)$, umjesto $f_{X|Y=y}(x)$.

Račun s uvjetnim vjerojatnostima omogućava nam lakše računanje vjerojatnosti, gustoća i očekivanja u slučaju kad realizacija događaja ili neke slučajne varijable ovisi o nekoj drugoj slučajnoj varijabli. Tu uvjetne gustoće igraju sličnu ulogu kao i uvjetne vjerojatnosti i hipoteze u formuli potpune vjerojatnosti. Tako dobivamo i analogne formule. Najprije, iz definicijske formule možemo zapisati

$$f(x,y) = f(x \mid y) f_Y(y), \tag{1.2}$$
$$f(x,y) = f(y \mid x) f_X(x). \tag{1.3}$$

Marginalne gustoće dobivamo integriranjem lijeve strane ovih jednakosti:

Marginalne i uvjetne gustoće

Marginalne gustoće možemo računati formulama

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \mid y) f_Y(y) dy, \tag{1.4}$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y \mid x) f_X(x) dx. \tag{1.5}$$

1.3.3 Uvjetno očekivanje

Definirat ćemo uvjetno očekivanje analogno diskretnom slučaju. Najprije za neku vrijednost x varijable X računamo

$$\psi(x) := \mathbf{E}(Y \mid X{=}x).$$

Time je definirana funkcija realne varijable $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sada stavljamo

$$\mathbf{E}(Y \mid X) := \psi(X).$$

Očigledno, uvjetno očekivanje je slučajna varijabla, jer je $\psi(X)$ slučajna varijabla. Nadalje, imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y \mid X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \Big(\int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \mathbf{E}(Y).
\end{aligned}$$

Ova se formula najčešće koristi u sljedećem obliku.

Dekompozicija očekivanja

Očekivanje varijable Y koja ovisi o realizacijama varijable X može se računati formulom

$$\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(Y \mid X{=}x) f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Izaberimo sad slučajnu varijablu Y na poseban način. Neka je $Y = 1_A$, karakteristična funkcija skupa A. To znači

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Tada Y poprima samo dvije vrijednosti, 0 i 1, ovu posljednju s vjerojatnošću $\mathbf{P}(A)$. Zato je

$$\mathbf{E}(Y) = 0 \cdot (1 - \mathbf{P}(A)) + 1 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A).$$

Iz istog razloga je

$$\mathbf{E}(Y \mid X{=}x) = \mathbf{P}(A \mid X{=}x).$$

Time smo dobili sljedeću korisnu formulu, koja je očito poopćenje formule potpune vjerojatnosti:

Dekompozicija vjerojatnosti

Vjerojatnost događaja koji ovisi o realizacijama slučajne varijable X može se računati formulom

$$\mathbf{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(A \mid X{=}x) f_X(x) dx.$$

Primjer 1.7 Biramo na sreću broj $Y \in [0,1]$, zatim na sreću broj $X \in [0,Y]$. Izračunaj gustoću razdiobe i očekivanje varijable X.

▷Koristit ćemo formulu

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x) f_Y(y) dy.$$

Tu je f_Y gustoća jednolike razdiobe $U(0,1)$:

$$f_Y(y) = 1, \qquad 0 \le y \le 1.$$

$f_{X|Y=y}$ je gustoća jednolike razdiobe na intervalu $[0, y]$:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{y}, \qquad 0 \le x \le y.$$

Zato je

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X|Y=y}(x) dy = \int_x^1 \frac{1}{y} dy = -\ln x, \quad 0 < x \le 1,$$

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^1 x(-\ln x) dx = \left(-\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Samo očekivanje možemo lakše dobiti formulom

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(X \mid Y{=}y) f_Y(y) dy.$$

Tu je $\mathbf{E}(X \mid Y{=}y)$ uvjetno očekivanje varijable X uz uvjet $Y = y$:

$$\mathbf{E}(X \mid Y{=}y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x) dx = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y} dx = \frac{y}{2}$$

te je

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}.$$

◁

1.4 Očekivanje i disperzija sume slučajnih varijabli

Promotrit ćemo najprije slučaj diskretnih slučajnih varijabli.

Očekivanje zbroja slučajnih varijabli

Ako slučajne varijable X i Y imaju konačno očekivanje, onda vrijedi

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Ovo svojstvo očekivanja vrijedi bez obzira na međusobnu ovisnost slučajnih varijabli X i Y. Izvod možemo načiniti na sljedeći način. Neka su razdiobe slučajnog vektora (X, Y) dane s

$$r_{ij} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

a marginalne razdiobe njegovih komponenti neka su

$$p_i = \mathbf{P}(X = x_i), \qquad q_j = \mathbf{P}(Y = y_j).$$

Znamo da onda vrijedi

$$p_i = \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_j \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j r_{ij}$$

i također

$$q_j = \mathbf{P}(Y = y_j) = \sum_i \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i r_{ij}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X+Y) &= \sum_{i,j}(x_i + y_j)r_{ij} \\
&= \sum_{i,j} x_i r_{ij} + \sum_{i,j} y_j r_{ij} \\
&= \sum_i x_i \sum_j r_{ij} + \sum_j y_j \sum_i r_{ij} \\
&= \sum_i x_i p_i + \sum_j y_j q_j \\
&= \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).
\end{aligned}$$

Indukcijom se dobiva

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) + \cdots + \mathbf{E}(X_n)$$

za bilo koji broj diskretnih slučajnih varijabli.

Slijedeće svojstvo slijedi iz prethodnog, neposredno prema definiciji disperzije.

Disperzija (varijanca) zbroja slučajnih varijabli

Varijanca zbroja slučajnih varijabla iznosi

$$\mathbf{D}\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{cov}(X_i, X_j).$$

Posebice, ako su (X_i) nekorelirane ili nezavisne, onda je

$$\mathbf{D}\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}(X_i).$$

1.5 Razdioba sume dviju slučajnih varijabli

Sume slučajnih varijabli su bitne u proučavanju stohastičkih procesa (i u statistici, također). Često nije dovoljno znati numeričke karakteristike te sume, već i detalje o distribuciji.

1.5.1 Suma diskretnih slučajnih varijabla

Distribucija sume diskretnih slučajnih varijabli može se zapisati u prikladnom obliku samo za varijable koje primaju vrijednosti u skupu zatvorenom na zbrajanje (na primjer, u skupu cijelih ili prirodnih brojeva, ili parnih brojeva i slično). Ako to nije slučaj, onda imamo problema s određivanjem koje sve vrijednosti suma može poprimiti. To se u svakom konkretnom slučaju može učiniti, ali ne postoji neka korisna općenita formula pomoću koje možemo zapisati rezultat.

Pretpostavimo da X i Y uzimaju vrijednosti u skupu $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, te

$$r_{ij} := \mathbf{P}(X = i, Y = j), \qquad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Neka je $S = X + Y$. Onda Z uzima vrijednosti u istom skupu i za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$s_n := \mathbf{P}(S = n) = \mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^{n} r_{k,n-k}$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable s distribucijama

$$p_i = \mathbf{P}(X = i), \qquad q_j = \mathbf{P}(Y = j), \qquad j = 0, 1, 2, \dots.$$

onda vrijedi $r_{ij} = p_i \cdot q_j$ pa dobivamo

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

Zaključujemo da je niz vjerojatnosti (s_n) dobiven konvolucijom iz nizova (p_n) i (q_n).

Zbog asocijativnosti konvolucije, ova tvrdnja ostaje istinita i za sumu više pribrojnika.

1.5.2 Suma neprekinutih slučajnih varijabli

Neka su X i Y neprekinute slučajne varijable s gustoćom $f(x, y)$ i $Z = \psi(X, Y)$ funkcija tog slučajnog vektora. Onda se gustoća te slučajne varijable nalazi na sljedeći način. Detalji se mogu naći u udžbeniku iz teorije vjerojatnosti.

Gustoća funkcije slučajnog vektora

Gustoća slučajne varijable $Z = \psi(X, Y)$ dobiva se formulom

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| dx, \tag{1.6}$$

gdje je f gustoća vektora (X, Y).

Primjer 1.8 Neka je $f(x, y)$ gustoća slučajnog vektora (X, Y). Odredi gustoću slučajne varijable Z ako je

A. $Z = X + Y$, **B.** $Z = Y - X$, **C.** $Z = XY$, **D.** $Z = Y/X$.

▷Koristimo formulu (1.6):

A. $y = z - x$, $g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx$.

B. $y = z + x$, $g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z + x) dx$.

C. $y = \frac{z}{x}$, $g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \frac{z}{x}) |\frac{1}{x}| \, dx$.

D. $y = zx$, $g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, zx) |x| dx$. ◁

Ako su X i Y nezavisne, i $f(x, y)$ gustoća vektora (X, Y), onda se ta funkcija može faktorizirati u umnožak marginalnih gustoća:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Za gustoću zbroja $Z = X + Y$ ovih slučajnih varijabli vrijedi, prema prethodnom primjeru

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$

U integralu zdesna prepoznajemo **konvoluciju** gustoća f_X i f_Y.

Uzastopnom primjenom ovog zaključka, dobivamo sljedeće:

Gustoća zbroja nezavisnih varijabli

Teorem 1.9 Ako su slučajne varijable $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisne, onda je gustoća njihovog zbroja $Z = X_1 + \cdots + X_n$ dana konvolucijom

$$g_Z(z) = f_{X_1} * f_{X_2} * \cdots * f_{X_n}.$$

Primjer 1.10 Slučajne varijable X_1 i X_2 nezavisne su i imaju jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 1]$. Odredimo gustoću g_Z slučajne varijable $Y = X_1 + X_2$.

▷Gustoća varijabli X_i je $f(x) = 1, 0 < x < 1$.

Gustoća varijable Y dana je konvolucijom:

$$g_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(x - u) du$$

Daljnje računanje ovisi o vrijednosti argumenta. Funkcija gustoće različita je od nule za $0 < x < 2$. Područje integracije svodi se na ono na kojem je argument funkcija u granicama od 0 do 1, jer je van toga funkcija gustoće jednaka nuli. Prema tome, mora biti $0 < u < 1$ i $0 < x - u < 1$. Zato u mora zadovoljavati sustav

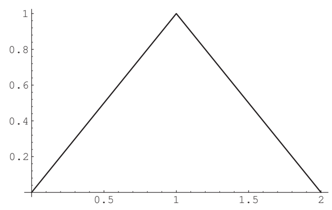
$$\begin{cases} 0 < u < 1, \\ x - 1 < u < x. \end{cases}$$

a) Za $0 < x \le 1$ oba su uvjeta zadovoljena ako je $0 < u < x$:

$$g_Y(x) = \int_0^x f(u) f(x - u) du = \int_0^x du = x.$$

b) Za $1 < x < 2$ mora biti $x - 1 < u < 1$:

$$g_Y(x) = \int_{x-1}^{1} f(u) f(x-u) du = \int_{x-1}^{1} du = 2 - x.$$



1.6 Suma slučajno mnogo pribrojnika

1.6.1 Kopije slučajnih varijabli

Primjer 1.11 Pretpostavimo da je očekivani broj nesreća u rudniku tijekom jedne godine 4. Broj ozlijeđenih radnika u svakoj nesreći je slučajna varijabla s očekivanjem 10. Koliki je očekivani broj ozlijeđenih radnika u godini dana?

Zamislimo da se neki pokus ponavlja pri nepromijenjenim uvjetima, i rezultati u svakom ponavljanju nezavisni su o prethodnim. U svakom ponavljanju promatramo vrijednost neke slučajne varijable X. Na primjer, bacamo jednu kocku i bilježimo dobivene rezultate. Na taj način dobivamo niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ koje su nezavisne i identički distribuirane kao slučajna varijabla X. Njih nazivamo *kopijama* slučajne varijable X.

U dosadašnjima razmatranjima analizirali smo zbroj $S = X_1 + \cdots + X_n$ ovako definiranih slučajnih varijabli. Izveli smo formule

$$\mathbf{E}(S) = n\mathbf{E}(X), \qquad \mathbf{D}(S) = n\mathbf{D}(X).$$

Sad ćemo promatrati slučaj kad zbrajamo *slučajan broj* slučajnih varijabli.

Waldovi identiteti

Teorem 1.12 Neka je (X_n) niz kopija slučajne varijable X koja ima konačno očekivanje i N slučajna varijabla s vrijednostima u skupu prirodnih brojeva nezavisna o varijablama $X_1, \ldots, X_n, \ldots$. Tada za očekivanje i disperziju slučajnog broja sumanada $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ vrijedi

$$\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N), \tag{1.7}$$

$$\mathbf{D}(S_N) = \mathbf{D}(X)\mathbf{E}(N) + [\mathbf{E}(X)]^2\mathbf{D}(N). \tag{1.8}$$

Dokaz. Dokažimo prvu formulu. Računamo uvjetovanjem po varijabli N:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S_N) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_N \mid N{=}n)\mathbf{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n)\mathbf{P}(N = n) \\
&= \mathbf{E}(X) \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}(N = n) \\
&= \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N).
\end{aligned}$$

Za drugu formulu računamo ovako

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S_N^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(S_N^2 \mid N{=}n)\mathbf{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{D}(S_n) + [\mathbf{E}(S_n)]^2)\mathbf{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n\mathbf{D}(X) + n^2[\mathbf{E}(X)]^2)\mathbf{P}(N = n) \\
&= \mathbf{D}(X)\mathbf{E}(N) + [\mathbf{E}(X)]^2\mathbf{E}(N^2).
\end{aligned}$$

Sada dobivamo, prema prvoj Waldovoj formuli

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(S_N) &= \mathbf{E}(S_N^2) - [\mathbf{E}(S_N)]^2 \\
&= \mathbf{D}(X)\mathbf{E}(N) + [\mathbf{E}(X)]^2\mathbf{E}(N^2) - [\mathbf{E}(X)]^2[\mathbf{E}(N)]^2 \\
&= \mathbf{D}(X)\mathbf{E}(N) + [\mathbf{E}(X)]^2\mathbf{D}(N).
\end{aligned}$$

■

Sada je rješenje Primjera 1.11 $4 \cdot 10 = 40$.

1.7 Zaustavna vremena

Uvjet nezavisnosti varijable N i niza (X_n) je u mnogim slučajevima prezahtjevan. Bilo bi korisno kad bi se on mogao oslabiti. Pokazuje se da Waldova formula vrijedi i ako je N povezan na poseban način s varijablama X_n.

Zaustavno vrijeme

Definicija 1.13 Slučajna varijabla N s vrijednostima u skupu prirodnih brojeva naziva se **zaustavno vrijeme** za niz nezavisnih slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots$ ako je pojavljivanje događaja $\{N = n\}$ potpuno određeno nizom $X_1, X_2, \ldots, X_n$. To znači da taj događaj ne ovisi o varijablama $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.

Naziv **zaustavno vrijeme** dolazi stoga što je događaj $\{N = n\}$ određen varijablama $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pa je legitimno zaustaviti promatranje onog trena kad se događaj $\{N = n\}$ realizira. Dakle, u nekom eksperimentu pratimo varijable X_1, $X_2, \dots$ i istovremeno provjeravamo vrijednost brojača N. U trenutku kad se dogodi $\{N = n\}$, prekidamo eksperiment i ne promatramo više varijable X_{n+1}, $X_{n+2}, \dots$.

Primjer će dodatno razjasniti ovaj pojam.

Primjer 1.14 Kocku bacamo dok zbroj brojeva ne premaši 30. Koliko je očekivanje broja bacanja?

▷Ovdje je niz (X_n) niz kopija slučajne varijable koja opisuje bacanje jedne kocke. Promatramo zbroj slučajnih varijabli, ali broj pribrojnika nije unaprijed određen. On je opisan brojačem N, a taj je brojač određen zahtjevom

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_N > 30.$$

Vrijednost slučajne varijable N očito ovisi o varijablama (X_n), krene li kocka pokazivati male brojeve, trebat će nam više bacanja u ovom pokusu. Međutim, N je zaustavno vrijeme za niz (X_n). Zaista, kritična vrijednost varijable N je ona u kojoj suma premašuje broj 30, i mi za vrijeme promatranja niza $X_1, X_2, \dots$ u svakom trenutku znamo je li se taj događaj ostvario ili nije. Onog trenutka kad zbroj premaši 30, vrijednost indeksa je vrijednost zaustavnog vremena i pokus se prekida.

Pokazat ćemo da Waldova formula vrijedi i ako je N zaustavno vrijeme. Onda možemo pisati

$$\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N) > 30.$$

Budući je $\mathbf{E}(X) = \frac{7}{2}$, odavde slijedi $\mathbf{E}(N) > \frac{60}{7}$.

Primjer 1.15 U igri *Ajnc* cilj je postići maksimalan zbroj brojeva na kartama, a koji ne premašuje 21. U špilu od 52 karte svaka karta vrijedi onoliko koliki je znak na njoj, slike vrijede 10. As vrijedi 1 ili 11, ovisno o zbroju ostalih karata. Cilj igre je dobiti zbroj koji je veći od onog djeliteljevog, ali ne premašuje 21. Ukoliko zbroj premaši 21, igrač automatski gubi igru, jer karte dobiva prije djelitelja.

Neka je N brojač broja karata definiran ovako:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_N \leq 21 < X_1 + X_2 + \cdots + X_{N+1}.$$

Drugim riječima, N je maksimalni broj karata koje smijemo uzeti a da ne premašimo broj 21.

Bilo bi lijepo kad bi N bilo zaustavno vrijeme. Bilo bi korisno kad bismo znali odrediti formulu za N. Naravno ova je igra analizirana do u najsitnije detalje i optimalne strategije za igru su poznate (i niti u jednoj legalnoj igrač nema prednost nad djeliteljem).

Naravno, ovako definirana optimalna slučajna varijabla N nije zaustavno vrijeme. Naime, ako odlučimo da stanemo u trenutku kad imamo četiri karte i zbroj 18, tada još uvijek ne znamo je li se realizirala slučajna varijabla N i kolika je njezina vrijednost. To ovisi o sljedećoj karti. Ako je ona veća od 3, tada je $N = 4$ i ispravno smo stali. Ali, ako je broj na karti manji ili jednak 3, onda smo trebali vući i tu kartu, pa je $N \geq 5$. Dakle, u ovoj igri, poznavanje niza $X_1, X_2, \dots, X_n$ nam ne daje informaciju je li se ostvario događaj $\{N = n\}$ ili nije.

Waldov identitet za zaustavno vrijeme

Teorem 1.16 Ako je (X_n) niz slučajnih varijabli kao u Teoremu 1.12, N konačno zaustavno vrijeme, onda vrijedi

$$\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N).$$

Dokaz. Definirajmo slučajne varijable (Y_i) formulom

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } N \geq i, \\ 0, & \text{ako je } N < i, \end{cases}$$

za sve $i = 1, 2, \ldots$ Sve informacije o događaju $\{N \geq i\}$ mogu se dobiti promatranjem niza $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}$ — taj događaj označava da do tog trenutka zaustavno vrijeme nije nastupilo. To znači da je slučajna varijabla Y_i nezavisna o $X_i, X_{i+1} \ldots$. Zato vrijedi $\mathbf{E}(X_i Y_i) = \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(Y_i)$. Nadalje, vrijedi $E(Y_i) = \mathbf{P}(N \geq i)$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) &= \mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} X_i Y_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(Y_i) \\
&= \mathbf{E}(X) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}(Y_i) \\
&= \mathbf{E}(X) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i) \\
&= \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N).
\end{aligned}$$

Ovdje smo koristili relaciju

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i) = \mathbf{E}(N)$$

koja vrijedi za sve slučajne varijable s vrijednostima u skupu prirodnih brojeva (ne samo za zaustavna vremena):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} \mathbf{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}(N = n) \\
&= \mathbf{E}(N).
\end{aligned}$$

■

Primjer 1.17

1. Neka je $X_i = 1$ ako je u i-tom bacanju simetričnog novčića pala glava i $X_i = 0$ inače. Tada je

$$N = \min\{n \colon X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 8\}$$

zustavno vrijeme niza $X_1, X_2, \ldots$ Iz Teorema 1.16 slijedi

$$\mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(N).$$

Prema definiciji sučajne varijable N, $X_1 + \cdots + X_n = 8$. Stoga je $\mathbf{E}(N) = 16$.

2. Neka je $X_i = 1$ ako je u i-tom bacanju simetričnog novčića pala glava i $X_i = -1$ inače. Tada je N iz prethodnog dijela primjera zaustavno vrijeme niza $X_1, X_2, \ldots$. Primjenom Waldovog identiteta dobili bismo

$$\mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N).$$

2. Funkcije izvodnice

2.1 Funkcije izvodnice

Račun s funkcijama izvodnicama vrlo je učinkovit kad su u pitanju stohastički procesi i slučajne varijable koje poprimaju cjelobrojne vrijednosti. Definicija funkcije izvodnice nalik je definiciji karakteristične funkcije, ali prilagođene za rad s ovim tipom slučajnih varijabli.

2.1.1 Definicija i osnovna svojstva

Funkcija izvodnica niza brojeva

Definicija 2.1 Za svaki niz (c_n) kompleksnih (ili realnih) brojeva možemo definirati funkciju

$$\psi(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{2.1}$$

koju nazivamo **funkcija izvodnica** niza (c_n).

Da bi ova funkcija bila definirana za $z \neq 0$, red (2.1) mora konvergirati. Teorija redova funkcije kompleksne varijable govori da će područje konvergencije ovog reda biti otvoreni krug sa središtem u ishodištu. U primjenama koje će uslijediti točno područje konvergencije nam neće biti važno, jer ćemo s ovakvim redovima operirati uglavnom na formalnoj razini. Stoga je dovoljno spomeniti da za ograničene nizove (c_n) red (2.1) konvergira čim je $|z| < 1$, što slijedi direktno po Cauchyjevom kriteriju.

U većini primjena, red (c_n) bit će ograničen. Štoviše, c_n će uglavnom biti niz realnih pozitivnih brojeva, pa u tom slučaju umjesto kompleksne varijable z možemo promatrati red kao funkciju realne varijable x. Ta promjena neće imati nikakve bitne posljedice na pitanje konvergencije i svojstva ovako definiranog reda.

Na formulu (2.1) možemo gledati na još jedan način. Red u (2.1) je Taylorov red funkcije ψ. Ukoliko poznajemo funkciju ψ, tada znamo odrediti i članove niza (c_n), jer vrijedi veza

$$c_n = \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}.$$

Svojstva funkcije izvodnice

Teorem 2.2

1. (**Područje konvergencije**) Red (2.1) konvergira na području $|z| < R$, pri čemu je $R \geq 0$ polumjer konvergencije reda potencija. Na području $|z| > R$ red divergira.

2. (**Operacije s redom**) Konvergencija je jednolika na svakom zatvorenom području $|z| \leq r$, $r < R$. Na tom se području red može diferencirati i integrirati član po član, neograničen broj puta.

3. (**Jedinstvenost**) Ako za dvije funkcije izvodnice

$$\psi_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \psi_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

vrijedi $\psi_a(z) = \psi_b(z)$ za $|z| \leq r$, onda je $a_n = b_n$ za svaki n.

4. (**Abelov teorem**) Ako je $a_n \geq 0$ za svaki n i red (2.1) konvergira za svaki $|z| < 1$, onda vrijedi

$$\psi(1) = \lim_{z \uparrow 1} \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

bez obzira da li red konvergira ili ne.

Dokaz ovog teorema može se naći npr. u N. Elezović, *Funkcije kompleksne varijable*.

Primjer 2.3 Neka je $c_n = 1$, za svaki n. Pripadna funkcija izvodnica glasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Red konvergira na području $|z| < 1$. Na svakom krugu $|z| \leq r < 1$ red se može derivirati član po član. Zato vrijedi npr.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)' = \psi'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Primjer 2.4 Za niz $c_n = (-1)^n$ vrijedi:

$$1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \frac{1}{1+z}.$$

Uzmemo li limes obje strane kad $z \uparrow 1$, dobit ćemo

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$$

što pokazuje da Abelov teorem nije primjenjiv za nizove s negativnim članovima.

* * *

Pokažimo sad kako se funkcije izvodnice mogu vezati uz važnu klasu slučajnih varijabli.

2.1.2 Funkcija izvodnica i slučajne varijable

Neka je X slučajna varijabla koja poprima nenegativne cjelobrojne vrijednosti:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}.$$

Niz (p_n) definira razdiobu ove slučajne varijable,

$$p_n := \mathbf{P}(X = n).$$

Funkcija izvodnica slučajne varijable

Definicija 2.5 Funkcija izvodnica slučajne varijable X definira se formulom

$$\psi_X(z) = \mathbf{E}(z^X) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n.$$

Zovemo je funkcija izvodnica pridružena slučajnoj varijabli X.

Ovaj red konvergira sigurno na području $|z| < 1$ jer je $p_n \leq 1$ za svaki n. Abelov teorem je primjenjiv i vrijedi uvijek

$$\psi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$$

Primjer 2.6 Izračunajmo funkcije izvodnice geometrijske, binomne i Poissonove slučajne varijable:

$$\begin{aligned}
&X \sim \mathcal{G}(p) && \dots \quad \psi(z) = \frac{p}{1-qz}. \\
&X \sim \mathcal{B}(n,p) && \dots \quad \psi(z) = (pz+q)^n, \\
&X \sim \mathcal{P}(\lambda) && \dots \quad \psi(z) = e^{\lambda(z-1)}.
\end{aligned}$$

▷**a)** $X \sim \mathcal{G}(p)$. Imamo

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k z^k = \frac{p}{1-qz}.$$

b) $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Imamo

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} z^k = (pz+q)^n.$$

c) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Imamo

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{\lambda z} \cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda(z-1)}. \triangleleft$$

Zadatak 2.1 Hrčak se nalazi zarobljen u labirintu. Pred njim su troja vrata. Prva vode do prolaza kojim nakon 2 minute izlazi vani. Druga vrata vode do tunela kojim se vraća na početak nakon 3 minute. Treća vode do tunela koji ga vraća na isto mjesto nakon 5 minuta. Uz pretpostavku da svaki put s jednakom vjerojatnošću bira bilo koja vrata, odredite funkciju izvodnicu slučajne varijable X, vremena koje mu je potrebno da izađe iz labirinta.

2.1.3 Funkcija izvodnica i momenti

Znajući funkciju izvodnicu možemo odrediti momente pripadne slučajne varijable. Istaknimo sljedeće veze:

1. Očekivanje slučajne varijable X:

$$\psi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n z^{n-1} \implies \mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \psi'(1).$$

2. Disperzija slučajne varijable.

$$\psi''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p_n z^{n-2},$$

$$\psi''(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n = \mathbf{E}[X(X-1)].$$

Zato vrijedi

$$\mathbf{E}(X^2) = \psi''(1) + \psi'(1).$$

Odavde se može izračunati disperzija od X:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \psi''(1) + \psi'(1) - \psi'(1)^2.$$

3. Općenitije, vrijedi

$$\mathbf{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)] = \psi^{(n)}(1).$$

Primjer 2.7 Za slučajne varijable $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ i $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$ odredimo očekivanje i disperziju.

▷U prethodnom primjeru smo dobili funkciju izvodnicu Poissonove slučajne varijable:

$$\psi_X(z) = e^{\lambda(z-1)},$$

koju potom deriviramo:

$$\psi_X'(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)}, \qquad \psi_X''(z) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}.$$

Uvrštavanjem $z = 1$ dobivamo

$$\psi_X'(1) = \lambda, \qquad \psi_X''(1) = \lambda^2.$$

Vrijedi

$$\mathbf{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbf{E}(X^2) = \lambda(\lambda+1), \qquad \mathbf{D}(X) = \lambda.$$

Na isti način računamo za slučajnu varijablu Y. Vrijedi

$$\psi_Y(z) = (pz+q)^n, \qquad \psi_Y'(z) = np(pz+q)^{n-1}, \qquad \psi_Y''(z) = (n-1)np^2(pz+q)^{n-2}.$$

Stoga je

$$\psi_Y'(1) = np, \qquad \psi_Y''(1) = (n-1)np^2,$$

odnosno

$$\mathbf{E}(Y) = np, \qquad \mathbf{E}(Y^2) = (n-1)np^2 + np, \qquad \mathbf{D}(X) = npq.$$

◁

2.1.4 Repne vjerojatnosti

Za neke slučajne varijable jednostavnije je baratati s repnim vjerojatnostima, koje se definiraju formulom

$$r_n := \mathbf{P}(X > n), \quad n \geq 0.$$

Funkciju izvodnicu pridruženu ovom nizu zvat ćemo funkcija izvodnica repne razdiobe. Niz (r_n) je niz nenegativnih brojeva, ali njegov zbroj nije jednak jedinici. Budući je svaki od tih brojeva pozitivan i manji od 1, funkcija izvodnica je dobro definirana čim je $|z| < 1$:

$$\chi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n.$$

Repna izvodnica povezana je s izvodnicom slučajne varijable. Vrijedi

$$r_n = p_{n+1} + p_{n+2} + \ldots, \qquad p_n = r_{n-1} - r_n, \quad n \geq 1.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (r_{n-1} - r_n) z^n \\
&= p_0 + z \sum_{n=1}^{\infty} r_{n-1} z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n \\
&= 1 - r_0 + z \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n + r_0 \\
&= 1 + z\chi(z) - \chi(z) = 1 + (z-1)\chi(z).
\end{aligned}$$

Primjer 2.8 Geometrijska razdioba. Neka slučajna varijabla X ima geometrijsku razdiobu:

$$p_n = \mathbf{P}(X = n) = p \cdot q^n, \qquad n \geq 0.$$

Varijabla X registrira broj pokusa prije pojavljivanja događaja A. Repna razdioba je

$$\begin{aligned}
r_n = \mathbf{P}(X > n) &= p \cdot q^{n+1} + p \cdot q^{n+2} + \ldots \\
&= p \cdot q^{n+1}(1 + q + q^2 + \ldots) = pq^{n+1} \cdot \frac{1}{1-q} = q^{n+1}.
\end{aligned}$$

Repna funkcija izvodnica je

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n = q \sum_{n=0}^{\infty} (qz)^n = \frac{q}{1-qz}.$$

2.1.5 Funkcija izvodnica zbroja nezavisnih slučajnih varijabli

Neka su X i Y dvije nezavisne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u skupu nenegativnih cijelih brojeva. Označimo njihove razdiobe ovako:

$$\mathbf{P}(X = j) = a_j, \qquad \mathbf{P}(Y = k) = b_k.$$

Budući su X i Y nezavisne, vjerojatnost događaja $\{X = j,\ Y = k\}$ iznosi $a_j b_k$.
Promotrimo sad slučajnu varijablu

$$S = X + Y.$$

Neka je njezina razdioba

$$\mathbf{P}(S = n) = c_n.$$

Događaj $\{S = n\}$ sastoji se od sljedećih međusobno disjunktnih događaja:

$$\{X = 0,\ Y = n\},\ \{X = 1,\ Y = n-1\}, \dots, \{X = n,\ Y = 0\}.$$

Zato vrijedi

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Kažemo da je niz (c_n) dobiven konvolucijom iz nizova (a_n) i (b_n). Pišemo $(c_n) = (a_n) * (b_n)$.

Na temelju veze između ovih nizova, možemo odrediti vezu između pripadnih funkcija izvodnica:

$$\psi_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad \psi_Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \qquad \psi_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Naime, vrijedi

$$\begin{aligned}
\psi_X(z)\psi_Y(z) &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_k b_j z^{k+j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j+k=n} a_k b_j z^{k+j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n = \psi_S(z)
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija izvodnica zbroja nezavisnih slučajnih varijabli jednaka je umnošku funkcija izvodnica tih slučajnih varijabli.

Ovaj se rezultat može izvesti brže, korištenjem svojstava slučajnih varijabli. Za nezavisne slučajne varijable X i Y vrijedi

$$\mathbf{E}(z^{X+Y}) = \mathbf{E}(z^X \cdot z^Y) = \mathbf{E}(z^X) \cdot \mathbf{E}(z^Y)$$

pa je

$$\psi_{X+Y}(z) = \psi_X(z) \cdot \psi_Y(z).$$

Slično vrijedi za zbroj n nezavisnih slučajnih varijabli. Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne, onda imamo:

$$\psi_{X_1+\ldots+X_n}(z) = \psi_{X_1}(z) \cdots \psi_{X_n}(z).$$

Funkcija izvodnica zbroja slučajnih varijabli

Teorem 2.9 Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable i $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, onda za pripadne funkcije izvodnice vrijedi

$$\psi_{S_n}(z) = \psi_{X_1}(z) \cdots \psi_{X_n}(z).$$

Posebno, za nezavisne identički distribuirane slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ s funkcijom izvodnice ψ_X vrijedi

$$\psi_{S_n}(z) = \psi_X(z)^n.$$

Primjer 2.10 Dva ravnopravna protivnika igraju igru. Za pobjedu dobivaju dva boda, za poraz jedan bod. Kolika je vjerojatnost da će nakon k igara prvi igrač imati n bodova?

▷Slučajna varijabla koja prati rezultat jedne igre je

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Funkcija izvodnica te slučajne varijable je

$$\psi_X(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2.$$

Ukupan broj bodova nakon k odigranih partija prati slučajna varijabla

$$S = X_1 + \ldots + X_k$$

pri čemu su $X_1, \ldots, X_k$ nezavisne kopije slučajne varijable X. Njezina funkcija izvodnica je

$$\psi_S(x) = \psi_X(z)^k = \frac{1}{2^k}(z + z^2)^k = \frac{z^k}{2^k}(1 + z)^k.$$

Vjerojatnost p_n događaja $\{S = n\}$ jednaka je koeficijentu uz potenciju x^n u ovom izrazu. Stoga vrijedi

$$p_n = \mathbf{P}(S = n) = \frac{1}{2^k}\binom{k}{n-k}.$$

Zadatak je rješiv ako je $k \leq n$ i $k \geq n/2$. ◁

Primjer 2.11 Kolika je vjerojatnost da u 4 bacanja kocke zbroj brojeva bude 6?

▷Slučajna varijabla X koja prati bacanje kocke ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Njezina je izvodnica

$$\psi_X(z) = \frac{1}{6}(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)$$

Zbroj bacanja četiriju kocaka je

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

Ovdje su X_1, X_2, X_3, X_4 nezavisne kopije varijable X. Zato je funkcija izvodniza zbroja jednaka

$$\begin{aligned}\psi_S(z) &= \frac{1}{6^4}(z + z^2 + \ldots + z^6)^4 \\ &= \frac{z^4}{6^4}(1 + z + \ldots + z^5)^4 = \frac{z^4}{6^4}\Big(\frac{1-z^6}{1-z}\Big)^4 \\ &= \frac{1}{6^4}z^4(1-z^6)^4\frac{1}{(1-z)^4}.\end{aligned}$$

Ovaj izraz moramo prikazati po potencijama nepoznanice z. Pri tome koristimo sljedeću formulu (razvoj u binomni red)

$$\frac{1}{(1-z)^n} = 1 + \binom{n}{1}z + \binom{n+1}{2}z^2 + \binom{n+2}{3}z^3 + \ldots$$

Gornji izraz prelazi u

$$\frac{1}{6^4}z^4(1 - 4z^6 + 6z^{12} + \ldots)(1 + 4z + 10z^2 + 20z^3 + \ldots)$$

i član uz z^6 ima koeficijent $10/6^4$ (koji je upravo tražena vjerojatnost).

Dakako da je tih 10 u brojniku upravo broj različitih mogućih kombinacija bacanja četiriju kocki kod kojih je zbroj jednak 6, to su ishodi 1113 (4 kombinacije) te 1122 (6 kombinacija). Međutim, kako bismo prebrojali takve kombinacije da se, recimo, tražio zbroj 12? ◁

Zadatak 2.2 Dva novčića bacaju se n puta. Kolika je vjerojatnost da će pismo na prvom novčiću pasti jednom više nego pismo na drugom novčiću?

Zadatak 2.3 Zadane su tri nezavisne slučajne varijable X_1, X_2 i X_3 sa zakonom razdiobe

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{t}{8} & \frac{t}{2} & \frac{t}{4} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,\ t \in \mathbb{R}.$$

Odredite nepoznati parametar t. Odredite vjerojatnost događaja $X_1 + X_2 = 2X_3$.

2.1.6 Funkcija izvodnica slučajnog zbroja slučajnih varijabli

Promotrimo sad slučaj zbroja *slučajno* mnogo slučajnih varijabli. Na primjer: broj ozljeđenih u prometnoj nesreći je slučajna varijabla, a broj nesreća u nekom vremenskom intervalu Poissonova slučajna varijabla. Broj ukupno ozlijeđenih bit će zbroj od slučajno mnogo slučajnih varijabli. Isto se može kazati za ukupno vrijeme razgovora u nekoj telefonskoj centrali gdje je broj ostvarenih veza i duljina svakog razgovora slučajna varijabla i sl.

Neka je N slučajna varijabla koja poprima vrijednosti unutar skupa $\{0, 1, 2, \ldots\}$, nezavisna s varijablama $X_1, X_2, \ldots$ Neka je njezin zakon razdiobe i funkcija izvodnica;

$$g_k = \mathbf{P}(N = k), \qquad \psi_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k.$$

Promotrimo slučajnu sumu slučajnih varijabli

$$S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N.$$

Stavit ćemo po dogovoru $S_0 = 0$. Događaj $\{S_N = j\}$ jest unija sljedećih disjunktnih događaja:

$$N = k \quad \text{i} \quad S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k = j.$$

Dakle:

$$\{S_N = j\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{N = k,\ S_k = X_1 + \ldots + X_k = j\}.$$

Zato je

$$\begin{aligned} h_j = \mathbf{P}(S_N = j) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = k, S_k = j) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = k)\mathbf{P}(S_k = j) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \mathbf{P}(S_k = j). \end{aligned}$$

Ovdje smo iskoristili nezavisnost slučajne varijable N i slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots$. Funkcija izvodnica slučajne sume je:

$$\begin{aligned} \psi_{S_N}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \Big[\sum_{k=0}^{\infty} g_k \mathbf{P}(S_k = j)\Big] z^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_k = j) z^j\Big] g_k = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \psi_X(z)^k = \psi_N(\psi_X(z)). \end{aligned}$$

Ovdje smo iskoristili formulu

$$\psi_{S_k}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_k = j) z^j = \psi_X(z)^k$$

koja vrijedi za zbroj fiksnog broja od k slučajnih varijabli $X_1, \ldots, X_k$.

Primjer 2.12 Novčić se baca onoliko puta koliko to pokaže kocka. Odredi razdiobu broja pisama.

▷Broj pisama bit će rezultat zbroja slučajno mnogo slučajnih varijabli s razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Broj takvih varijabli određen je slučajnom varijablom

$$N \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Funkcije izvodnice ovih slučajnih varijabli su

$$\psi_X(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z, \qquad \psi_N(z) = \frac{1}{6}(z + z^2 + \ldots + z^6).$$

Zato je funkcija izvodnica tražene slučajne varijable $S = X_1 + \ldots + X_N$ jednaka

$$\psi_S(z) = \psi_N(\psi_X(z)) = \frac{\frac{1}{2}(1+z)}{6}\big[1 + \frac{1}{2}(1+z) + \frac{1}{4}(1+z)^2 + \ldots + \frac{1}{32}(1+z)^5\big].$$

Sređivanjem ovog izraza po potencijama varjable z dobivamo traženu razdiobu. Tako npr. vrijedi

$$\mathbf{P}(S=0) = \frac{1}{12}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}) = \frac{63}{12 \cdot 32}.$$

◁

Primjer 2.13 Broj poziva u centralu s dva pozivna broja ima Poissonovu razdiobu s parametrom λ. Ako su p i q vjerojatnosti da bude pozvan prvi, odnosno drugi broj ($p + q = 1$), odredimo razdiobu slučajne varijable koja prati broj poziva na prvi broj centrale.

▷Ovdje je brojač poziva na prvi broj centrale opisan slučajnim zbrojem

$$S = X_1 + \ldots + X_N$$

pri čemu je svaka od slučajnih variijabli $X_1, X_2, \ldots$ nezavisna kopija slučajne variijable

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

a slučajna varijabla N ima Poissonovu razdiobu, $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \psi_X(z) &= q + pz, \\ \psi_N(z) &= e^{\lambda(z-1)}, \\ \psi_S(z) = \psi_N(\psi_X(z)) &= e^{\lambda(q+pz-1)} = e^{\lambda p(z-1)}. \end{aligned}$$

Ovdje prepoznajemo funkciju izvodnicu Poissonove slučajne varijable s parametrom λp. Zbog teorema o jednoznačnosti, slučajna varijabla S ima razdiobu $\mathcal{P}(\lambda p)$. ◁

Primjer 2.14 Kocka se baca dok se ne pojavi broj 6. Odredi razdiobu zbroja pojavljenih brojeva.

▷Ovdje je praktičnije umjesto standardne slučajne varijable koja prati bacanje kocke promatrati kocku iz koje je "izbačena" šestica, jer se šestica smije pojaviti samo jednom:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Broj bacanja kocke pratit će brojač koji ima geometrijsku razdiobu (jer promatra broj bacanja *do pojave* šestice):

$$N \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \cdot \frac{5^2}{6^2} & \frac{1}{6} \cdot \frac{5^3}{6^3} & \ldots \end{pmatrix}$$

Onda je traženi zbroj opisan slučajnom varijablom

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N + 6$$

Funkcije izvodnice su (zanemarimo na trenutak dodanu vrijednost 6 zbroju S):

$$\psi_X(z) = \frac{1}{5}(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5), \tag{2.2}$$

$$\psi_N(z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\cdot\frac{5^2}{6^2}z^2 + \ldots = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}z} = \frac{1}{6-5z}, \tag{2.3}$$

$$\psi_S(z) = \psi_N(\psi_X(z)) = \frac{1}{6 - z - z^2 - \ldots - z^5}. \tag{2.4}$$

Da bismo izračunali vjerojatnost događaja $\{S = k\}$, moramo odrediti koeficijent uz z^{k-6} u razvoju ove funkcije u Taylorov red.

Jedan način da se to učini jest sljedeći:

$$\begin{aligned}\psi_S(z) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{6}(1+z+\ldots+z^4)} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{z}{6^2}(1+z+z^2+z^3+z^4) + \frac{z^2}{6^3}(1+z+z^2+z^3+z^4)^2 \\ &\quad + \frac{z^3}{6^4}(1+z+z^2+z^3+z^4)^3 + \frac{z^4}{6^5}(1+z+z^2+z^3+z^4)^4 + \ldots\end{aligned}$$

Prvih nekoliko vrijednosti u ovom razvoju su:

$\{S = 6\}$	$[z^0]$	$\frac{1}{6}$
$\{S = 7\}$	$[z^1]$	$\frac{1}{6^2}$
$\{S = 8\}$	$[z^2]$	$\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} = \frac{7}{6^3}$
$\{S = 9\}$	$[z^3]$	$\frac{1}{6^2} + 2\cdot\frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} = \frac{7^2}{6^4}$
$\{S = 10\}$	$[z^4]$	$\frac{1}{6^2} + 3\cdot\frac{1}{6^3} + 3\cdot\frac{1}{6^4} + \frac{1}{6^5} = \frac{7^3}{6^5}$
$\{S = 11\}$	$[z^5]$	$\frac{1}{6^2} + 4\cdot\frac{1}{6^3} + 6\cdot\frac{1}{6^4} + 4\cdot\frac{1}{6^5} + \frac{1}{6^6} = \frac{7^4}{6^6}$

Drugi način jest direktnim dijeljenjem $1 : 6 - z - z^2 - z^3 - z^4 - z^5$. Ovakav postupak dijeljenja može se riješiti algoritamskim putem. ◁

Zadatak 2.4 Neka je N broj posjeta kockara kockarnici u godini dana. Pretpostavimo da slučajna varijabla N ima geometrijsku razdiobu s parametrom θ. Tijekom svakog dolaska kockar s vjerojatnošću p osvoji neki iznos. Neka je S broj posjeta kada je kockar nešto osvojio. Odredite razdiobu slučajne varijable S.

Zadatak 2.5 Bacamo simetrični novčić sve dok ne padne pismo. Svako bacanje novčića popratimo bacanjem kocke, te zabilježimo broj koji padne. Napišite funkciju izvodnicu za zbroj tako dobivenih brojeva (uključujući zadnje bacanje).

2.1.7 Polinomijalna shema

Binomna razdioba je jedna od najčešće korištenih diskretnih razdioba. Ona mjeri broj realizacija događaja A pri ponavljanju pokusa n puta.

Pri svakom ponavljanju u ovom modelu promatramo samo jedan za nas interesantan događaj A. To znači da će se u svakom pokusu ostvariti ili događaj A, ili njemu suprotan događaj $\overline{A}$.

Neka je p vjerojatnost za pojavljivanje događaja A u jednom izvođenju pokusa. Vjerojatnost da se događaj A pojavi k puta u nizu od n nezavisnih pokusa dana je sa

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Ovaj izraz javlja se pri razvoju potencije binoma:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Ta se formula može poopćiti na potencije složenijih izraza. Tako npr., potencija trinoma glasi

$$(p+q+r)^n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} p^{n_1} q^{n_2} r^{n_3}.$$

a u općem slučaju vrijedi

$$(p_1+p_2+\ldots+p_r)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_r=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}.$$

Ovu formulu nazivamo **polinomijalna formula**.

Polinomijalna razdioba

Promotrimo sad poopćenje ove binomne sheme. Pretpostavimo da se u svakom pokusu mora ostvariti točno jedan od r međusobno disjunktnih događaja $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Za ove događaje onda vrijedi

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r = , \qquad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Neka je $p_i = \mathbf{P}(A_i)$. Onda su $p_1, \ldots, p_r$ pozitivni brojevi čiji je zbroj jednak 1.

Polinomijalna razdioba

Definicija 2.15 Promatramo niz od n nezavisnih pokusa, tako da se u svakom pokusu može ostvariti samo jedan od disjunktnih događaja $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Tada je vjerojatnost da će se A_1 pojaviti n_1 puta, A_2 n_2 puta,…, A_r n_r puta $(n_1+n_2+\ldots+n_r=n)$ dana sa

$$p_{n_1,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}.$$

Ovakvu razdiobu nazivamo **polinomijalna razdioba**.

Primjer 2.16 U urni se nalaze pet kuglica, dvije crvene, dvije bijele i plava. U modelu s vraćanjem, izvlačimo jednu po jednu šest kuglica. Kolika je vjerojatnost da ćemo pri tom izvući crvenu kuglicu barem dvaput, a bijelu barem tri puta?

▷Pokus ponavljamo šest puta, pod istim okolnostima. Neka su A_1, A_2, A_3 redom događaji: izvučena je crvena, bijela odnosno plava kuglica. Njihove vjerojatnosti su $p_1 = \frac{2}{5}$, $p_2 = \frac{2}{5}$, $p_3 = \frac{1}{5}$

Izvlačenje kuglica opisano je polinomijalnom razdiobom za $n = 6$ i s opisanim vjerojatnostima. Traženom događaju odgovaraju vjerojatnosti

$$p_{2,3,1} + p_{3,3,0} + p_{2,4,0}.$$

Dakle,

$$P = \frac{6!}{2!3!1!}p_1^2p_2^3p_3 + \frac{6!}{3!3!0!}p_1^3p_2^3p_3^0 + \frac{6!}{2!4!0!}p_1^2p_2^4p_3^0 = \frac{13 \cdot 2^6}{5^5} = 0.266. \triangleleft$$

Izvodnica polinomijalne razdiobe

Odredimo funkciju izvodnicu za polinomijalnu shemu. Ona će biti u ovom slučaju funkcija r varijabli, jer svaki od r događaja ima svoju slučajnu varijablu koja prati broj realizacija tog događaja.

Vjerojatnost dana u (**??**) jednaka je koeficijentu uz član $u_1^{n_1} \cdots u_r^{n_r}$ pri razvoju funkcije

$$\psi(u_1, \ldots, u_r) = (p_1u_1 + \ldots + p_ru_r)^n.$$

Funkciju ψ nazivamo **izvodnica** polinomijalne razdiobe. Nju ćemo vrlo uspješno koristiti u zadacima vezanim s polinomijalnom razdiobom.

Spomenimo još da je izvodnica za dva niza pokusa, od kojih prvi ima n a drugi m ponavljanja upravo umnožak izvodnica, što je očigledno iz oblika te funkcije.

Primjer 2.17 Kocku bacamo 5 puta. Kolika je vjerojatnost da će se jedinica pojaviti jednom više nego dvojka?

▷Zadatak ćemo riješiti korištenjem polinomijalne sheme. Mogući ishodi su $A_1, \ldots, A_6$, koji odgovaraju ishodu bacanja kocke. Zanima nas vjerojatnost da se A_1 pojavio jednom više od A_2. Uvrstimo u opći oblik funkcije izvodnice $r = 6$, $u_1 = u$, $u_2 = \frac{1}{u}$, $u_3 = \ldots = u_6 = 1$:

$$G(u) = (p_1u + \frac{p_2}{u} + p_3 + \ldots + p_6)^n.$$

Što dobivamo razvojem ove funkcije u red po nepoznanici u? Po općoj polinomijalnoj shemi, koeficijent uz potenciju u^k određuje vjerojatnost događaja kod kojeg se A_1 realizirao k puta više nego događaj A_2 (k može biti i negativan!)

Uvrstimo sada i ostale vrijednosti. Imamo: $n = 5$, $p_1 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$ i izdvojimo članove koji sadrže u^1 u funkciji

$$G(u) = \frac{1}{6^5}\Big(u + \frac{1}{u} + 4\Big)^5.$$

Ti su članovi

$$\frac{1}{6^5}\big(\frac{5!}{1!0!4!}u^1 4^4 + \frac{5!}{2!1!2!}u^2\frac{1}{u}4^2 + \frac{5!}{3!2!0!}u^3\frac{1}{u^2}\big).$$

Koeficijent uz u^1 predstavlja traženu vjerojatnost:

$$p = \frac{1}{6^5}(5 \cdot 4^4 + 30 \cdot 4^2 + 10) = 0.23. \triangleleft$$

2.1.8 Izbor podskupa zadanog skupa

U mnogim primjerima javlja se problem odabira nekih elemenata zadanog skupa. Opišimo moguće načine biranja tih elemenata i riješimo nekoliko tipičnih primjera.

Razjasnimo najprije formulaciju "*Skup A je na sreću odabrani podskup skupa S*". Ona znači da je svaki od mogućih podskupova pri ovakvom izboru jednako vjerojatan. Ako skup S ima n elemenata, onda je broj njegovih podskupova jednak 2^n. Zato je vjerojatnost za svaki od podskupova jednaka $1/2^n$.

Tako na primjer, vjerojatnost da će odabrani skup imati točno k elemenata jednaka je

$$p_k = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

jer je broj podskupova s točno k elemenata jednak $\binom{n}{k}$.

Da je ovakvo tumačenje odabira logično, možemo se uvjeriti na još jedan način. Izbor podskupa jednoznačno je određen nizom nula i jedinica duljine n. Tako npr. za $n = 6$ niz 001101 označava da su u podskup odabrani treći, četvrti i šesti element skupa.

Ovakvih nizova ima 2^n i svi su jednako vjerojatni.

Primjer 2.18 Skup A bira se na sreću među elementima skupa $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Kolika je vjerojatnost da će on imati neparan broj elemenata?

$\triangleright$Tražimo vjerojatnost zbroja $p_1 + p_3 + \dots$, pri čemu je $p_k = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$. Promotrimo sljedeća dva razvoja:

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots, \\ 0 = (1-1)^n &= 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \end{aligned}$$

Oduzimanjem dobivamo

$$2^n = 2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{5} + \dots$$

Zato je

$$p_1 + p_3 + p_5 = \frac{1}{2}.$$

$\triangleleft$

Primjer 2.19 Skupovi A_1, A_2 biraju se na sreću među podskupovima skupa $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Kolika je vjerojatnost da oni nemaju zajedničkih elemenata?

$\triangleright$Broj svih mogućih izbora dvaju podskupova je $N = 2^n \cdot 2^n = 4^n$. Odredimo broj povoljnih. Neka skup A_1 ima k elemenata. Broj načina na koji se takav skup može odrediti je $\binom{n}{k}$. Sada su povoljni svi oni izbori kod kojih je A_2 podskup od preostalih $n-k$ elemenata. Broj takvih izbora je 2^{n-k}. Zato je

$$M = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n.$$

Stoga je tražena vjerojatnost $(3/4)^n$. ◁

Primjer 2.20 Skupovi $A_1, \dots, A_r$ izabrani su na sreću među podskupovima skupa $S = \{1, 2, \dots, n\}$ (jedan nezavisno od drugog). Kolika je vjerojatnost da se nijedna dva među njima ne sijeku?

▷Zadatak je poopćenje prethodnog. Riješiti ćemo ga drukčijim pristupom. Bitno je uočiti sljedeće: izabrati r međusobno disjunktnih skupova isto je što i podijeliti skup S na $r+1$ dio. (Posljednji skup, nazovimo ga A_{r+1}, sadrži sve one elemente koji nisu uzeti niti u jednom od skupova $A_1, \dots, A_r$.) Neka je n_1 broj elemenata skupa A_1, n_2 broj elemenata skupa $A_2, \dots, n_{r+1}$ broj elemenata skupa A_{r+1}. Pri tom je $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_{r+1}$. Broj načina na koji se mogu izabrati skupovi s tim brojevima elemenata u njima je

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_r}{n_{r+1}} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{r+1}!}$$

Ovaj razlomak upućuje da je taj broj jednak broju svih permutacija skupa od n elemenata među kojima postoje skupine od $n_1, n_2, \dots, n_{r+1}$ jednakih elemenata. Zaista, pri raspoređivanju elemenata u skupove možemo poistovjetiti sve one elemente koji se nađu u istom skupu. Stoga je broj različitih izbora podskupova jednak $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_{r+1}}$.

Potrebno je još zbrojiti po svim mogućim izborima brojeva $n_1, \dots, n_{r+1}$. Po polinomijalnoj formuli dobivamo

$$\sum_{n_1+\ldots+n_{r+1}=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{r+1}!} = (\underbrace{r+1} \to 1+1+\ldots+1)^n = (r+1)^n.$$

Broj svih mogućih rasporeda je $(2^n)^r$. Stoga je vjerojatnost $\left(\frac{r+1}{2^r}\right)^n$. ◁

Primjer 2.21 Dva podjednaka šahista igraju dvoboj na 20 partija. Vjerojatnost za pobjedu u pojedinoj partiji za svakog od njih iznosi 0.2. Kolika je vjerojatnost da će rezultat meča biti 12 : 8?

▷Povoljni ishodi za ovaj događaj su oni kod kojih će jedan od igrača dobiti k partija, drugi $4+k$, dok će preostalih $16-2k$ partija završiti neodlučenim ishodom. k se kreće u rasponu $k = 0, 1, \dots, 8$. Tako dobivamo

$$p = 2\sum_{k=0}^{8} P_{20;k,4+k,16-2k} = 2 \cdot \frac{20!}{5^{20}} \sum_{k=0}^{8} \frac{3^{16-2k}}{(4+k)!k!(16-2k)!} = 0.104. \triangleleft$$

Primjer 2.22 Kolika je vjerojatnost da u 4 bacanja kocke zbroj brojeva bude 6?

▷Sada je $m = 6$, $p_1 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$, $n = 4$. Funkcija izvodnica glasi

$$G(u_1, \ldots, u_6) = \frac{1}{6^4}(u_1 + \ldots + u_6)^4.$$

Koeficijent uz $u_1^{n_1} \cdots u_6^{n_6}$ daje vjerojatnost da se broj 1 pojavio n_1 puta,..., broj 6 n_6 puta. Da bi zbroj brojeva bio 6, nužno je da bude $1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \ldots + 6 \cdot n_6 = 6$. Stoga trebamo izdvojiti sve one članove za koje je ovaj uvjet ispunjen.

To ćemo učiniti koristeći pogodan izbor nepoznanica $u_1, \ldots, u_6$. Stavimo $u_1 = u$, $u_2 = u^2, \ldots, u_6 = u^6$. Tada vrijedi

$$u_1^{n_1} \cdots u_6^{n_6} = u^{n_1} \cdot u^{2n_2} \cdots u^{6n_6} = u^{n_1 + 2n_2 + \ldots + 6n_6} = u^6$$

i vidimo da je dovoljno odrediti član uz potenciju u^6. Imamo

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{1}{6^4}(u + u^2 + \ldots + u^6)^4 \\ &= \frac{u^4}{6^4}(1 + u + \ldots + u^5)^4 = \frac{u^4}{6^4}\Big(\frac{1-u^6}{1-u}\Big)^4 \\ &= \frac{1}{6^4}u^4(1-u^6)^4\frac{1}{(1-u)^4}. \end{aligned}$$

Ovaj izraz moramo prikazati po potencijama nepoznanice u. Pri tome koristimo sljedeću formulu (razvoj u binomni red)

$$\frac{1}{(1-u)^n} = 1 + \binom{n}{1}u + \binom{n+1}{2}u^2 + \binom{n+2}{3}u^3 + \ldots$$

Gornji izraz prelazi u

$$\frac{1}{6^4}u^4(1 - 4u^6 + 6u^{12} + \ldots)(1 + 4u + 10u^2 + 20u^3 + \ldots)$$

i član uz u^6 ima koeficijent $10/6^4$ (koji je upravo tražena vjerojatnost).

Dakako da je tih 10 u brojniku upravo broj različitih mogućih kombinacija bacanja četiriju kocki kod kojih je zbroj jednak 6, to su ishodi 1113 (4 kombinacije) te 1122 (6 kombinacija). Međutim, kako bismo prebrojali takve kombinacije da se, recimo, tražio zbroj 12? ◁

Primjer 2.23 Bacaju se dva novčića n puta. Izračunaj vjerojatnost da će se ostvariti jednak broj grbova.

▷Promatrajmo bacanje prvog novčića. Ono je opisano funkcijom izvodnice

$$G_1(u_1, u_2) = (\tfrac{1}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_2)^n.$$

Stavimo $u_1 = u$, $u_2 = 1$. Dobivamo

$$G_1(u) = \frac{1}{2^n}(u+1)^n.$$

Koeficijent uz u^k u ovoj funkciji izvodnici glasi $\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$ i pretstavlja vjerojatnost da se na prvom novčiću grb pojavi k puta.

Slično ćemo u funkciji izvodnici koja prati bacanje drugog novčića staviti $u_1 = 1/u$, $u_2 = 1$:

$$G_2(u) = \frac{1}{2^n}\Big(\frac{1}{u} + 1\Big)^n.$$

Koeficijent uz u^{-k} daje vjerojatnost za k pojavljivanja grbova na drugom novčiću.

Funkcija izvodnica kompletnog pokusa je

$$G(u) = G_1(u)G_2(u) = \frac{1}{4^n}\Big(u + 2 + \frac{1}{u}\Big)^n.$$

Tražimo koeficijent p uz u^0, jer je u tom slučaju ostvaren jednak broj grbova na oba novčića!

$$G(u) = \frac{(u+1)^{2n}}{4^n\, u^n} \implies p = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

i to je tražena vjerojatnost. ◁

Primjer 2.24 Broj na srećki može biti bilo koji između 000 000 i 999 999, s jednakom vjerojatnošću. Kolika je vjerojatnost da zbroj prvih triju znamenki bude jednak zbroju posljednjih triju?

▷Zamislimo da broj srećke biramo znamenku po znamenku. Tada je mogućih ishoda pri biranju svake znamenke 10, i vjerojatnost za svaki ishod je $\frac{1}{10}$. Promotrimo najprije izbor prvih triju znamenki. Funkcija izvodnica koja prati taj izbor glasi

$$G_1(u_0, \ldots, u_9) = \frac{1}{10^3}(u_0 + \ldots + u_9)^3.$$

Stavimo $u_k = u^k$. Prema analizi u prethodnom primjeru, koeficijent uz u^N je upravo vjerojatnost da zbroj prvih triju znamenki bude baš N. Funkcija G_1 glasi

$$G_1(u) = \frac{1}{10^3}(1 + u + \ldots + u^9)^3 = \frac{1}{10^3}\Big(\frac{1-u^{10}}{1-u}\Big)^3.$$

Promotrimo sada izbor posljednja tri znamenke. Stavimo $u_k = u^{-k}$. Tada je

$$G_2(u) = \frac{1}{10^3}\Big(\frac{1-u^{-10}}{1-u^{-1}}\Big)^3 = \frac{1}{10^3}\Big(\frac{1-u^{10}}{1-u}\Big) \cdot \frac{1}{u^27}$$

i koeficijent uz u^{-N} daje vjerojatnost da je zbroj posljednjih triju znamenki jednak N.

Umnožak $G_1 \cdot G_2$ daje funkciju izvodnicu za izbor oba skupa znamenki. Potencija uz nepoznanicu u govori kolika je razlika u zbroju prve tri u odnosu na posljednje tri znamenke. Stoga je u ovom umnošku potrebno potražiti koeficijent uz potenciju u^0.

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{1}{10^6}\frac{1}{u^{27}}\Big(\frac{1-u^{10}}{1-u}\Big)^6 \\ &= \frac{1}{10^6 u^{27}}\Big[1-\binom{6}{1}u^{10}+\binom{6}{2}u^{20}-\binom{6}{3}u^{30}+\ldots\Big]\times \\ &\qquad \times\Big[1+\binom{6}{1}u+\binom{7}{2}u^2+\binom{8}{3}u^3+\ldots\Big]. \end{aligned}$$

Traženi koeficijent je

$$p = \frac{1}{10^6}\Big[\binom{32}{27}-\binom{6}{1}\binom{22}{17}+\binom{6}{2}\binom{12}{5}\Big] = 0.055. \triangleleft$$

Primjer 2.25 **a)** Dva podjednaka protivnika igraju križić–kružić toliko dugo dok jedan od njih ne dobije dvije partije više od drugog. Kolika je vjerojatnost da su odigrali ukupno $2n$ partija?
åb) Ukoliko se igrači dogovore da će odigrati $2n$ partija, kolika je vjerojatnost da će prvi dobiti dvije partije više od drugog?

$\triangleright$**a)** Neka je p_k vjerojatnost nerješenog ishoda nakon $2k$ partija. Taj će ishod biti nerješen ukoliko je nakon $2(k-1)$ partija također bio nerješen (inače bi igra prestala ranije) a u posljednje dvije igre je svaki igrač dobio po jednu partiju. Vjerojatnost toga je $\frac{1}{2}$. Zato

$$p_k = \tfrac{1}{2}p_{k-1}, \quad k \geq 1, \qquad p_0 = 1$$

i odavde $p_k = 1/2^k$.

Kada će se ostvariti traženi događaj? Samo onda ako je nakon $2n-2$ partije ishod bio nerješen, a u posljednje dvije partije pobijedio je isti igrač. Stoga je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = \tfrac{1}{2}p_{n-1} = \frac{1}{2^n}.$$

b) Ukoliko je dogovoreno da će se odigrati $2n$ partija, tada zadatak prelazi u polinomijalnu shemu, uz funkciju izvodnice

$$G(u_1, u_2) = (\tfrac{1}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_2)^{2n}.$$

Uvrstiti ćemo $u_1 = u$, $u_2 = 1/u$ i potražiti član uz u^2:

$$G(u) = \frac{1}{2^{2n}}\Big(u+\frac{1}{u}\Big)^{2n} = \frac{(u^2+1)^{2n}}{4^n\, u^{2n}}.$$

Traženi je član

$$p = \binom{2n}{n+1}\frac{1}{2^{2n}}. \triangleleft$$

2.2 Laplaceova transformacija

Neka je f realna funkcija na intervalu $[0, +\infty\rangle$ takva da

1. je po dijelovima neprekidna,
2. postoje realne konstante a i s_0 za koje vrijedi $f(x) \leq a^{s_0 x}$, $\forall x \geq 0$.

Laplaceova transformacija

Definicija 2.26 **Laplaceov transformat** $\mathcal{L}(f)$ funkcije f je funkcija definirana s

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

gdje je s kompleksni broj takav da je $\Re(s) > s_0$.

Ako je f funkcija gustoće slučajne varijable X onda je $\mathcal{L}(f) = \mathbf{E}(e^{-sX})$.

Svojstva Laplaceove transformacije

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u\Big) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s), \\
\mathcal{L}(f'(x)) &= s\mathcal{L}(f)(s) - f(0), \\
\mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \alpha\mathcal{L}(f_1) + \beta\mathcal{L}(f_2), \\
\mathcal{L}(f_1 * f_2) &= \mathcal{L}(f_1) \cdot \mathcal{L}(f_2).
\end{aligned}$$

Primjer 2.27 Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Računamo Laplaceov transormat funkcije f:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{s+\lambda}, \quad s + \lambda > 0.$$

Vrijedi:

$$\frac{\mathrm{d}^n \mathcal{L}(f)(s)}{\mathrm{d}s^n} = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{\lambda n!}{(s+\lambda)^{n+1}}.$$

Stoga je

$$\mathbf{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Karakteristična funkcija slučajne varijable X

$$\psi(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

je Fourierova transformacija funkcije f.

Primjer 2.28 Slučajne varijable X_1, X_2 i X_3 su nezavisne i imaju jednoliku razdiobu na intervalu $[0,1]$. Odredimo gustoću g_Z slučajne varijable $Z = X_1 + X_2 + X_3$.

▷Funkciju f zapisujemo u obliku

$$f(x) = u(x) - u(x-1),$$

gdje je u jedinična step funkcija. Tada je Laplaceov transformat funkcije f

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}.$$

Korištenjem svojstva 4 dobivamo

$$\mathcal{L}(g_Z)(s) = (\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s})^3 = \frac{1}{s^3}(1 - 3e^{-s} + 3e^{-2s} - e^{-3s}).$$

Original ove funkcije je

$$g_Z(s) = \frac{1}{2}x^2u(x) - \frac{3}{2}(x-1)^2u(x-1) + \frac{3}{2}(x-2)^2u(x-2) - \frac{1}{2}(x-3)^2u(x-3),$$

odnosno

$$g_Z(s) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x < 1, \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & 1 \le x < 2, \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}, & 2 \le x < 3, \\ 0, & 3 < x. \end{cases}$$

◁

2.3 Zadaci za vježbu

Zadatak 2.6 Koristeći funkcije izvodnice, odredi očekivanje i disperziju geometrijske, binomne i Poissonove razdiobe.

Zadatak 2.7 Označimo

$$a_1 = \mathbf{E}(X), \quad a_2 = \mathbf{E}[X(X-1)], \dots \quad a_n = \mathbf{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)],$$
$$m_1 = \mathbf{E}(X), \quad m_2 = \mathbf{E}(X^2), \dots, \quad m_n = \mathbf{E}(X^n).$$

Napiši algoritam kojim će se zadani vektor $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ prebacivati u vektor $[m_1, m_2, \dots, m_n]$.

Zadatak 2.8 Ako je χ repna izvodnica slučajne varijable X, dokaži da vrijedi

$$\mathbf{E}(X) = \chi(1), \qquad \mathbf{D}(X) = 2\chi'(1) + \chi(1) - \chi(1)^2.$$

Zadatak 2.9 Kolika je vjerojatnost da pri bacanju 10 kocaka zbroj na njima bude 20?

Zadatak 2.10 Bačeno je n kocaka. Izračunaj vjerojatnost da je zbroj brojeva na njima jednak $n+2$.

Zadatak 2.11 Unutar intervala $[0, 10]$ na sreću je odabrano 5 točaka. Izračunaj vjerojatnost da dvije točke padnu u interval $[0, 2]$, jedna u $[2, 3]$ i dvije u $[3, 10]$.

Zadatak 2.12 Unutar intervala $[0, 5]$ na sreću je odabrano šest točaka. Izračunaj vjerojatnost događaja:
$A =$ barem dvije točke su pale unutar intervala [0,1],
$B =$ tri točke su pale unutar intervala [0,2], dvije unutar [2,4], a jedna unutar [4,5].

Zadatak 2.13 n kuglica se na sreću raspoređuje u n kutija. Odredi vjerojatnost da točno jedna kutija ostane prazna.

Zadatak 2.14 Kocka je bačena 21 put. Odredi vjerojatnost da se pojavi 1 jedinica, 2 dvojke,. . . , 6 šestica.

Zadatak 2.15 Dva šahista igraju meč na 10 partija. Vjerojatnost dobitka prvog igrača je 0.3, vjerojatnost dobitka drugog 0.2. Kolika je vjerojatnost da će prvi igrač pobijediti rezultatom 6 : 4?

Zadatak 2.16 Novčić je bačen n puta. Pokaži da je vjerojatnost da se pismo ne pojavi dvaput uzastopce jednaka

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}}{4^{n+1}\sqrt{5}}.$$

3. Slučajno pomicanje

3.1 Trajektorije slučajnog pomicanja

Promatrajmo česticu koja se kreće po cjelobrojnim točkama brojevnog pravca. Iz svake točke ona može prijeći u susjednu lijevu ili desnu cjelobrojnu točku.

Ako se čestica nalazi u točki s ordinatom n, neka je p_n vjerojatnost pomaka udesno, a q_n vjerojatnost pomaka ulijevo, $p_n + q_n = 1$.

Pomicanje čestice nazivamo **slučajnim pomicanjem**. Slučajno pomicanje može se opisati nizom jednostavnih slučajnih varijabli. Neka nezavisne slučajne varijable (Y_n) imaju zakon razdiobe

$$Y_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q_n & p_n \end{pmatrix}.$$

Ovdje su p_n i q_n pozitivni brojevi i vrijedi $p_n + q_n = 1$.

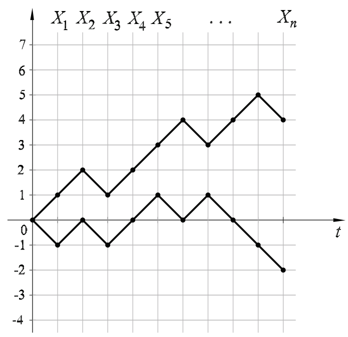
Definirajmo sad novi niz (X_n) slučajnih varijabli formulom

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0, \\ X_n &= x_0 + Y_1 + \cdots + Y_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Ovaj se niz naziva **slučajno pomicanje**.

On opisuje gibanje čestice koja u trenutku t_0 starta u točki x_0, a zatim u svakom sljedećem trenutku $t_1, t_2, \ldots$ kreće bilo desno (s vjerojatnošću p_n) bilo lijevo (s vjerojatnošću $q_n = 1 - p_n$). Slučajna varijabla X_n opisuje položaj čestice u trenutku t_n.

Gibanje ove čestice može se predočiti i **trajektorijom**, koja ima oblik izlomljene linije koja spaja točku s koordinatama (n, x) s jednom od točaka $(n+1, x \pm 1)$. U ovakvom prikazu, horizontalna os predstavlja (diskretno) vrijeme, opisano varijablom n, a položaj čestice se nanosi na vertikalnoj osi.



Slika 3.1: Trajektorija slučajnog pomicanja, s početkom u $x_0 = 0$.

U nastavku ćemo pretpostavljati da je slučajno pomicanje **homogeno u vremenu**, to jest da vjerojatnosti pomaka ne ovise o trenutku n.

Ako je N duljina trajektorije (broj koraka) tada je broj svih različitih trajektorija duljine n jednaka 2^N, pošto u svakom trenutku čestica ima na izboru dvije mogućnosti pomicanja.

Primjer 3.1 Koliki je broj trajektorija koje kreću iz ishodišta i završavaju u točki (n,k)?

▷Neka je x broj uspona, a y broj padova u trajektoriji. Da bi čestica stigla u točku (n,k), mora biti $n = x + y$, $k = x - y$. Odavde

$$x = \frac{n+k}{2}, \qquad y = \frac{n-k}{2}.$$

Dakle, n i k moraju biti iste parnosti.

Pretpostavimo da je taj uvjet ispunjen. Broj različitih trajektorija odgovara broju načina na koji možemo odabrati trenutke u kojima se čestica, recimo, penje: trebamo rasporediti x uspona na n mogućih mjesta. Broj takvih mogućnosti je C_x^n.

Označimo sa $N(n,k)$ traženi broj. Dobili smo

$$N(n,k) = \binom{n}{x} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}},$$

ukoliko su n i k iste parnosti, 0 inače. ◁

* * *

Trajektorija je **pozitivna** ako ne dodiruje os x (osim možda u prvom trenutku, ukoliko starta iz ishodišta).

Primjer 3.2 Odredi broj pozitivnih trajektorija, iz točke $(0,0)$ u točku (n,k).

▷Neka je N traženi broj. Pri određivanju ovog broja koristiti ćemo važni, no očigledni **teorem o zrcaljenju**: ako se točke A i B nalaze s iste strane osi Ox, onda je broj trajektorija koje iz A idu u B i sijeku ili diraju os Ox jednak broju *svih* trajektorija iz simetrične točke A' u B.

Promotrimo sada pozitivnu trajektoriju koja kreće iz $(0,0)$. Ona mora proći kroz točku $(1,1)$. Po principu zrcaljenja, broj trajektorija iz točke $(1,1)$ u (n,k) koje sijeku ili diraju os Ox jednak je broju svih trajektorija iz točke $(1,-1)$ u (n,k). Stoga vrijedi

$$N = N(n-1,k-1) - N(n-1,k+1)$$

gdje je $N(n-1,k-1)$ broj svih trajektorija iz točke $(1,1)$ u točku (n,k), $N(n-1,k+1)$ broj onih trajektorija koje sijeku ili diraju os Ox = broj svih trajektorija iz točke $(1,-1)$ u (n,k). Dakle

$$N = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1} - \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n}\binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n}N(n,k).◁$$

Primjer 3.3 (**Bertrandov zadatak o izborima**) Dva podjednako prihvatljiva kandidata A i B dobila su na izborima m odnosno n glasova ($m > n$). Kolika je vjerojatnost da je tijekom prebrojavanja glasova A uvijek imao više glasova nego B? (Prebrojavanje se vrši listić po listić).

▷Tijek prebrojavanja opisan je nekom trajektorijom koja starta iz točke $(0,0)$ a završava u točki $(m+n, m-n)$. Broj mogućih događaja je $N(m+n, m-n)$. Povoljne su pozitivne trajektorije, kojih ima $\frac{m-n}{m+n}N(m+n, m-n)$. Stoga je tražena vjerojatnost $p = \frac{m-n}{m+n}$. ◁

Matematički model slučajnog pomicanja vodi na rješavanje linearnih rekurzivnih jednadžbi.

3.2 Linearne rekurzivne jednadžbe drugog reda

Opišimo algoritam za rješavanje linearnih rekurzivnih jednadžbi drugog reda, s konstantnim koeficijentima. Homogena jednadžba tog tipa ima oblik

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}. \tag{3.1}$$

Rješenje potražimo u obliku $a_n = \lambda^n$. Uvrštavanje ove zamjene u jednadžbu (3.1) vodi na kvadratnu jednadžbu koju nazivamo **karakteristična jednadžba**:

$$\lambda^2 = \alpha\lambda + \beta.$$

Ako ova jednadžba ima dva različita rješenja λ_1 i λ_2, onda je rješenje od (3.1) oblika

$$a_n = A\,\lambda_1^n + B\,\lambda_2^n.$$

Ako karakteristična jednadžba ima dvostruko rješenje, onda je

$$a_n = A\,\lambda^n + B\,n\,\lambda^n.$$

Konstante A i B u ovim su prikazima neodređene, za svaki izbor će a_n zadovoljavati početnu jednadžbu. Da bismo odredili te konstante, moramo znati početne vrijednosti a_0 i a_1. Uvrštavanje $n = 0$ i $n = 1$ dobiva se linearni sustav odakle možemo odrediti A i B.

Nehomogena rekurzivna jednadžba drugog reda, s konstantnim koeficijentima, ima oblik

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + h_n$$

Njezino rješenje će imati oblik

$$a_n = a_n^H + a_n^P.$$

Ovdje je a_n^H opće rješenje homogene jednadžbe, a a_n^P **partikularno rješenje**, bilo koji niz koji zadovoljava nehomogenu jednadžbu.

Primjer 3.4 Neka je p vjerojatnost realizacije događaja A u jednom pokusu. Kolika je vjerojatnost da će se on u n pokusa realizirati paran broj puta?

▷Neka je p_k vjerojatnost događaja A_k: nakon k-tog pokusa događaj se realizirao paran broj puta. Promatrajući realizaciju tog događaja, uočavamo da se A_k mogao zbiti na dva (međusobno isključujuća) načina: ili je nakon $k-1$ pokusa broj realizacija bio paran te se u k-tom pokusu A nije dogodio, ili je nakon $k-1$ pokusa taj broj bio neparan i onda se A realizirao u k-tom pokusu.

Formula potpune vjerojatnosti daje rekurzivnu formulu:

$$p_k = p_{k-1}(1-p) + (1-p_{k-1})p, \quad k \geq 1$$

Odavde

$$p_k = p + (1-2p)p_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

gdje je $p_0 = 1$. Karakteristična jednadžba ima red jedan:

$$\lambda = 1 - 2p.$$

Zato je opće rješenje homogene jednadžbe oblika

$$p_n^H = C_1 \cdot (1-2p)^n$$

Partikularno rješenje određujemo pretpostavljanjući mu oblik. S obzirom da je funkcija smetnje konstantna (ona iznosi p i ne ovisi o n), partikularno rješenje ćemo potražiti u obliku $p_n^P = C_2$. Uvrštavanjem dobivamo:

$$C_2 = p + (1-2p)C_2.$$

Odavde slijedi $C_2 = \frac{1}{2}$. Sad je

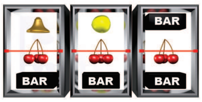
$$p_n = C_1(1-2p)^n + \frac{1}{2}$$

pa iz $p_0 = 1$ slijedi $A = \frac{1}{2}$. Tako dobivamo

$$p_n = \tfrac{1}{2}[1 + (1-2p)^n].$$

◁

Zadatak 3.1



Igrač dolazi u kockarnicu sa 10 žetona ne bi li udvostručio iznos. Odluči okušati sreću na automatu sa 3 role i 5 znakova. U svakoj igri ulaže po jedan žeton. Ako se pojave 3 ista znaka automat izbacuje 2 žetona, u slučaju 2 ista znaka jedan žeton dok u preostalom slučaju ne izbaci ništa. Odredite vjerojatnost da je kockar završio igru bez ijednog žetona.

Primjer 3.5 Baca se novčić. Pojavi li se pismo igrač zapisuje jedan bod, a ako se pojavi glava, zapisuje dva boda. Dobiveni se bodovi zbrajaju. Kolika je vjerojatnost da će zbroj bodova u jednom trenutku biti jednak zadanom broju n?

▷Neka je p_n tražena vjerojatnost. Zbroj n se može pojaviti na jedan od sljedeća dva, međusobno isključujuća načina: dobili smo zbroj $n-1$ i nakon toga novčić je pokazao pismo, ili, dobili smo zbroj $n-2$ i nakon toga novčić je pao na glavu. Stoga p_n zadovoljava rekurzivnu jednadžbu

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}$$

uz početne uvjete $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{3}{4}$. Pripadna karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2} = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda\lambda_2 = -\tfrac{1}{2},$$

te je njeno opće rješenje

$$p_n = C_1 + C_2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n.$$

Uvrštavajući početne uvjete dobivamo $C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = \frac{1}{3}$ pa je

$$p_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n}.$$

3.3 Igra dvaju igrača

Važan primjer slučajnog pomicanja je **igra dvaju igrača**

Igrač raspolaže svotom od M žetona, a njegov protivnik svotom od N žetona. U igri koju igraju, prvi igrač dobiva žeton s vjerojatnošću p, a gubi s vjerojatnošću q. Kolika je vjerojatnost da će on izgubiti sve žetone?

Odgovorit ćemo na nekoliko pitanja:

- Kolika je vjerojatnost da će prvi igrač izgubiti kompletan ulog?
- Koliko je očekivano trajanje ove igre?
- Kako vjerojatnosti gubitka ovise o veličini uloga? Postoji li optimalna strategija igre s obzirom na veličinu uloga?

3.3.1 Vjerojatnost propasti

Neka nam propast znači gubitak svih žetona, a pobjeda neka je propast protivnika.

Označimo ukupan iznos svih žetona sa s, $s = M + N$. Neka je a_n vjerojatnost da ćemo izgubiti igru ukoliko posjedujemo n žetona (ta se vjerojatnost mijenja tijekom igre, onako kako se mijenja i količina žetona). Postavit ćemo temeljnu formulu, odnos među tim vjerojatnostima za tri uzastopna iznosa. Taj odnos iskazujemo pomoću sljedeće rekurzivne relacije:

$$a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots, s-1. \tag{3.2}$$

Kako se opravdava ova relacija? To je upravo formula potpune vjerojatnosti za događaj $A = \{$izgubit ćemo igru, ukoliko posjedujemo s n žetona$\}$, uz hipoteze

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{dobili smo sljedeću igru}\}, \\ H_2 &= \{\text{izgubili smo sljedeću igru}\}. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A \mid H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A \mid H_2)$ i odavde slijedi (3.2).

Pripadna karakteristična jednadžba glasi

$$\begin{aligned} &p\lambda^2 - \lambda + q = 0 \\ &\qquad \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2p}(1 \pm \sqrt{1-4pq}) \end{aligned}$$

Vrijedi

$$(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = 1 - 4pq,$$

zato je

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2p}(1 \pm |p-q|)$$

Kako je $|p-q|$ jednako $p-q$ ili $q-p$, izraz $1 \pm |p-q|$ poprima dvije vrijednosti, $2q$ i $2p$, neovisno o odnosu brojeva p i q. Zato je $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = q/p$.

Ako je $p \neq q$, tada je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i rješenje a_n ima oblik

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1 + C_2\Big(\frac{q}{p}\Big)^n.$$

Umjesto početnih uvjeta, za određivanje konstanti C_1 i C_2 koristit ćemo *rubne uvjete*. Oni glase

$$a_0 = 1, \qquad a_s = 0.$$

Odatle slijedi

$$\begin{aligned} a_0 &= C_1 + C_2 = 1, \\ a_s &= C_1 + C_2\Big(\frac{q}{p}\Big)^s = 0. \end{aligned}$$

te je

$$C_1 = \frac{(q/p)^s}{1-(q/p)^s}, \qquad C_2 = \frac{1}{1-(q/p)^s}$$

i nakon sređivanja dobivamo rezultat

$$a_n = \frac{(q/p)^n - (q/p)^s}{1-(q/p)^s}.$$

Ako je pak $p = q = \frac{1}{2}$, tada je $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ i rješenje ima oblik

$$a_n = C_1 + C_2 n.$$

Nakon određivanja konstanti, dobivamo u ovom slučaju

$$a_n = 1 - \frac{n}{s}.$$

Koliko dugo može trajati ovakva igra dvaju igrača? Mora li se ona završiti ili može trajati do unedogled? Ako su početne svote obaju igrača vrlo velike, kolika je vjerojatnost da igra nikad ne završi?

Odgovor na ova pitanja možemo dati uz malo dodatnog računanja. Ako sa b_k označimo vjerojatnost da drugi igrač izgubi igru, prema dobivenim formulama možemo zapisati

$$b_k = \frac{(p/q)^k - (p/q)^s}{1-(p/q)^s}.$$

Neka prvi igrač u nekom trenutku posjeduje n žetona, onda je imovina drugog $s-n$. Vjerojatnost da barem jedan od njih izgubi igru je (ti su događaji međusobno isključivi):

$$a_n + b_{s-n} = \frac{q^n p^{s-n} - q^s}{p^s - q^s} + \frac{p^{s-n} q^n - p^s}{q^s - p^s} = 1.$$

Dakle, igra će završiti s vjerojatnošću 1, bez obzira na iznose s i n.

Primjer 3.6 Kako se treba kockati (ako se baš mora). Igrač dolazi u kockarnicu s ruletom imajući svotu od 20 žetona. On ju želi udvostručiti. Kakva je strategija bolja: uložiti 20 žetona odjednom (na boju, gdje se ulog udvostručuje) ili se pak zabavljati igrajući žeton po žeton?

▷Ako se uloži odjednom, vjerojatnost dobitka je $p = 18/38 = 0.474$.

Ako se igra žeton po žeton, tada je vjerojatnost dobitka, po prethodnom zadatku

$$p = 1 - a_n = \begin{bmatrix} s = 40 \\ n = 20 \end{bmatrix} = 1 - \frac{(\frac{20}{18})^{20} - (\frac{20}{18})^{40}}{1 - (\frac{20}{18})^{40}}$$
$$= \frac{1 - (\frac{20}{18})^{20}}{1 - (\frac{20}{18})^{40}} = \frac{1}{1 + (\frac{20}{18})^{20}} = 0.11,$$

što ponovno dokazuje kako je teško spojiti ugodno s korisnim. ◁

3.3.2 Očekivano trajanje duljine igre

Neka je d_n očekivano trajanje duljine igre, u trenutku kad prvi igrač raspolaže svotom od n žetona. I za ovu funkciju može se postaviti rekurzijska jednadžba nalik na (3.2), s identičnim obrazloženjem:

$$d_n = p(1 + d_{n+1}) + q(1 + d_{n-1}). \tag{3.3}$$

Dodane konstante 1 odražavaju činjenicu da se svakim potezom duljina igre produžuje za 1.

Napišimo (3.3) ovako:

$$pd_{n+1} = d_n - qd_{n-1} - 1. \tag{3.4}$$

U slučaju $p \neq q$, ova se jednadžba razlikuje se od (3.2) samo u dodanom članu, pa će njezino rješenje glasiti

$$d_n = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^n + d_n^P,$$

gdje je d_n^H partikularno rješenje jednadžbe (3.4).

Po analogiji s rješavanjem diferencijalnih jednadžbi, partikularno rješenje potražimo u obliku $d_n^P = Cn$. Uvrštavanjem dobivamo:

$$p\alpha(n+1) = \alpha n - q\alpha(n-1) - 1.$$

Odavde dobivamo $C = \frac{1}{q-p}$, pa imamo

$$d_n = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^n + \frac{n}{q-p}.$$

Konstante A i B određujemo iz rubnih uvjeta:

$$d_0 = 0, \qquad d_s = 0.$$

Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo

$$d_n = \frac{n}{q-p} - \frac{s}{q-p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^s}. \tag{3.5}$$

Slučaj $p = q = \frac{1}{2}$ mora se razmotriti posebno. Rješenje se može dobiti graničnim procesom iz (3.5), puštajući da $p, q \to \frac{1}{2}$. Druga je mogućnost vratiti se na rekurzijsku jednadžbu koja sad glasi

$$\frac{1}{2} d_{n+1} = d_n - \frac{1}{2} d_{n-1} - 1.$$

Njezino homogeno rješenje je $d_n = A + Bn$, a partikularno potražimo u obliku $d_n = Cn^2$ (jer je pripadna nultočka karakteristične jednadžbe dvostruka.)

Nakon uvrštavanja u jednadžbu i u rubne uvjete, odrede se konstante A, B i C. Dobiveno će rješenje imati oblik:

$$d_n = n(s - n).$$

To je očekivano trajanje, u slučaju igre ravnopravnih igrača. Taj izraz nam govori da igra može trajati poprilično dugo. Tako na primjer, ako je početni ulog svakog igrača 100 žetona, očekivano vrijeme trajanja igre je 10 000 koraka.

Očekivano vrijeme je poprilično čak i u slučaju izrazitog nesrazmjera u početnom ulogu. Tako na primjer, ako jedan igrač starta s jednim žetonom, a drugi s 99, očekivana duljina trajanja igre je 100 koraka!

Zadatak 3.2 O uzastopnim realizacijama nekog događaja. U svakom od n nezavisnih pokusa vjerojatnost pojavljivanja događaja A iznosi p. Kolika je vjerojatnost da broj uzastopnih pojavljivanja događaja A bude manji od m?

▷Ispitajmo u kojim situacijama se neće pojaviti niz od m uzastopnih realizacija događaja A. To je moguće u dvije, međusobno isključive situacije: taj se niz neće pojaviti niti u $n + 1$ nezavisnih pokusa ili će se dogoditi upravo u posljednjih m od $n + 1$ pokusa, a prethodno ne. Ako označimo sa P_n traženu vjerojatnost, tada se gornja rečenica prevodi u formulu

$$P_n = P_{n+1} + P_{n-m} \cdot q \cdot p^m.$$

Odavde

$$P_{n+1} = P_n - P_{n-m} q p^m, \quad n \geq m.$$

Početni uvjeti glase

$$P_0 = P_1 = \ldots = P_{m-1} = 1$$

jer se tada uzastopna m-torka ne može pojaviti, te

$$P_m = 1 - p^m.$$

Eksplicitna formula za P_n ovisi o broju m i ne može se u općem slučaju eksplicitno napisati (ali se vrlo lako računa, za svaki konkretni broj m).

Za $m = 1$ rekurzivna formula glasi

$$P_0 = 1,\ P_1 = 1 - p = q,\ P_{n+1} = P_n - P_{n-1} q p$$

i odavde lako slijedi $P_n = q^n$, što je očigledno jer tražimo vjerojatnost da se A uopće neće pojaviti.

Eksplicitnu formulu možemo napisati za $n < 2m$. Tada je

$$P_{n+1} = P_n - P_{n-m}qp^m = P_n - qp^m$$

jer je $P_{n-m} = 1$ za $n < 2m$. Odavde

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} - qp^m = P_{n-2} - 2qp^m = \dots \\ &= P_m - (n-m)qp^m = 1 - p^m - (n-m)qp^m. \end{aligned}$$

Što se događa kad $n \to \infty$? Pokažimo da tada $P_n \to 0$ što pokazuje da se *mora* pojaviti grupa od m uzastopnih realizacija događaja A. Zaista, niz $\{P_n\}$ je padajući (po osnovnoj formuli $(*)$). Kako je $P_n > 0$ a monoton ograničen niz ima limes, to postoji $P = \lim_{n\to\infty} P_n$. Prijelazom na limes u relaciji $(*)$ dobivamo $P = P - Pqp^m$ i odavde je $P = 0$.

Time je još jednom pokazana neobična tvrdnja iz zadatka 1.19. ◁

3.4 Poopćenje slučajnog pomicanja

Neka je I slučajna varijabla s razdiobom

$$I \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ q & r & p \end{pmatrix}.$$

Ovdje su p, q, r nenegativni brojevi za koje vrijedi $p + q + r = 1$.

Neka su $I_1, I_2, \dots, I_n$ nezavisne kopije slučajne varijable I. Definirajmo slučajnu varijablu

$$X_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

Ako je $r = 0$, riječ je o prethodno promatranom slučajnom pomicanju. Ako je $r > 0$, onda u svakom moraku čestica može ostati u prethodnom položaju.

U modelu igre dvaju igrača, ovim se dozvoljavamo da igra ima neriješeni ishod.

I u ovom se slučaju mogu izvesti formule za vjerojatnost gubitka, kao i za očekivanu duljinu trajanja igre.

Temeljna rekurzivna formula izvodi se na identičan način. Ako sa a_n označimo vjerojatnost gubitka uloga za jednog igrača, ukoliko je njegov trenutni kapital jednak n, onda možemo postaviti relaciju

$$a_n = pa_{n+1} + ra_n + qa_{n-1}$$

uz iste rubne uvjete

$$a_0 = 1, \qquad a_s = 0.$$

Jednadžba se svodi na

$$(1-r)a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}, \tag{3.6}$$

$$a_n = p'a_{n+1} + q'a_n. \tag{3.7}$$

Ovdje smo označili $p' = p/(1-r)$, $q' = q/(1-r)$. Primjetimo da vrijedi

$$p' + q' = \frac{p+q}{1-r} = \frac{1-r}{1-r} = 1.$$

Dobili smo jednadžbu koja je identična s (3.2). Zato je njezino rješenje u slučaju $p \neq q$

$$a_n = \frac{(q'/p')^n - (q'/p')^s}{1-(q'/p')^s}.$$

Budući je kvocjent q'/p' jednak q/p, konačno dobivamo identičnu formulu:

$$a_n = \frac{(q/p)^n - (q/p)^s}{1-(q/p)^s}.$$

Rekurzivna relacija za očekivanu duljinu trajanja igre glasi:

$$d_n = p(1+d_{n+1}) + r(1+d_n) + q(1+d_{n-1}).$$

odnosno

$$d_n = p'd_{n+1} + q'd_{n-1} + \frac{1}{1-r}$$

Vidimo da homogena jednadžba ima identičan oblik kao i prije, a partikularno rješenje ćemo dobiti stavljajući $d_n = Cn$:

$$Cn = p'C(n+1) + q'C(n-1) + \frac{1}{1-r}.$$

Odavde slijedi

$$C = \frac{1}{(1-r)(q'-p')} = \frac{1}{q-p}$$

Prema tome, i u ovom slučaju za očekivanu duljinu igre imat ćemo istovjetnu formulu:

$$d_n = \frac{n}{q-p} - \frac{s}{q-p} \cdot \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^s}. \tag{3.8}$$

Istovjetnost formule naravno ne znači da će očekivana duljina igre ostati ista! Ona će se, *uz isti omjer vjerojatnosti gubitka i dobitka* povećati. Faktor povećanja bit će proporcionalan vjerojatnosti nerješenog ishoda. Da to ilustriramo, pretpostavimo najprije da u (3.8) vrijedi $r = 0$, a zatim odaberimo sljedeće vrijednosti: $p = p'$, $q = q'$, $r \neq 0$, ali tako da bude $p/q = p'/q'$. Sad vrijedi

$$q' = kq, \qquad p' = kp, \qquad q' + p' = k(q+p) = k = 1-r$$

pa je faktor proporcionalnosti jednak $1-r$. Sad po (3.8) dobivamo

$$d_n = \frac{n}{q'-p'} - \frac{s}{q'-p'} \cdot \frac{1-\left(\frac{q'}{p'}\right)^n}{1-\left(\frac{q'}{p'}\right)^s} = \frac{1}{1-r} \cdot \left[\frac{n}{q-p} - \frac{s}{q-p} \cdot \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^s} \right].$$

Tako na primjer, ako je $r = 0.8$, onda će očekivano trajanje igre biti pet puta dulje (tada je $p + q = 0.2$).

U slučaju *fair* igre, kad je $p = q = \frac{1}{2}$, očekivana duljina igre je

$$d_n = n(s-n)$$

i ovaj izraz ne ovisi o p ili q. Zato će se formula u slučaju $p = q$, $r \neq 0$ morati razlikovati od ove. Rekurzivna jednadžba sad glasi

$$\frac{1}{2}d_{n+1} = d_n - \frac{1}{2}d_{n-1} - \frac{1}{1-r}.$$

Njezino je rješenje

$$d_n = \frac{n(s-n)}{1-r}$$

tako da i u ovom sučaju imamo istovjetno povećanje očekivane duljine igre.

3.5 Povratni (ponavljajući) događaji

Pri ponavljanju nekog pokusa možemo promatrati različite događaje. Radi jednostavnosti, opišimo situaciju u pokusu bacanja novčića. Možemo se zapitati u kojem se pokusu pojavila glava (po prvi put), kolika je vjerojatnost da se u do nekog pokusu pojavi određen broj glava, kolika je vjerojatnost da se određeni niz simbola pojavi (po prvi put) do n-tog pokusa, kolika je vjerojatnost da se do n-tog pokusa pojavi jednak broj pisama i glava itd.

Povratni događaji

Definicija 3.7 Za događaj A kažemo da je **povratni** (**ponavljajući**, *recurrent*) ako vrijedi sljedeće:

- Ako se događaj A ostvari u n-tom pokusu, tada njegovo pojavljivanje u budućnosti ne ovisi o ishodima u prvih n pokusa (**odsustvo pamćenja**).
- Događaj "A se pojavio u n-tom pokusu" ovisi samo o rezultatima prvih n pokusa, ali ne i o budućim događanjima (**konzistentnost**).

Primjer 3.8 U kutiji se nalazi određeni broj crnih i bijelih kuglica. Promotrimo pokus izvlačenja kuglica iz kutije sa, odnosno bez vraćanja. Je li događaj $A =$ izvučena je crna kuglica povratan?

Uz pojavljivanje događaja A vezane su prirodno sljedeće vjerojatnosti:

- s_n — vjerojatnost da se promatrani događaj *po prvi put* ustvari u n-tom pokusu.
- u_n — vjerojatnost da se promatrani događaj ostvari u n-tom pokusu, *ne nužno po prvi put*.

Trenutak u kojem će se realizirati događaj A je slučajan. Neka je X slučajna varijabla koja prati pojavljivanje tog događaja. Onda je

$$s_n = \mathbf{P}(X = n).$$

Zbroj ovih vjerojatnosti ne mora biti jednak 1, jer je moguće da se događaj A nikad ne ostvari. Označimo

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} s_n$$

Onda veličina $s_\infty = 1 - s$ predstavlja vjerojatnost da se događaj A nikad ne ostvari. Tu vjerojatnost možemo pridružiti vrijednosti $X_A = \infty$. Tada niz $s_1, s_2, \ldots, s_\infty$ definira razdiobu slučajne varijable X_A. Njezino očekivanje označimo s m_A,

$$m_A = \sum_{n=1}^{\infty} n s_n + s_\infty \cdot \infty.$$

Ako je $s_\infty > 0$, ovo očekivanje jednako je $+\infty$. Ako je $s_\infty = 0$, dogovorno uzimamo $0 \cdot \infty = 0$ i ovo očekivanje može biti konačno.

Niz (u_n) ne definira razdiobu, jer pripadni događaji nisu moraju biti disjunktni: događaj "A se ostvario u desetom pokusu" može i ne mora imati zajednički presjek s događajem "A se ostvario u petom pokusu". U mnogim važnim situacijama za ovaj će niz vrijediti $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.

Označit ćemo funkcije izvodnice ovih nizova sa $S(x)$ i $U(x)$, pri čemu dogovorno stavljamo

$$s_0 = 0, \qquad u_0 = 1.$$

Dakle,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \qquad U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Teorem 3.9 Za funkcije izvodnice nizova (s_n) i (u_n) vrijedi

$$U(x) = \frac{1}{1 - S(x)}.$$

Dokaz. Vjerojatnost događaja "A se pojavio u n-tom pokusu" je u_n. Taj se događaj može rastaviti na uniju disjunktnih događaja: "A se *po prvi put* pojavio u k-tom pokusu, i nakon toga ponovo u n-tom pokusu. Vjerojatnost jednog od ovih događaja je $s_k u_{n-k}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ što opravdavamo učinjenim pretpostavkama o odsustvu pamćenja o realizacijama događaja A. Dakle, vrijedi

$$u_n = s_1 u_{n-1} + s_2 u_{n-2} + \ldots + s_n u_0, \qquad n \geq 1$$

(Ovdje smo trebali definiciju $u_0 = 1$.) Imajući u vidu da je $s_0 = 0$, zbroj zdesna prepoznajemo kao član c_n konvolucije dvaju nizova $(s_n) * (u_n)$. Odgovarajuća funkcija izvodnica ove konvolucije je $S(x)U(x)$. Budući je $s_0 = 0$, onda za konvoluciju vrijedi $c_0 = s_0 u_0 = 0$.

Dakle, pokazali smo da vrijedi

$$u_n = s_0 u_n + s_1 u_{n-1} + \ldots + s_n u_0 = c_n, \qquad n \geq 1, \tag{3.9}$$

$$u_0 = 1, \tag{3.10}$$

Zato je

$$U(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = U(x)S(x).$$

Time je teorem dokazan. ∎

3.5.1 Postojana i prolazna stanja

Slučajna varijabla X koja registrira prvo pojavljivanje događaja A naziva se **vrijeme pojavljivanja** ili **vrijeme čekanja**. Zbog pretpostavljenog odsustva pamćenja, to je vrijeme čekanja do pojave događaja A ujedno i vrijeme čekanja između dvije uzastopne realizacije događaja A. S tim je u vezi sljedeća definicija.

Postojana i prolazna stanja

Definicija 3.10 Kažemo da je povratni događaj A **postojan**, ako je $s = 1$, a prolazan, ako je $s < 1$.

Razlog za ove nazive je sljedeći: Ako je $s < 1$ tada se s pozitivnom vjerojatnošću događaj A uopće neće pojaviti, pa je i očekivano vrijeme njegovog pojavljivanja beskonačno. Ako je pak $s = 1$, tada se s vjerojatnošću 1 događaj A mora ostvariti, pa će se zbog pretpostavljenog odsustva pamćenja on ponovo pojavljivati neograničen broj puta.

Kriterij postojanosti

Teorem 3.11 Događaj A je postojan onda i samo onda ako vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$.

Da bi se opravdala ova ekvivalencija, korisno je sumu ovog reda interpretirati na sljedeći način.

Neka je I_n slučajna varijabla koja registrira pojavu događaja A u n-tom pokusu. Razdioba te varijable je

$$I_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-u_n & u_n \end{pmatrix}.$$

(Ove varijable ne moraju biti nezavisne.). Očekivanje ove varijable je $\mathbf{E}(I_n) = u_n$. Označimo

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Onda je $u - 1$ očekivani broj pojavljivanja događaja A pri beskonačnom ponavljanju pokusa.

Sad možemo izvesti strogi dokaz.

Dokaz. Ako je A postojan, onda je $s = 1$ pa za funkciju izvodnicu vrijedi $\lim S(x) = 1$ kad x teži ka 1. No, onda je

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{x\to 1} U(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1 - S(x)} = \infty.$$

Obratno, ako je A prolazan, tada vrijedi $\lim S(x) = s < 1$ kad x teži ka 1. Zato $U(x)$ teži ka $1/(1-s)$. Prema Abelovom teoremu je

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \lim_{x\to 1} U(x) = \frac{1}{1-s}.$$

Time je teorem dokazan. ■

Dokazujući ovaj teorem izveli smo i formule koje vrijede za prolazna stanja:

$$u = \frac{1}{1-s}, \qquad s = \frac{u-1}{u}.$$

3.5.2 Periodička i neperiodička stanja

Ponekad se događaj A može ostvariti samo u određenim pokusima. Na primjer, u igri dvaju igrača, u kojoj nema neriješenog ishoda, izjednačen rezultat može se postići samo nakon parnog broja igara. S tim je u vezi sljedeća definicija.

Periodička stanja

Definicija 3.12 Kažemo da je povratni događaj A **periodički** s periodom T, ako postoji cijeli broj $T > 1$ takav da se A može pojaviti samo u trenutcima T, $2T$, $3T$,..., i T je najveći broj s tim svojstvom.

Očekivano vrijeme pojavljivanja povratnog događaja A je

$$m_A = \sum_{n=1}^{\infty} n s_n = S'(1).$$

Očekivano vrijeme pojavljivanja povratnog događaja

Teorem 3.13 Ako je A postojani događaj koji nije periodički, s očekivanim vremenom pojavljivanja m_A, tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{m_A}.$$

Ako je A postojani događaj s periodom T, onda je

$$\lim_{n\to\infty} u_{nT} = \frac{T}{m_A}.$$

Zadatak 3.3 Dijete svako jutro nasumce izvlači šaku bombona iz posude u koju mu roditelji svaku večer dodaju bombone tako da ih ujutro bude točno 5. Vjerojatnost da dijete izvuče određen broj bombona dana je sa

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Odredite vjerojatnost događaja: $A =$ "dijete u tjedan dana izvuče jednom 2 bombona, dva puta 3 bombona i 4 puta više od 3 bombona". Je li događaj A povratan i, ako jest, odredite je li postojan ili prolazan te vrijeme čekanja.

3.6 Postojanost slučajnog pomicanja

Teoreme iz prethodnog poglavlja sad ćemo primjeniti u primjeru slučajnog pomicanja (igre dvaju igrača).

Neka nam temeljni događaj A bude: u igri dvaju igrača rezultat je izjednačen.

Promatramo li ovu igru kao slučajno pomicanje, onda će događaj A nastupiti kad god čestica ponovo stigne u ishodište. Njezin put između dva povratka u ishodište nazivamo **ekskurzija**.

Pretpostavimo općeniti slučaj igre koja ne mora biti *fair*, pa su vjerojatnosti dobitka i gubitka prvog igrača p odnosno q. Događaj A je *periodički*, jer se može pojaviti samo u parnim pokusima, pa je $T = 2$. A će se ostvariti u trenutku $2n$ ako je do tada svaki od igrača pobijedio n puta, a vjerojatnost za taj dogadaj je

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

O naravi događaja A, je li on postojan ili prolazan, prema Teoremu 3.11, govori nam zbroj ovog reda.

Odredimo funkcije izvodnice nizova (s_n) i (u_n).

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n x^{2n} = (1 - 4pqx^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ S(x) &= \frac{U(x) - 1}{U(x)} = 1 - (1 - 4pqx^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Vidimo da će ponašanje događaja A bitno ovisiti o tome je li slučajno pomicanje simetrično (je li igra *fair*) ili ne:

- Ako je $p \neq q$, onda je $4pq < 1$ pa red $\sum u_n$ konvergira brže nego geometrijski red s kvocjentom $4pq$. Vrijedi

  $$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = U(1) = (1 - 4pq)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|p - q|}.$$

  Zato je događaj A prolazan. Očekivani broj pojavljivanja događaja A jednak je

  $$u - 1 = \frac{1}{|p - q|} - 1,$$

  a vjerojatnost da se A pojavi barem jednom je

  $$s = \frac{u - 1}{u} = 1 - |p - q|.$$

  U slučaju nesimetričnog pomicanja, s vjerojatnošću 1 čestica će se vratiti u nulu samo konačan broj puta. Dakle, rezultat može biti izjednačen samo privremeno i u početku igre, a nakon toga će jači igrač ostvatiti nenadoknadivu prednost.

- $p = q = \frac{1}{2}$. Situacija je sad potpuno različita. U ovom je slučaju

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

Da bismo mogli procjeniti je li taj zbroj konačan ili nije, iskoristit ćemo Stirlingovu aproksimaciju:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Zato je

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Dakle,

$$u_{2n} \approx \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}, \qquad u_{2n+1} = 0,$$

i ovaj red divergira. Dakle, povratak u 0 bit će postojano stanje. Međutim, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n} = 0 = \frac{2}{m_A}$$

pa je očekivano vrijeme povratka beskonačno. To znači da će pri simetričnom slučajnom pomicanju čestica odlaziti na (dugačke) ekskurzije, nakon kojih će se vraćati u nulu.
Ekskurzije moraju biti dugačke. Naime, kod simetričnog slučajnog pomicanja *svaka točka na pravcu je dostižna*. Dakle, u nekom trenutku jedan od igrača imat će po volji veliku prednost, da bi nakon toga rezultat ponovo bio izjednačen.
Za $p = \frac{1}{2}$ funkcija izvodnica niza (s_n) glasi

$$S(x) = 1 - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

pa možemo napisati točnu distribuciju slučajne varijable X_A vremena pojavljivanja događaja A:

$$s_{2n} = \binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{n2^{2n-1}}, \quad n \geq 1,$$
$$s_{2n-1} = 0, \qquad n \geq 1.$$

3.6.1 Slučajno pomicanje u dvije dimenzije

Promotrimo sad pomicanje po cjelobrojnoj rešetki u ravnini. Osvrnut ćemo se samo na slučaj simetričnog pomicanja, kad se čestica u svakom trenutku s vjerojatnošću $\frac{1}{4}$ može iz točke (x, y) s cjelobrojnim koordinatama premjestiti u jednu od četiri njoj susjedne točke $(x + 1, y)$, $(x - 1, y)$, $(x, y + 1)$, $(x, y - 1)$.

Promotrit ćemo je li povratak čestice u ishodište postojani događaj. Taj se povratak može dogoditi samo nakon parnog broja pomicanja i to onda ako je broj pomaka u oba horizontalna smjera jednak, kao i broj pomaka u oba vertikalna smjera.

Neka je k broj pomaka čestice udesno. Tada broj pomaka ulijevo mora biti također k, broj pomaka prema gore je $n-k$ i broj pomaka prema dolje također $n-k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Zato je

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \cdot 1 = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{[(n-k)!]^2 [k!]^2} \cdot \frac{[n!]^2}{[n!]^2} \\ &= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k^2}. \end{aligned}$$

Poznato je da vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Zato je, korištenjem Stirlingove formule,

$$u_{2n} = 4^{-2n} \binom{2n}{n}^2 \approx \frac{1}{\pi n}.$$

Zaključujemo da red $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ i dalje divergira, pa je povratak u ishodište postojani događaj.

Slična analiza bi pokazala da za pomicanje u tri dimenzije vrijedi

$$u_{2n} \approx \frac{C}{n^{3/2}}$$

i ovaj red je konvergentan. To znači da je povratak u ishodište u ovom slučaju prolazan događaj. Njegova vjerojatnost je približno 0.35.

3.7 Zadaci

Zadatak 3.4 Pijanac se nalazi 20 koraka daleko od kućnog praga, a 10 koraka daleko od jarka. On se giba korak naprijed ili nazad, posve slučajno ali s vjerojatnostima 0.6 prema kući, te 0.4 prema jarku. Kolika je vjerojatnost da će pijanac (ovo veče) stići kući?

4. Stohastički procesi

4.1 Uvod

Slučajna varijabla je preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Za svaku realizaciju elementarnog događaja ω ona poprima vrijednost $X(\omega)$ u skupu realnih brojeva. Pri tom zahtijevamo da skup

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\}$$

bude **događaj**, za svaki izbor realnog broja a. Tad je određena njegova vjerojatnost i time je definirana funkcija

$$F(a) := \mathbf{P}(X < a)$$

koju nazivamo **funkcija razdiobe** slučajne varijable X.

Pojam slučajne varijable neovisan je o vremenu. Međutim, mnogi procesi čiji je ishod neizvjestan a koji se odvijaju u vremenu zahtijevaju da se koncept slučajne varijable poopći tako da uključuje i vremensku komponentu.

Primjer 4.1

- Na nekoj lokaciji, svaki dan u isto vrijeme mjerimo temperaturu zraka. Neka je x_i tempreatura izmjerena i-tog dana u godini. Tada je vrijednost x_i realizacija slučajne varijabče X_i. Slučajne varijable X_i ne moraju biti nezavisne niti jednako distribuirane. Vektor $(x_1, \dots, x_{365})$ je funkcija $x = x(t)$ deinirana u diskretnim vremenskim trenutcima $t \in [1, 2, \dots, 365]$.
- Ako senzor grafički bilježi temperaturu tijekom godine, onda je rezultat mjerenja neprekidna funkcija vremena t: $x = x(t)$, $0 \le t \le 1$. Ovdje govorimo o neprekidnom mjerenju tempreature tijekom godine na određenom mjestu u oznaci $\{X(t), 0 \le t \le 1\}$.
- Parameter o kojem ovisi ishod eksperimenta ne mora nužno biti vrijeme. Na primjer, ako promatramo temperaturu u fiksnom vremenskom trenutku, duž neke linije duljine L, tada dobivamo funkciju $x = x(h)$, $0 \le h \le L$.
- Stroj proizvodi uže zadane duljine i određene debljine. Moguća su manja odstupanja u promjeru, pa tako mjerenjem promjera na udaljenosti d od jednog kraja dobivamo funkciju $x = x(d)$.

Na ovaj način, promatrajući familiju slučajnih varijabli koja ovisi o nekom dodatnom parametru, doći ćemo do pojma stohastičkog procesa. Neka slučajna varijabla X ovisi o parametru $t \in T \subset \mathbb{R}$. Za svako vrijeme $t \in T$ određena je slučajna varijabla koju ćemo označavati s X_t ili pak s $X(t)$. Nadalje, označimo sa S skup svih vrijednosti koje mogu poprimiti slučajne varijable X_t.

Stohastički proces

Definicija 4.2 Familija slučajnih varijabli

$$X = \{X_t,\ t \in T\}$$

naziva se **stohastički proces** X sa skupom parametara T i skupom stanja S.

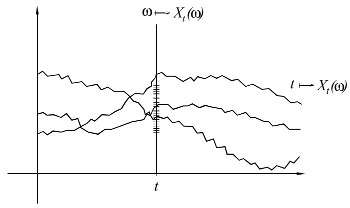
Stohastički proces možemo shvatiti kao funkciju dviju varijabli

$$X : T \times \Omega \to S.$$

Ovdje je S skup stanja, skup unutar kojeg proces poprima vrijednosti. Kod nas će biti uvijek $S \subset \mathbb{Z}$, $S \subset \mathbb{R}$, ili najopćenitije, $S \subset \mathbb{C}$. Za izabrano vrijeme t i elementarni događaj ω, $X(t,\omega)$ jest **realizacija procesa**.

Fiksiramo li vrijeme $t \in T$, tada je $\omega \mapsto X(t,\omega)$ slučajna varijabla, koja opisuje moguće realizacije procesa u budućem trenutku t. Da bismo poznavali proces, moramo poznavati ne samo razdiobu svih tih slučajnih varijabli, već i njihovu međuovisnost.

Ako izaberemo fiksni $\omega \in \Omega$, tada preslikavanje $t \mapsto X(t,\omega)$ opisuje realizacije procesa X tijekom vremena. Tu funkciju realne varijable T nazivamo **trajektorija**. Izgled trajektorije mijenja se za svaku drugu realizaciju elementarnog događaja.



Slika 4.1: Trajektorije procesa realne su funkcije definirane na skupu $T \subset \mathbb{R}$. Za fiksno vrijeme t, moguće realizacije procesa opisane su slučajnim varijablama X_t.

4.2 n-dimenzionalne razdiobe

Slučajna je varijabla određena svojim jednodimenzionalnim razdiobama. Neka je $t \in T$, funkcija razdiobe slučajne varijable X_t je

$$F_t(x) := \mathbf{P}(X_t < x).$$

Familiju $\{F_t,\ t \in T\}$ nazivamo familija **jednodimenzionalnih razdioba**. Ako poznajemo sve jednodimenzionalne razdiobe, ipak ne poznajemo proces X jer moramo znati i međuovisnosti slučajnih varijabli. Za poznavanje procesa X moramo znati razdiobe slučajnih vektora $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ za svaki izbor vremena $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$. Funkcija koja opisuje razdiobu nekog ovakvog vektora naziva se **n-dimenzionalna razdioba**.

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) := \mathbf{P}(X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_n} < x_n).$$

Proces je jednoznačno određen ako poznajemo familiju svih njegovih n-dimenzionalnih razdioba, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki mogući izbor $t_1, \dots, t_n \in T$. Kažemo da tad poznajemo familiju **konačnodimenzionalnih razdioba**.

Konačnodimenzionalne razdiobe mogu biti određene i svojim gustoćama:

$$f_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n).$$

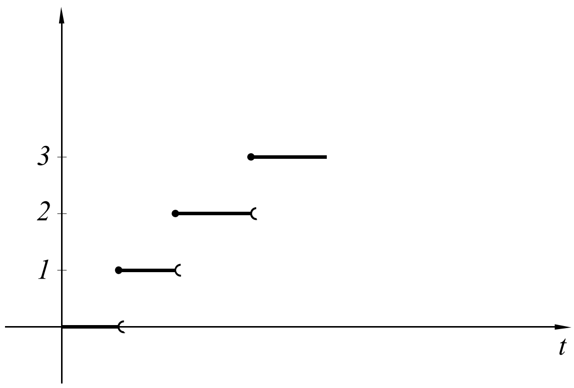
Poznavanje familije konačnodimenzionalnih razdioba je u praksi vrlo zahtjevan uvjet. Mi ćemo uglavnom proučavati one klase procesa kod kojih je dovoljno poznavati samo jednodimenzionalne i dvodimenzionalne razdiobe jer im neka dodatna svojstva osiguravaju da se iz tih podataka može odrediti familija konačnodimenzionalnih razdioba. Dvije velike klase stohastičkih procesa koje se posebno izučavaju su **Markovljevi procesi** i **stacionarni procesi**.

4.3 Podjela procesa

Pri proučavanju procesa obično ih dijelimo po njihovim svojstvima u različite skupine. Jednu podjelu možemo načiniti po prirodi skupova T i S. Ukoliko je skup T diskretan, $T = \{t_1, t_2, \dots\}$, tad je primjerenije govoriti o **nizu** slučajnih varijabli. Teorija Markovljevih lanaca proučava takve nizove slučajnih varijabli kod kojih je i skup stanja S diskretan. Kod ostalih stohastičkih procesa vrijeme T je kontinuirano. Skup stanja S može biti bilo diskretan bilo kontinuiran.

* * *

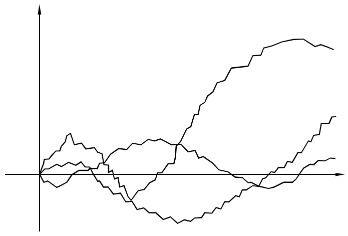
Poissonov proces, koji mjeri broj realizacija nekog događaja, primjer je procesa s kontinuiranim vremenom T i diskretnim skupom stanja S. Tipična trajektorija Poissonovog procesa prikazana je na slici 4.2.



Slika 4.2: Trajektorija Poissonovog procesa. U trenutcima u kojima se realizirao događaj koji se promatra, trajektorija procesa ima skok iznosa 1.

* * *

Drugi je važni primjer stohastičkog procesa **Brownowo gibanje**. Robert Brown (1773–1858), Škotski botaničar, godine 1827. promatrao je kaotično gibanje zrnaca peludi u tekućoj otopini. Uslijed termičkog gibanja molekula dolazi do njihova sudaranja sa zrncem peludi koje se giba po vrlo nepravilnim putanjama. Gibanje je to kaotičnije što je temperatura veća. Zbog jednostavnijeg prikaza, u početku je bolje promatrati jednodimenzionalni model, u kojem zamišljamo da čestica u svakom trenutku može krenuti bilo lijevo, bilo desno — što nalikuje na slučajno pomicanje po pravcu. Trajektorija jednodimenzionalnog Brownovog gibanja neprekinuta je funkcija.



Slika 4.3: Trajektorija Brownovog gibanja neprekinuta je funkcija.

* * *

Stohastički proces $\{X_t, t \in T\}$ je **Gaussov proces** ako slučajni vektori $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ imaju zajedničku normalnu razdiobu za sve n-torke $(t_1, \ldots, t_n)$, $t_i \in T$, $t_1 < \ldots t_n$, $n \in \mathbb{N}$. Gaussov proces je stacionaran u užem smislu ako i samo ako je stacionaran u širem smislu.

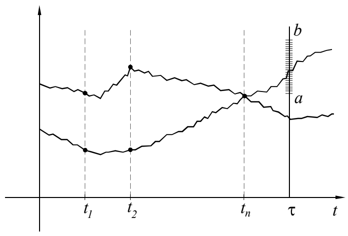
* * *

X je **Markovljev proces** ako za sve $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ i $A_i \in S$ vrijedi

$$\mathbf{P}(X_{t_{n+1}} \in A_{n+1} \mid X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \ldots, X_{t_n} \in A_n) = \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} \in A_{n+1} \mid X_{t_n} \in A_n).$$

Kažemo da Markovljevi procesi nemaju pamćenje. Vjerojatnost nekog događaja koji će se zbiti u budućnosti (u trenutku t) ne ovisi o prošlosti (trenutcima $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$) već samo o sadašnjosti (trenutku t_n).

Markovljev proces je stacionaran u užem smislu ako i samo ako njegove jednodimenzionalne razdiobe ne ovise o vremenu, tj. ako postoji funkcija razdiobe $F(x)$ takva da vrijedi $F_t(x) = \mathbf{P}(X_t \leq x) = F(x)$, za sve $t \in T$.



Slika 4.4: Markovljevo svojstvo odsustva pamćenja: vjerojatnost da trajektorija procesa prođe kroz okvir $[a, b]$ u budućem trenutku t ovisi samo o položaju x_n u sadašnjosti, a ne i o načinu kako je proces stigao u tu točku.

* * *

Mnogi procesi interesantni u primjenama zadovoljavaju sljedeće jače svojstvo:

Proces s nezavisnim prirastima

Definicija 4.3 Za proces X kažemo da je proces s **nezavisnim prirastima** ako su za sve $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ slučajne varijable $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_3) - X(t_2)$,..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezavisne.

Proces s homogenim prirastima

Definicija 4.4 Za proces X kažemo da ima **homogene priraste** ako za proizvoljne $t_1, t_2 \in T$ prirasti $X(t_1+\tau) - X(t_2+\tau)$ imaju identičnu razdiobu za sve τ takve da je $t_1+\tau, t_2+\tau \in T$.

Sljedeća važna klasa stohastičkih procesa definirana je sljedećim uvjetom:

Stacionarni procesi

Definicija 4.5 X je **stacionaran (u užem smislu)** ako za svaki h slučajni vektori $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ i $(X(t_1+h), \dots, X(t_n+h))$ imaju istu distribuciju. To su procesi čije su konačnodimenzionalne razdiobe invarijantne na pomake u vremenu.

Uvjet stacionarnosti jaki je uvjet. U mnogim je slučajevima dovoljno zahtijevati izvjesnu mjeru vremenske invarijantnosti ali ne za sve konačnodimenzionalne razdiobe, već samo za dvije funkcije koje ovise samo o jedno i dvodimenzionalnim razdiobama. Te su dvije funkcije očekivanje i korelacijska funkcija.

Moment prvog reda definiramo ovako:

$$m(t) := \mathbf{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x) dx.$$

Znajući dvodimenzionalne razdiobe procesa možemo računati **korelacijsku funkciju**

$$R(t,s) := \mathbf{E}[X(t)X(s)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{t,s}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Ako je X stacionaran u užem smislu, onda vrijedi

$$m(t+h) = \mathbf{E}[X(t+h)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{t+h}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x) dx = \mathbf{E}[X(t)] = m(t), \qquad \forall h.$$

Stoga je očekivanje stacionarnog procesa (ukoliko postoji) konstantno. Slično, vrijedi za sve t, s i h:

$$R(t+h, s+h) = \mathbf{E}[X(t+h)X(s+h)] = \mathbf{E}[X(t)X(s)] = R(t,s).$$

Funkcija dviju varijabli s ovim svojstvom ovisi zapravo samo o razlici argumenata t i s. Neka je $t > s$. Onda imamo, stavljajući $h = -s$,

$$R(t,s) = R(t-s, s-s) = R(t-s, 0) = \mathbf{E}[X(t-s)X(0)].$$

Zato smijemo pisati, koristeći isto slovo za funkciju razlike argumenata:

$$R(t-s) := \mathbf{E}[X(t)X(s)].$$

Tu ćemo formulu češće pisati ovako:

$$R(h) = \mathbf{E}[X(t)X(t+h)]$$

jer desna strana ne ovisi o trenutku t već samo o razlici vremena h.

Stacionarni procesi

Definicija 4.6 Kažemo da je proces X **stacionaran (u širem smislu)** ako vrijedi

1. očekivanje je konstantno: $m(t)$ =const,
2. korelacijska funkcija $R(t,s)$ ovisi samo o razlici vremena $t-s$.

Osim korelacijske funkcije, ponekad se promatra i **kovarijacijska funkcija** $C(t,s)$ definirana s

$$C(t,s) := \mathbf{E}[(X(t)-m(t))(X(s)-m(s))].$$

Zbog linearnosti očekivanja, desnu stranu možemo napisati i ovako:

$$C(t,s) = \mathbf{E}[X(t)X(s)] - m(t)m(s) = R(t,s) - m(t)m(s).$$

Vidimo da se kovarijacijska funkcija podudara s korelacijskom kod centriranih procesa, čije je očekivanje jednako nuli. Međutim, mi možemo svaki proces vrlo jednostavno centrirati. Dovoljno je da mu oduzmemo determinističku funkciju $m(t)$. Stavimo $X^\circ(t) := X(t) - m(t)$. Za ovakav proces vrijedi $\mathbf{E}[X^\circ(t)] = 0$, ali

$$C_{X^\circ X^\circ}(t,s) = R_{X^\circ X^\circ}(t,s) = C_{XX}(t,s).$$

Ovdje je $C_{X^\circ X^\circ}$ kovarijacijska funkcija procesa X°, a C_{XX} kovarijacijska funkcija procesa X.

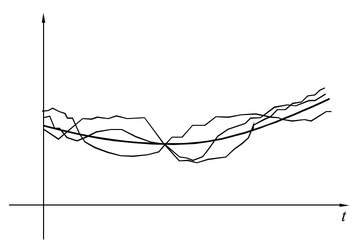
Napomenimo još da se iz korelacijske funkcije i očekivanja disperzija slučajne varijable $X(t)$ računa ovako:

$$D[X(t)] = \mathbf{E}[X(t)^2] - m(t)^2 = R(t,t) - m(t)^2 = C(t,t).$$

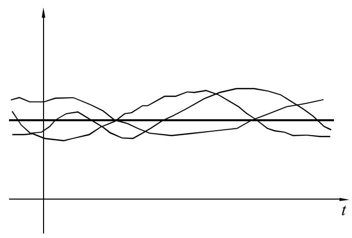
* * *

Poznavajući momente prvog i drugog reda, možemo nešto više kazati o samom procesu.

Funkcija $m(t)$ opisuje trend rasta ili pada očekivanja.

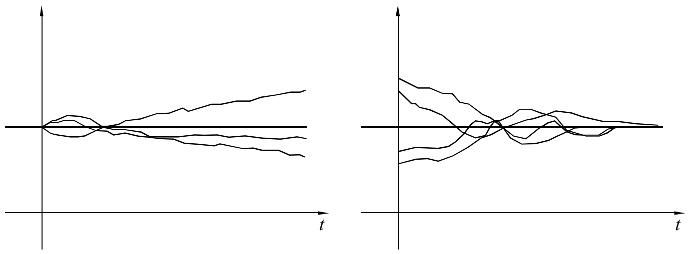


Slika 4.5: Očekivanje procesa je usrednjenje po svim trajektorijama.



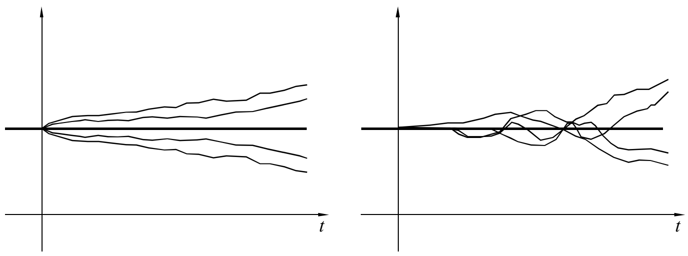
Slika 4.6: Kod stacionarnog procesa očekivanje je konstantno. Proces u vremenu ne pokazuje tendencije niti rasta niti pada

Kako momenti drugog reda utječu na ponašanje procesa? Opišimo nekoliko različitih situacija. Promotrimo pri tom procese s konstantnim očekivanjem, da bismo bolje vidjeli utjecaj samih momenata drugoga reda.



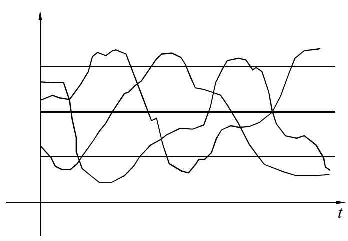
Slika 4.7: U procesu čija su trajektorije naznačene na slici lijevo, disperzija raste vremenom. U procesu s trajektorijama desno, ona opada vremenom.

Skicirajmo sad trajektorije procesa koji ima jednako očekivanje (konstantno) i jednaku disperziju. Njihove će se trajektorije razlikovati jer im se razlikuju korelacijske (kovarijacijske) funkcije.



Slika 4.8: Kod procesa lijevo korelacija $R(t,s)$ je velika za bliske t i s. Radi toga se trajektorije ne mijenjaju mnogo u kratkim vremenskim intervalima. Kod procesa desno korelacija je manja, stoga se trajektorije brže mijenjaju.

Primijetimo da procesi na slici 4.8 nisu stacionarni, jer im disperzija nije konstantna. Grafički prikaz trajektorija nekog stacionarnog procesa dan je na slici 4.9.



Slika 4.9: Trajektorije stacionarnog procesa. Očekivanje i disperzija konstantne su u vremenu.

4.4 Primjeri

Primjer 4.7 Neka je $X(t) = A_1 + A_2 t$ pri čemu su A_1 i A_2 nezavisne slučajne varijable, $\mathbf{E}[A_i] = a_i$, $\mathbf{D}[A_i] = \sigma_i^2$. Odredimo kovarijacijsku funkciju ovog procesa.

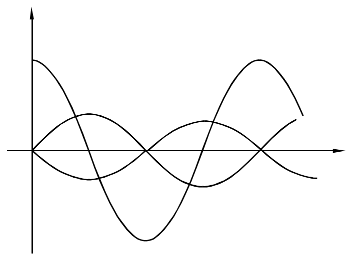
▷

$$\begin{aligned}
m(t) &= \mathbf{E}[X(t)] = \mathbf{E}[A_1] + \mathbf{E}[A_2] \cdot t = a_1 + a_2 t, \\
R(t,s) &= \mathbf{E}[X(t)X(s)] = \mathbf{E}[(A_1 + A_2 t)(A_1 + A_2 s)] \\
&= \mathbf{E}[A_1^2 + A_1 A_2 s + A_1 A_2 t + A_2^2 ts] \\
&= \mathbf{E}[A_1^2] + \mathbf{E}[A_1 A_2](t+s) + \mathbf{E}[A_2^2] ts \\
&= \sigma_1^2 + a_1^2 + a_1 a_2 (t+s) + (\sigma_2^2 + a_2^2) ts, \\
C(t,s) &= R(t,s) - (a_1 + a_2 t)(a_1 + a_2 s) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 ts.
\end{aligned}$$

◁

Primjer 4.8 Neka je $X(t) = A\cos(ut + \Phi)$, gdje su A i Φ nezavisne slučajne varijable i $\Phi \sim U[0, 2\pi]$. Pokažimo da je ovaj proces stacionaran.

▷



Slika 4.10: Trajektorije procesa $X(t) = A\cos(ut + \Phi)$. Iznos amplitude određen je slučajnom varijablom A. Fazni pomak je slučajan, s jednolikom razdiobom unutar intervala $[0, 2\pi]$. Nakon realizacije tih dviju varijabli, trajektorija je procesa sinusoida, koja je u potpunosti određena.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
m(t) &= \mathbf{E}[X(t)] = \mathbf{E}[A] \cdot \mathbf{E}[\cos(ut + \Phi)] = \mathbf{E}[A] \int_0^{2\pi} \cos(ut + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0, \\
R(t, t+h) &= \mathbf{E}[X(t)X(t+h)] = \mathbf{E}[A^2] \int_0^{2\pi} \cos(ut + \varphi) \cos(ut + uh + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{\mathbf{E}[A^2]}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(uh) + \cos(2ut + uh + \varphi)] d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{E}[A^2] \cos uh.
\end{aligned}$$

Vidimo da ova funkcija ovisi samo o razlici argumenata, te je proces stacionaran (u širem smislu). ◁

Primjer 4.9 Stohastički proces dan je formulom

$$X(t) = (A + B)\sin(t + \Phi),$$

pri čemu slučajne varijable A i B imaju normalnu razdiobu, $A \sim \mathcal{N}(1, 2)$, $B \sim \mathcal{N}(0, 1)$, a Φ uniformnu razdiobu na intervalu $[0, 2\pi]$. Odredite kovarijacijsku funkciju procesa $X(t)$ ako su $(A + B)$ i Φ nezavisne slučajne varijable, a A i B međusobno korelirane s koeficijentom korelacije $r = 0.3$.

▷

$$C(t,s) = R(t,s) - m(t)m(s),$$

$$\begin{aligned} m(t) &= E[(A+B)\sin(t+\Phi))] = (\text{nez.}) = E(A+B)\cdot E[\sin(t+\Phi)] = \\ &= (E(A)+E(B))\cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\sin(t+\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 1\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(t,s) &= E[(A+B)^2\sin(t+\Phi)\sin(s+\Phi)] = (\text{nez.}) = \\ &= E[(A+B)^2]\cdot E[\sin(t+\Phi)\sin(s+\Phi)] = \\ &= E[(A+B)^2]\cdot \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}[\cos(t-s)-\cos(t+s+2\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi \\ &= E[(A+B)^2]\left(\frac{1}{2}\cos(t-s)-0\right) = (2+0.3\sqrt{2})\cos(t-s), \end{aligned}$$

jer

$$\begin{aligned} E[(A+B)^2] &= E[A^2]+2E[AB]+E[B^2] = \\ &= D[A]+E[A]^2+D[B]+E[B]^2+2\cdot(r(A,B)\cdot\sigma_A\sigma_B+E[A]E[B]) = \\ &= 4+0.6\sqrt{2}, \end{aligned}$$

i

$$r_{AB} = \frac{\text{cov}(AB)}{\sigma_A\sigma_B} = \frac{\mathbf{E}[(A-m_A)(B-m_B)]}{\sigma_A\sigma_B} = \frac{\mathbf{E}[AB]-m_a m_B}{\sigma_A\sigma_B}.$$

◁

Primjer 4.10 Izvor generira simbole 0 i 1 nezavisno s vjerojatnostima p i $1-p$. 0 se prenosi ne šaljući ništa, a 1 se prenosi slanjem impulsa amplitude a tijekom vremenskog intervala intervala duljine 1. Stohastički signal (niz simbola) generiran na ovaj način reprezentiran je stohastičkim procesom $X_t, t\in\mathbb{R}$:

$$X_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n h(t-n),$$

gdje su A_n, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ nezavisne slučajne varijable definirane s

$$A_n = \begin{cases} 0, & \text{s vjerojatnošću } p, \\ a, & \text{s vjerojatnošću } 1-p, \end{cases}$$

te je

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0\le t<1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

▷Za svaki t vrijedi

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{s vjerojatnošću } p, \\ a, & \text{s vjerojatnošću } 1-p,. \end{cases}$$

- $m(t) = a\mathbf{P}(X_t = a) + 0\mathbf{P}(X_t = 0) = a(1-p)$
- $n \leq s, t < n+1$:

$$R(s,t) = \mathbf{E}[X_s X_t] = \mathbf{E}[X_s X_t \mid X_s = a]\mathbf{P}(X_s = a) + \mathbf{E}[X_s X_t \mid X_s = 0]\mathbf{P}(X_s = 0) = a^2(1-p)$$

$$\Rightarrow C(s,t) = a^2 p(1-p).$$

- $m \leq s < m+1$ i $n \leq t < n+1$, $m \neq n$: tada su X_s i X_t nezavisne.

$$\Rightarrow C(s,t) = \begin{cases} a^2 p(1-p), & n \leq s, t \leq n+1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$\triangleleft$

5. Markovljevi lanci

5.1 Osnovni pojmovi

5.1.1 Definicija Markovljevog lanca

Niz diskretnih slučajnih varijabli $X_0, X_1, \ldots$ zvat ćemo **stohastički lanac**. U ovom poglavlju ćemo proučavati stohastičke lance koji imaju Markovljevo svojstvo, tj. uz uvjet $X_n = x_n$, slučajna varijabla X_{n+1} je nezavisna s $X_1, \ldots, X_{n-1}$.

Definicija Markovljevog procesa se u slučaju diskretnog vremena i diskretnih slučajnih varijabli svodi na sljedeću definiciju.

Markovljev lanac

Definicija 5.1 Lanac $X_1, X_2, \ldots$ je **Markovljev**, ukoliko za sve izbore stanja $i_1, \ldots, i_n$ vrijedi:

$$\mathbf{P}(X_{n+1}{=}i_{n+1} \mid X_n{=}i_n, \ldots, X_0{=}i_0) = \mathbf{P}(X_{n+1}{=}i_{n+1} \mid X_n{=}i_n) \tag{5.1}$$

Ovdje trenutak $t = n+1$ predstavlja budućnost, $t = n$ sadašnjost, a $t = 0, \ldots, n-1$ prošlost. Dakle, stanje u budućnosti ovisi samo o sadašnjem stanju, ali ne i o načinu na koji je proces dospio u sadašnje stanje.

U teoriji markovljevih lanaca važno nam je samo razlikovati stanja u kojima se sistem može nalaziti. Zato, jednostavnosti radi i bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je skup svih stanja

$$S = \{0, 1, 2, \ldots\}, \qquad \text{ili} \qquad S = \{1, 2, 3 \ldots\}.$$

Ovaj skup može biti konačan ili beskonačan. Pretpostavit ćemo da je on konačan, iako će većina izvoda u nastavku vrijediti i za beskonačan skup stanja.

Slučajno pomicanje je jednostavni primjer Markovljevog lanca. Ako je poznat položaj čestice u trenutku t_n, tada njezin budući položaj ne ovisi o načinu na koji je čestica stigla u tu točku. Ovo se svojstvo naziva odsustvo pamćenja ili Markovljevo svojstvo.

Primjer 5.2 Bacamo uzastopce simetričnu kocku. Koji od sljedećih su Markovljevi lanci?

(a) (A_n), gdje je A_n najveći broj u prvih n bacanja,
(b) (B_n), gdje je B_n broj šestica u prvih n bacanja,
(c) (C_n), gdje je C_n broj bacanja od zadnje šestice,
(d) (D_n), gdje je D_n broj bacanja do iduće šestice.

5.1.2 Prijelazne vjerojatnosti

Veza između slučajnih varijabli X_n i X_{n+1} zadana je **prijelaznim vjerojatnostima**. Vjerojatnost prijelaza iz stanja i u stanje j definirana je s:

$$p_{ij}^{(n)} := \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Pretpostavit ćemo da lanac $X_1, X_2, \ldots$ posjeduje svojstvo **homogenosti**. To znači da ove prelazne vjerojatnosti ovise samo o stanjima i i j, ali ne o trenutku u kojem se prijelaz događa:

$$p_{ij}^{(n)} = p_{ij},$$

odnosno

$$p_{ij} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i). \tag{5.2}$$

Matrica s elementima p_{ij} označava se s $\mathbf{\Pi}$ i naziva **matrica prijelaznih vjerojatnosti**.

$$\mathbf{\Pi} := (p_{ij}).$$

Elementi ove matrice su nenegativni, $p_{ij} \geq 0$, a zbroj elemenata u svakom njezinom retku jednak je jedinici:

$$\sum_j p_{ij} = \sum_j \mathbf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) = 1.$$

Takva se matrica naziva **stohastička**.

Primjer 5.3 Pronađimo matrice prijelaznih vjerojatnosti za Markovljeve lance iz primjera 5.2 .

▷

(a) $S = \{1,2,3,4,5,6\}$,
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \dots & \frac{1}{6} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $S = \{1,2,3,4\dots\}$,
$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \dots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

(c) $S = \{1,2,3,4\dots\}$,
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \dots \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \dots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

(d) $S = \{1,2,3,4\dots\}$,
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\frac{1}{6} & (\frac{5}{6})^2\frac{1}{6} & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

◁

Primjer 5.4 Pretpostavimo da vrijeme u određenom trenutku ovisi o vremenskim uvjetima prethodna dva dana. Ako je padala kiša jučer i danas, onda će padati i sutra s vjerojatnošću 0.7. Ako je padala kiša danas ali ne i jučer, onda će padati sutra s vjrojatnošću 0.5. Ako je padala jučer ali ne danas, onda će sutra padati s vjerojatnošću 0.4. Ako nije padala kiša zadnja dva dana, onda će padati sutra s vjerojatnošću 0.2.

Ako stanje u trenutku n ovisi samo o tome pada li kiša u trenutku n onda ovakav model nije Markovljev lanac. Međutim, možemo ga transformirati tako da on postane Markovljev.

▷Označimo stanja:

$$
\begin{aligned}
1 &= \text{ padala je kiša danas i jučer;}\\
2 &= \text{ padala je kiša danas, jučer nije;}\\
3 &= \text{ danas nije padala kiša, jučer jest;}\\
4 &= \text{ nije padala kiša ni danas ni jučer.}
\end{aligned}
$$

Ovdje se radi o Markovljevom lancu sa četiri stanja i matricom prijelaznih vjerojatnosti:

$$
\Pi = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}
$$

◁

Matrica $\mathbf{\Pi}$ daje vjerojatnosti prijelaza iz jednog stanja u drugo, u jednom koraku markovljevog lanca, iz stanja i u trenutku n u stanje j u trenutku $n+1$. Možemo li na temelju toga odrediti vjerojatnosti prijelaza iz stanja i u trenutku n u stanje j u trenutku $n+m$, za $m > 1$?

Označimo

$$
p_{ij}(m) = \mathbf{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i).
$$

Ovi brojevi daju vjerojatnosti da sistem iz stanja i pređe u stanje j u m koraka. Primjetimo da zbog homogenosti procesa, ove vjerojatnosti ne ovise o broju n. Sa $\mathbf{\Pi}(m)$ ćemo označiti odgovarajuću matricu. Pri tom je

$$
p_{ij}(1) = p_{ij}, \quad \mathbf{\Pi}(1) = \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{\Pi}(0) = \mathbf{I}.
$$

Odgovor na postavljeno pitanje daje sljedeći važni teorem.

Chapman–Kolmogorovljeve jednadžbe

Teorem 5.5 Prijelazne vjerojatnosti markovljevog homogenog lanca zadovoljavaju **Chapman–Kolmogorovljeve jednadžbe**

$$
p_{ij}(m) = \sum_k p_{ik}(r) p_{kj}(m-r), \tag{5.3}
$$

za svaki $r = 1, 2, \ldots, m-1$. U matričnom zapisu, vrijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Pi}(m) &= \mathbf{\Pi}(r)\mathbf{\Pi}(m-r), \qquad (5.4)\\
\mathbf{\Pi}(m) &= \mathbf{\Pi}^m.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Relacije (5.3) i (5.4) su ekvivalentne, druga je matrični zapis prve.

Promotrimo najprije vjerojatnosti prijelaza u dva susjedna koraka:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(m) &= \mathbf{P}(X_m = j \mid X_0 = i) = \frac{\mathbf{P}(X_m = j, X_0 = i)}{\mathbf{P}(X_0 = i)} \\
&= \sum_k \frac{\mathbf{P}(X_m = j, X_{m-1} = k, X_0 = i)}{\mathbf{P}(X_0 = i)} \\
&= \sum_k \frac{\mathbf{P}(X_{m-1} = k, X_0 = i)}{\mathbf{P}(X_0 = i)} \cdot \frac{\mathbf{P}(X_m = j, X_{m-1} = k, X_0 = i)}{\mathbf{P}(X_{m-1} = k, X_0 = i)} \\
&= \sum_k \mathbf{P}(X_{m-1} = k \mid X_0 = i) \cdot \mathbf{P}(X_m = j \mid X_0 = i,\ X_{m-1} = k)
\end{aligned}
$$

Zbog markovljevog svojstva, ovaj je izraz jednak:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(m) &= \sum_k \mathbf{P}(X_{m-1} = k \mid X_0 = i) \cdot \mathbf{P}(X_m = j \mid X_{m-1} = k) \\
&= \sum_k p_{ik}(m-1) p_{kj}.
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi

$$\mathbf{\Pi}(m) = \mathbf{\Pi}(m-1)\mathbf{\Pi}.$$

Uzastopnom primjenom ove jednakosti dobivamo:

$$\mathbf{\Pi}(m) = \mathbf{\Pi}(m-1)\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}(m-2)\mathbf{\Pi}^2 = \ldots = \mathbf{\Pi}^m.$$

Sada možemo napisati

$$\mathbf{\Pi}(m) = \mathbf{\Pi}^m = \mathbf{\Pi}^r \cdot \mathbf{\Pi}^{m-r} = \mathbf{\Pi}(r)\mathbf{\Pi}(m-r).$$

Time je dokazana relacija (5.4), pa onda i teorem.

■

Primjer 5.6 Neka je (Y_i) niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli definiranih s:

$$\mathbf{P}(Y_i = 1) = \mathbf{P}(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$$

Definiramo slučajne varijable X_n:

$$X_n = \frac{1}{2}(Y_n + Y_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Je li lanac (X_n) Markovljev?

▷Vrijedi

$$\mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{P}(X_n = 0) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{4}.$$

Budući da su X_n i X_{n+m} nezavisne za $m > 1$, matrica prijelaznih vjerojatnosti u m koraka $p_{ij}(m) = \mathbf{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$, je:

$$\mathbf{\Pi}(m) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Matrica prijelaznih vjerojatnosti u jednom koraku $p_{ij} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$, je:

$$\mathbf{\Pi}(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je $\mathbf{\Pi}(1) \cdot \mathbf{\Pi}(1) \neq \mathbf{\Pi}(2)$, te Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe ne vrijede. Stoga ovaj lanac ne može biti Markovljev. ◁

* * *

Neka je $X_0, X_1, X_2, \dots$ Markovljev lanac. Označimo s $\mathbf{p}(n)$ razdiobu slučajne varijable X_n:

$$\mathbf{p}(n) := (p_1(n), p_2(n), \dots) \qquad p_i(n) := \mathbf{P}(X_n = i).$$

Markovljev lanac je potpuno opisan ako poznajemo matricu $\mathbf{\Pi}$ i razdiobu slučajne varijable X_0. Tu razdiobu nazivamo još **vektor početnih vjerojatnosti**:

$$\mathbf{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \dots)$$

Time je opisano stanje sistema u trenutku $t = 0$:

$$p_i(0) := \mathbf{P}(X_0 = i).$$

Jednadžba Markovljevog lanca

Teorem 5.7 Stanje sistema u trenutku n može se opisati jednadžbom

$$5.1.3\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{\Pi}^n. \tag{5.5}$$

Veza razdioba u dva uzastopna vremena dana je s

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1)\mathbf{\Pi} \tag{5.6}$$

Dokaz. Povežimo stanje u trenutku t_k sa stanjem u prethodnom trenutku:

$$\begin{aligned} p_j(k) &= \mathbf{P}(X_k = j) \\ &= \sum_i \mathbf{P}(X_{k-1} = i)\mathbf{P}(X_k = j \mid X_{k-1} = i) \\ &= \sum_i p_i(k-1)p_{ij}. \end{aligned}$$

Dobili smo, u matričnom zapisu, jednadžbu

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(k-1)\mathbf{\Pi}.$$

Ponavljanjem ovog postupka zaključujemo da vrijedi

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1)\mathbf{\Pi} = \mathbf{p}(n-2)\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Pi} = \dots = \mathbf{p}(0)\mathbf{\Pi}^n.$$

Time je tvrdnja dokazana. ■

5.2 Klasifikacija stanja

Kažemo da je stanje j **dostižno** (ili da slijedi) iz stanja i te pišemo $i \longrightarrow j$, ako postoji takav broj n da je $p_{ij}(n) > 0$. To znači da se iz stanja i može u nekoliko koraka doći u stanje j.

Stanje i nazivamo **bitnim** ako za svako stanje j za koje vrijedi $i \longrightarrow j$ vrijedi također $j \longrightarrow i$. U protivnom (ako postoji j takvo da $i \longrightarrow j$ ali $j \not\longrightarrow i$), stanje i je **nebitno**.

Ako su stanja i, j međusobno dostižna, pisat ćemo $i \longleftrightarrow j$.

Kažemo da je $H \subset S$ **bitni skup** ako je ispunjeno sljedeće

- svako stanje $i \in H$ je bitno,
- za sve $i, j \in H$ vrijedi $i \longleftrightarrow j$,
- ako je $i \in H, j \notin H$, tada $i \not\longrightarrow j$.

Konačan skup S dade se rastaviti na uniju $S = H_0 \cup H_1 \cup \cdots \cup H_r$, gdje H_0 sadrži nebitna stanja, a $H_1, \ldots, H_r$ su bitni skupovi.

Primjer 5.8 Dokaži da u konačnom Markovljevom lancu bitni skup uvijek postoji.

▷Neka je i neko bitno stanje (ono uvijek postoji — dokaži).Tada je skup H_i onih stanja koja su međusobno dostiživa sa stanjem i, bitni skup. Pokažimo da su ispunjeni gornji uvjeti.

Neka je $j \in H_i$ te $k \in S$ takav da $j \longrightarrow k$. Tada vrijedi $i \longrightarrow j \longrightarrow k$. Pošto je i bitno stanje imamo $k \longrightarrow i$. Stoga vrijedi i $k \longrightarrow j$.

Uzmimo $k, j \in H_i$. Za njih vrijedi $i \longleftrightarrow k$ i $i \longleftrightarrow j$ pa je stoga i $j \longleftrightarrow k$.

Neka je sada $k \notin H_i$. Tada $i \not\longrightarrow k$. Kad bi vrijedilo $j \longrightarrow k$, tada bi iz $i \longrightarrow j$ slijedilo i $i \longrightarrow k$, proturječje. ◁

Primjer 5.9 Napravi klasifikaciju stanja za markovljeve lance zadane sljedećim matricama prijelaznih vjerojatnosti

(a)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(b)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(d)
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

(e)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(f)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

▷

(a) Primijetimo najprije da je pri klasifikaciji stanja važno samo znati *koji* elementi matrice $\mathbf{\Pi}$ su različiti od nule, ali ne i koliki je njihov iznos. Zato matricu iz a) možemo shamatski zapisati ovako ($*$ označava ne-nul element)

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 1, \quad 1 \longrightarrow 2, \quad 1 \longrightarrow 4 \\ 2 \longrightarrow 3, \quad 2 \longrightarrow 5 \\ 3 \longrightarrow 1, \quad 3 \longrightarrow 5 \\ 4 \longrightarrow 4, \quad 4 \longrightarrow 5 \\ 5 \longrightarrow 1 \end{array}$$

Sada izdvajamo sva stanja koja su povezana u jednom koraku (ispisana su desno od matrice). Na osnovu tih veza crtamo usmjereni graf matrice $\mathbf{\Pi}$. Iz grafa pronalazimo put

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1$$

kao i

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1$$

te su sva stanja međusobno povezana. Dakle, $H_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, imamo samo jedan bitni skup i niti jedno nebitno stanje.

(b) Skicirajmo matricu i njen usmjereni graf

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Iz grafa raspoznajemo nebitna stanja $H_0 = \{2, 4\}$, te dva bitna skupa: $H_1 = \{1, 3\}$ i $H_2 = \{5\}$.
Što se događa u ovakvom lancu?
Iz stanja 2 on, nakon nekog vremena, sigurno prelazi u bitan skup H_1 i tamo ostaje. Iz stanja 4 također nakon nekog vremena (a moguće i odmah!) prelazi, bilo u bitni skup H_1, bilo u bitni skup H_2.
Važno je zapamtiti sljedeće: iz skupa nebitnih stanja sistem sigurno izlazi (nakon nekog vremena) i nikad se tamo više ne vraća. Nakon što dospije u neko od bitnih skupova, nastavlja gibanje *samo unutar* tog skupa.

(c)

$$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \{1, 2, 4\}, \quad H_1 = \{3\}, \quad H_2 = \{5\}.$$

(d)

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \{2, 5\}, \quad H_1 = \{1, 3, 4\}.$$

(e)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \{1, 3, 5\}, \quad H_2 = \{2, 4\}.$$

(f)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \{1, 4, 5\}, \quad H_1 = \{2, 3\}.$$

◁

* * *

Za stanja i i j označimo s $f_{ij}(n)$ vjerojatnost da iz stanja i lanac prvi put prijeđe u stanje j nakon n koraka.

$$\begin{aligned} f_{ij}(0) &= 0, \\ f_{ij}(n) &= \mathbf{P}(X_n = j,\ X_k \neq j,\ k = 1, \dots n-1 \mid X_0 = i). \end{aligned}$$

Neka je

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n).$$

Tada f_{ij} označava vjerojatnost da lanac u nekom trenutku posjeti stanje j uz uvjet da proces kreće iz stanja i. Primjetimo da je za $i \neq j$ f_{ij} pozitivno ako i samo ako je j dostižno iz i. Stanje j je **postojano** ako je $f_{jj} = 1$, a **prolazno** inače.

Primjer 5.10 Neka je $(X_n, n \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i matricom prijelaza

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Klasificirajte stanja ovog lanca.
(b) Dokažite da u konačnom Markovljevom lancu ne mogu sva stanja biti nebitna.
(c) Neka s_n označava vjerojatnost da se lanac prvi put vrati u stanje 1 nakon n koraka. Odredite s_n. (Lanac se na početku nalazi u stanju 1)
(d) Izračunajte $s = \sum_{n=1}^{\infty} s_n$.
(e) Je li stanje 1 postojano ili prolazno?

▷

(a) nebitni $\{1,4,5\}$ i bitni $\{2,3\}$

(b) Skup stanja $S = \{i_1, \dots i_n\}$. Pretp da su sva stanja nebitna. Onda iz nebitnog stanja i_1 lanac može preći u sljedeće nebitno stanje i_2 takvo da $i_2 \nrightarrow i_1$ itd. Ali zbog konačnsti skupa stanja, lanac se mora vratiti u neko stanje u kojem je već bio: $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k \to i_{k+1} \to \cdots i_n \to i_k$, odakle slijedi $i_{k+1} \to i_k$. Kontradikcija.

(c) Ako je u prvom koraku otišao u 4, onda se može vratiti u 1 jedino u neparno koraka i to na način $145 \cdots 451$, a ako je otišao u 5 onda se vraća u parno koraka na način $154 \cdots 451$. Stoga je

$$s_n = \begin{cases} p_{14} p_{45}^{\frac{n-1}{2}} p_{54}^{\frac{n-3}{2}} p_{51}, & n \geq 3 \text{ neparan} \\ p_{15} p_{54}^{\frac{n-2}{2}} p_{45}^{\frac{n-2}{2}} p_{51}, & n \geq 2 \text{ paran} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{24} (\frac{1}{4})^{\frac{n-3}{2}}, & n \geq 3 \text{ neparan} \\ \frac{1}{8} (\frac{1}{4})^{\frac{n-2}{2}}, & n \geq 2 \text{ paran} \end{cases}$$

(d) $s = 2/9 < 1$.

(e) prolazno.

◁

5.3 Stacionarne vjerojatnosti i ergodički teorem

Stacionarne vjerojatnosti

Definicija 5.11 Početne vjerojatnosti $\{\pi_i = \mathbf{P}(X_0 = i), i \in S\}$ se zovu **stacionarne vjerojatnosti** ako zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_i p_{ij}, \qquad \forall j.$$

Ovo je homogeni sustav jednadžbi koji nema jednoznačno rješenje. Tim jednadžbama treba dodati još jednu:

$$\pi_1 + \ldots + \pi_n = 1.$$

Matrični zapis ovog sustava je

$$\mathbf{\Pi}^\top \pi = \pi, \qquad \sum_j \pi_j = 1. \tag{5.7}$$

* * *

Ponekad je prikladniji sljedeći postupak. Neka je $M_{jj}(\lambda)$ (glavni) minor elementa $\lambda - p_{jj}$ u matrici $\lambda I - \mathbf{\Pi}$

$$\lambda I - \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \lambda - p_{11} & -p_{12} & \dots & -p_{1m} \\ -p_{21} & \lambda - p_{22} & \dots & -p_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ -p_{m1} & -p_{m2} & \dots & \lambda - p_{mm} \end{bmatrix}$$

tada se stacionarne vjerojatnosti računaju formulom

$$\pi_j = \frac{M_{jj}(1)}{\sum_{k=1}^{m} M_{kk}(1)}. \tag{5.8}$$

Sljedeći teorem je jedan od temeljnih u teoriji markovljevih lanaca. Nećemo ga dokazati na ovome mjestu.

Ergodički teorem

Teorem 5.12 Ako postoji broj n takav da su svi elementi matrice $\mathbf{\Pi}^n$ strogo pozitivni (što znači da se kroz n koraka iz svakog stanja može preći u bilo koje drugo), tada za svaki j postoji (i ne ovisi o i)

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n). \tag{5.9}$$

Markovljev lanac za kojeg postoji ovaj limes naziva se **ergodički** ili **regularan**.

Vjerojatnosti π_j su stacionarne vjerojatnosti. Iz jednakosti (**??**) slijedi

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{\Pi}^n = \mathbf{p}(0)\mathbf{\Pi}(n)$$

Za j-tu komponentu ovog vektora vrijedi

$$p_j(n) = \sum_i p_i(0)p_{ij}(n).$$

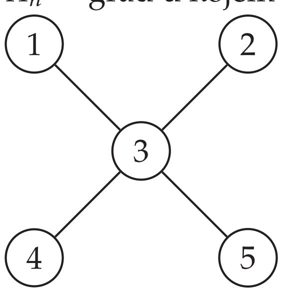
Ako postoje stacionarne vjerojatnosti, onda će biti

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_i p_i(0)p_{ij}(n) = \sum_i p_i(0)\pi_j = \pi_j. \tag{5.10}$$

Stacionarne vjerojatnosti određuju vjerojatnost da će u nekom dalekom trenutku (kad se izgubi utjecaj početnog stanja) sistem nalaziti u stanju j. Ta se vjerojatnost može interpretirati i kao prosječni dio vremena koje sistem provodi u stanju j.

* * *

Zadatak 5.1 Gradovi na slici čine skup stanja $S = \{1,2,3,4,5\}$. Kada se trgovac nalazi u nekom gradu, onda s jednakom vjerojatnosti odlazi u svaki od susjednih gradova. Neka je
$X_n =$ grad u kojem se trgovac nalazi u trenutku n.



1. Zašto je lanac $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ Markovljev?
2. Odredite matricu prijelaznih vjerojatnosti lanca X.
3. Postoji li $\lim_n \Pi^n$?
4. Je li lanac X ergodički?
5. Ako je sistem u početnom trenutku bio u stanju 1, odredite vjerojatnosti za stanja u trenucima $n = 2012$ i $n = 2013$.

* * *

Primjer 5.13 Matrica prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{\Pi}$ markovljevog lanca sa dva stanja $\{1,2\}$ glasi

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

a) Ako je sistem u početnom trenutku bio u stanju 1, odredi vjerojatnosti za stanja sistema nakon nekoliko koraka.

b) Odredi matricu prijelaznih vjerojatnosti nakon nekoliko koraka.

c) Postoji li $\lim_{n\to\infty} \mathbf{\Pi}^n$? Kolike su stacionarne vjerojatnosti?

▷

(a) U trenutku t_0 sistem je bio u stanju 1. To znači da je razdioba slučajne varijable X_0 jednaka $\mathbf{p}(0) = (1, 0)$. Po formuli (5.6) vjerojatnost stanja u slijedećim trenucima su

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{\Pi} = (1,0) \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}),$$

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(1)\mathbf{\Pi} = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}) \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = (\tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{8}),$$

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(2)\mathbf{\Pi} = (\tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{8}) \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = (\tfrac{9}{16}, \tfrac{7}{16}).$$

Ako je u trenutku t_0 početno stanje bilo 2, tj. $\mathbf{p}(0) = (0, 1)$, tada bismo na isti način dobili

$$\mathbf{p}(1) = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}), \qquad \mathbf{p}(2) = (\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{8}), \qquad \mathbf{p}(3) = (\tfrac{7}{16}, \tfrac{9}{16}), \ldots$$

Vidimo da se vremenom gubi utjecaj početnog stanja.

(b) Računajmo potencije matrice $\mathbf{\Pi}$.

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Pi}^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Pi}^3 = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \end{bmatrix}, \ldots$$

(c) Indukcijom se lako provjerava da vrijedi

$$\mathbf{\Pi}^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n+1}{2^{n+1}} & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} \\ \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \end{bmatrix}.$$

Zato postoji

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{\Pi}^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Svaki redak ove matrice pretstavlja vektor stacionarnih vjerojatnosti.

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \tfrac{1}{2}, \qquad j = 1, 2.$$

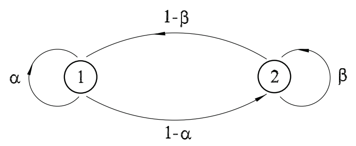
◁

Primjer 5.14 Markovljev lanac s dva stanja: $\{1,2\}$ zadan je s prijelaznim vjerojatnostima ($\alpha, \beta \in \langle 0,1\rangle$)

$$\alpha = \mathbf{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 1),$$
$$\beta = \mathbf{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 2).$$

Onda je

$$1-\alpha = \mathbf{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 1), \tag{5.11}$$
$$1-\beta = \mathbf{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 2). \tag{5.12}$$



Slika 5.1: Prijelazne vjerojatnosti homogenog lanca s dva stanja.

Matrica prijelaznih vjerojatnosti ovog lanca je

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix}.$$

Ispunjen je uvjet ergodičkog teorema. Odredimo prijelazne vjerojatnosti nakon n koraka te stacionarne vjerojatnosti.

$\triangleright$Matricu $\mathbf{\Pi}^n$ nije jednostavno računati. Jedan je način da napravimo njenu dijagonalizaciju s pomoću svojstvenih vektora. Potrebno je odrediti matricu S takvu da $\mathbf{\Pi}$ ima prikaz:

$$\mathbf{\Pi} = SDS^{-1}$$

Tu je S matrica svojstvenih vektora, a D dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti. Onda će biti

$$\mathbf{\Pi}^n = SD^nS^{-1}$$

Izračunajmo svojstvene vrijednosti i vektore matrice $\mathbf{\Pi}$.

$$\det(\lambda I - \mathbf{\Pi}) = \begin{vmatrix} \lambda-\alpha & -1+\alpha \\ -1+\beta & \lambda-\beta \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda - 1 + \alpha + \beta$$

te je $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha+\beta-1$. Svojstveni vektori su redom (provjeri!) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} \alpha-1 \\ 1-\beta \end{bmatrix}$. Zato je

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Pi}^n &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha-1 \\ 1 & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\alpha+\beta-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha-1 \\ 1 & 1-\beta \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & (\alpha-1)(\alpha+\beta-1)^n \\ 1 & (1-\beta)(\alpha+\beta-1)^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2-\alpha-\beta} \begin{bmatrix} 1-\beta & 1-\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2-\alpha-\beta} \begin{bmatrix} (1-\beta)+(1-\alpha)(\alpha+\beta-1)^n & (1-\alpha)-(1-\alpha)(\alpha+\beta-1)^n \\ (1-\beta)-(1-\beta)(\alpha+\beta-1)^n & (1-\alpha)+(1-\beta)(\alpha+\beta-1)^n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Budući je $|\alpha + \beta - 1| < 1$, onda postoji limes ove matrice:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{\Pi}^n = \frac{1}{2-\alpha-\beta} \begin{bmatrix} 1-\beta & 1-\alpha \\ 1-\beta & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

Zato stacionarne vjerojatnosti glase

$$\pi_1 = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}, \qquad \pi_2 = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}.$$

◁

Primjer 5.15 (**Gluhi telefon ili prijenosni kanal sa šumom**) Kanal sačinjava n serijski spojenih prenosnika od kojih svaki prenosi dva moguća znaka. Vjerojatnost točne interpretacije svakog znaka u svakom prijenosniku je $\alpha = \beta = 0.995$.

a) Koliko prijenosnika taj kanal smije imati da bi pouzdanost ispravnog prijema bila veća od 95%?

b) Ako kanal ima 5 prijenosnika, kolika smije biti vjerojatnost pogrešnog prijema svakog znaka da bi dobili istu pouzdanost cijelog sustava?

c) Što se događa kad broj prenosnika postaje neograničen?

▷

(a) Prijenos znaka opisan je markovljevim lancem s dva stanja $\{0, 1\}$ i matricom prijelaznih vjerojatnosti

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0.995 & 0.005 \\ 0.005 & 0.995 \end{bmatrix}.$$

Po prethodnom zadatku, vjerojatnost pogrešne interpretacije nakon n koraka je

$$p_{01}(n) = \frac{(1-\alpha) - (1-\alpha)(\alpha+\beta-1)^n}{2-\alpha-\beta} = \frac{1}{2}(1-(2\alpha-1)^n) = \frac{1}{2}(1-0.99^n)$$
$$p_{10}(n) = \frac{(1-\beta) - (1-\beta)(\alpha+\beta-1)^n}{2-\alpha-\beta} = \frac{1}{2}(1-0.99^n)$$

Primijetimo da su to rastuće funkcije od n: vjerojatnost pogreške raste s brojem prijenosnika. Po uvjetima zadatka, moramo odrediti n iz vjerojatnosti

$$\frac{1}{2}(1-0.99^n) < 0.05$$

što daje $n \leq 10$.

(b) Trebamo razriješiti nejednadžbu

$$p_{01}(n) = p_{10}(n) = \frac{1}{2}(1-(2\alpha-1)^n) < 1-p = 0.05$$

odakle dobivamo

$$\alpha > \frac{1}{2}\Big(1 + \sqrt[n]{1-2(1-p)}\Big).$$

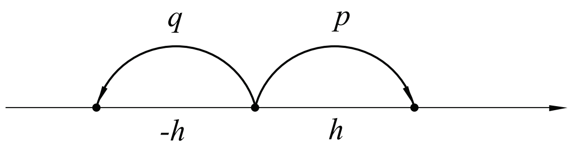
Za $p = 0.95$ i $n = 5$ dobivamo $\alpha > 0.9896$.

(c) Kad $n \to \infty$, tada se pouzdanost gubi, $p_{ij}(n) \to \frac{1}{2}$ za sve i, j.

◁

Primjer 5.16 Slučajno pomicanje kao Markovljev lanac. Čestica kreće iz jedne od točaka $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$, ulijevo s vjerojatnošću p, udesno s vjerojatnošću $q = 1 - p$. Ako dospije do rubnih točaka, tada ostaje trajno u njima. Napiši matricu prijelaznih vjerojatnosti. Da li je lanac ergodički? Kolike su stacionarne vjerojatnosti?

▷



Lanac je homogen i markovljev; prijelazne vjerojatnosti ne ovise o trenutku već samo o položaju čestice. Vrijedi

$$\begin{aligned}
p_{00} &= \mathbf{P}\{X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0\} = 1, \\
p_{mm} &= \mathbf{P}\{X_n = m \mid X_{n-1} = m\} = 1, \\
p_{i,i+1} &= \mathbf{P}\{X_n = i+1 \mid X_{n-1} = i\} = p, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\
p_{i,i-1} &= \mathbf{P}\{X_n = i-1 \mid X_{n-1} = i\} = q, \quad 1 \leq i \leq m-1,
\end{aligned}$$

te $p_{ij} = 0$ za sve ostale i, j. Zato je matrica prijelaznih vjerojatnosti

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
p & 0 & q & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & p & 0 & q & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & p & 0 & q & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p & 0 & q \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Primjećujemo da svaka potencija $\mathbf{\Pi}^n$ ima isti prvi i posljednji redak i stoga ergodički teorem nije primjenjiv.

Promotrimo stacionarne vjerojatnosti. Prije ili kasnije, čestica će završiti u jednoj od rubnih točaka, tako da će $\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n)$ biti oblika $(\alpha, 0, \ldots, 0, 1 - \alpha)$. Međutim, α ovisi o početnom stanju. Tako npr, ako čestica starta iz 0, tada u njoj i trajno ostaje, te je $\alpha = 1$. Ako starta iz točke k, može se dokazati da tada vrijedi

$$\alpha = \frac{(q/p)^k - (q/p)^m}{1 - (q/p)^m}.$$

◁

Primjer 5.17 Primjer slučajnog pomicanja. Čestica se može nalaziti u jednom od stanja $\{1, 2, \ldots, m\}$. Ako se nalazi u stanju i, $i > 1$, tada se s vjerojatnošću 1 vraća u stanje $i - 1$. Iz stanja 1 prelazi s jednakom vjerojatnošću u bilo koje stanje $1, 2, \ldots, m$. Napiši matricu prijelaznih vjerojatnosti. Da li je lanac ergodičan? Odredi stacionarne vjerojatnosti.

▷Po uvjetima zadatka možemo odmah napisati matricu prijelaznih vjerojatnosti

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{\Pi}^m$ ima sve elemente pozitivne! Zaista, u m koraka moguće je iz bilo kojeg stanja otići u bilo koje drugo, te je $p_{ij}(m) > 0$. Zato je markovljev lanac ergodičan i postoje stacionarne vjerojatnosti. Stacionarne vjerojatnosti ćemo odrediti iz jednadžbi (**??**)

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_{m-1} \\ \pi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_{m-1} \\ \pi_m \end{bmatrix}$$

Odavde

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{m}\pi_1 + \pi_2, \\ \pi_2 &= \frac{1}{m}\pi_1 + \pi_3, \\ &\vdots \\ \pi_{m-1} &= \frac{1}{m}\pi_1 + \pi_m, \\ \pi_m &= \frac{1}{m}\pi_1. \end{aligned}$$

Rješavajući unatrag dobivamo

$$\pi_{m-1} = 2\pi_m, \quad \pi_{m-2} = 3\pi_m, \quad , \pi_1 = m\pi_m.$$

Kako je $\pi_1 + \pi_m = 1$, to slijedi

$$[m + (m-1) + \ldots + 2 + 1]\pi_m = 1 \implies \pi_m = \frac{2}{m(m+1)}.$$

Stacionarne vjerojatnosti su $\pi_j = \frac{2(m-j+1)}{m(m+1)}, \quad j = 1, \ldots, m.$ ◁

Primjer 5.18 Slučajno pomicanje s refleksijom na rubu. Čestica kreće iz jedne od točaka $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$, udesno s vjerojatnošću p, ulijevo s vjerojatnošću $q = 1 - p$. Ako dospije do lijeve rubne točke, ostaje u njoj s vjerojatnošću q a u desnoj rubnoj točki ostaje s vjerojatnošću p. Napiši matricu prijelaznih vjerojatnosti. Da li je lanac ergodički? Kolike su stacionarne vjerojatnosti?

▷Matricu prijelaznih vjerojatnosti ispisujemo prema zadanim uvjetima:

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots & & & & \\ q & 0 & p & 0 & \dots & & & & \\ 0 & q & 0 & p & \dots & & & & \\ \vdots & & & & \dots & q & 0 & p & 0 \\ & & & & \dots & 0 & q & 0 & p \\ & & & & \dots & 0 & 0 & q & p \end{bmatrix}$$

Lako vidimo da i sada za veliki n, nakon n koraka iz svakog stanja možemo doći u svako drugo stanje. To znači da matrica $\mathbf{\Pi}^n$ ima pozitivne elemente za dovoljno veliki n, te je lanac ergodičan. Sustav (5.7) glasi

$$\begin{aligned} q\pi_1 + q\pi_2 &= \pi_1 \\ p\pi_1 + q\pi_3 &= \pi_2 \\ p\pi_2 + q\pi_4 &= \pi_3 \\ &\vdots \\ p\pi_{n-2} + q\pi_n &= \pi_{n-1} \\ p\pi_{n-1} + q\pi_n &= \pi_n \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe slijedi $\pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1$. Uvrštavajući ovu vrijednost za π_1 u drugu jednadžbu, dobivamo $\pi_3 = \frac{p}{q}\pi_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \pi_1$. Sada lako vidimo da za svaki j vrijedi

$$\pi_j = (\frac{p}{q})^{j-1}\pi_1.$$

Nadalje je $\sum \pi_j = 1$, pa vrijednost za π_1 nalazimo iz uvjeta

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_m = 1 \implies \pi_1\big[1 + \frac{p}{q} + (\frac{p}{q})^2 + \ldots + (\frac{p}{q})^{m-1}\big] = 1.$$

Odavde je

$$\pi_1 = \frac{1-(p/q)}{1-(p/q)^m} \implies \pi_j = \frac{1-(p/q)}{1-(p/q)^m}(\frac{p}{q})^{j-1}.$$

◁

Primjer 5.19 U zatvorenom spremniku nalazi se $2z$ molekula određene vrste. Spremnik je podijeljen propusnom membranom na dva jednaka dijela. Neka je X_n broj molekula u jednom dijelu spremnika nakon n prleazaka bilo koje molekule s jedne na drugu stranu. Ako s X_0 označimo početni broj molekula u promatranom dijelu spremnika, tada se niz slučajnih varijabli $X_0, X_1, X_2, \dots$ ponaša približno kao Markovljev lanac s prijelaznim vjerojatnostima:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{2z-i}{2z}, & \text{za } j = i+1, \\ \frac{i}{2z}, & \text{za } j = i-1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Sustav linearnih jednadžbi koje zadovoljavaju stacionarne vjerojatnosti glasi:

$$\pi_0 = \pi_1 p_{10},$$
$$\pi_j = \pi_{j-1} p_{j-1,j} + \pi_{j+1} p_{j+1,j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2z-1$$
$$\pi_{2z} = \pi_{2z-1} p_{2z-1,2z},$$

čije je rješenje

$$\pi_j = \binom{2z}{j} 2^{-2z}, \qquad j = 0, 1, \dots, 2z.$$

Primjer 5.20 Tri bijele i tri crne kuglice raspoređene su u dvije urne, po tri kuglice u svakoj. Stanje sistema opisano je brojem bijelih kuglica u prvoj urni. U svakom koraku biramo na sreću po jednu kuglicu iz obje urne i zamijenimo im mjesta. Odredi matricu prijelaznih vjerojatnosti i stacionarne vjerojatnosti.

▷Postoje četiri moguća stanja, $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Označimo sa A_j događaj: u prvoj urni ima j bijelih kuglica (tj. sistem se nalazi u stanju j). Prijelazne vjerojatnosti su

$$p_{jj} = \mathbf{P}\{\text{izvučene su istobojne kuglice} \mid A_j\} = 2 \cdot \frac{j(3-j)}{9},$$
$$p_{j,j+1} = \mathbf{P}\{\text{izvučena je crna iz prve i bijela iz druge} \mid A_j\} = \frac{(3-j)^2}{9},$$
$$p_{j,j-1} = \mathbf{P}\{\text{izvučena je bijela iz prve i crna iz druge} \mid A_j\} = \frac{j^2}{9}.$$

Sve su ostale vjerojatnosti 0. Matrica prijelaznih vjerojatnosti glasi

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kroz tri koraka moguće je iz bilo kojeg stanja preći u bilo koje drugo. Zato matrica $\mathbf{\Pi}^3$ ima samo pozitivne elemente i možemo primjeniti ergodički teorem.

Stacionarne vjerojatnosti računamo po formuli (5.8). Vrijedi

$$\lambda I - \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \lambda - \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{9} & \lambda - \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Minori su

$$M_{00}(1) = \begin{vmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & 0 \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{81} = M_{33}(1),$$
$$M_{11}(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{36}{81} = M_{22}(1).$$

Zato je

$$\pi_0 = \frac{\frac{4}{81}}{2 \cdot \frac{4}{81} + 2 \cdot \frac{36}{81}} = \frac{1}{20} = \pi_3, \qquad \pi_1 = \frac{\frac{36}{81}}{2 \cdot \frac{4}{81} + 2 \cdot \frac{36}{81}} = \frac{9}{20} = \pi_2.$$

◁

6. Poissonov proces

6.1 Homogeni Poissonovi procesi

6.1.1 Fizikalna definicija Poissonovog procesa.

Poissonov proces registrira pojavu izvjesnog događaja A koji se može višekratno ostvarivati tijekom vremena. Bit će zabilježen broj realizacija tog događaja, kao i trenutci u kojima se događaj zbio.

Označimo s $N(s,t)$ slučajnu varijablu koja mjeri broj realizacija događaja A unutar vremenskog intervala $[s,t\rangle$. Zahtijevamo sljedeća tri svojstva:

Svojstva Poissonovog procesa

(a) **Odsustvo pamćenja**. $N(s,t)$ ne ovisi o pojavljivanju događaja A prije trenutka s.
(b) **Homogenost u vremenu**. $N(s,t)$ ovisi samo o duljini intervala $t-s$.
(c) **Regularnost**. U intervalu infinitezimalne duljine h, vjerojatnost pojave samo jednog događaja je $\lambda h + o(h)$, a više od jednog događaja $o(h)$.

Uvjet regularnosti znači da se više od jednog događaja ne može ostvariti u istom trenutku i možemo ga zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N(t,t+h)=1) &= \lambda h + o(h),\\ \mathbf{P}(N(t,t+h)\geq 2) &= o(h).\end{aligned}$$

Parametar λ opisuje gustoću realizacija događaja A. Ovdje je $o(h)$ beskonačno mala veličina, neka funkcija sa svojstvom $\lim\limits_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$.

* * *

Radi svojstva homogenosti razdioba slučajne varijable $N(s,t)$ podudara se s razdiobom slučajne varijable $N(s+h,t+h)$ za svaki h. Posebno je, za $h=-s$ ispunjeno $N(s,t)\sim N(0,t-s)$ (ove dvije slučajne varijable imaju istu razdiobu). Označimo istim slovom proces $N(t)$ definiran s

$$N(t) := N(0,t) = \text{broj realizacija događaja unutar intervala duljine t.}$$

Tada je ispunjeno za $t>s$

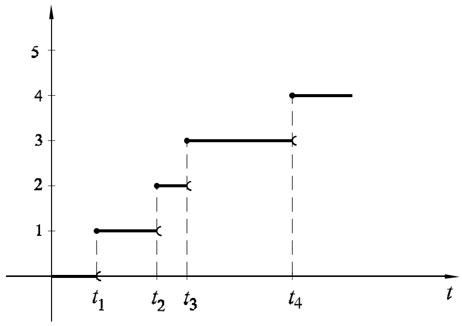
$$N(t)-N(s) = N(0,t)-N(0,s)\sim N(0,s)+N(s,t)-N(0,s) = N(s,t).$$

Proces $N(t)$ naziva se **Poissonov proces**. Parametar λ definiran u svojstvu regularnosti naziva se **intenzitet** Poissonovog procesa. On opisuje gustoću pojavljivanja događaja A kojim je proces određen.

6.1.2 Trajektorije procesa

Opišimo trajektorije procesa. Poissonov proces starta iz nule i zadržava tu vrijednost do prve pojave događaja A, nakon toga, skače u vrijednost 1.

Ako se događaj A ostvario u trenucima t_1, t_2,... itd., tad trajektorija procesa ima izgled:



Slika 6.1: Trajektorija Poissonovog procesa stepenasta je funkcija. U točkama prekida ima skok iznosa 1. Po dogovoru, smatramo da je neprekinuta slijeva

Svaka druga trajektorija imat će sličan izgled, s drugim vremenima skokova t_1, t_2,...

6.1.3 Jednodimenzionalne razdiobe

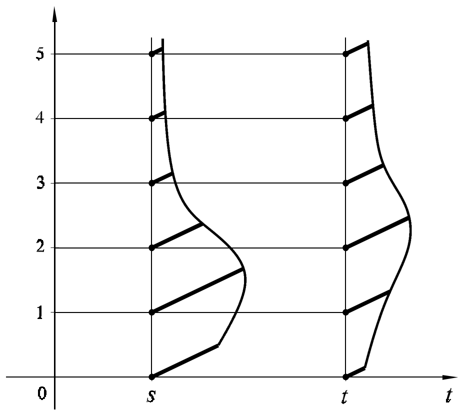
Tri svojstva kojima je Poissonov proces definiran, određuju u potpunosti njegove konačnodimenzionalne razdiobe. Pokažimo kako se najprije mogu odrediti jednodimenzionalne razdiobe

$$p_n(t) = \mathbf{P}(N(t) = n).$$

Jednodimenzionalne razdiobe Poissonovog procesa

Teorem 6.1 Vrijedi

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{6.1}$$



Slika 6.2: Razdioba slučajne varijable $N(t)$ je Poissonova, s parametrom λt. Na slici su prikazane apriorne razdiobe vjerojatnosti za moguća stanja procesa u trenutcima s i t.

Dokaz. Prema svojstvima Poissonovog procesa, za maleni $h > 0$ možemo napisati:

$$\left.\begin{aligned} p_1(h) &= \lambda h + o(h) \\ \sum_{k=2}^{\infty} p_k(h) &= o(h) \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n(h) &= 1 \end{aligned}\right\} \implies p_0(h) = 1 - \lambda h + o(h).$$

Naime, $p_1(h)$ predstavlja vjerojatnost da se događaj A realizira unutar intervala $[0, h\rangle$. Ta je vjerojatnost, prema svojstvu 3., za infinitezimalno maleni h proporcionalna duljini intervala. Drugo svojstvo slijedi iz regularnosti procesa, a treće jer niz $(p_n(h))$ određuje razdiobu slučajne varijable $N(h)$. Kao posljedicu, odredili smo $p_0(h)$.

Promotrimo sada $p_n(t + h)$ za $n > 0$. n događaja unutar intervala $[0, t + h\rangle$ može se dogoditi na sljedeće međusobno disjunktne načine:

• A_0: n događaja se je zbilo do momenta t i niti jedan poslije.

• A_1: $n - 1$ događaj se je zbio do momenta t a jedan događaj poslije tog momenta.

• A_k, $k \geq 2$: $n - k$ događaja zbilo se do momenta t i k događaja poslije tog momenta.

Vrijedi

$$p_n(t + h) = \mathbf{P}(A_0) + \mathbf{P}(A_1) + \sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}(A_k).$$

Odredimo vjerojatnosti ovih događaja, koristeći svojstva Poissonovog procesa.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_0) &= \mathbf{P}(N(t) = n, N(t + h) = n) \\ &= \mathbf{P}(N(t) = n)\mathbf{P}(N(t + h) = n \mid N(t) = n) \\ &= \mathbf{P}(N(t) = n)\mathbf{P}(N(t + h) - N(t) = 0 \mid N(t) = n) \\ &= \mathbf{P}(N(t) = n)\mathbf{P}(N(t + h) - N(t) = 0) \\ &= p_n(t)p_0(h) \\ &= p_n(t)(1 - \lambda h) + o(h) \end{aligned}$$

Slično, za događaj A_1 te A_k ($k \geq 2$) imamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1) &= \mathbf{P}(N(t) = n - 1)\mathbf{P}(N(t + h) - N(t) = 1 \mid N(t) = n - 1) \\ &= p_{n-1}(t)p_1(h) \\ &= p_{n-1}(t)(\lambda h) + o(h). \\ \mathbf{P}(A_k) &= \mathbf{P}(N(t) = n - k)\mathbf{P}(N(h) = k) \\ &= p_{n-k}(t)o(h) \\ &= o(h). \end{aligned}$$

Vrijedi:

$$p_0(t + h) = p_0(t)(1 - \lambda h) + o(h),$$

odnosno
$$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h}.$$
Na limesu kada $h \to 0$
$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t).$$
Budući je $p_0(0) = 1$, rješenje ove diferencijalne jednadžbe je
$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$
Ovime smo dokazali da (6.1) vrijedi za $n = 0$. Slično, za $n \geq 1$:
$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\lambda h) + p_{n-1}(t)(\lambda h) + o(h), \quad n \geq 1,$$
odnosno,
$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$
U limesu, kad $h \to 0$
$$p_n'(t) = -\lambda[p_n(t) - p_{n-1}(t)], \quad n \geq 1. \tag{6.2}$$
Početni uvjeti za ove jednadžbe su :
$$p_0(0) = 1, \qquad p_n(0) = 0, \quad n \geq 1.$$
Ove ćemo diferencijalno–rekurzivne jednadžbe riješiti pomoću Laplaceove transformacije. Neka je $P_n(s) = \mathcal{L}(p_n(t))$ Laplaceov transformat, onda je
$$\mathcal{L}(p_n'(t)) = sP_n(s) - p_n(0) = sP_n(s).$$
Iz (6.2) slijedi:
$$sP_n(s) = -\lambda[P_n(s) - P_{n-1}(s)]$$
te je
$$P_n(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}P_{n-1}(s) = (\frac{\lambda}{s+\lambda})^n P_0(s).$$
Također
$$P_0(s) = \frac{1}{s+\lambda}.$$
Dakle:
$$P_n(s) = \frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^{n+1}}.$$
Odavde
$$p_n(t) = \lambda^n \frac{t^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}.$$
■

6.1.4 Definicija i konačno-dimenzionalne razdiobe Poissonovog procesa

Standardna definicija Poissonovog procesa je sljedeća:

Poissonov proces

Definicija 6.2 **Poissonov proces** $(N_t,\ t \geq 0)$ zadan je uvjetima:
1. $N_0 = 0$,
2. N ima nezavisne priraste,
3. Slučajna varijabla $N(s,t) = N_t - N_s$, $0 \leq s < t$, ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda(t-s)$, tj.

$$\mathbf{P}(N_t - N_s = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}\, e^{-\lambda(t-s)}.$$

Pokažimo da za je proces $(N(t), t \geq 0)$, $N(0) = 0$, prethodna definicija ekvivalentna onoj s početka poglavlja. Pretpostavimo da vrijede svojstva 1.–3. Tada je

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N(t,t+h) \geq 2) &= e^{-\lambda h} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^i}{i!} = \lambda^2 h^2 e^{-\lambda h} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^i}{(i+2)!} \\ &\leq \lambda^2 h^2 e^{-\lambda h} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^i}{i!} = \lambda^2 h^2 = o(h).\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N(t,t+h) = 1) &= 1 - \mathbf{P}(N(t,t+h) = 0) - \mathbf{P}(N(t,t+h) \geq 2) \\ &= 1 - e^{-\lambda h} + o(h) = 1 - (1 - \lambda h) + o(h) = \lambda h + o(h).\end{aligned}$$

Obratno, zbog homogenosti dovoljno je dokazati

$$\mathbf{P}(N(s,s+h) = i) = \frac{(\lambda h)^i}{i!} e^{-\lambda h}, \qquad i = 0,1,\ldots$$

za $s = 0$. Uz oznaku

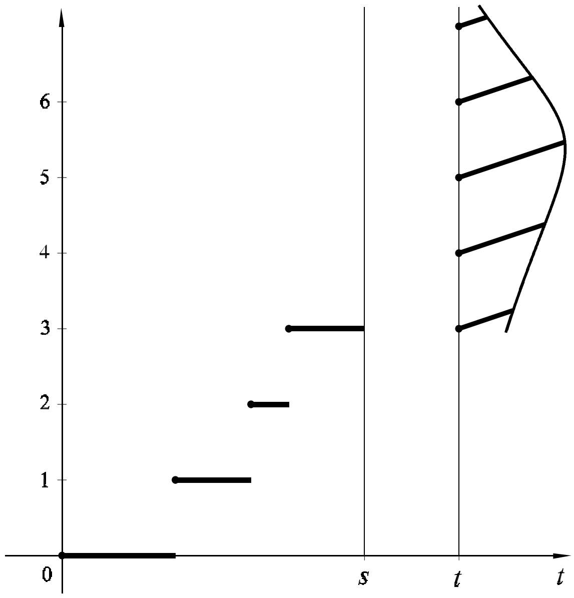
$$p_i(t) = \mathbf{P}(N(0,t) = i) = \mathbf{P}(N(t) = i), \qquad i = 0,1,\ldots$$

treba pokazati da je

$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \qquad i = 0,1,\ldots$$

što je upravo zaključak teorema 6.1.

* * *



Slika 6.3: Prirast $N(t) - N(s)$ Poissonovog procesa ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda(t-s)$. Razdioba prikazana na slici jest (uvjetna) razdioba nakon trenutka s, u kojem je proces poprimio vrijednost $k = 3$.

Prema uvjetu (3), slučajne varijable $N_t - N_s$ i N_{t-s} imaju istu razdiobu! S tim u vezi je i sljedeći rezultat.

Uvjetne vjerojatnosti za Poissonov proces

Teorem 6.3 Neka je $s < t$. Za Poissonov proces vrijedi

$$\mathbf{P}(N_t = j \mid N_s = i) = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!}\, e^{-\lambda(t-s)}$$

Dokaz. Iskoristit ćemo svojstvo nezavisnih prirasta Poissonovog procesa: slučajne varijable $N_t - N_s$ i $N_s - N_0$ su nezavisne. Kako je N_0 jednak nuli, dobit ćemo za $j > i$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N_t = j \mid N_s = i) &= \mathbf{P}(N_t - N_s = j - i \mid N_s = i) \\ &= \mathbf{P}(N_t - N_s = j - i) = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!}\, e^{-\lambda(t-s)}\end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana. ∎

Primjetimo da je se i ova uvjetna razdioba podudara s razdiobom slučajne varijable N_{t-s}.

Pitanje je, dakako, postoji li proces koji zadovoljava uvjete (1)–(3). Odgovorit ćemo potvrdno time što ćemo odrediti njegove konačno-dimenzionalne razdiobe.

Za $k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_n$ i $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_{t_1} = k_1, &N_{t_2} = k_2, \ldots, N_{t_n} = k_n) \\
&= \mathbf{P}(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}) \\
&= \mathbf{P}(N_{t_1} = k_1)\mathbf{P}(N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1) \cdots \mathbf{P}(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}) \\
&= \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \times \cdots \\
&\qquad\qquad \times \frac{[\lambda(t_n - t_{n-1})]^{k_n - k_{n-1}}}{(k_n - k_{n-1})!} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \\
&= \lambda^{k_n} \frac{t_1^{k_1}(t_2 - t_1)^{k_2 - k_1} \cdots (t_n - t_{n-1})^{k_n - k_{n-1}}}{k_1!(k_2 - k_1)! \cdots (k_n - k_{n-1})!} e^{-\lambda t_n}
\end{aligned}$$

Primjer 6.4 Poissonov proces registrira broj poziva u telefonskoj centrali. Ako je očekivani broj poziva u jednoj minuti jednak 1.2, kolika je vjerojatnost događaja $\{N_2 = 2, N_4 = 3\}$?

▷Za slučajnu varijablu N_t vrijedi $\mathbf{E}(N_t) = \lambda t$. Prema uvjetima, za $t = 1$ ovo očekivanje jednako je 1.2 . Dakle, $\lambda = 1.2$. Traženu vjerojatnost izračunat ćemo na temelju dvodimenzionalne razdiobe:

$$\mathbf{P}(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2) = \lambda^{k_2} \frac{t_1^{k_1}(t_2 - t_1)^{k_2 - k_1}}{k_1!(k_2 - k_1)!} e^{-\lambda t_2}$$

Uvrstimo $t_1 = 2$, $t_2 = 4$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Dobivamo

$$\mathbf{P}(N_2 = 2, N_4 = 3) = \lambda^3 \frac{2^2(4-2)^{3-2}}{2!(3-2)!} e^{-4\lambda} = 4\lambda^3 e^{-4\lambda} = 0.0569\,. \triangleleft$$

6.1.5 Poissonov proces i eksponencijalna, binomna i uniformna razdioba

Eksponencijalna razdioba

Poissonov je proces usko povezan s eksponencijalnom razdiobom. Naime, vrijeme između dvaju uzastopnih skokova kod Poissonovog procesa ima eksponencijalnu razdiobu. Dokazat ćemo to svojstvo. Ono se može koristiti za generiranje Poissonovog procesa.

Neka je A događaj čija će se realizacija u vremenu ravnati po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ. Time je određena slučajna varijabla ξ koja mjeri vrijeme do pojave događaja A. Njezina je funkcija razdiobe

$$F_\xi(t) = \mathbf{P}(\xi \le t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Parametar λ recipročna je vrijednost očekivanja $\mathbf{E}[\xi]$.

Nakon neke realizacije događaja A počinjemo mjeriti vrijeme do ponovnog ostvarenja događaja A. Očekujemo da se uvjeti realizacije tog događaja *tijekom vremena ne mijenjaju*. Stoga će ξ imati ponovo eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ. Zbog jasnoće, označimo sa ξ_1 vrijeme do prve pojave događaja A, sa ξ_2: vrijeme između prvog i drugog pojavljivanja događaja A itd.

Tvrdimo da je proces koji mjeri broj pojavljivanja ovako zadanih događaja upravo Poissonov proces N. On poprima vrijednost k ako je ispunjeno:

$$\{N(t) = k\} = \{\xi_1 + \ldots + \xi_k < t,\ \xi_1 + \ldots + \xi_k + \xi_{k+1} \geq t\},$$

odnosno

$$\{N(t) \leq k\} = \{\xi_1 + \ldots + \xi_{k+1} \geq t\}.$$

Konstrukcija Poissonovog procesa pomoću eksponencijalnih razdioba

Teorem 6.5 Neka je (ξ_n) niz nezavisnih slučajnih varijabli s eksponencijalnom razdiobom $\mathcal{E}(\lambda)$, koje bilježe vrijeme između između uzastopnih pojavljivanja događaja A. Tad brojač $N(t)$ pojavljivanja događaja A čini Poissonov proces s parametrom λ.

Dokaz. Zbroj $T_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ predstavlja vrijeme čekanja do n-te pojave događaja A. Ta varijabla, kao zbroj eksponencijalnih, ima gama razdiobu s parametrima n, λ. Njezina je gustoća

$$g(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}, \qquad x > 0.$$

Vrijedi $\{N(t) < n\} = \{T_n \geq t\}$. Zato

$$\begin{aligned} F_{N(t)}(n) &= \mathbf{P}(N(t) < n) = \mathbf{P}(T_n \geq t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(T_n < t) = 1 - F_{T_n}(t). \end{aligned}$$

Odavde imamo

$$\begin{aligned} F_{N(t)}(n) &= 1 - \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} dx = 1 - \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\lambda t} y^{n-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\lambda t}^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy = \frac{1}{(n-1)!} \Gamma(n, \lambda t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \mathbf{P}(N(t) = n) = F_{N(t)}(n+1) - F_{N(t)}(n) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\lambda t)^j}{j!} - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Time smo potvrdili da su jednodimenzionalne razdiobe od $N(t)$ upravo razdiobe Poissonovog procesa. Trebalo bi još provjeriti nezavisnost prirasta, što je posljedica nezavisnosti niza slučajnih varijabli (ξ_n). U detalje dokaza se ovdje nećemo upuštati. ∎

Primjer 6.6 Poznato je da broj prometnih nesreća N_t na nekom području u vremenskom intervalu $[0, t\rangle$ može biti opisan kao Poissonov proces. Ako se u prosjeku dogodi jedna nesreća u 4 sata, izračunajte vjerojatnost događaja

$$A = \text{dogodila se najviše jedna nesreća u } [0, 10\rangle \text{, barem dvije u } [10, 16\rangle \\ \text{i nijedna u intervalu } [16, 24\rangle \,.$$

Kolika je vjerojatnost da se druga nesreća dogodi tek nakon 5 sati?

▷Intenzitet ovog procesa je $\lambda = \frac{1}{4}$.
Zbog nezavisnosti i homogenosti prirasta vrijedi

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(N(10) - N(0) \leq 1, N(16) - N(10) \geq 2, N(24) - N(16) = 0) \\ &= \mathbf{P}(N(10) - N(0) \leq 1)\mathbf{P}(N(16) - N(10) \geq 2)\mathbf{P}(N(24) - N(16) = 0) \\ &= \mathbf{P}(N(10) \leq 1)\mathbf{P}(N(6) \geq 2)\mathbf{P}(N(8) = 0). \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N(10) \leq 1) &= \mathbf{P}(N(10) = 0) + \mathbf{P}(N(10) = 1) = e^{-\frac{10}{4}} + \frac{10}{4} e^{-\frac{10}{4}} = 0.2873, \\ \mathbf{P}(N(10) \geq 2) &= 1 - e^{-\frac{6}{4}} - \frac{6}{4} e^{-\frac{6}{4}} = 0.4422, \\ \mathbf{P}(N(8) = 0) &= e^{-\frac{8}{4}} = 0.1353. \end{aligned}$$

Stoga je tražena vjerojatnost $p = 0.0172$.

Odgovor na drugo pitanje slijedi iz formule koju smo izveli u dokazu prethodnog teorema:

$$\mathbf{P}(T_2 \geq 5) = \mathbf{P}(N(5) < 2) = e^{-5\lambda}(1 + 5\lambda) = 0.6446. \triangleleft$$

* * *

Jako Markovljevo svojstvo Vrijeme između dviju uzastopnih pojava događaja A ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ. Pretpostavimo sada da je to vrijeme mjereno od *bilo kojeg* trenutka $t_i + \gamma$ (γ po volji odabran, i može biti **slučajan**). Tad $t_{i+1} - (t_i + \gamma)$ ima također eksponencijalnu razdiobu.

Dakle kako vrijeme protiče, tako se obnavlja duljina očekivanog vremena do pojave događaja A.

Primjer 6.7 Neka $N(t)$ označava broja riba koje ribič uhvati u vremenu $[0, t]$. Pretpostavljamo

(i) broj riba je vrlo velik;

(ii) riba ima jednaku mogućnost za bude uhvaćena u svakom trenutku vremena jednake duljine.

Tad je $N(t)$ Poissonov proces.

Vrijeme do prvog ulova kao i vrijeme između svaka dva ulova ima eksponencijalnu razdiobu s istim parametrom. Istu razdiobu ima, po jakom markovljevom svojstvu, i vrijeme do ulova sljedeće ribe, bez obzira na vrijeme koje je proteklo od ulova prethodne. Vrijeme čekanja bez ulova nema nikakvog utjecaja na eventualni raniji ulov sljedeće ribe.

To je posljedica svojstva eksponencijalne razdiobe koja nema memorije.

Binomna razdioba

Poznata nam je vrijednost Poissonovog procesa u trenutku t. Koju vrijednost je on poprimio u nekom ranijem trenutku $s < t$? Pokažimo da je uvjetna razdioba $N_s \mid N_t$ binomna!

Poissonov proces i binomna razdioba

Teorem 6.8 Ako je N Poissonov proces i $s < t$, onda je

$$\mathbf{P}(N(s) = k \mid N(t) = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

pri čemu je $p = s/t$.

Dokaz. Tvrdnja se provjerava sljedećim računom:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{N(s) = k \mid N(t) = n\} &= \frac{\mathbf{P}\{N(s) = k, N(t) = n\}}{\mathbf{P}\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{\mathbf{P}\{N(s) = k, N(t-s) = n-k\}}{\mathbf{P}\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{\mathbf{P}\{N(s) = k\}\mathbf{P}\{N(t-s) = n-k\}}{\mathbf{P}\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-s)}[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!} \bigg/ \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

■

* * *

Telefonska centrala ima dva ulazna broja. Ako je poznat ukupan broj poziva koji je stigao do trenutka t, koliki je broj poziva upućen na prvi telefonski broj? Odgovor na to pitanje dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 6.9 Ako su N_1 i N_2 nezavisni Poissonovi procesi s parametrima λ_1 i λ_2, onda je

$$\mathbf{P}(N_1(t) = k \mid N_1(t) + N_2(t) = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

pri čemu je $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n) &= \frac{\mathbf{P}(N_1(t)=k, N_1(t)+N_2(t)=n)}{\mathbf{P}(N_1(t)+N_2(t)=n)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(N_1(t)=k, N_2(t)=n-k)}{\mathbf{P}(N_1(t)+N_2(t)=n)}
\end{aligned}
$$

Zbroj nezavisnih procesa N_1 i N_2 je Poissonov proces s parametrom $(\lambda_1+\lambda_2)t$:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{P}(N_1(t)=k)\mathbf{P}(N_2(t)=n-k)}{\mathbf{P}(N_1(t)+N_2(t)=n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!} \Big/ \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}[(\lambda_1+\lambda_2)t]^n}{n!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\
&= \binom{n}{k}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^k\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

■

Geometrijska razdioba

Koliko je poziva stiglo na prvi broj telefonske centrale u vremenskom intervalu između dva poziva na drugi broj te centrale? Odgovor na ovo pitanje daje sljedeći primjer.

Primjer 6.10 (**Poissonov proces i geometrijska razdioba**) Promatrajmo dva nezavisna niza događaja, A i B koji se pojavljuju u skladu s Poissonovim procesima s parametrima at odnosno bt. Neka je N broj pojavljivanja događaja A između dvije uzastopne realizacije događaja B. Onda N ima geometrijsku razdiobu.

▷Vrijeme ξ između dviju uzastopnih realizacija događaja B ima eksponencijalnu razdiobu s gustoćom $f(x)=be^{-bx}$. Vjerojatnost da se unutar intervala $[0,t]$ događaj A pojavi k puta je

$$\frac{e^{-at}(at)^k}{k!}.$$

Zato je

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(N=k) &= \int_0^\infty \mathbf{P}(N=k \mid \xi=t)f(t)dt = \int_0^\infty \frac{e^{-at}(at)^k}{k!}be^{-bt}dt \\
&= \frac{ba^k}{k!}\int_0^\infty t^k e^{-(a+b)t}dt = \frac{ba^k}{(a+b)^{k+1}} \\
&= \frac{b}{a+b}\Big(\frac{a}{a+b}\Big)^k, \quad k=0,1,2,3,\ldots
\end{aligned}
$$

◁

Poissonov proces i uniformna razdioba

Pretpostavimo da se (Poissonov) događaj zbio u trenutcima $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Tada je

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Također vrijedi

$$\{N(t) < n\} = \{T_n \geq t\}.$$

Teorem 6.11 Neka je $(N(t), t \geq 0)$ homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ, te neka je T_i vrijeme i-tog pojavljivanja događaja A, $i = 1, 2, \ldots, T_0 = 0$. Uz uvjet $N(t) = n$, $n = 1, 2, \ldots$ slučajni vektor $\{T_1, \ldots, T_n\}$ ima funkciju gustoće:

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n \mid N(t) = n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primjer 6.12 Klijenti dolaze u banku ravnajući se po homogenom Poissonovom procesu $(N(t), t \geq 0)$ s intenzitetom λ. Pretpostavimo da uvijek ima dovoljno slobodnih šaltera. Vremena posluživanja svake osobe su nezavisne kopije slučajne varijable Z. Neka je $G(t) = \mathbf{P}(Z < t)$ funkcija razdiobe slučajne varijble Z, te $X(t)$ broj ljudi u banci u trenutku t, $X(0) = 0$. Želimo odrediti vjerojatnosti

$$p_i(t) = \mathbf{P}(X(t) = i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \geq 0.$$

▷Klijent koji je došao u trenutku x se još uvijek nalazi u banci u trenutku t, $t > x$, s vjerojatnošću $1 - G(t - x)$. Uz uvjet $N(t) = n$, dolazna vremena $T_1, T_2, \ldots, T_n$ n klijenata su nezavisna i uniformno distribuirana na intervalu $[0, t]$. Vjerojatnost da se netko od tih n ljudi koji su došli u intervalu $[0, t]$ nalazi u banci u trenutku t iznosi:

$$p(t) = \int_0^t (1 - G(t - x)) \frac{1}{t} dx.$$

Također vrijedi

$$\mathbf{P}(X(t) = i \mid N(t) = n) = \binom{n}{i} [p(t)]^i [1 - p(t)]^{n-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots n.$$

Prema formuli potpune vjerojatnosti

$$\begin{aligned} p_i(t) &= \sum_{n=i}^{\infty} \mathbf{P}(X(t) = i \mid N(t) = n) \mathbf{P}(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} [p(t)]^i [1 - p(t)]^{n-i} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t p(t))^i}{i!} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{(1 - p(t))^{n-i} (\lambda t)^{n-i}}{(n-i)!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t p(t))^i}{i!} e^{-\lambda t} e^{(1 - p(t))\lambda t} = \frac{(\lambda t p(t))^i}{i!} e^{-\lambda t p(t)}. \end{aligned}$$

Dakle, $X(t)$ ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda t p(t)$. ◁

6.2 Nehomogeni Poissonovi procesi

Nehomogeni Poissonov proces

Definicija 6.13 **Nehomogeni Poissonov proces** $\{N_t,\ t \geq 0\}$ zadan je uvjetima:
1. $N_0 = 0$,
2. N ima nezavisne priraste,
3. Slučajna varijabla $N(s,t) = N_t - N_s$, $0 \leq s < t$, ima Poissonovu razdiobu $N(s,t) = N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\int_s^t \lambda(u)du)$.

Za $\lambda(u) = \lambda$ dobivamo homogeni Poissonov proces.

Svojstva nehomogenog Poissonovog procesa

(a) Proces $(N(t), t \geq 0)$ ima nezavisne priraste,
(b) $\mathbf{P}(N(t, t+h) = 1) = \lambda h + o(h)$,
(c) $\mathbf{P}(N(t, t+h) \geq 2) = o(h)$.

Vjerojatnosti prirasta $p_n(s,t)$ računaju se na sljedeći način:

$$p_n(s,t) = \mathbf{P}(N(s,t) = n) = \frac{(\int_s^t \lambda(u)du)^n}{n!} e^{-\int_s^t \lambda(u)du}.$$

Posebno,

$$p_n(t) = p_n(0,t) = \mathbf{P}(N(t) = n) = \frac{(\int_0^t \lambda(u)du)^n}{n!} e^{-\int_0^t \lambda(u)du}.$$

Očekivani broj pojavljivanja događaja kojeg brojimo Poissonovim procesom jednak je

$$m(s,t) = \mathbf{E}(N(s,t)) = \int_s^t \lambda(u)du.$$

Primjer 6.14 Poznato je da se broj dolazaka automobila na benzinsku postaju između 5 i 11 sati može modelirati kao nehomogeni Poissonov proces $(N(t), t \geq 0)$ s funkcijom intenziteta

$$\lambda(t) = 10 + 35.4(t-5)e^{-\frac{(t-5)^2}{8}}, \quad 5 \leq t \leq 11.$$

(a) Koliki je očekivani broj automobila u tom razdoblju?
(b) Kolika je vjerojatnost da barem 90 automobila posjeti benzinsku postaju između 6 i 8 sati?

▷
(a) Očekivani broj automobila jednak je

$$\mathbf{E}(N(5,11)) = \int_5^{11} \lambda(t)dt = \int_0^6 (10 + 35.4te^{-\frac{t^2}{8}})dt = [10t + 141.6e^{-\frac{t^2}{8}}]|_0^6 = 200.$$

(b) Očekivani broj automobila između 6 i 8 sati jednak je

$$\mathbf{E}(N(6,8)) = \int_6^8 \lambda(t)dt = \int_1^3 (10 + 35.4te^{-\frac{t^2}{8}})dt = [10t + 141.6e^{-\frac{t^2}{8}}]|_1^3 = 99$$

stoga broj automobila $N(6,8) = N(8) - N(6)$ između 6 i 8 sati ima Poissonovu razdiobu s parametrom 99. Tražena vjerojatnost iznosi

$$\mathbf{P}(N(6,8) \geq 90) = \sum_{n=90}^{\infty} \frac{99^n}{n!} e^{-0.99}.$$

Koristeći aproksimaciju normalnom razdiobom:

$$\sum_{n=90}^{\infty} \frac{99^n}{n!} e^{-0.99} \approx 1 - \Phi\left(\frac{90-99}{\sqrt{99}}\right) \approx 1 - 0.1827.$$

Stoga je

$$\mathbf{P}(N(6,8) \geq 90) = 0.8173.$$

◁

6.3 Superpozicija i stanjivanje Poissonovog procesa

6.3.1 Zbroj Poissonovih procesa

Teorem 6.15 Zbroj dvaju nezavisnih Poissonovih procesa N_1 i N_2 s parametrima λ_1, λ_2 je Poissonov proces s parametrom $\lambda_1 + \lambda_2$.

Dokaz. Neka je $N = N_1 + N_2$. Zadovoljit ćemo se time da izračunamo jednodimenzionalne razdiobe ovog procesa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N(t) = n) &= \sum_{r=0}^{n} \mathbf{P}(N_1(t) = r, N_2(t) = n - r) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \mathbf{P}(N_1(t) = r)\mathbf{P}(N_2(t) = n - r) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^r}{r!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^{n-r}}{(n-r)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} t^n}{n!} \sum_{n=0}^{r} \binom{n}{r} \lambda_1^r \lambda_2^{n-r} \\
&= \frac{[t(\lambda_1 + \lambda_2)]^n}{n!} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. ■

6.3.2 Razlika Poissonovih procesa

Budući je zbroj $N_1(t) + N_2(t) =: N(t)$ dvaju nezavisnih Poissonovih procesa ponovo Poissonov proces, mogli bismo pomisliti da će i razlika dvaju nezavisnih procesa biti opet Poissonov proces. To, međutim, nije istina. Naime, ta razlika može poprimiti i negativne vrijednosti, što je nemoguće za Poissonov proces.

Stavimo $N(t) = N_1(t) - N_2(t)$. Odredimo jednodimenzionalne razdiobe ovog procesa. Imamo, radi nezavisnosti

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N(t) = n) &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}(N_1(t) = n + r)\ \mathbf{P}(N_2(t) = r) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^{n+r}}{(n+r)!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^r}{r!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{n/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{\lambda_1\lambda_2})^{2r+n}}{r!(n+r)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{n/2} I_{|n|}(2t\sqrt{\lambda_1\lambda_2})
\end{aligned}$$

gdje je $I_{|n|} = I_n = I_{-n}$ modificirana Besselova funkcija reda n.

6.3.3 Dekompozicija Poissonovih procesa

Svaki se Poissonov proces može rastaviti na sumu nekoliko Poissonovih procesa. Preciznije, ukoliko su brojevi $p_1, \dots, p_n$ pozitivni sa zbrojem 1, tada se Poissonov proces s parametrom λ može razbiti na n procesa s parametrima $p_1\lambda, \dots, p_n\lambda$. Pri tom su ovi procesi nezavisni. Ovo svojstvo je povezano s prvim svojstvom: zbroj nezavisnih Poissonovih procesa je zaista opet Poissonov proces. Međutim, tu je važno primjetiti *na koji način* se dolazi do spomenute dekompozicije.

Primjer 6.16 Broj novorođene djece $N(t)$ (u nekom gradu) ravna se po Poissonovom procesu s parametrom λ. (Zanemarujemo slučajeve rođenja blizanaca.) Poznato je da je vjerojatnost rođenja muškog djeteta jednaka p. Tada je broj novorođene muške djece Poissonov proces $N_1(t)$ s parametrom λp, a broj novorođene ženske djece Poissonov proces $N_2(t)$ s parametrom $\lambda(1-p)$. Pri tom je $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ i procesi $N_1(t)$ i $N_2(t)$ su nezavisni!

Provjerimo jednodimenzionalne razdiobe procesa $N_1(t)$ iz gornjeg primjera.

Označimo sa A događaj: rođenje djeteta. Događaj $N_1(t) = n$ može se zbiti na sljedeće međusobno isključive načine:

Do trenutka t događaj A ostvario se $n + r$ puta, i točno n puta se je pri tom zbio događaj rođenja muškog djeteta.

Tad imamo

$$\mathbf{P}(H_r) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n+r}}{(n+r)!} \binom{n+r}{n} p^n q^r.$$

Stoga je

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_1(t)=n) &= \sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{P}(H_r)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n+r}}{(n+r)!}\binom{n+r}{n}p^nq^r\\
&= e^{-\lambda t}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda pt)^n(\lambda qt)^r}{n!\,r!}\\
&= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^n}{n!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda qt)^r}{r!}\\
&= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{\lambda qt}=\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}.
\end{aligned}
$$

Teorem 6.17 Neka je $(N(t), t \geq 0)$ Poissonov proces s intenzitetom λ, te A i B dva nezavisna događaja koja se pojavljuju uz vjerojatnosti p i $(1-p)$. Tada se $N(t)$ može zapisati u obliku

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t),$$

gdje su $(N_1(t), t \geq 0)$ i $(N_2(t), t \geq 0)$ nezavisni Poissonovi procesi s intenzitetima $p\lambda$ i $(1-p)\lambda$ koji broje realizacije događaja A odnosno B.

6.4 Složeni Poissonovi procesi

Dosad smo pretpostavljali da se u nekom trenutku može pojaviti samo jedna realizacija događaja A, čiji je broj opisivao Poissonov proces s parametrom λ. Pretpostavimo sada da taj Poissonov proces registrira složene događaje od koji se svaki može sastojati od nekoliko (slučajno mnogo) realizacija događaja A. Na primjer, broj automobilskih nesreća u nekom gradu opisan je Poissonovim procesom. Svaka automobilska nesreća može biti popraćena s određenim brojem ozlijeđenih osoba. Njihov je broj za svaku nesreću slučajan, i ima razdiobu neovisnu o samome procesu. Tako je proces koji broji broj ozlijeđenih osoba primjer Poissonovog procesa s gomilanjima.

Pretpostavit ćemo sljedeće:

• Broj nesreća $N(t)$ čini Poissonov proces s parametrom λ.

• Broj ozlijeđenih osoba X_i u i-toj nesreći je slučajna varijabla. Razumno je pretpostaviti da su te slučajne varijable nezavisne i da imaju istu razdiobu:

$$\mathbf{P}\{X_i = k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Neka s $M(t)$ označimo ukupan broj ozlijeđenih osoba do trenutka t. Odredimo jednodimenzionalne razdiobe ovog procesa. U tu će svrhu dovoljno biti odrediti njegovu funkciju izvodnicu. Primjetimo da proces $M(t)$ možemo shvatiti kao *slučajnu sumu* slučajnih varijabli X_i:

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

jer $N(t)$ broji ukupan broj nesreća, a X_i broj ozlijeđenih u tim nesrećama. Zato je funkcija izvodnica slučajne varijable $M(t)$ kompozicija funkcije izvodnice Poissonove slučajne varijable $N(t)$ i fukncije izvodnice χ slučajne varijable X_i:

$$\psi_{M(t)}(s) = \psi_{N(t)}(\chi(s)) = e^{\lambda t(\chi(s)-1)}.$$

Primjer 6.18 Kupci ulaze u prodavaonicu u skupinama od jedne ili dvije osobe, s jednakom vjerojatnošću, dok se vrijeme ulaska ravna po Poissonovom procesu s intenzitetom λ. Sada je

$$p_k = \mathbf{P}(X_i = k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (\text{za } k = 1, 2), \\ 0, & (\text{inače}); \end{cases}$$

te je

$$\chi(s) = \sum_k p_k s^k = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}s^2.$$

Funkcija izvodnica ukupnog broja kupaca koji su stigli do trenutka t je

$$\psi(s) = \exp\{\lambda t[\tfrac{1}{2}(s+s^2) - 1]\}.$$

Očekivani broj kupaca do trenutka t je $\frac{3}{2}\lambda t$. Za $\lambda = \frac{1}{2}$ (ulazaka u minuti) i $t = 4$ minute, funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned} \exp\{2[\tfrac{1}{2}(s+s^2) - 1]\} &= \exp(-2) \cdot \exp(s+s^2) \\ &= (1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} + \dots)(1 + s^2 + \frac{s^4}{2!} + \dots). \end{aligned}$$

Vjerojatnost da je broj kupaca točno jednak 4 je

$$e^{-2}(\frac{1}{4!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}) = 0.141.$$

7. Markovljevi procesi

7.1 Definicije i primjeri

7.1.1 Markovljevo svojstvo

U ovom ćemo poglavlju promatrati procese s vrijednostima u diskretnom skupu S. Promatrat ćemo ponovo klasu markovljevih procesa. Opća definicija se za procese s vrijednostima u diskretnom skupu svodi na sljedeću:

Za slučajan proces X s vrijednostima u diskretnom skupu S kažemo da je **Markovljev proces**, ako za sve $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ on ima svojstvo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n,\ X_{t_{n-1}} = x_{n-1},\ \ldots,\ X_{t_0} = x_0)\\ = \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n).\end{aligned}$$

Teorem 7.1 Ako proces X ima nezavisne priraste, onda je on Markovljev proces.

Dokaz. Provjerimo markovljevo svojstvo:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_0} = x_0)\\ &\quad= \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = x_{n+1} - x_n \mid X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1},\\ &\qquad\qquad \ldots, X_{t_1} - X_{t_0} = x_1 - x_0, X_{t_0} = x_0)\\ &\quad= \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = x_{n+1} - x_n)\\ &\quad= \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = x_{n+1} - x_n \mid X_{t_n} = x_n)\\ &\quad= \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n)\end{aligned}$$

∎

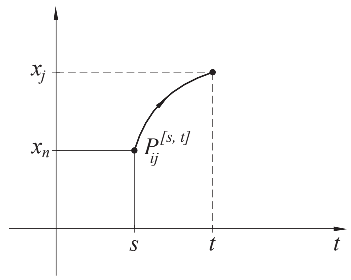
Na primjer, Poissonov proces je Markovljev, jer ima nezavisne priraste.

* * *

Osnovni pojam u proučavanju markovljevih procesa jest **vjerojatnost prijelaza**. Pojam koji smo definirali za markovljeve lance, sad ćemo iskazati u punoj općenitosti. Neka je $t > s$. Tražimo vjerojatnost da proces, koji je u trenutku s imao vrijednost x_i, nakon vremenskog intervala $[s, t]$ poprimi vrijednost x_j. Zato će vjerojatnost prijelaza ovisiti o četiri varijable[1]

$$\mathbf{P}(X_t = x_j \mid X_s = x_i) =: p(s, x_i, t, x_j) =: p_{ij}^{[s,t]}$$

[1]Za razliku od markovljevih lanaca u kojima nam je važno samo razlikovati stanja, kod općih markovljevih procesa važno nam je znati i iznos procesa.



Slika 7.1: Prijelazna vjerojatnost $p_{ij}^{[s,t]}$ je vjerojatnost da se čestica u trenutku t nađe u stanju x_j, ako je u trenutku s bila u stanju x_i.

Matricu

$$P^{[s,t]} := \left(p_{ij}^{[s,t]}\right)$$

nazivamo **matrica prijelaznih vjerojatnosti** ili kraće, **matrica prijelaza**.

Prirodno je zahtijevati da matrica prijelaznih vjerojatnosti ima svojstvo

$$p_{ij}^{[t,t]} = \delta_{ij}. \tag{7.1}$$

(Proces se u trenutku t može nalaziti samo u jednom stanju.)

Također, pretpostavljat ćemo da je proces **konzervativan**, tj. da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{[s,t]} = 1\,, \qquad \forall i. \tag{7.2}$$

Ova relacija znači da se proces ne može "izgubiti" već se uvijek mora nalaziti u jednom od predviđenih stanja.

7.1.2 Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe

Dokažimo sad temeljnu jednadžbu markovljevih procesa.

Chapman–Kolmogorovljeva jednadžba

Teorem 7.2 Neka je $P^{[s,t]}$ matrica prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog procesa. Tada ona zadovoljava Chapman-Kolmogorovljevu jednadžbu

$$P^{[s,u]} = P^{[s,t]}\, P^{[t,u]}\,, \qquad s \le t \le u.$$

Dokaz. Definirajmo događaje

$$A = \{X_u = x_j\}, \quad C = \{X_s = x_i\}, \quad B_k = \{X_t = x_k\}, \quad \forall k.$$

Događaji B_k čine particiju od Ω. Nadalje, zbog Markovljevog svojstva imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \mid B_k)\, \mathbf{P}(B_k \mid C) &= \mathbf{P}(A \mid B_k \cap C)\, \mathbf{P}(B_k \mid C) \\
&= \frac{\mathbf{P}(A \cap B_k \cap C)}{\mathbf{P}(B_k \cap C)}\, \frac{\mathbf{P}(B_k \cap C)}{\mathbf{P}(C)} = \mathbf{P}(A \cap B_k \mid C)
\end{aligned}$$

Odavde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A \mid B_k)\, \mathbf{P}(B_k \mid C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A \cap B_k \mid C)$$
$$= \mathbf{P}(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \mid C) = \mathbf{P}(A \mid C)$$

t.j.

$$\mathbf{P}(X_u = x_j \mid X_s = x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_u = x_j \mid X_t = x_k)\, \mathbf{P}(X_t = x_k \mid X_s = x_i)$$

i zato slijedi

$$p_{ij}^{[s,u]} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{[s,t]} p_{kj}^{[t,u]}.$$

■

Primjer 7.3 (**Matrica prijelaza Poissonovog procesa**) Ovdje je $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Neka je $t > s$. Prema Teoremu 6.3, vrijedi:

$$\mathbf{P}(N_t = j \mid N_s = i) = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!}\, e^{-\lambda(t-s)}$$

Dakle, matrica prijelaznih vjerojatnosti izgleda:

$$P^{[s,t]} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda(t-s)} & \lambda(t-s)e^{-\lambda(t-s)} & \frac{1}{2!}[\lambda(t-s)]^2 e^{-\lambda(t-s)} & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda(t-s)} & \lambda(t-s)e^{-\lambda(t-s)} & \cdots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda(t-s)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

(na sporednim dijagonalama nalaze se isti elementi).

Vidimo da matrica prijelaza ovisi samo o razlici vremena $t - s$. Procese sa tim svojstvom nazivamo **homogeni procesi**. Dakle, Poissonov proces je homogen nestacionarni proces. To formalno obilježavamo pišući $P^{[s,t]} =: P(t-s)$. Također ćemo označavati $p_{ij}(t)$ umjesto $p_{ij}^{[0,t]}$.

Nas će zanimati uglavnom homogeni Markovljevi procesi. Familija $\{P(t)\}$ zadovoljavat će sljedeću relaciju:

$$P(t+s) = P^{[0,t+s]} = P^{[0,t]} \cdot P^{[t,t+s]}$$
$$= P(t)\, P(t+s-t) = P(t)\, P(s)$$

Ovo se svojstvo naziva **polugrupno svojstvo**[2].

Dakle, u slučaju Markovljevog homogenog procesa matrice prijelaznih vjerojatnosti $P(t)$ čine polugrupu.

[2]Polugrupa je skup na kojem je definirana algebarska operacija koja ima svojstvo asocijativnosti. Familija matrica prijelaza je polugrupa uz operaciju matričnog množenja.

7.2 Gustoće prijelaza i Kolmogorovljeve diferencijalne jednadžbe

Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe omogućavaju jednostavnu fizikalnu interpretaciju Markovljevog procesa. Pokazat ćemo da se familija matrica prijelaznih vjerojatnosti $\{P(t),\ t \geq 0\}$ može rekonstruirati iz jedne matrice.

Krenimo od Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe za homogeni Markovljev proces X:

$$P(t+s) = P(t)P(s).$$

Za elemente ovih matrica onda vrijedi

$$p_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(s). \tag{7.3}$$

Označimo $a_{ij} := p'_{ij}(0)$, te definirajmo matricu $A := (a_{ij})$.

Ako se operacije deriviranja i sumiranja mogu zamijeniti[3]. Dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(t)\, \frac{d}{ds}\, p_{kj}(s).$$

Uvrstimo ovdje $s = 0$:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)\, p'_{kj}(0) = \sum_k p_{ik}(t)\, a_{kj}.$$

Time smo dobili matričnu jednadžbu

$$P'(t) = P(t)A$$

koju nazivamo **Kolmogorovljeva jednadžba unaprijed**.

Analogno, deriviravši (7.3) po t, dobivamo sličnu jednadžbu

$$P'(t) = A\, P(t).$$

To je **Kolmogorovljeva jednadžba unazad**.

* * *

Matrica A naziva se **matrica gustoća prijelaza**[4]. Opišimo pobliže tu matricu. Iskoristimo pritom relacije $P(0) = I$, tj. $p_{ii}(0) = 1$, $p_{ij}(0) = 0$ za $i \neq j$.

1. Vrijedi, za $i \neq j$:

$$a_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t) - p_{ij}(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$

i odavde

$$p_{ij}(\Delta t) = a_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad i \neq j.$$

[3] To se ne može uvijek napraviti. Međutim, ako je u sumi zdesna samo konačno mnogo elemenata različitih od nule, tada će to biti moguće napraviti. U svim primjerima koji slijede, taj je uvjet ispunjen.

[4] Ta se matrica u literaturi naziva još infinitezimalni generator polugrupe $P(t)$.

2. U slučaju $i = j$ dobivamo, računajući na isti način:

$$p_{ii}(\Delta t) = 1 + a_{ii}\Delta t + o(\Delta t).$$

Odavde zaključujemo da vrijedi $a_{ij} \geq 0$ za $i \neq j$, kao i $a_{ii} < 0$. Nadalje, iz $\sum_j p_{ij} = 1$ slijedi

$$\sum_j a_{ij} = \sum_j p'_{ij}(0) = 0.$$

Primjer 7.4 (**Prijelazne gustoće Poissonovog procesa**) Za Poissonov proces vrijedi

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}.$$

Stoga dobivamo, računajući po $a_{ij} = p'_{ij}(0)$:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= -\lambda \\ a_{i,i+1} &= \lambda \\ a_{ij} &= 0 \quad \text{za } j \neq i, i+1 \end{aligned}$$

te je

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Važnost Kolmogorovljevih jednadžbi je u obratnom postupku. Vrijednosti a_{ij} matrice prijelaznih gustoća mogu se odrediti na osnovu poznavanja fizikalnog ponašanja procesa, jer su one određene ponašanjem procesa unutar vrlo kratkog vremenskog intervala Δt. Zatim se, znajući matricu A, na temelju Chapman-Kolmogorovljevih jednadžbi mogu odrediti pirjelazne vjerojatnosti $P(t)$, odnosno predskazati stanje procesa u bilo kojem trenutku t.

Primjer 7.5 (**Prijelazne gustoće Poissonovog procesa, ponovno**) Za Poissonov proces vrijedi

$$\begin{aligned} p_0(h) &= 1 - \lambda h + o(h), \\ p_1(h) &= \lambda h + o(h), \\ p_k(h) &= o(h), \qquad k \geq 2. \end{aligned}$$

No, ove su vrijednosti upravo prijelazne vjerojatnosti za maleni trenutak h. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} p_{ii}(h) &= \mathbf{P}(N(t+h) = i \mid N(t) = i) \\ &= \mathbf{P}(N(h) = 0) = p_0(h) = 1 - \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

i slično za $p_{ij}(\Delta t)$. Odavde se direktno određuju vrijednosti elemenata matrice A.

Primjer 7.6 (**Proces s dva stanja**) Neki se uređaj može nalaziti u dva stanja: ispravnom stanju (označenom s 1) i neispravnom stanju (označenom s 0). Vrijeme provedeno u ispravnom stanju ima eksponencijalnu razdiobu s zakonom $\mathcal{E}(\mu)$. Nakon kvara, on prelazi u neispravno stanje i u njemu provodi vrijeme distribuirano po eksponencijalnom zakonu $\mathcal{E}(\lambda)$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} p_{01}(t) &:= \mathbf{P}(X(t) = 1 \mid X(0) = 0) = \lambda t + o(t), \\ p_{10}(t) &:= \mathbf{P}(X(t) = 0 \mid X(0) = 1) = \mu t + o(t). \end{aligned}$$

Zato je $a_{01} = \lambda$, $a_{10} = \mu$ i zato $a_{00} = -\lambda$, $a_{11} = -\mu$. Dakle, matrica prijelaznih gustoća je

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}.$$

Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed glase (za $i = 0, 1$):

$$\begin{aligned} p'_{i0}(t) &= -\lambda p_{i0}(t) + \mu p_{i1}(t), \\ p'_{i1}(t) &= \lambda p_{i0}(t) - \mu p_{i1}(t). \end{aligned}$$

Odavde, s pomoću relacija

$$p_{00}(t) + p_{01}(t) = 1, \qquad p_{10}(t) + p_{11}(t) = 1,$$

dobivamo

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) + (\lambda + \mu)p_{00}(t) &= \mu, \\ p'_{11}(t) + (\lambda + \mu)p_{11}(t) &= \lambda. \end{aligned}$$

Rješenja ovih jednadžbi su

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}, \\ p_{01}(t) &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda} - \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}, \\ p_{10}(t) &= \frac{\mu}{\mu + \lambda} - \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}, \\ p_{11}(t) &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}. \end{aligned}$$

Neka je $p_j(t)$ vjerojatnost da je sistem u stanju j u trenutku t. Da bismo odredili tu vjerojatnost, moramo još znati u kakvom je stanju sistem bio u početnom trenutku. To stanje može biti potpuno određeno (determinističko) ali isto tako i slučajno. Neka je $p_0(0) = p$, $p_1(0) = q$. (Proces se u trenutku 0 s vjerojatnošću p nalazi u stanju 0.) Sada je, na primjer

$$\begin{aligned} p_1(t) = \mathbf{P}(X(t) = 1) &= \mathbf{P}(X(0) = 0) \cdot \mathbf{P}(X(t) = 1 \mid X(0) = 0) \\ &\quad + \mathbf{P}(X(0) = 1) \cdot \mathbf{P}(X(t) = 1 \mid X(0) = 1) \\ &= p \cdot p_{01}(t) + q \cdot p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{q\mu - p\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} \\ &\to \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \quad \text{kad } t \to \infty. \end{aligned}$$

Slično bi se dobilo
$$p_0(t) \to \frac{\mu}{\mu+\lambda} \quad \text{kad } t \to \infty.$$
To znači da u dovoljno dalekom trenutku t stanje sustava neće ovisiti o njegovom početnom stanju. Nadalje, vidimo da je omjer vjerojatnosti da će sustav biti u ispravnom stanju prema vjerojatnosti da će on biti u neispravnom stanju jednak $\lambda : \mu = \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\lambda}$, a ovo je upravo omjer očekivanih vremena koje sustav provodi u ispravnom odnosno neispravnom stanju.

7.2.1 Rekonstrukcija prijelaznih vjerojatnosti

Kako se u općem slučaju iz matrice A određuje polugrupa $P(t)$?

Matrična jednadžba
$$P'(t) = AP(t), \tag{7.4}$$
$$P(0) = I \tag{7.5}$$
može se rješavati tehnikom Laplaceove transformacije. U donjem području, ona glasi
$$sP^*(s) - I = AP^*(s)$$
odnosno
$$(sI - A)P^*(s) = I \implies P^*(s) = (sI - A)^{-1}.$$
Poteškoće u ovom pristupu su u invertiranju ove matrice koja ovisi o parametru s te se za veći broj stanja njezin inverz teško nalazi.

Jednadžba (7.4) ima eksplicitno rješenje
$$P(t) = e^{tA}.$$
Tu je eksponencijalna funkcija definirana sumom apsolutno konvergentnog reda
$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Ova se matrica može računati primjenom operatorskog računa. Neka je broj stanja sustava konačan.

1. Pretpostavimo da su svojstvene vrijednosti matrice A različite. Tad postoji matrica S takva da je $A = SDS^{-1}$, gdje je D dijagonalna matrica. Tada je i $A^n = SD^nS^{-1}$ i vrijedi
$$e^{tA} = S\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n D^n}{n!}\Big)S^{-1} = S\,e^{tD}S^{-1}.$$
Međutim, e^{tD} možemo lagano izračunati.
$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_k \end{bmatrix} \implies D^n = \begin{bmatrix} d_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_k^n \end{bmatrix}$$

te je

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{td_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{td_2} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & e^{td_k} \end{bmatrix}.$$

Konačno je

$$e^{tA} = S \begin{bmatrix} e^{td_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{td_2} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & e^{td_k} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

2. Ako matrica A nije slična dijagonalnoj, onda je najjednostavnija forma na koji se ona može svesti Jordanova. Matrica je slična dijagonalnoj blok matrici kojoj svaki blok ima oblik poput

$$D = \begin{bmatrix} d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Neka je f bilo koja funkcija, analitička u točki d. Funkcija $f(D)$ matrice D definira se ovako:

$$f(D) = \begin{bmatrix} f(d) & f'(d) & \frac{1}{2}f''(d) & \frac{1}{3!}f'''(d) \\ 0 & f(d) & f'(d) & \frac{1}{2}f''(d) \\ 0 & 0 & f(d) & f'(d) \\ 0 & 0 & 0 & f(d) \end{bmatrix}.$$

* * *

Primjer 7.7 U prethodnom primjeru procesa s dva stanja matrica A ima svojstvene vrijednosti 0 i $-(\mu+\lambda)$, sa svojstvenim vektorima $(1,1)^\top$ i $(\lambda, -\mu)\top$, redom. Stupci matrice S su svojstveni vektori

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -\mu \end{bmatrix} \implies S^{-1} = \frac{1}{\mu+\lambda} \begin{bmatrix} \mu & \lambda \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t(\mu+\lambda)} \end{bmatrix}.$$

to dobivamo

$$\begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu+\lambda} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t(\mu+\lambda)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & \lambda \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

7.3 Procesi rađanja i umiranja

Poissonov proces bio je karakteriziran relacijom

$$p_{n,n+k}(h) = \mathbf{P}(N(t+h) = n+k \mid N(t) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h), & k = 0, \\ \lambda h + o(h), & k = 1, \\ o(h), & k \geq 2, \end{cases}$$

iz koje možemo odmah očitati elemente matrice prijelaznih gustoća A.

Uočimo da je $p_{n,n+k}(h)$ neovisan i o vremenu t kao i broju n. Pretpostavimo sada da λ može ovisiti o nekoj od ovih dviju veličina, ili pak o obje.

Dobiveni proces će i dalje biti Markovljev.

7.3.1 Procesi rađanja

Neka je $\lambda = \lambda_n$: parametar procesa ovisi o stanju populacije u danom momentu. Zadajmo

$$p_{n,n+k}(h) = \mathbf{P}(X(t+h) = n+k \mid X(t) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda_n h + o(h), & k = 0, \\ \lambda_n h + o(h), & k = 1, \\ o(h), & k \geq 2. \end{cases}$$

Sad lako dobivamo

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1 - \lambda_n h) + p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}h + o(h), \quad n \geq 1,$$

i odavde

$$\begin{aligned} p_n'(t) &= -\lambda_n p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t), \\ p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t). \end{aligned}$$

Pripadna matrica gustoće prijelaza glasi

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & & & \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & & \\ \vdots & & & & & & \\ \dots & 0 & -\lambda_n & \lambda_n & 0 & \dots & \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

Primjer 7.8 Yule–Furryjev proces. Za $\lambda_n = n\lambda$ odgovarajući proces se naziva jednostavni proces rađanja ili Yule-Furryjev proces.

Pripadna matrica gustoće prijelaza glasi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \dots \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

Iz Kolmogorovljevih jednadžbi unaprijed:

$$P'(t) = P(t)A$$

dobit ćemo ekvivalentni sustav diferencijalnih jednadžbi pomoću kojeg nalazimo prijelazne vjerojatnosti:

$$\begin{aligned}
&p_n'(t) = -n\lambda p_n(t) + (n-1)\lambda p_{n-1}(t), \qquad n \geq 1, \\
&p_0'(t) = 0.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da su početni uvjeti:

$$p_1(0) = 1, \qquad p_i(0) = 0, \quad i \neq 1.$$

(U početnom trenutku imamo točno jednu jedinku.) Odredimo uz te pretpostavke $p_n(t)$. Iz $p_0'(t) = 0$ slijedi $p_0(t) = const$, te zbog početnog uvjeta $p_0(t) = 0$. To je očigledno, jer se broj jedinki ne može smanjivati.

Za $n = 1$ dobivamo jednadžbu

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) \implies p_1(t) = Ce^{-\lambda t}$$

te je zbog početnog uvjeta $p_1(t) = e^{-\lambda t}$.

Za $n = 2$ jednadžba glasi

$$p_2'(t) = -2\lambda p_2(t) + \lambda p_1(t)$$

što se može svesti na oblik

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{2\lambda t} p_2(t)\Big) = \lambda e^{\lambda t}$$

odakle nakon integriranja i uvrštavanja početnog uvjeta slijedi

$$p_2(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}).$$

Indukcijom se dobiva općenito rješenje:

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

Odatle se može predskazati očekivano stanje populacije u trenutku t:

$$\begin{aligned}
m(t) = \mathbf{E}[X(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbf{P}(X(t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} = e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Primjer 7.9 Razmnožavanje žohara je proces rađanja s intenzitetom $\lambda_n = 2^n$.

1. Odredite prijelazne vjerojatnosti i izvedite pomoću njih rekurzivnu relaciju.
2. Iz rekurzivne relacije izvedite Chapman-Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed za taj proces.

3. Zapišite jednadžbu u matričnom obliku i očitajte matricu gustoća prijelaza.

▷

1. Označimo sa $p_{k,n+k}(h)$ vjerojatnost da se u vremenskom intervalu dulijne h broj žohara poveća sa k na $n+k$ žohara.

$$p_{k,n+k}(h) = \begin{cases} 1 - 2^k h + o(h), & n = 0, \\ 2^k h + o(h), & n = 1, \\ o(h), & n \geq 2. \end{cases}$$

Sa $p_n(t)$ označimo vjerojatnost da u trenutku t ima ukupno n žohara. Slijedi rekurzija:

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1 - 2^n h) + p_{n-1}(t)2^{n-1}h + o(h),\ n \geq 1.$$

2. Chapman-Kolmogorovljeva jednadžba unaprijed:

$$\begin{aligned} p_n'(t) &= -2^n p_n(t) + 2^{n-1} p_{n-1}(t), \\ p_0'(t) &= -p_0(t). \end{aligned}$$

3. Sa $P(t)$ označimo vektor $P(t) = [p_0(t) \quad p_1(t) \quad \ldots \quad p_n(t) \quad \ldots]$ Tada je iz 2. $P'(t) = P(t)A$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & & & \\ 0 & -2 & 2 & 0\ldots & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \ldots & 0 & -2^n & 2^n & 0 & \ldots & \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

◁

7.3.2 Procesi umiranja

Promotrimo proces kod kojeg su mogući jedino prijelazi iz stanja i u $i-1$.

Pretpostavimo da je

$$p_n(0) = \mathbf{P}(X(0) = n) = 1.$$

Tada je proces opisan sustavom diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} p_j'(t) &= -\mu_j p_j(t) + \mu_{j+1}\lambda p_{j+1}(t), \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1, \\ p_n'(t) &= -\mu_n p_n(t). \end{aligned}$$

Primjer 7.10 Sustav se sastoji od n uređaja. Vremena ispravnog rada svakog od njih su nezavisne eksponencijalno distribuirane slučajne varijable s parametrom μ. Ako sa $X(t)$ označimo broj ispravnih uređaja u trenutku t, tada je $(X(t), t \geq 0)$ proces umiranja uz stopu smrtnosti

$$\mu_i = i\mu, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

Ovdje je

$$p_i(t) = \binom{n}{i} e^{-i\mu t}(1 - e^{-\mu t})^{n-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Očekivanje je

$$m(t) = ne^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

7.3.3 Procesi rađanja i umiranja

Dozvolimo li sada mogućnost rađanja i umiranja proces će biti opisan matricom prijelaznih vjerojatnosti:

$$p_{ij}(h) = p(j, t+h, i, t) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h), & j = i+1, \\ o(h), & j \geq i+2,\ j \leq i-2, \\ \mu_i(h) + o(h), & j = i-1, \\ 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), & j = i. \end{cases}$$

uz početni uvjet $\mu_0 = 0$.

Po uzoru na proces rađanja možemo odmah izvesti matricu prijelaznih gustoća:

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \ldots & & & \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots & & \\ \vdots & & & & & & \\ \ldots & 0 & \mu_n & -\lambda_n - \mu_n & \lambda_n & 0 & \ldots \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

Ova je matrica ekvivalentna sljedećoj rekurzivnoj relaciji:

$$p_n(t+h) = p_n(t)\{1 - (\lambda_n + \mu_n)h\} + p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}h + p_{n+1}(t)\mu_{n+1}h + o(h),$$

ili pak sistemu Kolmogorovljevih jednadžbi

$$\begin{aligned} p_n'(t) &= -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) \\ p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_m(0) &= 1 \end{aligned}$$

Početni uvjet pretpostavlja da u trenutku 0 postoji m živućih individua.

12. Korelacijska teorija stohastičkih procesa

...

12.1. Spektralna gustoća i korelacijska funkcija

U mnogim se slučajevima efikasna analiza signala (determinističke funkcije) $X(t)$ može načiniti proučavanjem njezina **spektra**:

$$\hat{X}(u) := \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-iut}dt.$$

Funkcija $\hat{X}$ naziva se **Fourierov transformat**. Ako veličina X predstavlja, recimo, ovisnost napona o vremenu (funkcija u gornjoj ili vremenskoj domeni), onda $\hat{X}$ opisuje razdiobu napona po frekvencijama (funkcija u donjoj ili frekvencijskoj domeni). Poznavajući spektar, signal je jednoznačno određen po formuli inverzije

$$X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(u)e^{iut}du.$$

Da bi $\hat{X}$ bila definirana, signal X mora zadovoljavati stroge uvjete, od kojih je najvažniji *svojstvo apsolutne integrabilnosti*. Taj nas uvjet sprječava da tehniku Fourierove analize primijenimo direktno u proučavanju stohastičkih procesa, zato što trajektorija, preslikavanje $t \mapsto X(\omega, t)$ redovito ne zadovoljava taj uvjet.

Međutim, postoje druge veličine koje su prirodno povezane uz svaki signal, poput njegove *energije* ili, još bolje *snage*, a koje će zadovoljavati uvjet za egzistenciju Fourierova transformata.

* * *

Neka je $X(t)$ proces. Za fiksno $T > 0$ označimo "odrezani" proces

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & -T < t < T, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Trajektorije ovakvog procesa su apsolutno integrabilne:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(t)|dt = \int_{-T}^{T} |X(t)|dt < \infty.$$

Zato postoji njegov Fourierov transformat

$$\hat{X}_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t)e^{-iut}dt = \int_{-T}^{T} X(t)e^{-iut}dt.$$

Energija ovog procesa jednaka je

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t)^2 dt = \int_{-T}^{T} X(t)^2 dt < \infty$$

Po Parsevalovoj jednakosti, energija se može dobiti i integriranjem u donjem području:

$$E(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}_T(u)|^2 du.$$

Prosječna energija daje snagu

$$P(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{X}_T(u)|^2}{2T} du.$$

$P(T)$ je slučajna varijabla, jer njezin iznos ovisi o izboru trajektorije, odnosno o realizaciji elementarnog događaja. U ovoj ćemo relaciji načiniti sljedeća dva postupka:

1. Usrednjiti snagu po svim mogućim realizacijama, tj. odrediti očekivanu vrijednost,

2. Odrediti graničnu vrijednost izraza kad vrijeme T raste u beskonačnost.

S očekivanjem možemo proći znak integriranja. tako dobivamo:

$$P_{XX} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \boldsymbol{E}[X^2(t)]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{\boldsymbol{E}[|\hat{X}_T(u)|^2]}{2T} du$$

P_{XX} se naziva **prosječna snaga procesa**. Podintegralna funkcija s desne strane je **vremensko usrednjenje**, koje ćemo označiti slovom $\boldsymbol{A}$ (po početnom slovu engleske riječi *average*). Vremensko usrednjenje za bilo koju funkciju f je broj definiran na način:

$$\boldsymbol{A}[f(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt.$$

Dakle, možemo napisati sljedeću vezu prosječne snage i vremenskog usrednjenja:

$$P_{XX} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}[X^2(t)]) \tag{12.1}$$

Označimo još:

$$S_{XX}(u) := \lim_{T\to\infty} \frac{\boldsymbol{E}[|\hat{X}_T(u)|^2]}{2T}$$

Ova funkcija predstavlja **spektralnu gustoću** snage procesa. Onda je

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(u)du. \tag{12.2}$$

Primjer 1. Neka je $X(t) = A\cos(u_0 t + \theta)$, gdje su A i u_0 konstante, a θ s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Odredimo prosječnu snagu ovog procesa.

Računat ćemo na dva načina. Po (**??**) je

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[X(t)^2] &= \boldsymbol{E}[A^2\cos^2(u_0 t + \theta)] \\
&= \boldsymbol{E}\Big[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(2u_0 t + 2\theta)\Big] \\
&= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2u_0 t + 2h)\cdot\frac{2}{\pi}dh \\
&= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{\pi}\sin(2u_0 t).
\end{aligned}$$

Zaključujemo da proces nije stacionaran. Prosječnu snagu dobit ćemo preko vremenskog usrednjenja:

$$\begin{aligned}
P_{XX} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}[X(t)^2]) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big[\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{\pi}\sin(2u_0 t)\Big]dt \\
&= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{\pi}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\Big[-\cos(2u_0 T) + \cos(2u_0 T)\Big] = \frac{A^2}{2}.
\end{aligned}$$

Odredimo sad spektralnu gustoću snage. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\hat{X}_T(u) &= \int_{-T}^{T} A\cos(u_0 t + \theta)e^{-iut}dt \\
&= \frac{A}{2}e^{i\vartheta}\int_{-T}^{T} e^{i(u_0-u)t}dt + \frac{A}{2}e^{-i\vartheta}\int_{-T}^{T} e^{-i(u_0+u)t}dt \\
&= ATe^{i\vartheta}\frac{\sin[(u_0-u)T]}{(u_0-u)T} + ATe^{-i\vartheta}\frac{\sin[(u_0+u)T]}{(u_0+u)T}.
\end{aligned}$$

Sad treba odrediti

$$\boldsymbol{E}[\hat{X}_T(u)|^2] = \int_0^{\pi/2}\hat{X}_T(u)\overline{\hat{X}_T(u)}\frac{2}{\pi}dh.$$

Nakon sređivanja i integriranja, proizlazi

$$\frac{\boldsymbol{E}[|\hat{X}_T(u)|^2]}{2T} = \frac{A^2\pi}{2}\Big(\frac{T}{\pi}\cdot\frac{\sin^2[(u_0-u)T]}{[(u-u_0)T]^2} + \frac{T}{\pi}\cdot\frac{\sin^2[(u_0+u)T]}{[(u+u_0)T]^2}\Big).$$

U daljnjem računu nam treba sljedeća formula, koju ovdje nećemo izvoditi:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{T}{\pi}\Big(\frac{\sin(\alpha T)}{\alpha T}\Big)^2 = \delta(\alpha),$$

gdje je δ Diracova d-funkcija,

$$\delta(\alpha) = \begin{cases}\infty, & \alpha = 0,\\ 0, & \alpha \neq 0\end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha)d\alpha = 1.$$

Tako dobivamo:

$$S_{XX}(u) = \lim_{T\to\infty}\frac{\boldsymbol{E}[|\hat{X}_T(u)|^2]}{2T} = \frac{A^2\pi}{2}[\delta(u-u_0) + \delta(u+u_0)].$$

Ovu je formulu lako shvatiti. Naš proces ima periodičke trajektorije, sa slučajnim pomakom, ali s istom frekvencijom. Zato samo jedna frekvencija sudjeluje u spektru snage procesa.

Računajmo sada srednju snagu pomoću formule (2):

$$\begin{aligned} P_{XX} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2\pi}{2}[\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)]du \\ &= \frac{A^2}{4}\cdot 2 = \frac{A^2}{2}. \end{aligned}$$

* * *

12.1. Svojstva spektralne gustoće

Spektralna gustoća snage procesa ima sljedeća svojstva:

1. $S_{XX} \geqslant 0$,

2. $S_{XX}(-u) = S_{XX}(u)$, (ako je $X(t)$ realan).

3. $S_{XX}(u)$ je realna funkcija.

4.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(u)du = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}[X(t)^2]).$$

5. $S_{XX}(u)$ i $\boldsymbol{A}[R_{XX}(t,t+\tau)]$ su par Fourierovih transformata, vrijedi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}[R_{XX}(t,t+\tau)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(u)e^{iu\tau}du, \\ S_{XX}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{A}[R_{XX}(t,t+\tau)]e^{-iu\tau}d\tau. \end{aligned}$$

Pokažimo ovo svojstvo.

$$\begin{aligned} S_{XX}(u) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\boldsymbol{E}|\hat{X}_T(u)|^2 \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\boldsymbol{E}[\hat{X}_T(u)\overline{\hat{X}_T(u)}] \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\boldsymbol{E}[X(t_1)X(t_2)e^{-iut_1}e^{iut_2}dt_1dt_2. \end{aligned}$$

Za $-T < t_1, t_2 < T$ vrijedi $R_{XX}(t_1, t_2) = \boldsymbol{E}[X(t_1)X(t_2)]$. Zato je

$$\begin{aligned}
S_{XX}(u) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} R_{XX}(t_1, t_2) e^{-iu(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 = \begin{bmatrix} t = t_2 \\ \tau = t_1 - t_2 \\ dt_1\, dt_2 = dt\, d\tau \end{bmatrix} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-T-t}^{T-t} R_{XX}(t+\tau, t) e^{-iu\tau} d\tau \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} R_{XX}(t, t+\tau) dt \right) e^{-iu\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{A}[R_{XX}(t, t+\tau)] e^{-iu\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

* * *

Ako je proces stacionaran u širem smislu, onda je $R_{XX}(t, t+\tau) = R_{XX}(\tau)$, $\forall t$, pa je i vremensko usrednjenje $\boldsymbol{A}[R_{XX}(t, t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
S_{XX}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-iu\tau} d\tau, \\
R_{XX}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(u) e^{iu\tau} du.
\end{aligned}$$

* * *

Primjetimo nadalje da je R_{XX} parna funkcija. Zato je S_{XX} realna i može se napisati u obliku **kosinus transformacije**:

$$\begin{aligned}
S_{XX}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-iu\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) [\cos u\tau - i \sin u\tau] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos u\tau d\tau - i \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \sin u\tau d\tau \\
&= 2 \int_{0}^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos u\tau d\tau
\end{aligned}$$

Primjer 2. Odredimo spektralnu gustoću procesa

$$X(t) = A \cos(u_0 t + \vartheta)$$

gdje su A i u_0 konstante, a ϑ ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 2\pi]$.

Ovaj je proces (za razliku od sličnog iz prošlog primjera) stacionaran, vrijedi

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos u_0 \tau.$$

Prikažimo tu funkciju ovako:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{4}\Big(e^{iu_0\tau} + e^{-iu_0\tau}\Big).$$

Kako vrijedi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-u_0)e^{iu\tau}du = \frac{1}{2\pi}e^{iu_0\tau},$$

zaključujemo da je

$$e^{iu_0\tau} \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\delta(u-u_0)$$

i slično

$$e^{-iu_0\tau} \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\delta(u+u_0).$$

Zato je

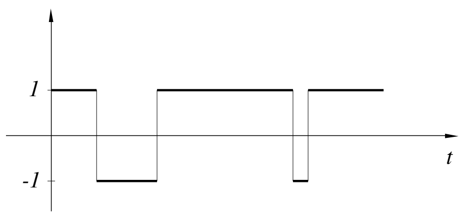
$$\begin{aligned} R_{XX}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ & \frac{A^2}{4}[2\pi\delta(u-u_0) + 2\pi\delta(u+u_0)] \\ &= \frac{A^2\pi}{2}[\delta(u-u_0) + \delta(u+u_0)] = S_{XX}(u). \end{aligned}$$

Primjer 3. **Telegrafski signal.** Neka je $N(t)$ Poissonov proces s intenzitetom λ. Stavimo

$$X(t) := (-1)^{N(t)}.$$

Ovaj se proces naziva **telegrafski signal**. On je jednak 1 ako se do trenutka t realizira paran broj događaja koji generiraju Poissonov proces, a -1 ako ih do trenutka t bude neparan broj.

Trajektorija procesa izgleda ovako:



Sl. 12.1.

Odredimo jednodimenzionalne razdiobe procesa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\{X(t)=1\} &= \boldsymbol{P}\{N(t)=0\} + \boldsymbol{P}\{N(t)=2\} + \boldsymbol{P}\{N(t)=4\} + \ldots \\ &= e^{-\lambda t}\left[1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \ldots\right] \\ &= e^{-\lambda t}\operatorname{ch}\lambda t, \\ \boldsymbol{P}\{X(t)=-1\} &= \boldsymbol{P}\{N(t)=1\} + \boldsymbol{P}\{N(t)=3\} + \boldsymbol{P}\{N(t)=5\} + \ldots \\ &= e^{-\lambda t}\left[\lambda t + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \frac{(\lambda t)^5}{5!} + \ldots\right] \\ &= e^{-\lambda t}\operatorname{sh}\lambda t. \end{aligned}$$

Zato je očekivanje ovog procesa

$$\boldsymbol{E}[X(t)] = e^{-\lambda t}\operatorname{ch}\lambda t - e^{-\lambda t}\operatorname{sh}\lambda t = e^{-2\lambda t}.$$

Da bismo odredili korelacijsku funkciju, moramo odrediti dvodimenzionalne razdiobe. Neka je $t_1 < t_2$ i $\tau = t_2 - t_1$. Za zadanu vrijednost $X(t_1) = 1$ bit će $X(t_2) = 1$ onda i samo onda ako se u intervalu $[t_1, t_2]$ duljine τ ostvari paran broj događaja A. Vjerojatnost toga je, zbog homogenosti procesa, jednaka $e^{-\lambda\tau}\operatorname{ch}\lambda\tau$. Zato je

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}\{X(t_2) = 1 \mid X(t_1) = 1\} = e^{-\lambda\tau}\operatorname{ch}\lambda\tau,\\
&\boldsymbol{P}\{X(t_1) = 1, X(t_2) = 1\} = \boldsymbol{P}\{X(t_1) = 1\}\boldsymbol{P}\{X(t_2) = 1 \mid X(t_1) = 1\}\\
&\qquad = e^{-\lambda\tau}\operatorname{ch}\lambda\tau \cdot e^{-\lambda t_1}\operatorname{ch}\lambda t_1.
\end{aligned}$$

Slično:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}\{X(t_1) = -1, X(t_2) = -1\} = \boldsymbol{P}\{X(t_1) = -1\}\boldsymbol{P}\{X(t_2) = -1 \mid X(t_1) = -1\}\\
&\qquad = e^{-\lambda\tau}\operatorname{ch}\lambda\tau \cdot e^{-\lambda t_1}\operatorname{sh}\lambda t_1,\\
&\boldsymbol{P}\{X(t_1) = 1, X(t_2) = -1\} = \boldsymbol{P}\{X(t_1) = 1\}\boldsymbol{P}\{X(t_2) = -1 \mid X(t_1) = 1\}\\
&\qquad = e^{-\lambda\tau}\operatorname{sh}\lambda\tau \cdot e^{-\lambda t_1}\operatorname{ch}\lambda t_1,\\
&\boldsymbol{P}\{X(t_1) = -1, X(t_2) = 1\} = \boldsymbol{P}\{X(t_1) = -1\}\boldsymbol{P}\{X(t_2) = 1 \mid X(t_1) = -1\}\\
&\qquad = e^{-\lambda\tau}\operatorname{sh}\lambda\tau \cdot e^{-\lambda t_1}\operatorname{sh}\lambda t_1.
\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}
R_{XX}(t_1, t_2) &= \boldsymbol{E}[X(t_1)X(t_2)]\\
&= e^{-\lambda\tau}\operatorname{ch}\lambda\tau \cdot e^{-\lambda t_1}\operatorname{ch}\lambda t_1 + e^{-\lambda\tau}\operatorname{ch}\lambda\tau \cdot e^{-\lambda t_1}\operatorname{sh}\lambda t_1\\
&\qquad - e^{-\lambda\tau}\operatorname{sh}\lambda\tau \cdot e^{-\lambda t_1}\operatorname{ch}\lambda t_1 - e^{-\lambda\tau}\operatorname{sh}\lambda\tau \cdot e^{-\lambda t_1}\operatorname{sh}\lambda t_1\\
&= e^{-2\lambda(t_2 - t_1)}.
\end{aligned}$$

Općenito je

$$R_{XX}(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_2 - t_1|}.$$

Korelacijska funkcija procesa X ovisi samo o razlici vremena, međutim proces nije stacionaran, jer mu očekivanje nije konstantno. Razlog tome je što vrijednost procesa u samom početku nije bila slučajna, već je on poprimio vrijednost 1 za svaku realizaciju. Da bismo otklonili taj nedostatak, promotrimo proces

$$Y(t) = A \cdot X(t)$$

gdje je A slučajna varijabla s zakonom razdiobe

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

nezavisna o procesu X. Tada je

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[Y(t)] &= \boldsymbol{E}[A \cdot X(t)] = \boldsymbol{E}[A] \cdot \boldsymbol{E}[X(t)] = 0,\\
R_{YY}(t_1, t_2) &= \boldsymbol{E}[AX(t_1)AX(t_2)] = \boldsymbol{E}[A^2]R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

Prema tome, Y je stacionaran proces s istom korelacijskom funkcijom kao i proces X.

Odredimo njezinu spektralnu gustoću.

$$\begin{aligned}
S_{YY}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau)e^{-iu\tau}d\tau = 2\int_0^{\infty} R_{YY}(\tau)\cos(u\tau)d\tau \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-2\lambda\tau}\cos(u\tau)d\tau \\
&= \int_0^{\infty}\Big[e^{-(2\lambda-iu)\tau}+e^{-(2\lambda+iu)\tau}\Big]d\tau \\
&= \frac{4\lambda}{4\lambda^2+u^2}.
\end{aligned}$$

Primjer 4. Izlazni signal Y iz nekoga sklopa koji ima vlastitu frekvenciju u_0 često se ponaša po zakonu

$$Y(t) = X(t)\cdot C\cos(u_0 t),$$

pri čemu je X ulazni signal za koji ćemo pretpostaviti da je stacionarni proces. Odredimo spektralne karakteristike procesa Y.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
R_{YY}(t,t+\tau) &= \boldsymbol{E}[Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= C^2\boldsymbol{E}[X(t)X(t+\tau)]\cos u_0 t\cos u_0(t+\tau) \\
&= \frac{C^2}{2}\cdot R_{XX}(\tau)[\cos(u_0\tau)+\cos(2u_0 t+u_0\tau)].
\end{aligned}$$

Vidimo da izlazni signal nije stacionaran proces. Međutim, računajući vremensko usrednjenje, izgubit će se dio koji ovisi o t:

$$\boldsymbol{A}[R_{YY}(t,t+\tau)] = \frac{C^2}{2}R_{XX}(\tau)\cos(u_0\tau).$$

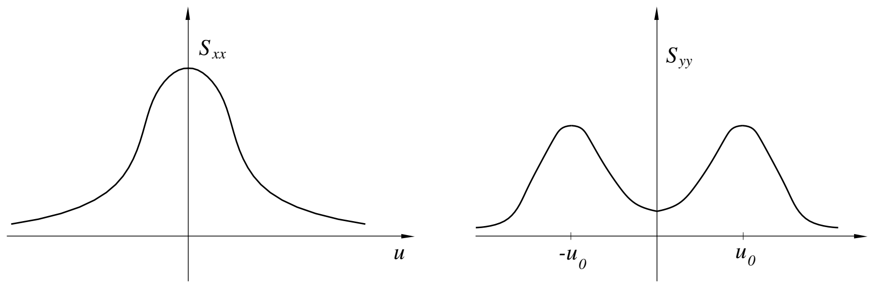
Odredimo Fourierove transformate lijeve i desne strane. Kako je

$$\cos u_0\tau = \frac{e^{iu_0\tau}+e^{-iu_0\tau}}{2},$$

dobivamo:

$$S_{YY}(u) = \frac{C^2}{4}[S_{XX}(u-u_0)+S_{XX}(u+u_0)]$$

Ilustrirajmo ovu vezu slikom. Pretpostavimo da ulazni signal ima spektar čije su frekvencije manje od vlastite frekvencije u_0 sklopa. Onda se njegov spektar transformira na način prikazan slikom.



Sl. 12.2. Graf spektra ulaznog signala (lijevo) i graf spektra izlaznog signala (desno). Primjetimo da iz ovog grafa možemo odrediti i vlastitu frekvenciju i spektar ulaznog signala.

***

Često se u primjenama signal javlja u obliku zbroja dvaju signala, od kojih je jedan smetnja ili šum. Neka je

$$Z(t) = X(t) + Y(t).$$

Odredimo korelacijsku funkciju ovog procesa.

$$\begin{aligned} R_{ZZ}(t, t+\tau) &= \boldsymbol{E}[Z(t)Z(t+\tau)] \\ &= \boldsymbol{E}[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)+Y(t+\tau)] \\ &= \boldsymbol{E}[X(t)X(t+\tau)+X(t)Y(t+\tau)+X(t+\tau)Y(t)+Y(t)Y(t+\tau)] \\ &= R_{XX}(t,t+\tau)+R_{XY}(t,t+\tau)+R_{YX}(t,t+\tau)+R_{YY}(t,t+\tau) \end{aligned} \tag{12.3}$$

Ovdje su R_{XX} i R_{YY} autokorelacijske funkcije procesa X odnosno Y, a R_{XY} i R_{YX} kros-korelacijske funkcije procesa X i Y. Primijetimo da je općenito $R_{XY} \neq R_{YX}$.

Izračunajmo sada spektralnu gustoću snage procesa Z. Izvod će biti sličan onom za proces X. Označimo:

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & -T < t < T, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \qquad Y_T(t) = \begin{cases} Y(t), & -T < t < T, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Tad je uzajamna snaga ovih dvaju procesa

$$P(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X_T(t)Y_T(t)dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)Y(t)dt.$$

($P(T)$ je slučajna varijabla.) Po Parsevalovoj jednakosti, vrijedi

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X_T(t)Y_T(t) = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} X_T(t)Y_T(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\hat{X}_T(u)}\hat{Y}_T(u)}{2T}du.$$

Računajući očekivanje lijeve i desne strane, dobivamo

$$P_{XY}(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R_{XY}(t,t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{E}[\overline{\hat{X}_T(u)}\hat{Y}_T(u)]}{2T}du.$$

Pustivši da $T \to \infty$, imamo konačno

$$P_{XY} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} R_{XY}(t,t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{\boldsymbol{E}[\overline{\hat{X}_T(u)}\hat{Y}_T(u)]}{2T} du$$

Označimo

$$S_{XY}(u) := \lim_{T\to\infty} \frac{\boldsymbol{E}[\overline{\hat{X}_T(u)}\hat{Y}_T(u)]}{2T}.$$

Tad vrijedi

$$P_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(u)du.$$

Na isti način

$$P_{YX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(u)du,$$

no ove se dvije funkcije za realne procese podudaraju, $P_{XY} = P_{YX}$ (zašto?).

Iz (**??**), uzimajući vremensko usrednjenje, dobivamo

$$\boldsymbol{A}[R_{ZZ}(t,t+\tau)] = \boldsymbol{A}[R_{XX}(t,t+\tau)] + \boldsymbol{A}[R_{XY}(t,t+\tau)] + \boldsymbol{A}[R_{YX}(t,t+\tau)] + \boldsymbol{A}[R_{YY}(t,t+\tau)]$$

Primijenivši Fourierovu transformaciju $\boldsymbol{p}F$ na ovu jednakost, slijedi

$$\begin{aligned} S_{ZZ}(u) &= S_{XX}(u) + S_{YY}(u) + \boldsymbol{p}F[\boldsymbol{A}R_{XY}(t,t+\tau)] + \boldsymbol{p}F[\boldsymbol{A}R_{YX}(t,t+\tau)] \\ &= S_{XX}(u) + S_{YY}(u) + S_{XY}(u) + S_{YX}(u). \end{aligned}$$

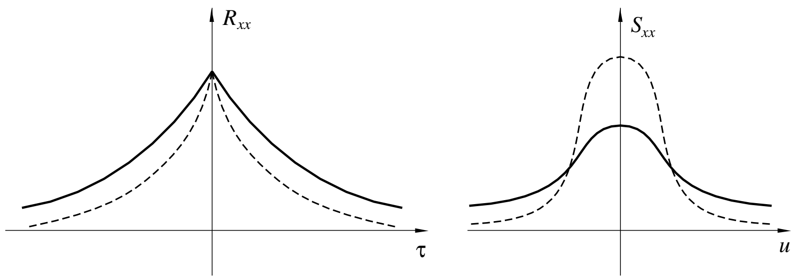
12.2. Bijeli šum

Korelacijska funkcija $R(\tau)$ stacionarnog procesa i spektralna gustoća $S(u)$ par su Fourierovih transformata. To ima za posljedicu još jednu vezu između tih funkcija, povezanu sa svojstvima procesa X.

Ako za proces X vrijedi da je autokorelacijska funkcija $R_{XX}(\tau)$ malena za $\tau > \tau_0$, to znači da se *ovisnost između varijabli $X(t)$ i $X(t+\tau)$ brzo gubi*, te su varijable praktički nekorelirane za $\tau > \tau_0$. Međutim, ako R_{XX} brzo opada s porastom vrijednosti argumenta τ, sasvim je suprotna situacija s njezinom Fourierovom transformacijom $S_{XX}(u)$: u spektru takvog signala sudjelovat će visoke frekvencije.

Ta se veza dobro vidi na primjeru para funkcija, korelacijske funkcije i spektralne gustoće telegrafskog signala:

$$R_{XX}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}, \qquad S_{XX} = \frac{2\alpha A}{\alpha^2 + u^2}.$$



Sl. 12.3.

Povećavanjem iznosa za parametar α, R_{XX} postaje sve strmija, dok se krivulja spektralne funkcije širi.

* * *

Svakako je ekstremni slučaj nekoreliranosti proces za koji bi bilo

$$R_{XX}(\tau) = 0, \qquad \tau > 0.$$

Za takav bi proces slučajne varijable $X(t)$ i $X(t+\tau)$ bile nekorelirane, čim je $\tau > 0$. To svakako znači da se trajektorija tog procesa vrlo brzo i nepravilno mijenja. Neka je dakle

$$R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau), \tag{12.4}$$

onda je pripadna spektralna gustoća

$$S_{XX}(u) = \frac{N_0}{2}, \tag{12.5}$$

konstantna, duž čitavog spektra.

Definicija 1. Gaussov proces koji je stacionaran i ima korelacijsku funkciju (**??**) naziva se **bijeli šum**.

Ime je ovaj proces dobio po analogiji sa bijelom svjetlošću, čiji se spektar sastoji od svih frekvencija vidljive svjetlosti. Tako se i spektar bijelog šuma sastoji od svih frekvencija.

Moramo odmah kazati da ovakav proces fizikalno ne postoji. Naime, njegova bi snaga bila beskonačna:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(u)du = \infty.$$

Međutim, ovako definiran proces predstavlja matematičku idealizaciju procesa koji se javljaju u prirodi. Ako neki proces ima u čitavom interesantnom frekvencijskom području konstantan spektar, tada se njegovo ponašanje vrlo dobro može opisati bijelim šumom.

Primjer 5. Termalni šum. Tipičan primjer takvog procesa je **termalni šum** koji se javlja u vodičima uslijed zagrijavanja. Naime, prijenosom signala vodičem dolazi do sudaranja elektrona — nosilaca naboja — s atomima vodiča što uzrokuje da se kinetička energija elektrona prenosi na atome koji uslijed toga povećavaju svoje titranje. To se titranje manifestira kao toplinsko zagrijavanje, a ovo uzrokuje promjenu samoga signala u koji se ubacuje šum.

Spektar tog šuma praktički je konstantan do na vrlo visoke frekvencije:

$$S_0(u) = 4kTR.$$

Ovdje je R otpor vodiča, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ JK (Boltzmannova konstanta) a T temperatura u Kelvinovim stupnjevima.

Točnija je formula

$$S(u) = 4kTR \cdot \frac{hu}{kT}\Big(e^{\frac{hu}{kT}} - 1\Big)^{-1}$$

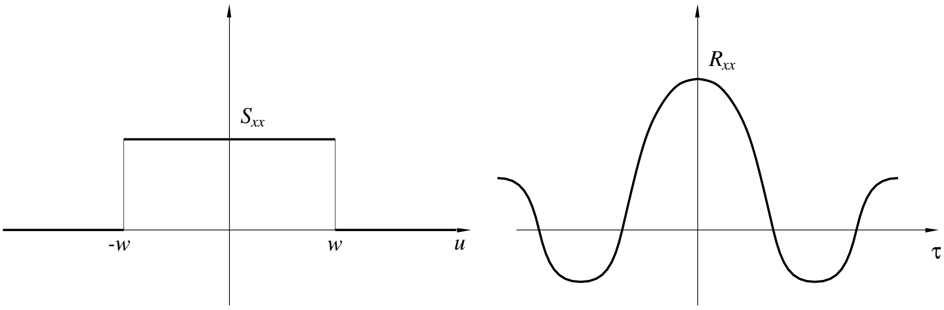
($h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konstanta). Uz normalnu sobnu temperaturu je $\dfrac{hu}{kT} << 1$ čak i za milimetarske valove i može se koristiti približna formula. Naime, pri $T = 290$ K je $S(u) > 0.9 \cdot \dfrac{N_0}{2}$ za frekvencije do 10^{12} Hz. Primjetimo da se smanjivanjem temperature smanjuje i šum.

Snaga je termalnog šuma

$$\begin{aligned} P &= 4kTR \int_0^\infty \frac{hu}{kT}\Big(\exp\Big(\frac{hu}{kT}\Big) - 1\Big)^{-1} du \\ &= 4kTR \cdot \frac{kT}{h} \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^2}{3h}(kT)^2 R. \end{aligned}$$

Primjer 6. Obojeni šum. Tim imenom nazivamo proces čija spektralna gustoća sadrži samo dio spektra. Neka je

$$S_{XX}(u) = \begin{cases} \dfrac{P\pi}{w}, & |u| < w, \\ 0, & |u| > w. \end{cases}$$



Sl. 12.4. Spektralna gustoća i pripadna korelacijska funkcija obojenog šuma. Na slici desno je nacrtana i korelacijska funkcija za obojeni šum koji ima dvostruko veću granicu w.

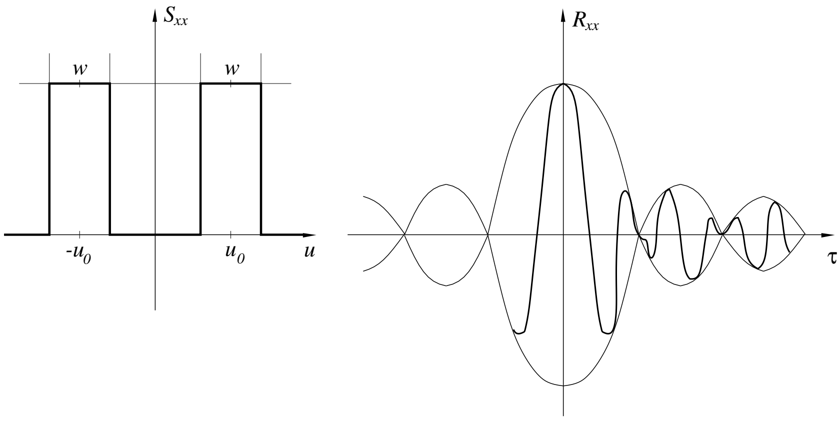
Odredimo pripadnu korelacijsku funkciju:

$$\begin{aligned}
R_{XX}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(u)e^{iu\tau}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w} \frac{P\pi}{w}\cdot e^{iu\tau}du \\
&= \frac{P}{2w}\cdot\frac{e^{-i\tau w}-e^{-\tau w}}{-i\tau} = P\cdot\frac{\sin(\tau w)}{\tau w}.
\end{aligned}$$

Primijetimo još da u graničnom prijelazu $w \to \infty$ R_{XX} prelazi u δ-funkciju.

Primjer 7. Neka je sada spektralna gustoća konstantna u pruzi oko frekvencije u_0, širine w, a nula inače:

$$S_{XX}(u) = \frac{P\pi}{w}, \qquad u_0 - \frac{w}{2} < |u| < u_0 + \frac{w}{2}.$$



Sl. 12.5.

Sada je

$$
\begin{aligned}
R_{XX}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(u)e^{iu\tau}du \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S_{XX}(u)\cos(u\tau)du \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{u_0-\frac{w}{2}}^{u_0+\frac{w}{2}} \frac{P\pi}{w}\cos(u\tau)du \\
&= \frac{P}{\tau w}\Big[\sin(u_0+\frac{w}{2})\tau - \sin(u_0 - 0\frac{w}{2})\tau\Big] \\
&= \frac{2P}{\tau w}\sin\frac{w\tau}{2}\cos(u_0\tau) \\
&= P\cos u_0\tau\left(\frac{\sin\dfrac{w\tau}{2}}{\dfrac{w\tau}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

12.2. Ergodski procesi

Kako se u praksi mogu odrediti karakteristike procesa? Da bismo mu izračunali očekivanje $m(t)$, morali bismo imati po volji mnogo trajektorija i tražiti srednju vrijednost realizacija procesa: ako su $\omega_1, \dots, \omega_n$ elementarni događaji, onda se približna vrijednost za očekivanje $m(t)$ nalazi formulom

$$m(t) \approx \frac{X(t,\omega_1) + \ldots + X(t,\omega_n)}{n}.$$

Slično bi se računala disperzija, korelacijska funkcija i slično.

Međutim, ovakva je shema često u stvarnosti nemoguća. Razlog je tome što je vrlo često nama dostupna *jedna jedina realizacija procesa*. Možemo li na osnovi te realizacije utvrditi numeričke karakteristike procesa? Odgovor je, na žalost, ne!

Jedini je izlaz iz ove situacije pretpostaviti da proces posjeduje dodatno svojstvo, **ergodičnost**.

Iz jedne trajektorije procesa mi možemo računati njezino *vremensko usrednjenje*. Dobi ćemo kao rezultat

$$\overline{x}(\omega) = \boldsymbol{A}[x(t,\omega)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt.$$

$\overline{x}$ je slučajna varijabla, svakoj realizaciji $\omega \in \Omega$ odgovara jedna trajektorija i njezino vremensko usrednjenje, koje se može razlikovati za različite trajektorije. Na isti se način može odrediti i *vremenska autokorelacija*:

$$\overline{R}(\tau,\omega) = \boldsymbol{A}[x(t,\omega)x(t+\tau,\omega)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t,\omega)x(t+\tau,\omega)dt.$$

Kako operator vremenskog usrednjenja i operator očekivanja komutiraju, za stacionarni proces vrijedi

$$\boldsymbol{E}[\overline{x}] = \boldsymbol{E}[x], \qquad \boldsymbol{E}[\overline{R}(\tau)] = R(\tau),$$

što pokazuje kako vremensko usrednjenje može poslužiti kao procjena za ove numeričke karakteristike.

Definicija 2. Za proces kažemo da je **ergodski** ako se vremenska usrednjenja očekivanja i korelacijskih funkcija podudaraju za svaku trajektoriju[1] procesa.

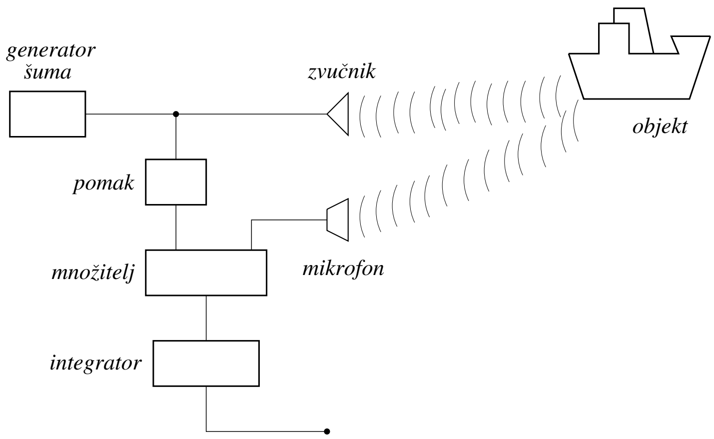
Tad je ispunjeno

$$\overline{x}(\omega) = \boldsymbol{E}[x], \qquad \overline{R}(\tau,\omega) = R(\tau), \quad \forall\omega \in \Omega.$$

Možemo li u praksi provjeriti je li neki proces ergodičan ili ne? Ako nam je dostupna samo jedna njegova trajektorija, nema načina da onda provjerimo njegovu ergodičnost. Ipak za mnoge se stacionarne procese s pravom može pretpostaviti da posjeduju ovo svojstvo.

Primjer 8. Sonarni sustav. Sonar je uređaj kojim se može odrediti udaljenost od izvora zvuka do nekog objekta. Koristi se obično u pomorstvu, u podmornicama za određivanje udaljenosti do čvrstog objekta, u brodovima ribaricama za određivanje udaljenosti do jata riba (koje su locirane radarom). Rad se sonara zasniva na principu pretpostavljene ergodičnosti emitiranog bijelog šuma. Bijeli se šum emitira iz izvora i usmjerava prema objektu. Vrijeme T potrebno da se odbijen i signal vrati do prijemnika povezano je s udaljenošću formulom: $2d = vT$, gdje je v brzina zvuka u vodi, a d udaljenost do objekta. Istovremeno s emitiranjem, signal se pušta kroz vremenski poček duljine trajanja τ. Vraćeni signal množi se s originalnim i propušta kroz integrator (slika **??**).

[1] Ispravnije bi bilo kazati: za skoro svaku, što je sinonim za: s vjerojatnošću 1, ili, skoro sigurno



Sl. 12.6.

Tako na izlazu iz sklopa dobivamo vrijednost

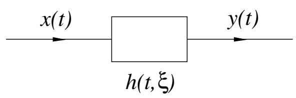
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t+\tau)u(t+T)dt = \overline{R}(T-\tau) = R(T-\tau) = \sigma^2\delta(T-\tau).$$

Zbog pretpostavke ergodičnosti, vremensko se usrednjenje podudara s korelacijskom funkcijom. Ova je korelacijska funkcija jednaka nuli ako je $\tau \neq T$. Mijenjanjem počeka τ, odredit će se onaj trenutak kad je $R(T-\tau) \neq 0$, što se realizira kao signal snage σ^2. Tada je vrijednost od τ upravo jednaka vremenu T.

12.3. Linearni sustavi

Transformacija ulaznog determinističkog signala x može se shvatiti kao djelovanje nekog operatora L:

$$y(t) = L(x(t))$$



Sl. 12.7. Shematski prikaz linearnog sustava

Mi ćemo promatrati takve sustave za koje je L **linearni operator**, preslikavanje koje ima svojstvo linearnosti:

$$L(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 L(x_1) + \ldots + \alpha_n L(x_n).$$

Najjednostavnije je formalno operirati s linearnim operatorom koji se dade predstaviti integralom. Korištenjem računa s poopćenim δ-funkcijama, to možemo učini na sljedeći način. Svaka se funkcija može napisati u obliku integrala konvolucijskog tipa:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)\delta(t-\xi)d\xi.$$

Kako je L linearan operator, on komutira s integralom:

$$L(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)L(\delta(t-\xi))d\xi.$$

Označimo s $h(t,\xi)$ djelovanje operatora L na Diracovu funkciju $\delta(t-\xi)$. Funkciju h nazivamo **impulsnim odzivom** sustava, jer je to reakcija sustava na signal koji je impuls (delta funkcija). Tada se odziv sustava na signal x može prikazati u obliku linearne integralne transformacije:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)h(t,\xi)d\xi.$$

Pretpostavit ćemo da $h(t,\xi)$ ne ovisi o apsolutnom iznosu argumenata t i ξ, već samo o njihovoj razlici, što je karakteristika **vremenski invarijantnih sustava**:

$$L(\delta(t-\xi)) = h(t-\xi).$$

Onda je rezultat y integralna transformacija konvolucijskog tipa:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)h(t-\xi) = x(t) * h(t).$$

Fourierova transformacija ove funkcije bit će umnožak Fourierovih transformata:

$$\begin{aligned} y^*(u) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-iut}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)h(t-\xi)d\xi\right)e^{-iut}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)e^{-iu\xi}d\xi\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\xi)e^{-iu(t-\xi)}d(t-\xi)\right) = x^*(u)\cdot h^*(u). \end{aligned}$$

* * *

Neka je sada $X(t)$ slučajan signal i

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)h(t-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)X(t-\xi)d\xi$$

Pretpostavimo da je proces X stacionaran. Odredimo prva dva momenta slučajnog procesa Y.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}[Y(t)] &= \boldsymbol{E}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)X(t-\xi)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\boldsymbol{E}[X(t-\xi)]d\xi = \overline{X}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)d\xi = \overline{Y}. \\
\boldsymbol{E}[Y(t)^2] &= \boldsymbol{E}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1)X(t-\xi_1)d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_2)X(t-\xi_2)d\xi_2\Big] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1)h(\xi_2)\boldsymbol{E}[X(t-\xi_1)X(t-\xi_2)]d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1)h(\xi_2)R_{XX}(\xi_1-\xi_2)d\xi_1 d\xi_2.
\end{aligned}
$$

Primjer 9. Neka je X bijeli šum, za koji je

$$R_{XX}(\xi_1-\xi_2) = \frac{N_0}{2}\delta(\xi_1-\xi_2).$$

Disperzija procesa Y je

$$\boldsymbol{E}[Y]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\delta(\xi_1-\xi_2)h(\xi_1)h(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\xi_1)d\xi_1.$$

* * *

Općenitije, korelacijska funkcija procesa Y iznosi:

$$
\begin{aligned}
R_{YY}(t,t+\tau) &= \boldsymbol{E}[Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= \boldsymbol{E}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1)X(t-\xi_1)d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_2)X(t-\xi_2)d\xi_2\Big] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1)h(\xi_2)R_{XX}(\tau+\xi_1-\xi_2)d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}
$$

Vidimo da je Y stacionaran. Ova se funkcija može prikazati također u obliku konvolucije:

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) * h(\tau).$$

Slično se računa i kros-korelacijska funkcija ulaznog i izlaznog signala:

$$
\begin{aligned}
R_{XY}(t,t+\tau) &= \boldsymbol{E}\Big[X(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)X(t+\tau-\xi)d\xi\Big] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}\big[X(t)X(t+\tau-\xi)\big]h(\xi)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau-\xi)h(\xi)d\xi
\end{aligned}
$$

što se ponovno može zapisati preko konvolucije:

$$R_{XY} = R_{XX}(\tau) * h(\tau).$$

Fourierov transformat korelacijske funcija jest spektralna gustoća snage procesa. Iz gornjih formula neposredno slijedi

$$S_{YY}(u) = S_{XX}(u) \cdot \overline{h^*(u)} \cdot h^*(u) = |h^*(u)|^2 S_{XX}(u).$$

* * *

Funkcija $H(u)$ može se odrediti tako da se promotri odziv sustava na ulazni signal oblika $x(t) = e^{iut}$. Naime, tada je

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)x(t-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{iut}e^{-iu\xi}d\xi = e^{iut}H(u).$$

Prema tome, vrijedi

$$H(u) = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Ova je formula, naravno, istinita samo za ulazni signal gornjeg specijalnog oblika.

Primjer 10. Jednostavan primjer linearnog sustava opisan je jednadžbom

$$y(t) = x'(t).$$

Sada je u donjem području

$$y^*(u) = (iu)x^*(u) = H(u)x^*(u)$$

pa je funkcija sustava $H(u) = iu$. Zato imamo

$$S_{xy}(u) = S_{xx}(u)(-iu), \qquad S_{x'x'}(u) = |H(u)|^2 S_{xx}(u) = u^2 S_{xx}(u).$$

Odavde

$$R_{xx'}(\tau) = -\frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau}, \qquad R_{x'x'}(\tau) = -\frac{d^2R_{xx}(\tau)}{d\tau^2}.$$

Primjer 11. Za zadani proces $x(t)$, proces definiran formulom

$$y(t) := \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} x(\tau)d\tau$$

rezultat je djelovanja linearnog operatora. Ovu operaciju nazivamo **izglađivanjem**

Neka je $h(t)$ funkcija definirana formulom

$$h(t) = \begin{cases} 1/2\varepsilon, & |t| < \varepsilon, \\ 0, & |t| > \varepsilon. \end{cases}$$

Konvolucija ove funkcije sa signalom x je

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}x(\tau)d\tau = y(t).$$

Fourierov transformat funkcije $h(t)$ je funkcija sustava

$$H(u) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{iut}dt = \frac{\sin \varepsilon u}{\varepsilon u}.$$

Zato je

$$S_{yy}(u) = S_{xx}(u)\frac{\sin^2 \varepsilon u}{\varepsilon^2 u^2}.$$

Primjetimo da je original funkcije $(\sin^2 \varepsilon u)/\varepsilon^2 u^2$ funkcija

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(1 - \dfrac{|\tau|}{2\varepsilon}\right), & |\tau| < 2\varepsilon, \\ 0 & |\tau| > 2\varepsilon. \end{cases}$$

Spektar $S_{yy}(u)$ umnožak je dviju funkcija u frekvencijskom području. Njegov je original konvolucija pojedinih originala. Zato je

$$R_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\left(1 - \frac{|\alpha|}{2\varepsilon}\right)R_{xx}(\tau-\alpha)d\alpha.$$

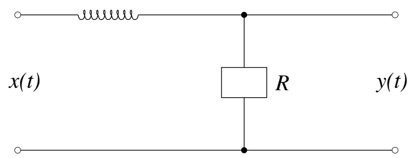
Ovaj rezultat možemo iskoristiti u računanju momenata vremenskog usrednjenja stohastičkog procesa

$$\overline{x} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt.$$

Stavimo $\varepsilon = T$. Slijedi: $\overline{x} = y(0)$ i zato

$$\boldsymbol{E}[|\overline{x}|^2] = \boldsymbol{E}[|y(0)|^2] = R_{yy}(0) = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right)R_{xx}(\tau)d\tau.$$

Primjer 12. Odredimo $H(u)$ za *LR* krug prikazan slikom.



Sl. 12.8.

Vrijedi

$$x(t) = L\frac{di}{dt} + y(t).$$

Kako je $y(t) = iR$, ova se jednadžba svodi na

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R}{L}y(t) = \frac{R}{L}x(t).$$

U donjem području, njezina je jednadžba

$$(iu)y^*(u) + \frac{R}{L}y^*(u) = \frac{R}{L}x^*(u),$$

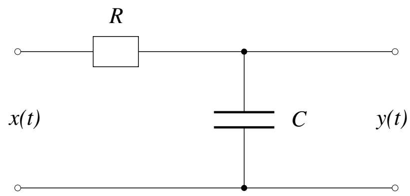
odakle slijedi

$$y^*(u) = \frac{1}{1 + \dfrac{iuL}{R}} \cdot x^*(u) = H(u) \cdot x^*(u).$$

Zato je, npr.

$$S_{yy}(u) = \frac{R^2}{R^2 + u^2L^2} \cdot S_{xx}(u).$$

Primjer 13. Transformacija bijelog šuma u RC krugu. Promotrimo strujni krug na slici **??** na koji je narinut napon u obliku bijelog šuma $X(t) = n_0(t)$.



Sl. 12.9. Djelovanje bijelog šuma na RC krug

Izlazni signal neka je napon na kondenzatoru $Y(t)$. Tada je

$$X(t) = RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau = RI(t) + Y(t).$$

Odavde je $I(t) = C\dfrac{dY}{dt}$ odakle slijedi

$$X(t) = RC\frac{dY}{dt} + Y(t)$$

odnosno

$$\frac{dY}{dt} + \alpha Y(t) = \alpha n_0(t)$$

gdje smo označili $\alpha = 1/RC$.

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe, pri početnom uvjetu $Y(0) = \eta_0$ je

$$Y(t) = \eta_0 e^{-\alpha t} + \alpha e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau} n_0(\tau)d\tau.$$

Pretpostavljamo da je početno stanje η_0 determinističko. Neznatno drukčija analiza bi se primjenjivala ako je to slučajna varijabla.

Odredimo stohastičke karakteristike procesa Y. Iz njegova oblika zaključujemo da je to gaussovski proces. Naime, konačna kombinacija gaussovskog procesa je opet gaussovski proces. Limes gaussovskih procesa je gaussovski proces. Zato je i integral gaussovskog procesa, kao limes konačne sume gaussovskih procesa opet gaussovski proces. Izračunajmo mu očekivanje:

$$m_Y(t) = \eta_0 e^{-\alpha t} + \alpha e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\boldsymbol{E}[n_0(\tau)]d\tau = \eta_0 e^{-\alpha t}.$$

Vidimo da se očekivanje napona na kondenzatoru ponaša baš kao da šuma i nema. Razlog tome je što je očekivanje šuma jednako nuli.

Odredimo sada korelacijsku funkciju centriranog procesa:

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1,t_2) &= \boldsymbol{E}[(Y(t_1)-m_Y(t_1))(Y(t_2)-m_Y(t_2))] \\ &= \frac{\alpha^2 N_0}{2} e^{-\alpha(t_1+t_2)} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{\alpha(\tau_1+\tau_2)} \delta(\tau_2-\tau_1) d\tau_1 \, d\tau_2. \end{aligned}$$

Podintegralna funkcija u dvostrukom integralu različita je od nule samo na dijagonali $t_1 = t_2$. Područje integracije je pravokutnik sa stranicama t_1 i t_2 i integracija će završiti u točki u kojoj dijagonala zasječe kraću stranicu pravokutnika. Neka je zato $t = \min(t_1, t_2)$. Pretpostavimo na tren da je $t_2 > t_1$ i stavimo $\tau = t_2 - t_1$. Onda je integral jednak:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{\alpha(\tau_1+\tau_2)} \delta(\tau_2-\tau_1) d\tau_1 \, d\tau_2 &= \int_0^t e^{\alpha\tau_1} d\tau_1 \int_0^t e^{\alpha\tau_2} \delta(\tau_2-\tau_1) d\tau_2 \\ &= \int_0^t e^{2a\tau_1} d\tau_1 = \frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha t}-1). \end{aligned}$$

Tako u ovom slučaju dobivamo

$$R_{YY}(t,t_2) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha(t+t_2)}(e^{2\alpha t}-1)$$

što se može napisati i ovako:

$$R_{YY}(t,t+\tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha\tau}(1-e^{-2\alpha t})$$

Sličnim računom, za $\tau < 0$ dobit ćemo analognu formulu, tako da općenito vrijedi

$$R_{YY}(t,t+\tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|}(1-e^{-2\alpha t}).$$

Odavde, za $\tau = 0$, možemo izračunati disperziju procesa $Y(t)$:

$$D[Y(t)] = \frac{\alpha N_0}{4}(1-e^{-2\alpha t}).$$

Kad $t \to \infty$, korelacijska funkcija teži ka

$$R_{YY}(\tau) = \lim_{t \infty \infty} \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|}(1-e^{-2\alpha t}) = De^{-\alpha|\tau|},$$

pri čemu je $D = \dfrac{\alpha N_0}{4} = \lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{D}[Y(t)]$.

Ovi limesi zapravo predstavljaju vremensko usrednjenje korelacijske funkcije i disperzije. Pripadna spektralna gustoća je

$$S_{YY}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau) e^{-iu\tau} d\tau = \frac{2\alpha D}{\alpha^2+u^2}.$$

Promotrimo diferencijalnu jednadžbu

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = x(t).$$

Preslikajmo ovu jednadžbu u donje područje. Koristeći svojstva Fourierove transformacije, dobivamo

$$a_n(iu)^n y^*(u) + \ldots + a_0 y^*(u) = x^*(u).$$

Odavde je

$$y^*(u) = \frac{1}{a_n(iu)^n + \ldots + a_1(iu) + a_0} x^*(u) = H(u)x^*(u).$$

Prema tome, rješenje ove jednadžbe možemo shvatiti kao izlaz iz sustava sa funkcijom sustava

$$H(u) = \frac{1}{a_n(iu)^n + \ldots + a_1(iu) + a_0}.$$

Primjer 14. Promotrimo jednadžbu

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \beta\frac{dy(t)}{dt} + u_0^2 y(t) = x(t)$$

gdje je $\beta > 0$ konstanta, a $x(t)$ bijeli šum sa spektrom α. Tad je spektar rješenja ovog sustava

$$S_{yy}(u) = \frac{S_{xx}(u)}{|(iu)^2 + \beta iu + u_0^2|^2} = \frac{\alpha}{(u^2 - u_0^2)^2 + \beta^2 u^2}.$$

Kakva je korelacijska funkcija $R(\tau)$? Njezin oblik ovisi o karakteristikama sklopa:

1. Ako je $\beta^2 < 4u_0^2$, tada stavimo $u_1 = \sqrt{u_0^2 - \beta^2/4}$ pa vrijedi

$$R_{yy}(\tau) = \frac{\alpha}{2\beta u_0^2} e^{-\beta|\tau|/2}\Big(\cos u_1\tau + \frac{\beta}{2u_1}\sin u_1|\tau|\Big).$$

2. Ako je $\beta^2 = 4u_0^2$, tada

$$R_{yy}(\tau) = \frac{\alpha}{2\beta u_0^2} e^{-\beta|\tau|/2}\Big(1 + \frac{\beta}{2|\tau|}\Big).$$

3. Ako je $\beta^2 > 4u_0^2$, tada stavimo $u_2 = \sqrt{\beta^2/4 - u_0^2}$ pa vrijedi

$$R_{yy}(\tau) = \frac{\alpha}{2\beta u_0^2} e^{-\beta|\tau|/2}\Big(\operatorname{ch} u_2\tau + \frac{\beta}{2u_2}\operatorname{sh} u_2|\tau|\Big).$$

13.

Procjene, prognoze i filtri

U ovom ćemo poglavlju rješavati problem procjenjivanja vrijednosti nekog stohastičkog procesa na osnovu poznatih vrijednosti nekog drugog procesa, koji je s njim na izvjestan način povezan. Označimo te procese s $s(t)$ (signal) i $x(t)$. Pretpostavljat ćemo da su nam poznati podaci o vrijednosti procesa x u nekim točkama $x(\xi)$, $\xi \in I$. I je skup vremenskih parametara, koji se može sastojati od npr. samo jedne ili dvije točke, od konačno mnogo točaka, ali možda i od svih točaka unutar nekog intervala. Proces x će se obično podudarati sa signalom s ili će biti prikazivan u obliku

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

gdje je n dodatni proces, najčešće šum, koji je obično nekoreliran s procesom s.

Znajući vrijednosti procesa x u točkama skupa I, pokušat ćemo odrediti vrijednosti neke slučajne varijable povezane s procesom s. Označimo s g tu varijablu. To može biti npr.

1. Vrijednost procesa u točki t: $g = s(t)$. Ovdje je obično $x(t) = s(t)$. Poznate su nam vrijednosti procesa s u nekim točkama. Recimo, ako je $I = \{a, b\}$, onda se problem određivanja procjene slučajne varijable $g = s(t)$, $a < t < b$ iz poznatih slučajnih varijabli $s(a)$ i $s(b)$ naziva **interpolacija**

2. Neka je ponovno tražena vrijednost $g = s(t)$, ali iz poznate vrijednosti procesa $x(t) = s(t) + n(t)$. Ovaj se problem naziva **filtracija**. Skup I može biti različite naravi, pa čak i čitava vremenska os.

3. Vrijednost procesa u nekoj budućoj točki $t+\lambda$: $g = t+\lambda)$. Ovde I može biti $I = \{t\}$, pa se na osnovu poznate sadašnje vrijednosti $s(t)$ pokušava procjeniti buduća vrijednost $s(t+\lambda)$. Ovaj se problem naziva **prognoza**. Dakako, I može biti i čitav interval $I = \langle -\infty, t]$.

4. Vrijednost derivacije ili integrala procesa $g = s'(t)$, $g = s'(t+\lambda)$ ili $g = \int_a^b s(t) g dt$, opet uz različite izbore skupa I.

13.1. Kriterij najbolje procjene

Točnu vrijednost procjene g najčešće nije moguće odrediti. Umjesto toga, mi se zadovoljavamo izvjesnom aproksimacijom $\hat{g}$. I ta aproksimacija može se zadavati iz zadanih podataka na različite načine. Mi ćemo se ograničiti na *linearnu ovisnost* procjene $\hat{g}$ o skupu poznatih podataka. Tako ćemo pisati

$$\hat{g} = L[x(\xi)]$$

gdje je L neki linearni operator definiran na skupu $\{x(\xi), \xi \in I\}$.

Na primjer, u problemu interpolacije želimo odrediti $g = s(t)$ iz poznatih vrijednosti $s(a)$ i $s(b)$. Rješenje ćemo tražiti u obliku

$$\hat{g} = \alpha s(a) + \beta s(b).$$

Problem se svodi na to da se odrede konstante α i β tako da dobivena slučajna varijabla $\hat{g}$ bude, u nekom smislu, najbliža slučajnoj varijabli $g = s(t)$.

Dakako da se najčešće naša procjena neće podudarati sa stvarnom vrijednošću slučajne varijable g, razlika $\hat{g} - g$ bit će različita od nule. Da bismo mogli nastaviti analizu, moramo precizirati na koji način ćemo mjeriti pogrešku procjene. Nekoliko je logičnih načina na koji se ta pogreška može određivati. Bilo bi razumno uzeti kao cilj procjene tražiti da vjerojatnost

$$\boldsymbol{P}(|\hat{g} - g| > \delta)$$

bude minimalna. Međutim, takvu je vrijednost u praksi nemoguće računati,

Pokazuje se da je za problem linearne aproksimacije najbolje uzeti sljedeću veličinu kao mjeru za pogrešku:

$$e = \boldsymbol{E}[|\hat{g} - g|^2].$$

U tom slučaju, kažemo da tražimo najbolju procjenu **u smislu sredine reda 2**.

Teorem 1. *Najbolja procjena $\hat{g} = L[x(\xi)]$ dobiva se ako je razlika $g - \hat{g}$ okomita na sve $x(\xi)$, $\xi \in I$:*

$$\boldsymbol{E}\{(g - L[x(\xi)])x(\xi_i)\} = 0, \qquad \xi_i \in I. \tag{13.1}$$

tad je minimalno srednjekvadratno odstupanje e_m dano s

$$e_m = \boldsymbol{E}\{(g - L[x(\xi)])g\}.$$

Dokaz. Neka je L_1 operator koji minimizira e. Tad je

$$g - L_1[x(\xi)] = g - L[x(\xi)] + L[x(\xi)] - L_1[x(\xi)] = g - L[x(\xi)] + L_2[x(\xi)].$$

Tu smo označili $L_2 = L - L_1$. Razlika dvaju linearnih operatora je opet linearni operator. Napišimo sada minimalnu pogrešku ovako:

$$e_m = \boldsymbol{E}\{(g - L_1[x(\xi)])^2\} = \boldsymbol{E}\{(g - L[x(\xi)] + L_2[x(\xi)])^2\}$$

Kako je razlika $g - L[x(\xi)]$ po pretpostavci okomita na podatke, ona mora biti okomita i na bilo koju linearnu kombinaciju od $x(\xi)$, zato

$$\boldsymbol{E}\{(g - L[x(\xi)])L_2[x(\xi)])\} = 0.$$

Kvadriranjem prethodnog izraza i uvažavajući ovu relaciju slijedi

$$e_m = \boldsymbol{E}\{(g - L[x(\xi)])^2\} + \boldsymbol{E}\{(L_2[x(\xi)])^2\}$$

Posljednji je član nenegativan. Zato mora biti jednak nuli, jer je e_m minimalna pogreška:

$$\boldsymbol{E}\{L_2[x(\xi)]^2\} = 0.$$

Odavde zaključujemo da je s vjerojatnošću 1 ispunjeno $L_2[x(\xi)] = 0$, odnosno $L = L_1$.

Kako je $g - L[x(\xi)]$ ortogonalna na linearnu kombinaciju $L[x(\xi)]$ podataka, vrijedi

$$\boldsymbol{E}\{(g - L[x(\xi)])^2\} = \boldsymbol{E}\{(g - L[x(\xi)])g\}.$$

***

Problem najbolje procjene može se povezati s apstraktnim problemom najbolje aproksimacije u unitarnom prostoru V. izdvojimo prostor svih kvadratno-integrabilnih slučajnih varijabli:

$$V = \{x : \Omega \to \mathbf{R} : \boldsymbol{E}[|x|^2] < \infty\}.$$

U ovom se prostoru može definirati skalarni produkt, formulom

$$(x \,|\, y) := \boldsymbol{E}[x \cdot y]$$

lako se provjerava da je ova funkcija uistinu skalarni produkt.

Ortogonalnost u ovom skalarnom produktu podudara se s pojmom ortogonalnih slučajnih varijabli:

$$(x \,|\, y) = 0 \iff \boldsymbol{E}[xy] = 0.$$

(Ako x i y imaju očekivanje 0, tad je ortogonalnost isto što i nekoreliranost.) Iz skalarnog se produkta izvode pojmovi norme i udaljenosti:

$$\|x\| = \sqrt{(x \,|\, x)} = \sqrt{\boldsymbol{E}[x \cdot x]} = \sqrt{\boldsymbol{E}[|x|^2]}.$$
$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\boldsymbol{E}[|x - y|^2]}.$$

Napomenimo još da se u slučaju slučajnih varijabli s vrijednostima u skupu kompleksnih brojeva skalarni produkt definira s

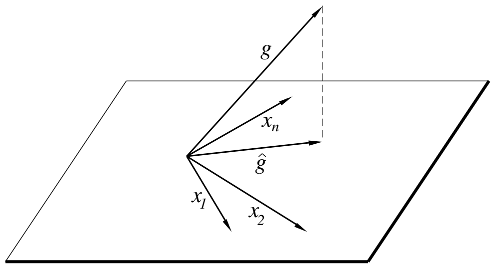
$$(x \,|\, y) = \boldsymbol{E}[x \cdot \overline{y}]$$

($\overline{y}$ označava kompleksno konjugiranje). U nastavku ćemo formule zapisivati za realne slučajne varijable. Međutim, istovjetni rezultati vrijede i u kompleksnom slučaju.

Neka su $s_1, \dots, s_n$ elementi prostora V, s očekivanjem $\boldsymbol{E}[x_i] = 0$, $i = 1, \dots, n$. Označimo s W potprostor razapet tim elementima — to je skup svih linearnih kombinacija

$$W = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\}.$$

Tražimo najbolju aproksimaciju vektora g prostora V, $\boldsymbol{E}[g] = 0$ unutar potprostora W. To će biti vektor $\hat{g}$ čija je udaljenost do g najmanja, a koji se može prikazati u obliku linearne kombinacije vektora $x_1, \dots, x_n$. Ta najbolja aproksimacija jest upravo ortogonalna projekcija vektora g na potprostor W.



Sl. 13.1. Najbolja aproksimacija $\hat{g}$ vektora g unutar potprostora W jest njegova ortogonalna projekcija na taj potprostor

Vektor $g-\hat{g}$ ortogonalan je na W, dakle on mora biti ortogonalan na svaki element x_i. Time dobivamo uvjete

$$(g - \hat{g}\,|\,x_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{13.2}$$

koji su samo drugi zapis uvjeta (**??**) koje mora zadovoljavati najbolja procjena.

Stavimo $\hat{g} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ u (**??**). Dobit ćemo

$$(g - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\,|\,x_i) = (g\,|\,x_i) - \sum_{j=1}^{n}(x_j\,|\,x_i) = 0.$$

Ovi se skalarni produkti mogu izraziti s pomoću elemenata korelacijske matrice:

$$(x_j\,|\,x_i) = \boldsymbol{E}[x_j \cdot \overline{x_i}) = R_{ji}.$$

Prema tome, nepoznate koeficijente α_j određivat ćemo iz linearnog sustava:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 R_{11} + \alpha_2 R_{21} + \ldots + \alpha_n R_{n1} = R_{01},\\
&\alpha_2 R_{12} + \alpha_2 R_{22} + \ldots + \alpha_n R_{n2} = R_{02},\\
&\vdots\\
&\alpha_1 R_{1n} + \alpha_2 R_{2n} + \ldots + \alpha_n R_{nn} = R_{0n},
\end{aligned}$$

* * *

Povećavanjem broja podataka, pogreška aproksimacije će se u principu smanjivati. Ta je pogreška dana izrazom

$$e = \boldsymbol{E}[(g - \hat{g})g]. \tag{13.3}$$

Međutim, zbog uvjeta ortogonalnosti vrijedi

$$0 = \boldsymbol{E}[(g - \hat{g})\hat{g}]. = \boldsymbol{E}[g\hat{g}] - \boldsymbol{E}[|\hat{g}|^2].$$

Zato je $\boldsymbol{E}[g\hat{g}] = \boldsymbol{E}[|\hat{g}|^2]$ i najmanja se pogreška može napisati ovako:

$$e = \boldsymbol{E}[|g|^2] - \boldsymbol{E}[|\hat{g}|^2] = \|g\|^2 - \|\hat{g}\|^2.$$

(što je jasno sa slike **??**, po Pitagorinu poučku!). Iz (**??**) za najmanju pogrešku dobivamo vrijednost

$$e = R_{00} - \alpha_1 R_{01} - \ldots - \alpha_n R_{0n}.$$

Ova je pogreška uvijek pozitivna, iako to iz ovog zapisa nije vidljivo. Jednako tako nije vidljivo da se povećavanjem broja podataka pogreška načelno smanjuje, jer se povećava norma $\|\hat{g}\|$. Jedina se iznimka događa kad je razlika $g-\hat{g}$ (koja predstavlja pogrešku aproksimacije) okomita na nove podatke, pa se njihovim dodavanjem ta pogreška neće smanjiti. To se događa onda kad su novi podaci *linearno zavisni* s već postojećim.

* * *

Pogledajmo nekoliko tipičnih primjera.

Primjer 1. Prognoza) Poznata je vrijednost procesa $s(t)$ u trenutku t. Želimo procjeniti vrijednost procesa u nekom budućem trenutku $s(t+\lambda)$.

Ovdje je $x(t)=s(t)$, $g=s(t+\lambda)$ a tražena procjena $\hat{g}$ ima oblik

$$\lambda = \alpha s(t).$$

Po uvjetima (**??**) nepoznata konstanta α mora se odrediti tako da pogreška bude okomita na podatke:

$$\boldsymbol{E}[(g-\hat{g})s(t)] = \boldsymbol{E}[(s(t+\lambda)-\alpha s(t))s(t)] = 0.$$

Odavde slijedi

$$R(\lambda)-\alpha R(0)=0$$

te je optimalna vrijednost parametra $\alpha = \dfrac{R(0)}{R(\lambda)}$. Primjetimo da je $|\alpha| \leqslant 1$.

Primjer 2. (Filtracija) Poznata je vrijednost procesa $x(t)$, želimo procjeniti vrijednost drugog procesa $s(t)$. Sada je $\hat{g}=\alpha x(t)$ i uvjet ortogonalnosti daje

$$\boldsymbol{E}[(s(t)-\alpha x(t))x(t)] = 0$$

odnosno

$$R_{sx}(0)-\alpha R_{xx}(0)=0 \implies \alpha = \frac{R_{sx}(0)}{R_{xx}(0)}.$$

Odredimo pogrešku. Minimalna je pogreška

$$e = \boldsymbol{E}\{[s(t)-\alpha x(t)]s(t)\} = R_{ss}(0)-\alpha R_{sx}(0) = R_{ss}(0)-\frac{R_{sx}(0)^2}{R_{xx}(0)}.$$

Proces x najčešće je u ovakvim situacijama zbroj signala i šuma:

$$x(t)=s(t)+n(t).$$

Prirodno je pretpostaviti da su signal i šum nekorelirani. Tada je

$$R_{sx}(\tau)=R_{ss}(\tau), \qquad R_{xx}(\tau)=R_{ss}(\tau)+R_{nn}(\tau).$$

Dakle,

$$\alpha = \frac{R_{ss}(0)}{R_{ss}(0)+R_{nn}(0)}, \qquad \varepsilon = \frac{R_{ss}(0)R_{nn}(0)}{R_{ss}(0)+R_{nn}(0)}.$$

Primjer 3. (Interpolacija) Procijenimo $s(t)$ iz poznatih vrijednosti $s(0)$ i $s(T)$.

$$g = s(t) \sim \hat{g} = \alpha s(0) + \beta s(T).$$

Iz uvjeta ortogonalnosti pogreške na podatke pišemo

$$\boldsymbol{E}\{[s(t) - \alpha s(0) - \beta s(T)]s(0)\} = 0,$$
$$\boldsymbol{E}\{[s(t) - \alpha s(0) - \beta s(T)]s(T)\} = 0.$$

Odavde

$$R(t) = \alpha R(0) + \beta R(T),$$
$$R(T-t) = \alpha R(T) + \beta R(0).$$

Ovaj se sustav uvijek može razriješiti po α i β. Determinanta sustava je $R(0)^2 - R(T)^2$, pozitivna osim u vrlo posebnim slučajevima kad je korelacijska funkcija periodička a T je upravo njezin period. (Korelacijska funkcija može imati u točki $T \neq 0$ vrijednost jednaku $R(0)$ samo ako je periodička.)

Posebice, za $t = T/2$ rješenje je sustava

$$a = b = \frac{R(T/2)}{R(0) + R(T)}.$$

Primjer 4. Procijenimo $s(t+\lambda)$ iz poznatih vrijednosti $s(t)$ i $s'(t)$.

Sad je $\hat{g} = \alpha s(t) + \beta s'(t)$. Iz uvjeta (**??**)

$$\boldsymbol{E}\{[s(t+\lambda) - \alpha s(t) - \beta s'(t)]s(t)\} = 0,$$
$$\boldsymbol{E}\{[s(t+\lambda) - \alpha s(t) - \beta s'(t)]s'(t)\} = 0.$$

Odavde:

$$R_{ss}(\lambda) - \alpha R_{ss}(0) - \beta R_{s's}(0) = 0,$$
$$R_{ss'}(\lambda) - \alpha R_{ss'}(0) - \beta R_{s's'}(0) = 0.$$

Iskoristimo sad svojstva korelacijske funkcije derivacije s' procesa s. Najprije, da bi proces s' bio definiran, korelacijska funkcija R_{ss} mora biti derivabilna u nuli. Međutim, ta je funkcija parna. Zato, njezina derivacija u nuli mora biti jednaka nuli: $R'ss(0) = 0$. Nadalje, vrijedi

$$R_{s's}(\tau) = R'_{ss}(\tau), \quad R_{ss'}(\tau) = -R'_{ss}(\tau), \quad R_{s's'}(\tau) = -R''_{ss}(\tau).$$

Zato je $R_{s's}(0) = R_{ss'}(0) = 0$ i iz gornjih relacija dobivamo

$$\alpha = \frac{R(\lambda)}{R(0)}, \qquad \beta = \frac{R'(\lambda)}{R''(0)}.$$

Najbolja je procjena

$$\hat{g} = \frac{R(\lambda)}{R(0)}s(t) + \frac{R'(\lambda)}{R''(0)}s'(t).$$

Ova je formula poboljšanje determinističke procjene:

$$s(t+\lambda) \approx s(t) + \lambda s'(t).$$

Za malene vrijednosti parametra λ vrijede ocjene

$$R(\lambda) = R(0) + \tfrac{1}{2}R''(0)\lambda^2 + \ldots \approx R(0),$$
$$R'(\lambda) = R''(0)\lambda + \tfrac{1}{2}R'''(0)\lambda^2 \ldots \approx R''(0)\lambda$$

pa iz stohastičke procjene dobivamo determinističku.

Primjer 5. Iz poznatih vrijednosti $s(0)$ i $s(T)$ procesa na krajevima intervala $[0,T]$ treba procijeniti vrijednost integrala $g = \int_0^T s(t)dt$.

Stavljajući $\hat{g} = \alpha s(0) + \beta s(T)$, iz relacija ortogonalnosti s podacima dobivamo sljedeće uvjete

$$\int_0^T R(t)dt = \alpha R(0) + \beta R(T),$$
$$\int_0^T R(T-t)dt = \alpha R(T) + \beta R(0).$$

Oba se integrala podudaraju, pa dobivamo

$$\alpha = \beta = \frac{\displaystyle\int_0^T R(t)dt}{R(0)+R(T)}.$$

Primjer 6. Važni je primjer aproksimacija računanje vrijednosti derivacije zadane funkcije. Približna vrijednost derivacije računa se formulom

$$f'(t) \approx \frac{f(t) - f(t-\lambda)}{\lambda}$$

u kojoj se nastoji λ učiniti što je moguće manjim.

Pretpostavimo da nam je zadatak odrediti vrijednost derivacije s' procesa s, ali iz podataka ne o tom već o procesu

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

koji uz signal s sadrži i šum n. Čak i kad je šuma malen po apsolutnom iznosu *brzina promjene* je dominantna u vrijednostima derivacije. Stoga se može dogoditi da je promjena procesa x uzrokovana u prvom redu utjecajem šuma, a ne samoga signala (šum i jeste okarakteriziran time da zbog malene autokorelacije ima vrlo velike promjene u kratkom vremenskom intervalu, što za signal ne mora biti slučaj.) Stoga u računanju procjene derivacije nije najbolja strategija uzeti što je moguće manji λ, već je bolja strategija iskoristiti informacije o promjeni procesa koje su dane kroz korelacijsku funkciju i na taj način odrediti optimalni parametar λ.

Neka je $g = s'(t) \approx \hat{g} = \alpha x(t) + \beta x(t-\lambda)$. Uvjeti ortogonalnosti su:

$$\boldsymbol{E}\{[s'(t) - \alpha x(t) - \beta x(t-\lambda)]x(t)\} = 0,$$
$$\boldsymbol{E}\{[s'(t) - \alpha x(t) - \beta x(t-\lambda)]x(t-\lambda)\} = 0$$

odakle slijedi

$$R_{s'x}(0) = \alpha R_{xx}(0) + \beta R_{xx}(\lambda),$$
$$R_{s'x}(\lambda) = \alpha R_{xx}(\lambda) + \beta R_{xx}(0).$$

Rješavanjem ovog sustava odredit ćemo α i β. Time problem najbolje procjene nije zgotovljen. Interesantno je odrediti uz koji λ će pogreška procjene biti najmanja. Pretpostavimo da su signal i šum međusobno ortogonalni (što je obično ispunjeno). Onda je

$$R_{s'x}(0) = R_{s's}(0) = R'_{ss}(0) = 0,$$
$$R_{xx}(\lambda) = R_{ss}(\lambda) + R_{nn}(\lambda).$$

Pogreška procjene iznosi

$$e = \boldsymbol{E}\{[s'(t) - \alpha x(t) - \beta x(t-\lambda)]s'(t)\} = -R''_{ss}(0) - \beta R'_{ss}(\lambda)$$

(jer je $R_{s's'}(\tau) = -R''_{ss}(\tau)$, $R_{s's}(\tau) = R'_{ss}(\tau)$). Ova pogreška ovisi o λ. Izabrat ćemo onaj λ za koji je pogreška minimalna.

Primjer 7. **(Rekonstrukcija procesa)** Može li se proces rekonstruirati ako mu poznajemo vrijednost u točkama čije su koordinate ekvidistantne?

Slično pitanje za determinističku funkciju f ima pozitivan odgovor, uz pretpostavku da je funkcija *ograničenog spektra*. Ako je $\hat{f}(u) = 0$ za $|u| > u_0$, tad vrijedi sljedeća formula

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin(u_0\tau - n\pi)}{u_0\tau - n\pi}. \tag{13.4}$$

Ovdje je $T = \pi/u_0$. Ponekad je praktičnije koristiti sljedeću njezinu verziju:

$$f(\tau - a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT - a)\frac{\sin(u_0\tau - n\pi)}{u_0\tau - n\pi}. \tag{13.5}$$

Pretpostavimo sada je su nam poznate vrijednosti procesa s u točkama

$$s(nT), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

a želimo procjeniti njegovu vrijednost u nekoj točki t. nastojat ćemo dobiti procjenu koja vrijedi za bilo koji t, stoga ćemo procjenu i koeficijente pisati kao funkcije varijable t:

$$s(t) \sim \hat{g}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(t)s(nT)$$

Uvjeti ortogonalnosti su

$$\boldsymbol{E}\Big\{\Big[s(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(t)s(nT)\Big]s(kT)\Big\} = 0, \qquad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Odavde dobivamo relacije

$$R(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(t)R(nT - kT), \qquad \forall k \tag{13.6}$$

koje moraju zadovoljavati koeficijenti $\alpha_n(t)$. Ovaj je sustav beskonačno mnogo jednakosti praktički nemoguće razriješiti, međutim, njegovo je rješenje vrlo jednostavno u slučaju ako je spektralna gustoća procesa koncentrirana na konačnom intervalu:

$$S(u) = 0 \quad \text{za} \quad |u| > u_0, \quad u_0 = \frac{\pi}{T}.$$

Stavimo li tad

$$a_n(t) = \frac{\sin u_0(t - nT)}{u_0(t - nT)}$$

onda (**??**) prelazi u istinitu jednakost

$$R(\tau - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nT - kT) \frac{\sin(u_0\tau - n\pi)}{u_0\tau - n\pi}.$$

Pogreška procjene iznosi

$$\begin{aligned} e &= \boldsymbol{E}\Big\{\Big[s(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(t)s(nT)\Big]s(t)\Big\} \\ &= R(0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(t)R(t-nT) \end{aligned}$$

Međutim, desna je strana jednaka nuli, u što se možemo uvjeriti ako u (**??**) stavimo $\tau = a = t$. Dakle, vrijedi $e = 0$ i

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \frac{\sin u_0(t-nT)}{u_0(t-nT)}.$$

(Jednakost vrijedi u smislu sredine reda 2, što znači da red s desne strane konvergira prema $s(t)$ u smislu sredine reda 2.)

13.2. Wienerov filtar

U svim prethodnim primjerima bila je poznata vrijednost procesa u konačno ili najviše prebrojivo mnogo točaka. Sad ćemo promatrati problem u kojem se pojavljuju, kao i prije, dva procesa: signal s (koji nam je nepoznat) te s njim povezan proces x čije su nam vrijednosti poznate na nekom intervalu $\langle a, b \rangle$. Procjenu g tražit ćemo i dalje u obliku linearne kombinacije podataka $x(\xi)$, $a \leqslant \xi \leqslant b$. No, ta je linearna kombinacaja sada predstavljena integralom:

$$\hat{g}(t) = \int_a^b h(t,\xi)x(\xi)d\xi$$

(Pišemo $\hat{g}(t)$ radđe nego $\hat{g}$, jer će ta slučajna varijabla uistinu ovisiti o trenutku t. Najčešće će biti $g(t) = s(t)$ ili $g(t) = x(t+\lambda)$.) Ovaj se integral može shvatiti kao limes integralne sume:

$$\hat{g}(t) = \lim_{\Delta\xi \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(t,\xi)x(\xi)\Delta\xi$$

koja ima oblik linearne kombinacije kakve smo već razmatrali, s koeficijentima $h(\cdot\,,\xi)\Delta\xi$. Tako funkciju h možemo nazvati **težinskom funkcijom**. Svojstvo ortogonalnosti optimalne procjene mora se sačuvati, jer vrijedi za svaku konačnu aproksimaciju integrala integralnom sumom. Zato rješenje zadovoljava uvjet

$$\boldsymbol{E}\{[g(t) - \int_a^b x(\alpha)h(t,\alpha)d\alpha]x(\xi)\} = 0, \qquad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

Vrijedi

$$\boldsymbol{E}[g(t)x(\xi)] = R_{gx}(t-\xi), \qquad \boldsymbol{E}[x(\alpha)x(\xi)] = R_{xx}(\alpha - \xi).$$

Tako dobivamo

$$R_{gx}(t-\xi) = \int_a^b R_{xx}(\alpha-\xi)h(t,\alpha)d\alpha, \qquad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

Tako se problem svodi na određivanje nepoznate težinske funkcije h koja zadovoljava ove jednakosti.

Napišimo još kolika je pogreška procjene:

$$\begin{aligned} e &= \boldsymbol{E}\{[g(t) - \int_a^b x(\alpha)h(t,\alpha)d\alpha]g(t)\} \\ &= R_{qq}(0) - \int_a^b R_{gx}(t-\alpha)h(t,\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$

13.3. Problem filtracije

Promotrimo problem određivanja vrijednosti signala s, ako su nam poznate realizacije procesa

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

za svaki realni t. Proces n zvat ćemo šumom. Dakle, sada je $g(t) = s(t)$. nadalje, pretpostavljat ćemo da su s i x stacionarni procesi, zbog čega će funkcija $h(t,\xi)$ ovisiti samo o razlici $t-\xi$:

$$s(t) \approx \hat{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\xi)x(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha.$$

Primjećujemo da procjenu $\hat{g}(t)$ možemo shvatiti kao izlaz iz linearnog vremenski invarijantnog sustava s impulsnim odzivom $h(t)$. Da odredimo tu funkciju, koristit ćemo uvjete ortogonalnosti

$$\boldsymbol{E}\{[s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha]x(\xi)\} = 0, \qquad \forall\xi.$$

Odavde

$$R_{sx}(t-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t-\alpha-\xi)h(\alpha)d\alpha, \qquad \forall\xi.$$

Zamijenimo varijablu: $\tau = t-\xi$:

$$R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha, \qquad \forall\tau.$$

Riješimo ovu integralnu jednadžbu. Kako je to jednadžba konvolucijkog tipa, njezino je rješenje vrlo jednostavno. U donjem području, jednadžba glasi:

$$S_{sx}(u) = S_{xx}(u)H(u)$$

odakle slijedi

$$H(u) = \frac{S_{sx}(u)}{S_{xx}(u)}.$$

Original ove funkcije je traženi impulsni odziv. napomenimo da on ne mora zadovoljavati svojstvo uzročnosti, moguće je da bude $h(t) \neq 0$ za $t < 0$. To znači da se idealni filtar možda ne može fizički realizirati.

* * *

Iskažimo pogrešku procjene. Vrijedi

$$\begin{aligned} e &= \boldsymbol{E}\Big\{\Big[s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha\Big]s(t)\Big\} \\ &= R_{ss}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} R_{sx}(\alpha)h(\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$

Označimo

$$\varepsilon(\tau) = R_{ss}(\tau) - R_{sx}(-\tau) * h(\tau).$$

Tad vrijedi $e = \varepsilon(0)$. Transformat od $\varepsilon(\tau)$ glasi

$$S_{ss}(u) - S_{sx}(-u)H(u) = S_{ss}(u) - \frac{S_{sx}(-u)S_{sx}(u)}{S_{xx}(u)}.$$

Računajući inverznu transformaciju, dobivamo

$$e = \varepsilon(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[S_{ss}(u) - \frac{S_{sx}(u)S_{sx}(-u)}{S_{xx}(u)}\Big]du.$$

13.4. Prognoza i filtracija

Sličnim načinom može se odrediti procjena za buduću vrijednost filtriranog procesa:

$$g(t) = s(t+\lambda) \approx \hat{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha.$$

Pokazuje se da funkcija h zadovoljava integralnu jednadžbu

$$R_{sx}(\tau+\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha, \qquad \forall\tau$$

odakle slijedi

$$H(u) = \frac{S_{sx}(u)e^{iu\tau}}{S_{xx}(u)}.$$

* * *

Pretpostavimo sada da su signal $s(t)$ i šum $n(t)$ nekorelirani (pa onda i ortogonalni jer im je očekivanje nula):

$$S_{sn} = 0.$$

Tada je

$$S_{xx}(u) = S_{ss}(u) + S_{nn}(u), \qquad S_{sx}(u) = S_{ss}(u).$$

Zato je

$$H(u) = \frac{S_{ss}(u)}{S_{ss}(u) + S_{nn}(u)}. \tag{13.7}$$

Pogreška je dana s

$$e = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{ss}(u)S_{nn}(u)}{S_{ss}(u) + S_{nn}(u)}du.$$

Primjećujemo da je ta pogreška jednaka nuli ako je

$$S_{ss}(u)S_{nn}(u) = 0,$$

tj. ako se spektar signala i šuma ne presjecaju. U tom je slučaju idealna funkcija prijenosa

$$H(u) = \begin{cases} 1, \text{ za one } u \text{ za koje je } S_{ss}(u) \neq 0, \\ 0, \text{ za one } u \text{ za koje je } S_{nn}(u) \neq 0, \\ \text{bilo što, za ostale } u. \end{cases}$$

Primjer 8. Neka je autokorelacijska funkcija signala

$$R_{ss}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\cos u_0\tau$$

a spektar šuma

$$S_{nn}(u) = N$$

(bijeli šum). Želimo odrediti impulsni odziv za optimalnu filtraciju. Pretpostavimo da je $\alpha << u_0$. tada je

$$S_{ss}(u) = \frac{A\alpha}{\alpha^2 + (u - u_0)^2}, \qquad \text{za } u > 0.$$

Zato je, po (**??**)

$$H(u) = \frac{A\alpha}{A\alpha + N\alpha^2 + N(u - u_0)^2}, \qquad u > 0.$$

Pogreška procjene je

$$e = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\alpha N\,du}{A\alpha + N\alpha^2 + N(u - u_0)^2} = \frac{A}{\sqrt{1 + A/N\alpha}}$$

Bez ikakvih podataka, procjena procersa s bi bila $s(t) = 0$ (njegovo očekivanje), a učinjena pogreška

$$\boldsymbol{E}[s^2(t)] = R_{ss}(0) = A.$$

Prema tome, ako je $N\alpha >> A$, tada postupak filtriranuja ne poboljšava procjenu. Ako je pak $A = 3N\alpha$, onda je $e = R_{ss}(0)/2$.

Primjer 9. Pokažimo sad kako se može odrediti procjena za derivaciju s' procesa iz poznatih podataka $x(t) = s(t) + n(t)$ za svaki realni t.

$$g(t) = s'(t) \approx \hat{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \alpha)h(\alpha)d\alpha.$$

Iz uvjeta ortogonlnosti

$$\boldsymbol{E}\Big\{\Big[s'(t) - \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \alpha)h(\alpha)d\alpha\Big]x(\xi)\Big\} = 0, \qquad \forall\xi$$

slijedi

$$R_{s'x}(t - \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t - \alpha - \xi)h(\alpha)d\alpha, \qquad \forall\xi$$

odnosno

$$R_{s'x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha, \qquad \forall\tau.$$

Znamo da je transformat funkcije $R_{s'x}(\tau)$ jednak $iuS_{sx}(u)$. Zato prijenosna funkcija mora imati oblik

$$H(u) = \frac{iuS_{sx}(u)}{S_{xx}(u)}.$$

13.5. Prognoza

Promotrimo sada problem predskazivanja vrijednosti procesa $s(t+\lambda)$ u nekom budućem trenutku $t+\lambda$, ako nam je poznata prošlost tog procesa, dakle njegove vrijednosti na intervalu $\langle -\infty, t]$. Dakle, sad je $g(t) = x(t+\lambda)$, $x(t) = s(t)$. Kako su u procjeni sadržani samo podaci iz prošlosti i sadašnjojsti, rezultirajući linearni sustav bit će uzročno-posljedični, tj. funkcija impulsnog odziva h zadovoljavat će uvjet

$$h(t) = 0, \qquad \text{za } t < 0.$$

Prema tome, trebamo odrediti funkciju h takvu da bude

$$s(t+\lambda) \approx \int_0^{\infty} s(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{t} s(\beta)h(t-\beta)d\beta.$$

Uvjeti optimalnosti su

$$\boldsymbol{E}\Big\{\Big[s(t+\lambda) - \int_0^{\infty} s(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha\Big]s(\xi)\Big\} = 0, \qquad \text{za } \xi \leqslant t.$$

Odavde slijedi

$$R(t+\lambda-\xi) = \int_0^{\infty} R(t-\alpha-\xi)h(\alpha)d\alpha, \qquad \xi < t,$$

gdje je R autokorelacijska funkcija signala za koju pretpostavljamo da je ograničena. Stavimo $t-\xi = \tau$. Dobivamo

$$R(\tau+\lambda) = \int_0^{\infty} R(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha, \qquad \tau \geqslant 0.$$

Ove jednadžbe nazivaju se **Wiener-Hopfove** integralne jednadžbe.

Pogreška procjene je

$$\begin{aligned} e &= \boldsymbol{E}\Big\{\Big[s(t+\lambda) - \int_0^{\infty} s(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha\Big]s(t+\lambda)\Big\} \\ &= R(0) - \int_0^{\infty} R(-\lambda-\alpha)h(\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$