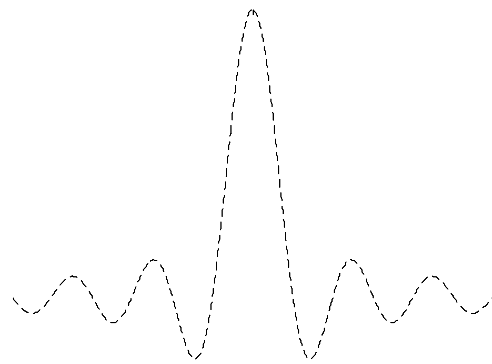


...11010100110101101111101111011101100111010101011011110010111110111101001...

Priručnik s rješenjima zadataka iz knjige

Uvod u teoriju informacije i kodiranje

Alen Bažant

Željko Ilić

Zdravko Marijić

Zagreb, 2010.

Sadržaj:

1. Osnovni pojmovi teorije informacije

***Zadatak-1*:** Na ulazu binarnog simetričnog kanala pojavljuju se dva simbola X={0, 1} s vjerojatnostima pojavljivanja {0.5, 0.5}. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je

$$\left[p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix},$$

gdje je ε vjerojatnosti pogrešnog prijenosa.

a) Odredite entropiju ulaznog skupa simbola, tj. $H(X)$.

b) Odredite entropiju izlaznog skupa simbola, tj. $H(Y)$.

c) Odredite združenu entropiju $H(X,Y)$.

d) Odredite srednji uzajamni sadržaj informacije (transinfromacija) između ulaznog i izlaznog skupa simbola, tj. $I(X;Y)$.

e) Za koje vrijednosti varijable ε je transinformacija maksimalna?

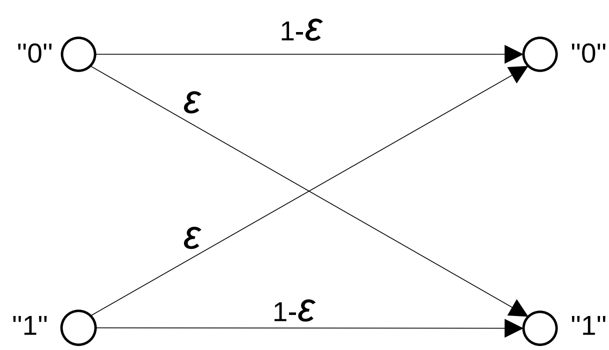
f) Za koju vrijednost varijable ε je kapacitet danog kanala minimalan?

Rješenje:

Uz pomoć matrice uvjetnih vjerojatnosti prijelaza

$$\left[p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

možemo skicirati kanal:



a) Imamo zadane vrijednosti ulaznih simbola $p_0 = p(0) = 1/2$ i $p_1 = p(1) = 1/2$ te možemo izračunati entropiju ulaznog skupa simbola:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i) = 1\text{bit/simbol}$$

b) Poznavanjem vjerojatnosti pojavljivanja ulaznih simbola i matrice uvjetnih vjerojatnosti prijelaza moguće je dobiti matricu združenih vjerojatnosti, a iz nje (zbrajanjem po stupcima) vjerojatnosti pojavljivanja izlaznih simobla,a time i entropiju izlaznog skupa simoba $H(Y)$.

$$\left[p(x_i, y_i)\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\varepsilon) & \frac{1}{2}\varepsilon \\ \frac{1}{2}\varepsilon & \frac{1}{2}(1-\varepsilon) \end{bmatrix} \Rightarrow p(y=0) = 1/2,\, p(y=1) = 1/2$$

$$\Rightarrow H(Y) = 1 \text{bit/simbol}$$

c) Združena entropija $H(X, Y)$ jednaka je

$$H(X,Y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_i)\log_2 p(x_i, y_i)$$
$$= -1(1-\varepsilon)\log_2\left[\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\right] - \varepsilon\log_2(\frac{1}{2}\varepsilon)$$
$$= \cdots = 1 - \varepsilon\log_2\varepsilon - (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon).$$

d) $I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 1 + \varepsilon\log_2\varepsilon + (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon).$

e) Transinformacija je maksimalna za slučajeve $\left.\begin{matrix}\varepsilon = 0 \\ \varepsilon = 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow I(X;Y) = 1\text{bit/simbol}.$

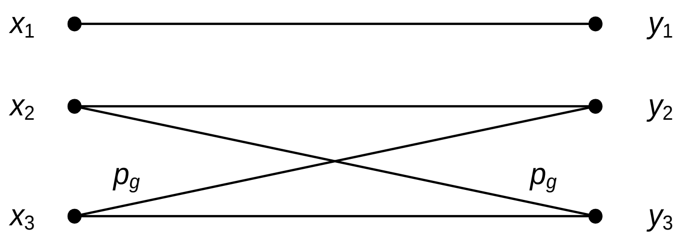
f) Kapacitet je maksimum transinformacije $(C = \max\limits_{p(x_i)} I(X;Y))$

U d) dijelu azadatka izračunali smo $I(X;Y)$, pa znamo da je kapacitet C jednak:

$$C(\varepsilon) = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = 1 + \varepsilon\log_2\varepsilon + (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon).$$

Deriviranjem prethodnog izraza po varijabli ε dobivamo da je kapacitet C minimalan za $\varepsilon = 1/2$ i iznosi $C_{\min} = 0$.

***Zadatak-2*:** Diskretni komunikacijski kanal predočen je na slici (Slika 1.1):



Slika 1.1

Vjerojatnosti pojavljivanja simbola x_i definirane su kao $p(x_i) = p_i$. Koji uvjet mora biti ispunjen (uz $\sum_i p(x_i) = 1$) tako da vrijedi: $H(X) = H(Y)$? **Napomena:** p_g = konst. $\neq 0$!

Rješenje:

Iz slike kanala možemo dobiti matricu vjerojatnosti prijelaza kanala, a zatim i matricu združenih vjerojatnosti:

$$\left[p(y_i \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_g & p_g \\ 0 & p_g & 1-p_g \end{bmatrix}; \quad \left[p(x_i, y_i)\right] = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2(1-p_g) & p_2 p_g \\ 0 & p_3 p_g & p_3(1-p_g) \end{bmatrix}$$

Iz matrice združenih vjerojatnosti slijedi:

$$\left[p(y_j)\right] = \left[p_1 \quad p_2 + p_g(p_3 - p_2) \quad p_3 + p_g(p_2 - p_3)\right]$$

Iz uvjeta zadatka, $H(X) = H(Y)$, dobivamo:

$$p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + p_3 \log_2 p_3 = p_1 \log_2 p_1 + (p_2 + p_g(p_3 - p_2))\log_2(p_2 + p_g(p_3 - p_2)) +$$
$$+ (p_3 + p_g(p_2 - p_3))\log_2(p_3 + p_g(p_2 - p_3))$$

te je:

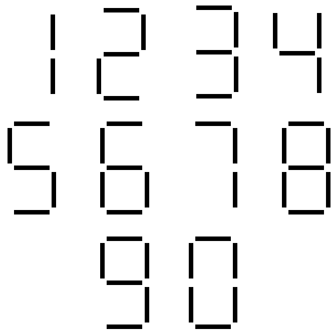
$$\begin{aligned} p_2 &= p_2 + p_g(p_3 - p_2) \\ p_2 &= p_3 \\ &\text{ili} \\ p_2 &= p_3 + p_g(p_2 - p_3) \\ p_2(1-p_g) &= p_3(1-p_g) \\ p_2 &= p_3 \end{aligned} \qquad \text{Isto se dobije iz:} \qquad \begin{aligned} p_3 &= p_3 + p_g(p_3 - p_2) \\ p_2 &= p_3 \\ &\text{ili} \\ p_3 &= p_2 + p_g(p_3 - p_2) \\ p_3(1-p_g) &= p_2(1-p_g) \\ p_2 &= p_3 \end{aligned}$$

Dakle, da bi za dani kanal vrijedilo $H(X) = H(Y)$, mora biti $p_2 = p_3$.

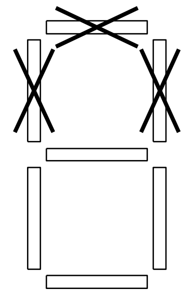
Zadatak-3**:** Digitalni sklop za prikaz simbola (7-segmentni indikator) prikazuje simbole u formatu kao na slici (Slika 1.2). Svi simboli (0 - 9) pojavljuju se na indikatoru sklopa s jednakom vjerojatnošću pojavljivanja. Zbog kvara na uređaju otkazale su gornje tri oznake (Slika 1.3).

a) Izračunajte prosječnu entropiju po jednom prikazu na 7-segmentnom indikatoru prije kvara.

b) Izračunajte prosječnu entropiju po jednom prikazu na 7-segmentnom indikatoru nakon kvara.



Slika 1.2

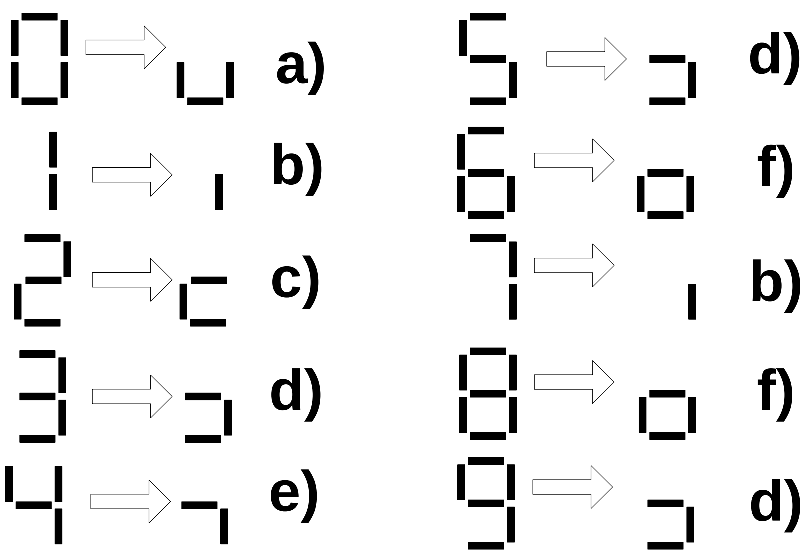


Slika 1.3

Rješenje:

a) $H(Y) = \log_2 10 = 3{,}3219\,\text{bit/simbol}.$

b) Nakon kvara 7-segmentnog indikatora, početni simboli prelaze u (novi simboli su označeni slovima od "a" do "f"):



Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza kanala je:

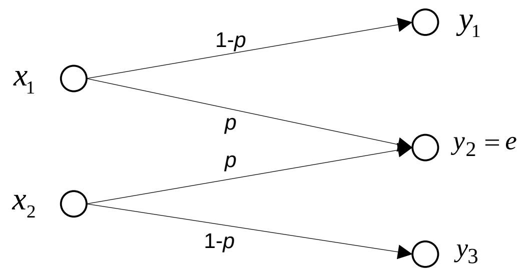
$$\left[p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\left[p(y_j)\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

Entropija jednog prikaza na pokazniku nakon kvara je:

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{6} p(y_j)\log_2(y_j) = 2{,}4464\,\text{bit/simbol.}$$

***Zadatak-4*:** Odredite kapacitet binarnog kanala s brisanjem simbola predočenog na slici (Slika 1.4). Također, $p(x_1) = \alpha$ i $p(x_2) = 1-\alpha$.



Slika 1.4

Rješenje:

Kapacitet C je: $C = \max\limits_{\{p(x_i)\}} I(X;Y)$; $\quad I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$

Iz slike možemo dobiti matricu uvjetnih vjerojatnosti prijelaza i matricu združenih vjerojatnosti:

$$\left[p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix};$$

$$\left[p(x_i, y_j)\right] = \left[p(x_i)p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} \alpha(1-p) & \alpha p & 0 \\ 0 & (1-\alpha)p & (1-\alpha)(1-p) \end{bmatrix};$$

$$\left[p(y_j)\right] = \left[\alpha(1-p) \quad p \quad (1-\alpha)(1-p)\right].$$

Pomoću ovih matrica možemo dobiti entropiju izlaznog skupa, entropiju šuma i transinformaciju:

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\sum_{j=1}^{3} p(y_j) \cdot \log_2 p(y_j) \\ &= -\alpha(1-p)\log_2\left[\alpha(1-p)\right] - p\log_2 p - (1-\alpha)(1-p)\log_2\left[(1-\alpha)(1-p)\right] \\ &= (1-p)\left[-\alpha\log_2\alpha - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)\right] - p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y \mid X) &= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j)\log_2 p(y_j \mid x_i) = \\ &= -\alpha(1-p)\log_2\left[(1-p)\right] - \alpha p \cdot \log_2 p - (1-\alpha)p \cdot \log_2 p - (1-\alpha)(1-p)\log_2\left[(1-p)\right] \\ &= -p \cdot \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y \mid X) = (1-p)\left[-\alpha\log_2\alpha - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)\right] \\ &= (1-p)H(X) \end{aligned}$$

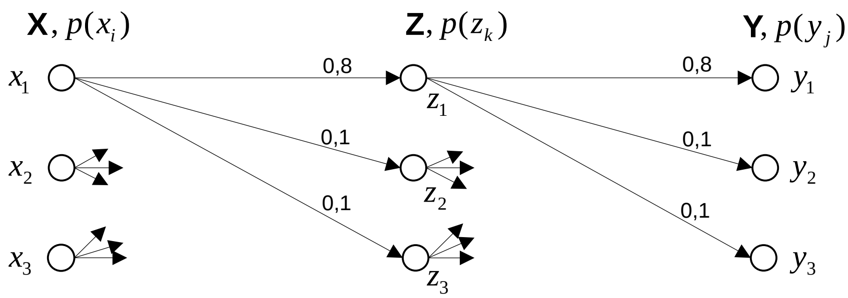
$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}} (1-p)H(X) = (1-p)\max_{\{p(x_i)\}} H(X)$$

Entropija izvorišta je maksimalna ako je $p(x_1) = p(x_2) = \cdots = p(x_n)$ za $i = 1, \cdots, n$ i iznosi $H(X) = \log_2 n$.
$\Rightarrow \max\limits_{\{p(x_i)\}} H(X) = 1$ bit/simbol $\Rightarrow C = 1-p$ bit/simbol.

***Zadatak-5*:** Tri simbola jednakih vjerojatnosti pojavljivanja prenose se preko dva serijski vezana kanala u kojima je vjerojatnost ispravnog prijenosa 0.8, a svi mogući pogrešni prijelazi su jednako vjerojatni. Odredite vjerojatnosti pojave simbola y_j na izlazu kanala ako je na ulazu simbol x_i za sve parove i, j.

Rješenje:

Na slici (Slika 1.5) dan je model kanala opisanog u zadatku. Iz razloga preglednosti slike samo su navedeni prijelazi za jedan ulazni simbol.



Slika 1.5

Vjerojatnosti pojave simbola na ulazu u kanal su jednake i iznose 1/3, tj. $p(x_i) = \frac{1}{3}$ za $i = 1, \cdots, 3.$

Da bi odredili vjerojatnosti $p(y_j|x_i)$ moramo pronaći vezu između ulaznog i izlaznog skupa simbola.

Također, sa slike vidimo da je $\left[p(z_k|x_i)\right] = \left[p(y_j|z_k)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 08 \end{bmatrix}$, odnosno

$$\left[p(x_i, z_k)\right] = \begin{bmatrix} \frac{8}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{8}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{8}{30} \end{bmatrix}.$$

Iz uvjeta $p(z_k) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i, z_k)$, za $k = 1,2,3$ dobivamo $p(z_1) = p(z_2) = p(z_3) = 1/3$ ili drugačije

zapisano **p**[Z] = **p**[z_1 z_2 z_3] = [1/3 1/3 1/3]. Važno je uočiti da se vektor vjerojatnosti **p**[Z] mogao dobiti klasičnim množenjem matrica, tj. **p**[Z] = **p**[X] × **p**[Z | X].

Iz $\left[p\left(x_i \middle| z_k\right)\right]=\begin{bmatrix} \frac{8}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{8}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{8}{30} \end{bmatrix}$

dobivamo vrijednost pojave simbola na izlazu iz kanala, tj. $p(y_1) = p(y_2) = p(y_3) = 1/3$ ili drugačije zapisano

p[Y] = **p**[y_1 y_2 y_3] = [1/3 1/3 1/3].

I u ovom slučaju vrijedi slijedeća jednakost **p**[Y] = **p**[Z] × **p**[Y | Z].

Da bismo odredili vjerojatnost $p(y_j|x_i)$ poslužiti ćemo se prethodno napisanim izrazima, tj. **p**[Y] = **p**[Z] × **p**[Y | Z] = **p**[X] × **p**[Z | X] × **p**[Y | Z] = **p**[X] × **p**[Y | X], tj. uočavamo da je **p**[Y | X] = **p**[Z | X] × **p**[Y | Z], što nakon proračuna daje:

$$\left[p(y_j|x_i)\right]=\begin{bmatrix} 0{,}66 & 0{,}17 & 0{,}17 \\ 0{,}17 & 0{,}66 & 0{,}17 \\ 0{,}17 & 0{,}17 & 0{,}66 \end{bmatrix}$$

***Zadatak-6*:** Veličina (v) koju mjeri instrument poprima osam vrijednosti sa sljedećim vjerojatnostima:

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
$p(v_i)$	0,05	0,05	0,15	0,25	0,30	0,05	0,05	0,10

Odredite srednji sadržaj informacije koju daje instrument u jedinici vremena (bit/s) ako se pokazivanje mijenja svakih 15 ms.

Rješenje:

Količina informacije koju daje instrument po jednom prikazu je:

$$I(v) = -\sum_{i=1}^{8} p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i) = ... = 2{,}6282\,\text{bit}$$

Ako se pokazivanje instrumenta mijenja svakih t = 15ms, tada je količina informacije koju daje instrument u jedinici vremena:

$$C = \frac{I(v)}{t} = 175{,}214\,\text{bit/s.}$$

Zadatak-7*:** Instrumentom očitavamo vrijednosti iz skupa simbola ***X = {-2,-1, 0, 1, 2}. Sve vrijednosti su jednako vjerojatne. Na pokazniku instrumenta pokvaren je indikator za "minus" koji se ne upali u 30% slučajeva. Ako sustav promatramo kao komunikacijski kanal, potrebno je:

a) grafički prikazati vjerojatnosti prijelaza u kanalu;

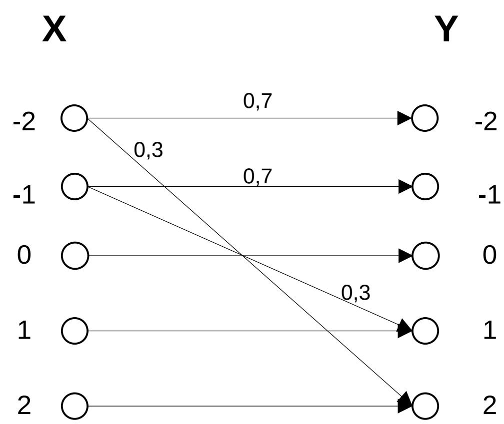
b) odrediti vjerojatnost pojave pojedine vrijednosti na indikatoru instrumenta;

c) odrediti entropiju ulaznog i izlaznog skupa simbola;

d) izračunati transinformaciju i ekvivokaciju u ovom sustavu.

Rješenje:

a) Indikator za „minus“ na pokazniku se ne upali u 30% slučajeva, dakle vjerojatnost da će pokaznik prikazati vrijednost "-2" kao "-2" je 0.7, a kao "2" je 0.3. Analogno zaključujemo i za "-1", dok se ostale vrijednosti prikazuju ispravno. Grafički prikaz kanala je:



b) Iz skice kanala možemo dobiti matricu uvjetnih vjerojatnosti prijelaza i matricu združenih vrijednosti:

$$\left[p(y_j|x_i)\right]=\begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(x_i)=0,2, \quad i=1,\ldots,5$$

$$\left[p(x_i,y_j)\right]=\left[p(x_i)p(y_j|x_i)\right]=\begin{bmatrix} 0,14 & 0 & 0 & 0 & 0,06 \\ 0 & 0,14 & 0 & 0,06 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Iz matrice združenih vjerojatnosti zbrajanjem po stupcima dobivamo vrijednosti pojave pojedine vrijednosti na indikatoru instrumenta:

$$\left[p(y_j)\right] = \left[0{,}14 \quad 0{,}14 \quad 0{,}2 \quad 0{,}26 \quad 0{,}26\right]$$

c) $H(X) = \log_2 5 = 2{,}32$ bit/simbol

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{5} p(y_j)\log_2 p(y_j) = \ldots = 2{,}268 \text{ bit/simbol}$$

d) $I(X;Y) = -\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{5} p(x_i, y_i)\log \dfrac{p(x_i, y_i)}{p(x_i)\,p(y_i)}$

$$H(X|Y) = H(X) - I(X;Y)$$

$$I(X;Y) = \ldots = 1{,}9167 \text{ bit/simbol}$$

$$H(X/Y) = \ldots = 0{,}4053 \text{ bit/simbol}$$

Zadatak-8: Komunikacijskim kanalom prenose se tri poruke "a", "b" i "c" , generirane iz skupa simbola ***X*** = {a, b, c}. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su *p*(a) = *p*(b) = 2 × *p*(c). Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je:

$$\left[p\left(y_j \middle| x_i\right)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

a) Odredite vjerojatnosti pojavljivanja pojedinih simbola na izlazu iz kanala.

b) Odredite ekvivokaciju i transinformaciju u kanalu.

c) Izračunajte promjenu transinformacije ako se provede zaštita tako da se svaka poruka u prijenosu jednom ponovi.

Rješenje:

$$p(a) = p(x_i) = 0{,}4$$

a) $$p(b) = p(x_2) = 0{,}4 \qquad \left[p(x_i, y_j)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}28 & 0{,}04 & 0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}28 & 0{,}04 \\ 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}14 \end{bmatrix}$$

$$p(c) = p(x_3) = 0{,}2$$

$$H(X) = 1{,}5219 \text{ bit/simbol} \qquad \left[p(y_j)\right] = \left[0{,}38 \quad 0{,}36 \quad 0{,}26\right]$$

b) $$H\left(X \middle| Y\right) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j)\log_2 p\left(x_i \middle| y_j\right) = 1{,}124 \text{ bit/simbol}$$

$$\left[p\left(x_i \middle| y_j\right)\right] = \begin{bmatrix} \frac{0{,}28}{0{,}38} & \frac{0{,}08}{0{,}38} & \frac{0{,}02}{0{,}38} \\ \frac{0{,}04}{0{,}36} & \frac{0{,}28}{0{,}36} & \frac{0{,}04}{0{,}36} \\ \frac{0{,}08}{0{,}26} & \frac{0{,}04}{0{,}26} & \frac{0{,}14}{0{,}26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7368 & 0{,}2105 & 0{,}0526 \\ 0{,}1111 & 0{,}7778 & 0{,}1111 \\ 0{,}3077 & 0{,}1538 & 0{,}5385 \end{bmatrix}$$

$$I_{(1)}(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = 0{,}3979 \text{ bit/simbol}$$

Napomena: Transinformacija se mogla dobiti i preko $H(Y)$ i $H(Y/X)$.

$H(Y) = 1{,}566$ bit/simbol i $H(Y/X) = 1{,}1723$ bit/simbol.

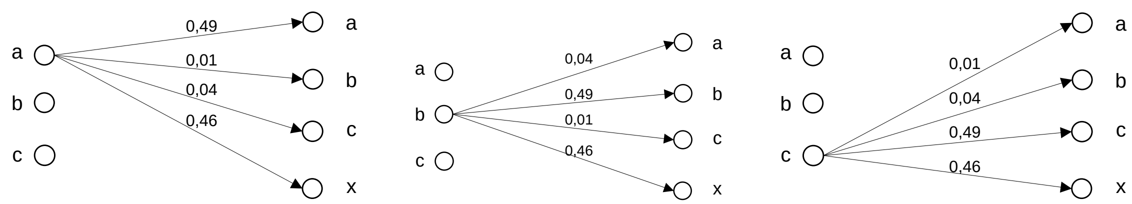
c) Ako se svaka poruka u prijenosu jednom ponovi, na strani prijemnika se, ovisno o tome da li je došlo do grešaka u prijenosu, može pojaviti devet različitih kombinacija, 'aa', 'ab',…,'cc'. Od njih devet, samo se 'aa', 'bb' i 'cc' mogu dekodirati, a ostalih šest su nedefinirane. Njih ćemo u grafu prijelaza označiti stanjem 'x'.

Vjerojatnost prijema nedefinirane kombinacije prilikom slanja simbola 'a' (znači kanalom će putovati 'aa') zbog pogrešaka u prijenosu je:

$$
\begin{aligned}
ab &= 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07 \\
ac &= 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14 \\
ba &= 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07 \\
bc &= 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02 \\
ca &= 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14 \\
cb &= 0{,}2 \cdot 0{,}1 = \underline{0{,}02} \\
& \qquad\qquad\quad\; 0{,}46
\end{aligned}
$$

Analogno možemo dobiti vjerojatnosti prijema nedefinirane kombinacije i za simbole 'b' i 'c', One isto iznose 0,46.

c) Graf prijelaza (razlomljen na tri grafa radi preglednosti) izgleda ovako:



$$
\left[p\left(y_j \middle| x_i\right)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}49 & 0{,}01 & 0{,}04 & 0{,}46 \\ 0{,}04 & 0{,}49 & 0{,}01 & 0{,}46 \\ 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}49 & 0{,}46 \end{bmatrix}
$$

$$
\left[p\left(x_i, y_j\right)\right] = \left[p(x_i)\, p\left(y_j \middle| x_i\right)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}196 & 0{,}004 & 0{,}016 & 0{,}184 \\ 0{,}016 & 0{,}196 & 0{,}004 & 0{,}184 \\ 0{,}002 & 0{,}008 & 0{,}098 & 0{,}092 \end{bmatrix}
$$

$$
\left[p(y_j)\right] = \left[0{,}214 \quad 0{,}208 \quad 0{,}118 \quad 0{,}46\right]
$$

$$
I_{(2)}(X;Y) = -\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} p\left(x_i, y_j\right) \log_2 \frac{p(y_i / x_j)}{p(y_j)} = 1{,}124 \text{ bit/simbol}
$$

$$
\Delta I(X;Y) = \left| I_{(2)}(X;Y) - I_{(1)}(X;Y) \right| = 0{,}7146 \text{ bit/simbol}
$$

***Zadatak-9*:** Neka je dano izvorište na čijem izlazu se pojavljuju dva simbola, i to: točka (●) i crta (-). Trajanje (●) je 0,2 s, dok je trajanje (-) tri puta dulje. Vjerojatnost pojavljivanja (●) je dva puta veća od vjerojatnosti pojavljivanja (-), dok je trajanje stanke između simbola 0,2 s. Izračunajte prosječnu brzinu generiranja informacije na izvorištu i to u bit/s.

Rješenje:

$$t_{(\bullet)} = 0{,}2\,\text{s},\ \ p_{(\bullet)} = 2/3$$
$$t_{(-)} = 0{,}6\,\text{s},\ \ p_{(-)} = 1/3$$
$$\underline{t_s = 0{,}2\,\text{s}}$$

Prosječna količina informacije po jednom simbolu iznosi:

$$H(X) = -\,p_{(\bullet)} \log_2 p_{(\bullet)} - p_{(-)} \log_2 p_{(-)} = 0{,}667 \cdot 0{,}585 + 0{,}333 \cdot 1{,}585 = 0{,}92\,\text{bit/simbol}$$

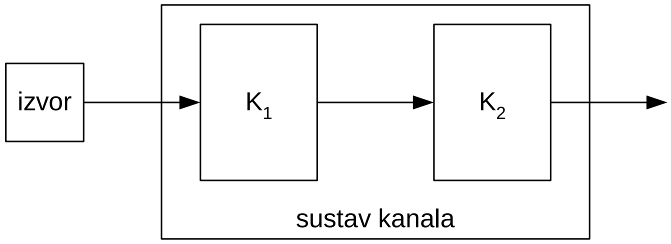
Prosječno trajanje simbola iznosi:

$$T_s = p_{(\bullet)} \cdot t_{(\bullet)} + p_{(-)} \cdot t_{(-)} + t_s = 0{,}533\ \ \text{s/simbol}$$

Informacijska brzina izvorišta iznosi:

$$R = \frac{0{,}92\,\text{bit/simbol}}{0{,}533\ \ \text{s/simbol}} = 1{,}726\,\text{bit/s}$$

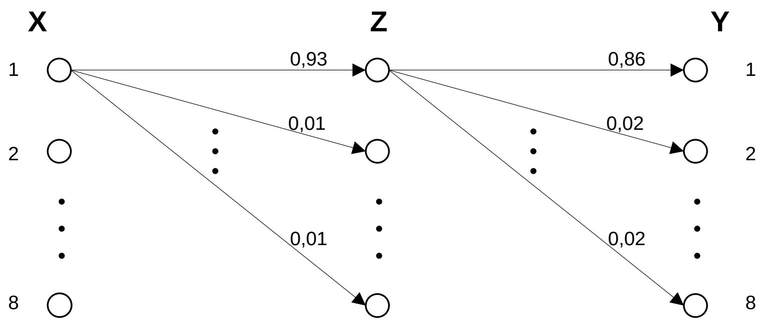
***Zadatak-10*:** Komunikacijski kanali spojeni su serijski kako je prikazano na slici (Slika 1.6). Na kanal K_1 priključen je informacijski izvor koji generira 8 jednako vjerojatnih poruka koje se kodiraju skupom simbola $\boldsymbol{X} = \{x_1,..., x_8\}$. Vjerojatnost ispravnog prijenosa u kanalu K_1 je 0,93, u kanalu K_2 je 0,86 dok su svi drugi prijelazi jednako vjerojatni. Izračunajte transinformaciju u sustavu kanala. Također, izračunajte ekvivokaciju u kanalima K_1, K_2 i u sustavu kanala.



Slika 1.6

Rješenje:

Označimo skup simbola na izlazu iz kanala K_1 slovom **Z**, apotom skicirajmo graf kanala:



$$p(x_i)=\frac{1}{8},\ \ i=1,...,8$$

$$\left[p(z_k / x_i)\right]=\begin{bmatrix} 0,93 & 0,01 & \dots & 0,01 \\ 0,01 & 0,93 & \dots & 0,01 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0,01 & 0,01 & \cdots & 0,93 \end{bmatrix}$$

$$\left[p(x_i, z_k)\right]=\left[p(x_i)\,p(z_k / x_i)\right]=\begin{bmatrix} 0,11625 & 0,00125 & \cdots & 0,00125 \\ 0,00125 & 0,11625 & \cdots & 0,00125 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0,00125 & 0,0125 & \cdots & 0,11625 \end{bmatrix}$$

Iz gornje matrice združenih vjerojatnosti kanala K_1 možemo dobiti vjerojatnosti pojave simbola $p(z_k)$ na izlazu kanala K_1: $p(z_k)=\frac{1}{8}, k=1,...,8$

Analogno za K_2:

$$\left[p(y_j / z_k)\right]=\begin{bmatrix} 0{,}86 & 0{,}02 & \cdots & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}86 & \cdots & 0{,}02 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0{,}02 & 0{,}02 & \cdots & 0{,}86 \end{bmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow p(y_j)=\frac{1}{8},\; j=1,\ldots,8$$

$$\left[p(y_j / x_i)\right]=\left[p(z_k / x_i)\right]\times\cdot\left[p(y_j / z_k)\right]=\begin{bmatrix} 0{,}8012 & 0{,}0284 & \cdots & 0{,}0284 \\ 0{,}0284 & 0{,}8012 & \cdots & 0{,}0284 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0{,}0284 & 0{,}0284 & \cdots & 0{,}8012 \end{bmatrix}$$

$$j=i \Rightarrow 0{,}93\cdot 0{,}86+7\cdot 0{,}01\cdot 0{,}02=0{,}8012$$
$$j\neq i \Rightarrow 0{,}93\cdot 0{,}02+0{,}86\cdot 0{,}01+6\cdot 0{,}01\cdot 0{,}02=0{,}0284$$

Transinformacija i ekvivokacija u sustavu kanala iznose:

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} p(x_i)\cdot p(y_j / x_i)\log_2 \frac{p(y_j / x_i)}{p(y_j)} = 8\cdot 0{,}125\cdot 0{,}801\cdot \log_2\left(\frac{0{,}8012}{0{,}125}\right)+7\cdot 8\cdot 0{,}0284\cdot 0{,}125\cdot \log_2\left(\frac{0{,}0284}{0{,}125}\right)$$
$$=1{,}7223 \text{ bit/simbol}$$

$$H(X/Y)=H(X)-I(X;Y)=\log_2 8-I(X;Y)=1{,}2776 \text{ bit/simbol}$$

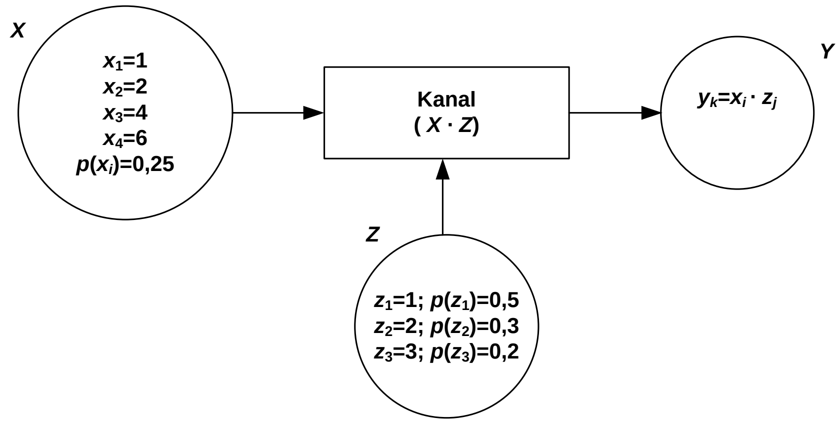
Ekvivokacija u kanalu K_1:

$$\begin{aligned} H(X/Z) &= -\sum_{i=1}^{8}\sum_{k=1}^{8} p(x_i,z_k)\log_2 p(x_i / z_k) \\ &= -\sum_{i=1}^{8}\sum_{k=1}^{8} p(x_i,z_k)\log_2 \frac{p(x_i,z_k)}{p(z_k)} \\ &= -\,8\cdot 0{,}11625\cdot \log_2\left(\frac{0{,}11625}{0{,}125}\right)-56\cdot 0{,}00125\cdot \log_2\left(\frac{0{,}00125}{0{,}125}\right) \\ &=0{,}562438 \text{ bit/simbol} \end{aligned}$$

Ekvivokacija u kanalu K_2:

$$\begin{aligned} H(Z/Y) &= -\sum_{k=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} p(z_k,y_j)\log_2 \frac{p(z_k / y_j)}{p(y_j)} \\ &= -\sum_{k=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} p(z_k)\cdot p(y_j / z_k)\log_2 \frac{p(z_k)\cdot(y_j / z_k)}{p(y_j)} \\ &= -\,8\cdot 0{,}125\cdot 0{,}86\cdot \log_2\left(\frac{0{,}125\cdot 0{,}86}{0{,}125}\right)-56\cdot 0{,}125\cdot 0{,}02\cdot \log_2\left(\frac{0{,}125\cdot 0{,}02}{0{,}125}\right) \\ &=0{,}977268 \text{ bit/simbol} \end{aligned}$$

Zadatak-11: Izvorište emitira simbole x_i koji se prenose u kanalu s djelovanjem šuma z_j. Na odredištu se pojavljuju simboli y_k. Vrijednosti simbola i vjerojatnosti pojavljivanja dani su na slici (Slika 1.7). Šum u kanalu djeluje na taj način da se njegova vrijednost multiplicira sa simbolima iz izvora.



Slika 1.7

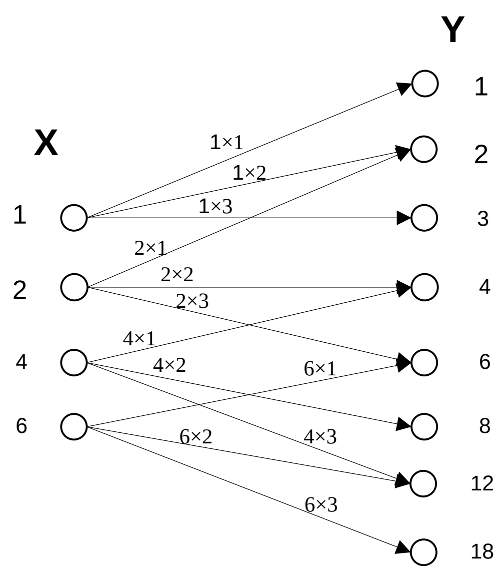
Odredite:

a) $H(Y)$.

b) $I(X;Y)$.

Rješenje:

Skicirajmo kanal:



$p(x_i)=1/4, \quad [p(z_j)]=[0{,}5 \quad 0{,}3 \quad 0{,}2]$

Šum u kanalu djeluje tako da se njegova vrijednost ppomnoži sa simbolom iz izvora. Ako smo, na primjer, poslali x_4, čija je vrijednost jednaka 6, u 50% slučajeva na izlazu iz kanala pojavit će se 6, u 30% slučajeva pojavit će se 12, a u 20% slučajeva 18.

Iz grafa prijelaza možemo očitati u kojim će se sve slučajevima pojaviti određeni simbol na izlazu, te će se, na primjer, na izlazu pojaviti '2' kada je poslan x_1, a u kanalu djeluje z_2, ili kada je poslan x_2, a u kanalu djeluje z_1.

Dakle, vjerojatnost pojave '2' na izlazu jednaka je:

$$p(2)=p(x_1)\cdot p(z_2)+p(x_2)\cdot p(z_1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$$

Popunimo matricu združenih vjerojatnosti:

$$\left[p(x_i,y_j)\right]=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\4\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}1&2&3&4&6&8&12&18\end{array}\\ \begin{bmatrix}0{,}125&0{,}075&0{,}05&0&0&0&0&0\\0&0{,}125&0&0{,}075&0{,}05&0&0&0\\0&0&0&0{,}125&0&0{,}075&0{,}05&0\\0&0&0&0&0{,}125&0&0{,}075&0{,}05\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\left[p(y_j)\right]=\left[0{,}125\quad 0{,}2\quad 0{,}05\quad 0{,}2\quad 0{,}175\quad 0{,}075\quad 0{,}125\quad 0{,}05\right]$$

$$H(Y)=\sum_{j=1}^{8}p(y_j)\log_2 p(y_j)=\ldots=2{,}8313\ \text{bit/simbol}$$

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8}p(x_i,y_j)\log_2\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)\cdot p(y_j)}=\ldots=1{,}3458\ \text{bit/simbol}$$

Zadatak-12: Na sustav kanala (serijska veza kanala K1 i K2) povezano je izvorište čije se ponašanje može opisati Markovljevim lancem prvog reda s dva stanja {1 i 2}. Izvorište u 25% slučajeva ostaje u stanju 1, a u 50% slučajeva u stanju 2. Uvjetne vjerojatnosti prijelaza u kanalima K1 i K2 su:

$$\text{K1:}\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix};\ \text{K2:}\begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}7 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

a) Izračunajte vjerojatnost pojavljivanja simbola na izlazu iz sustava kanala.

b) Odredite transinformaciju u cijelom sustavu kanala.

Napomena: Kod proračuna raditi s tri decimalna mjesta!

Rješenje:

a) Iz matrice uvjetnih vjerojatnosti prijelaza **p**[Z/X] kanala K1 i **p**[Y/Z] kanala K2 možemo dobiti matricu uvjetnih vjerojatnosti **p**[Y/X] sustava kanala:

$$\mathbf{p}[Y/X]=\mathbf{p}[Z/X]\times\mathbf{p}[Y/Z]=\begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}16 & 0{,}60 & 0{,}03 & 0{,}08 & 0{,}08 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}15 & 0{,}08 & 0{,}48 & 0{,}17 & 0{,}08 & 0{,}04 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica izvorišta [$p(x_i, x_j)$] jednaka je:

$$[p(x_i, x_j)]=\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Zbog ergodičnosti izvorišta vrijedi

$$[p_1 \cdot p_2]\cdot\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}=[p_1\ \ p_2]$$

Iz čega slijedi da je $p_1 = 0{,}4$ i $p_2 = 0{,}6.$

Sada možem dobiti matricu združenih vrijednosti [$p(x_i, y_j)$]

$$[p(x_i, y_j)]=[p(x_i)]\cdot[p(y_j / x_i)]$$
$$=\begin{bmatrix} 0{,}012 & 0{,}064 & 0{,}240 & 0{,}012 & 0{,}032 & 0{,}032 & 0{,}004 & 0{,}004 \\ 0{,}090 & 0{,}048 & 0{,}288 & 0{,}102 & 0{,}048 & 0{,}024 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz matrice združenih vrijednosti možemo očitati vjerojatnosti pojavljivanja simbola na izlazu iz sustava kanala, koje iznose:

$$[p(y_j)]=[0{,}102\quad 0{,}112\quad 0{,}528\quad 0{,}114\quad 0{,}080\quad 0{,}056\quad 0{,}004\quad 0{,}004.]$$

b) Transinformacija u sustavu kanala $I(X;Y)$ jednaka je:

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)$$

gdje je $H(X)$ entropija ulaznog skupa simbola, $H(Y)$ entropija izlaznog skupa simbola, a $H(X,Y)$ združena entropija.

Uvrštavanjem gore izračunatih vrijednosti u formule za dane izraze dobit ćemo:

$$H(X)=0{,}971 \text{ bit/simbol}$$
$$H(Y)=2{,}1214 \text{ bit/simbol}$$
$$H(X,Y)=2{,}9981 \text{ bit/simbol}$$

I na kraju:

$$I(X;Y)=0{,}0943 \text{ bit/simbol}.$$

2. Komunikacijski kanali u kontinuiranom vremenu

***Zadatak-1*:** Razvijte u kompleksni eksponencijalni Fourierov red funkciju $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)+\sin^2(2\pi f_0 t)$.

Rješenje:

Zadana je funkcija $x(t)$:

$$x(t)=\cos(2\pi f_0 t)+\sin^2(2\pi f_0 t)=\cos\omega_0 t+\sin^2\omega_0 t,\ \omega_0=2\pi f_0 t$$

Raspišimo funkciju $x(t)$ koristeći prikaz funkcija sinus i kosinus u komleksnom obliku:

$$\begin{aligned}
x(t)&=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)+\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)\right]^2\\
&=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}-\frac{1}{4}\left(e^{j2\omega_0 t}-2+e^{-j2\omega_0 t}\right)\\
&=-\frac{1}{4}e^{-j2\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{4}e^{j2\omega_0 t}\\
&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo kompleksni Fourierov red čiji su koeficjenti jednaki $c_0=\dfrac{1}{2},\ c_1=c_{-1}=\dfrac{1}{2}, c_2=c_{-2}=-\dfrac{1}{4},$ dok su ostale vrijednosti $c_k=0.$

Zadatak-2: Odredite koji su od navedenih signala (a)-(c) signali snage, signali energije ili niti jedno od toga.

(a) $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$

(b) $x(t) = u(t)$

(c) $x(t) = t \cdot u(t)$

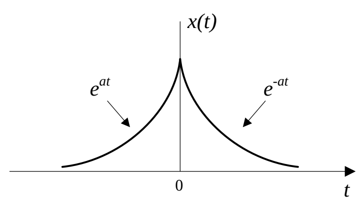
gdje je $u(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$.

Rješenje:

a) $x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt = 2\int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{a} < \infty$$

Dakle, signal $x(t) = e^{-a|t|}, a > 0$ je signal energije.

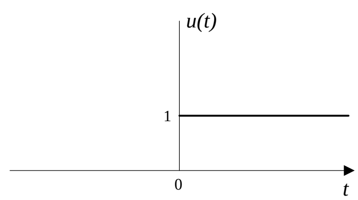


b) $x(t) = u(t)$

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} [x(t)]^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T 1^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2} = \infty$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

Dakle, signal $x(t) = u(t)$ je signal snage.

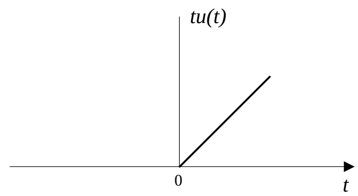


c) $x(t) = tu(t)$

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left[x(t)\right]^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} t^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[x(t)\right]^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} t^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{(T/2)^3}{3} = \lim_{T\to\infty} \frac{T^2}{24} = \infty$$

Dakle, $x(t) = tu(t)$ nije niti signal energije niti signal snage.



***Zadatak-3*:** Signal šuma, $n(t)$, ima spektralnu gustoću snage $S_n(f)$ definiranu kao

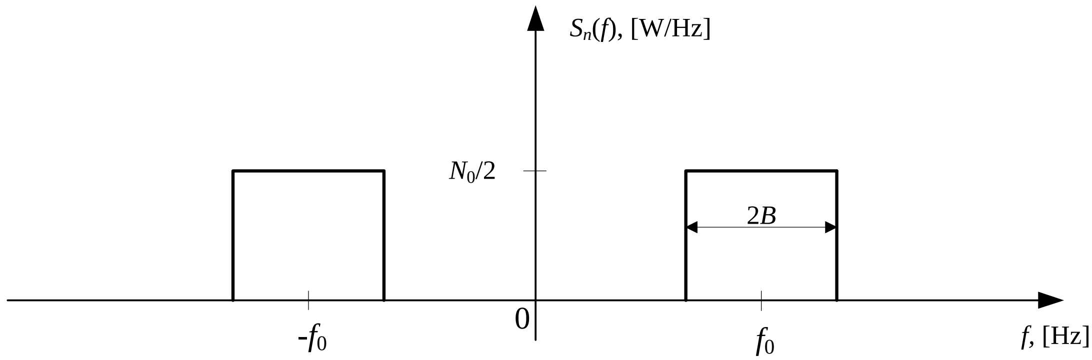
$$S_n(f) = \begin{cases} N_0/2 \; za \;\; f_0 - B < |f| < f_0 + B \\ 0 \text{ za ostale vrijednosti } f \end{cases} \text{[W/Hz]}$$

(a) Odredite autokorelacijsku funkciju šuma (Napomena: $f_0 > B$).

(b) Odredite srednju snagu šuma.

Rješenje:

a) Skicirajmo graf spektralne gustoće snage $S_n(f)$ šuma $n(t)$.



Izračunajmo autokorelacijsku funkciju danog šuma:

$$R_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-f_0-B}^{-f_0+B} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi ft} df + \int_{f_0-B}^{f_0+B} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi ft} df$$

$$= \frac{N_0}{2} \frac{1}{j2\pi ft} \left[e^{j2\pi ft} df \left| \begin{matrix} -f_0 + B \\ -f_0 - \mathrm{B} \end{matrix} \right. + e^{j2\pi ft} df \left| \begin{matrix} -f_0 + B \\ -f_0 - B \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \frac{N_0}{4j\pi t} \left[e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{j2\pi Bt} - e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi Bt} + e^{j2\pi t(f_0+B)} - e^{j2\pi t(f_0-B)} \right]$$

$$= \frac{N_0}{4j\pi t} \left[e^{-j2\pi f_0 t} (e^{j2\pi Bt} - e^{-j2\pi Bt}) + e^{j2\pi f_0 t} (e^{j2\pi Bt} - e^{-j2\pi Bt}) \right]$$

$$= \frac{N_0}{4j\pi t} \left(e^{j2\pi Bt} - e^{-j2\pi Bt} \right) \left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right)$$

$$= \frac{N_0}{4j\pi t} \cdot 2j \sin(2\pi Bt) \cdot 2\cos(2\pi f_0 t)$$

$$= \frac{4N_0 B}{4} \cdot \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} \cdot 2\cos(2\pi f_0 t)$$

$$= 2BN_0 \cdot \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

b) Srednja snaga šuma jednaka je autokorelacijskoj funkciji šuma u trenutku $t = 0$ i iznosi:

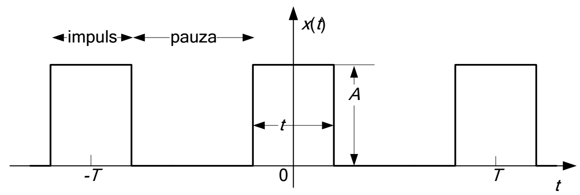
$$P(t) = R_n(0) = 2BN_0$$

***Zadatak-4*:** Dan je periodički slijed pravokutnih impulsa $x(t)$ amplitude A [V], frekvencije f=2 kHz i omjera τ/T=1/4 (Slika 2.1).

(a) Skicirajte spektar danog signala.

(b) Odredite vrijednosti komponenata spektra (c_0 do c_5).

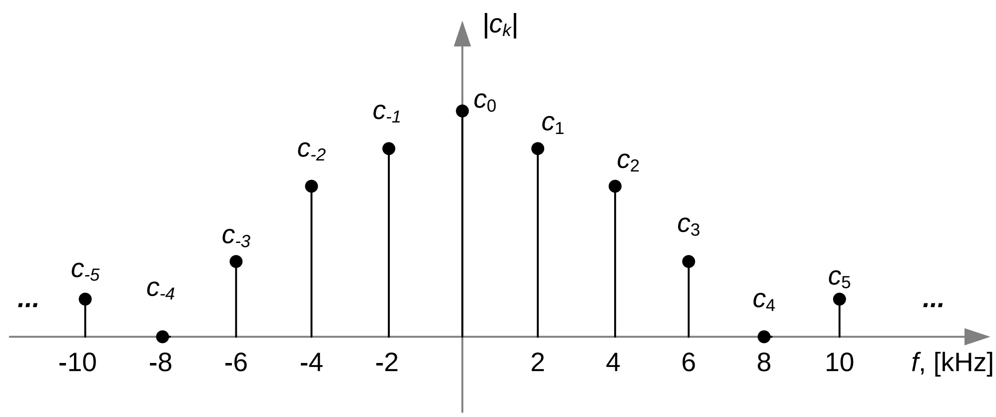
(c) Izračunajte omjer snaga $\dfrac{\sum_{i=-3}^{3} P_i}{P}$.



Slika 2.1

Rješenje:

a) Skicirajmo spektar danog signala:



b) Vrijednost komponenata spektra su:

$$c_k = A\frac{\tau}{T}\frac{\sin\left(k\omega_0\tau/2\right)}{k\omega_0\tau/2} \text{ i } c_0 = \frac{A\tau}{T}$$

$c_0 = A/4$ (istosmjerna komponenta); $c_1 = c_{-1} = \dfrac{A}{\sqrt{2}\pi}; c_2 = c_{-2} = \dfrac{A}{2\pi}; c_3 = c_{-3} = \dfrac{A}{3\sqrt{2}\pi};$

$c_4 = c_{-4} = 0; c_5 = c_{-5} = \dfrac{A}{5\sqrt{2}\pi}$.

c) Omjer snaga $\dfrac{\sum_{i=-3}^{3} P_i}{P}$ jednak je: $\dfrac{\sum_{i=-3}^{3} P_i}{P} = \dfrac{\dfrac{A^2}{16} + 2\cdot\dfrac{A^2}{2\pi^2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{9}\right)}{A^2/4} = 0{,}902.$ ($P = A^2\dfrac{\tau}{T}$)

***Zadatak-5*:** Periodički slijed pravokutnih impulsa $x(t)$ (Slika 2.1. Zadatak-4) frekvencije 10 kHz i omjera impuls-pauza 3:1 treba biti propušten kroz idealni niskopropusni filtar, ali tako da se barem 90% snage signala prenese na izlaz filtra.

(a) Odredite graničnu frekvenciju filtra f_g. (Napomena: Kod proračuna raditi s najmanje 3 decimalna mjesta!)

(b) Skicirajte realni dio spektra signala na ulazu u filtar za područje od -80 do 80kHz.

(c) Odredite poziciju prve nultočke ovojnice spektra signala.

Rješenje:

a) Ukupna snaga pravokutnog signala na ulazu jednaka je:

$$P_{uk} = \frac{A^2\tau}{T}; \ \frac{\tau}{T} = \frac{3}{4}$$

Snaga istosmjerne komponente signala jednaka je:

$$P_0 = |C_0|^2 = \frac{A^2\tau^2}{T^2} = \frac{\tau}{T} \cdot P_{uk}$$

Snaga ostalih komponenata signala jednaka je:

$$P_k = |C_0|^2 = \left[\frac{A\tau}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)} \right| \right]^2$$

$$= \frac{A^2\tau^2}{T^2} \frac{T^2}{k^2\pi^2\tau^2} \sin^2\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)$$

$$= \frac{A^2}{k^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)$$

$$= \frac{T}{\tau k^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) \cdot P_{uk}$$

Kada uvrstimo zadane podatke, dobivamo:

$$P_k = \frac{4}{3k^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{3k\pi}{4}\right) \cdot P_{uk}$$

Izračunajmo snage prvih nekoliko komponenti:

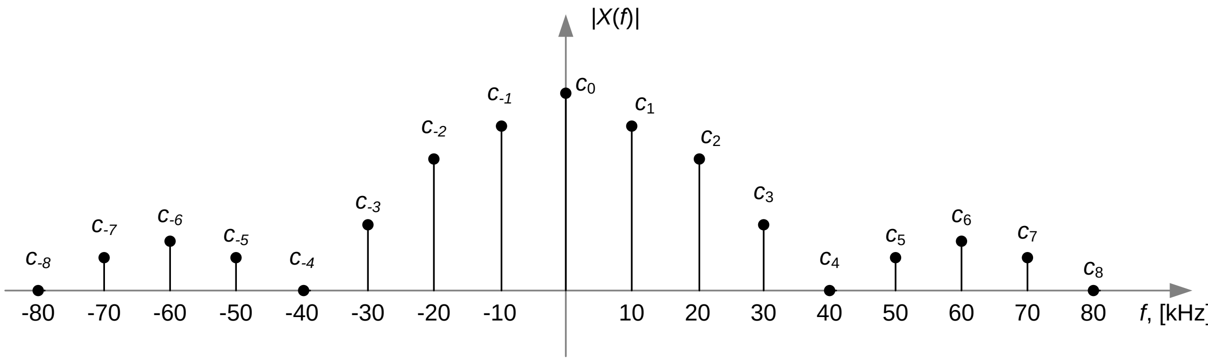
$$P_0 = 0{,}7500 \cdot P_{uk}$$
$$P_1 = P_{-1} = 0{,}0675 \cdot P_{uk}$$
$$P_2 = P_{-2} = 0{,}0388 \cdot P_{uk}$$
$$P_3 = P_{-3} = 0{,}0075 \cdot P_{uk}$$
$$P_4 = P_{-4} = 0$$
$$\vdots$$

Uočavamo da vrijedi:

$$\sum_{k=-2}^{2} P_k = 0{,}9626 \cdot P_{uk}$$

Iz čega zaključujemo da je granična frekvencija filtra $f_g > 20\,\mathrm{kHz}$.

b) Skicirajmo realni dio spektra signala na ulazu u filtar:



c) Ovojnica spektra prolazi kroz nulu u točkama $f = \frac{k}{\tau}, k \in \mathrm{N}$.

Dakle, pozicija prve nultočke ovojnice spektra signala je na frekvenciji:

$$f = \frac{1}{\tau} = 13{,}3\,\mathrm{kHz}.$$

***Zadatak-6*:** Odredite prijenosnu funkciju LTI sustava čiji je impulsni odziv $h(t) = 0.5e^{-10|t|}$.

Rješenje:

Prijenosna funkcija $H(f)$ i impulsni odziv $h(t)$ čine Fourierov transformacijski par i vrijedi:

$$h(t) = 0{,}5 \cdot e^{-10|t|} = \begin{cases} 0{,}5 \cdot e^{-10t} \text{za} t \geq 0 \\ 0{,}5 \cdot e^{+10t} \text{za} t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
H(f) = F\left[h(t)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= 0{,}5 \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{10t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt + 0{,}5 \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-10t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\
&= 0{,}5 \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{\left(10 - j2\pi f\right)} + \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-t\left(10 - j2\pi f\right)} dt \\
&= 0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{10 - j2\pi f} e^{\left(10 - j2\pi f\right)t} \Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{10 + j2\pi f} e^{-t\left(10 + j2\pi f\right)} \Bigg|_{0}^{+\infty} \right) \\
&= 0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{10 - j2\pi f} \left(1 - 0\right) - \frac{1}{10 + j2\pi f} \left(0 - 1\right) \right) \\
&= 0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{10 - j2\pi f} + \frac{1}{10 + j2\pi f} \right) \\
&= \frac{10}{100 + 4\pi^2 \cdot f^2}
\end{aligned}$$

***Zadatak-7*:** Na ulazu LTI sustava impulsnog odziva $h(t)=e^{-bt}u(t)$ (b=konstanta, $b\in \mathbf{R}^{+}$), djeluje signal obilježja stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ čija je autokorelacijska funkcija $R_X(\tau)=Ae^{-a|\tau|}$ (a=konstanta, $a\in\mathbf{R}^{+}$; A=konstanta, $A\in\mathbf{R}^{+}$). Odredite autokorelacijsku funkciju slučajnog signala na izlazu, $Y(t)$, LTI sustava. (Napomena: $u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$)

Rješenje:

Izračunajmo prvo prijenosnu funkciju LTI sustava (zbog sličnosti s prethodnim zadatkom integrali nisu detaljno rješavani):

$$H(f)=F[h(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j2\pi ft}dt \;=\frac{1}{b+j2\pi f}\Rightarrow |H(f)|^2=\frac{1}{4\pi^2f^2+b^2}$$

Spektralna gustoća snage stacionarnog slučajnog procesa na ulazu jednaka je:

$$S_x(f)=F[R_x(\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \;=A\,\frac{2a}{4\pi^2f^2+a^2}$$

Te je spektralna gustoća snage stacionarnog slučajnog procesa na izlazu:

$$S_y(f)=S_x(f)\cdot|H(f)|^2=\frac{1}{4\pi^2f^2+b^2}\cdot\frac{2a}{4\pi^2f^2+a^2}A$$

$$=\frac{a\cdot A}{(a^2-b^2)b}\left(\frac{2b}{4\pi^2f^2+b^2}\right)-\frac{A}{a^2-b^2}\left(\frac{2a}{4\pi^2f^2+a^2}\right)$$

Autokorelacijska funkcija slčajnog signala na izlazu, $Y(t)$, LTI sustava jednaka je:

$$R_y(\tau)=F^{-1}[S_y(f)]=\int_{-\infty}^{+\infty}S_y(f)e^{j2\pi\tau t}dt \;=\frac{a\cdot A}{(a^2-b^2)b}e^{-b|\tau|}-\frac{A}{a^2-b^2}e^{-a|\tau|}$$

Napomena: Koristiti Fourierovu transformaciju

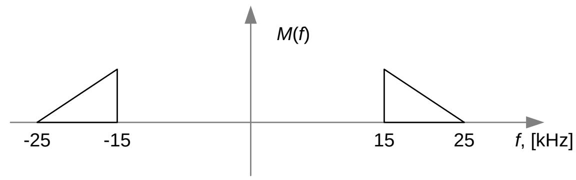
$$e^{-a|\tau|}\longleftrightarrow\frac{2a}{4\pi^2f^2+a^2}$$

***Zadatak-8*:** Neka je dan pojasno ograničeni signal $m(t)$ sa spektrom predočenim na slici (Slika 2.2).

(a) Odredite minimalnu dozvoljenu frekvenciju uzorkovanja i skicirajte spektar uzorkovanog signala. Odredite na koji način je moguće provesti rekonstrukciju signala $m(t)$ iz uzorkovanog signala.

(b) Skicirajte spektar uzorkovanog signala za slučaj uzorkovanja signala $m(t)$ s f_u=45 kHz. Odredite na koji način je moguće provesti rekonstrukciju signala $m(t)$ iz uzorkovanog signala.

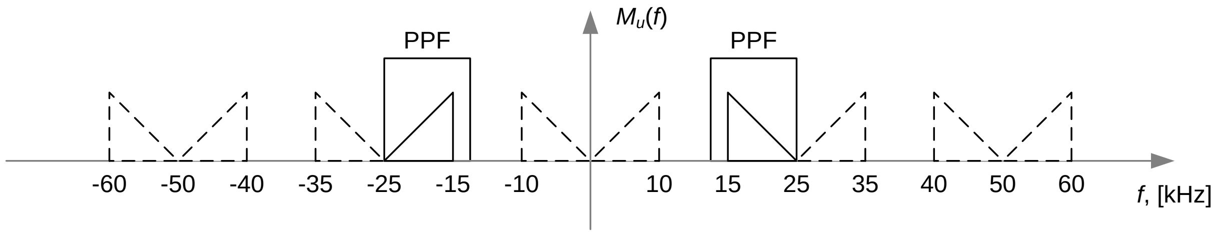
(c) Ponovite b) ako je f_u=50 kHz.



Slika 2.2

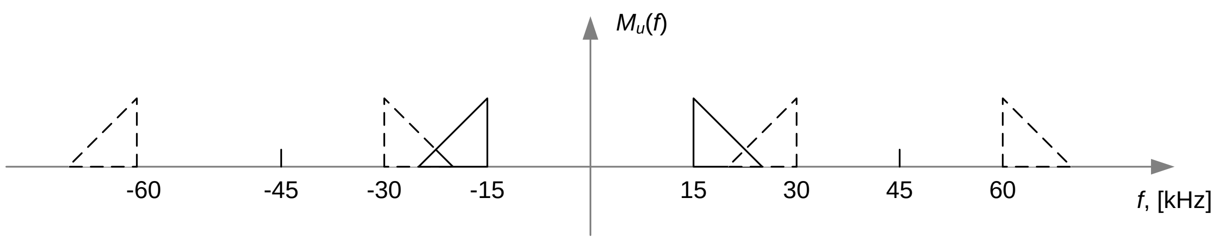
Rješenje:

a) Skicirajmo spektar uzorkovanog signala uz f_u=25 kHz:



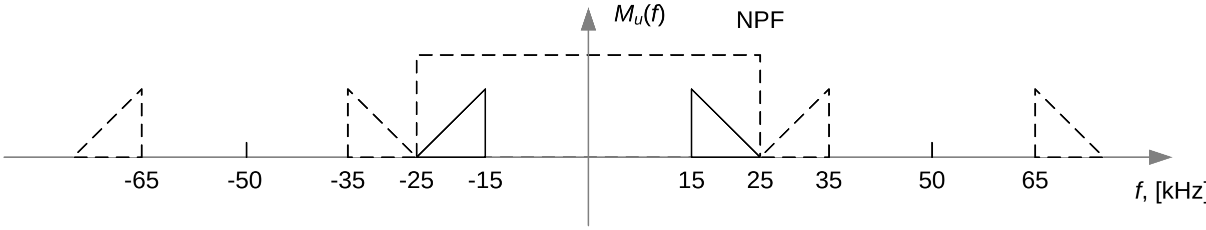
Iz slike je vidljivo da se iz uzorkovanog signala rekonstrukcija signala $m(t)$ može napraviti koristeći pojasnopropusni filtar (PPF) pojasa propuštanja $f_L \leq f \leq 25\,\text{kHz}\,\text{uz}\,10 \leq f_L \leq 15\,\text{kHz}.$

b) Skicirajmo spektar uzorkovanog signala $m(t)\,\text{s}\, f_u = 45\,\text{kHz}:$



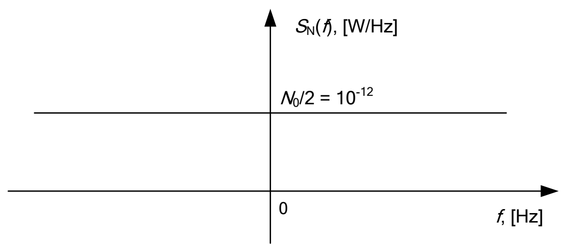
Rekonstrukciju signala $m(t)$ nije moguće napraviti koristeći metodu filtriranja iz razloga preklapanja pojaseva.

c) Skicirajmo spektar uzorkovanog signala $m(t)$ s $f_u = 50\,\text{kHz}$:



Rekonstrukciju signala $m(t)$ moguće napraviti koristeći niskopropusni filtar (NPF) granične frekvencije 25 kHz.

***Zadatak-9*:** Dan je kontinuirani komunikacijski sustav s frekvencijskim pojasom prijenosa od 4 kHz i aditivnim bijelim Gaussovim šumom spektralne gustoće snage $S_N(f)$ (Slika 2.3). Odredite kapacitet danog prijenosnog sustava ako se na prijamnoj strani zahtijeva snaga signala od 0,1 mW.



Slika 2.3

Rješenje:

Snagu šuma N možemo dobiti iz spektralne gustoće snage N_0 i širine prijenosnog pojasa kanala B:

$$N = \frac{N_0}{2} \cdot 2B = N_0 \cdot B = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^{-9} \text{ W}$$

Sada možemo lako dobiti omjer signal-šum:

$$\frac{S}{N} = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-9}} = 1{,}25 \cdot 10^4$$

i naposljetku i kapacitet kanala C:

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = 4000 \cdot \log_2\left(1 + 1{,}25 + 10^4\right) = 54{,}44 \cdot 10^3 \text{ bit/s.}$$

***Zadatak-10*:** Signal $x(t) = 3\cos(12000\pi \cdot t) + \cos(5000\pi \cdot t) + \cos(10000\pi \cdot t)$ [V] prisutan je u kanalu s aditivnim pojasno ograničenim bijelim šumom spektralne gustoće snage 0,2 mW/Hz za 0-12 kHz i 0 mW/Hz iznad 12 kHz. Na prijamnoj strani signal i pridodani šum propušteni su kroz idealni pojasnopropusni filtar sa širinom pojasa 1 kHz i centralnom frekvencijom pojasa propuštanja na 6 kHz.

(a) Izračunajte srednji omjer signal šum na ulazu u filtar (u dB!).

(b) Izračunajte srednji omjer signal šum na izlazu iz filtra (u dB!).

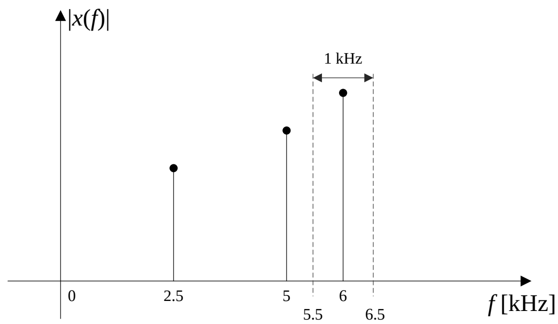
Rješenje:

Zadano je:

$$x(t) = 3\cos(2\pi \cdot 6000 \cdot \tau) + \cos(2\pi \cdot 2500 \cdot \tau) + \cos(2\pi \cdot 5000 \cdot \tau)$$

$$N_0 = \begin{cases} 0{,}2 \ \text{ mW/Hz za } [0-12]\,\text{kHz} \\ 0 \ \text{ ostalo} \end{cases}$$

a) Skicirajmo spektar signala $x(t)$ i naznačimo filtar na skici:



Snaga signala $x(t)$ na ulazu u filtar jednaka je zbroju snaga frekvencijskih komponenata signala, tj.

$$S = \frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + \frac{1}{2}A_3^2 = \frac{1}{2}3^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}1^2 = 5{,}5\,\text{W}$$

Snaga šuma na ulazu u filtar jednaka je:

$$N_1 = N_0 \cdot B_1 = 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 2{,}4\,\text{W}$$

Te je srednji omjer signal šum na ulazu u filtar izražen u dB jednak:

$$\left.\frac{S}{N_1}\right|_{\text{dB}} = 10 \cdot \log \frac{S}{N_1} = 10 \cdot \log \frac{5{,}5}{2{,}4} = 3{,}6015\,\text{dB}$$

b) Na slici vidimo da filtar propušta samo komponentu $3\cos(2\pi \cdot 6000 \cdot \tau)$ signala $x(t)$, te da je snaga signala na izlazu iz filtra jednaka:

$$S = \frac{1}{2} \cdot A_1^2 = \frac{1}{2}3^2 = 4{,}5\,\text{W}$$

Snaga šuma na izlazu iz filtra jednaka je:

$$N_1 = N_0 \cdot B_1 = 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 0{,}2\,\text{W}$$

te je omjer srednje snage signala naprema srednjoj snazi šuma na izlazu iz filtra (izražen u dB) jednak:

$$\frac{S}{N_2}\Big|_{\mathrm{dB}} = 10 \cdot \log \frac{S}{N_2} = 10 \cdot \log \frac{4{,}5}{0{,}2} = 13{,}5218\,\mathrm{dB}$$

***Zadatak-11*:** Govorni signal se na ulazu nekog prijenosnog sustava uzorkuje s frekvencijom uzorkovanja f_u=8 kHz, a potom kodira s 8 bitova po uzorku. Omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu iznosi 30 dB. Odredite potrebni pojas prijenosa ako se šum u kanalu poveća za 3 dB.

Rješenje:

Šum u kanalu se poveća za 3 dB, tj. vrijedi:

$$3\text{dB} = 10\cdot\log N_2 - 10\cdot\log N_1 = 10\cdot\log\frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = 1{,}9953$$

Iz frekvencije uzorkovanja f_u i broja bitova po uzorku n možemo dobiti informacijsku brzinu $R = f_u \cdot n = 64\,\text{kbit/s}$.

Kapacitet kanala C mora biti veći ili jednak od informacijske brzine R, te zaključujemo, budući da je širina pojasa proporcionalna s kapacitetom kanala, da je potrebna širina pojasa ona širina pojasa koju dobijemo za $C = R$ i iznosi:

$$B = \frac{C}{\log_2\left(1+\frac{S_1}{N_2}\right)} = \frac{C}{\log_2\left(1+\frac{S_1}{N_1}\cdot\frac{N_1}{N_2}\right)} = \frac{C}{\log_2\left(1+\frac{1000}{1{,}9953}\right)} = 7{,}133\,\text{kHz}$$

***Zadatak-12*:** Na ulaz sklopa za analogno-digitalnu (A/D) pretvorbu signala dovodi se analogni signal širine pojasa prijenosa 4 kHz. Signal se uzorkuje frekvencijom uzorkovanja koja je 1.25 puta veća od minimalne dozvoljene frekvencije uzorkovanja. Nakon toga se svaki uzorak kodira s 8 bitova.

a) Odredite informacijsku brzinu na izlazu sklopa za A/D pretvorbu.

b) Da li je moguće informacijski slijed bitova iz A/D pretvornika prenositi bez pogrešaka kanalom s aditivnim bijelim Gaussovim šumom u kojem je omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma (*S*/*N*) 20 dB i koji ima pojas prijenosa 10 kHz.

c) Odredite omjer *S*/*N* (u dB) koji osigurava prijenos bez pogrešaka za b) dio zadatka.

Rješenje:

a) Minimalna dozvoljena frekvencija uzorkovanja f_u jednaka je:

$$f_u = 2 \cdot \mathrm{B} = 8\,\mathrm{kHz}$$

iz čega dobivamo da je frekvencija $f_u = 10\,\mathrm{kHz}$.

Iz toga slijedi da je informacijska brzina *R* jednaka:

$$R = f_u \cdot n = 10^4 \cdot 8 = 80\,\mathrm{kHz}$$

b) Izračunajmo kapacitet zadanog kanala.

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = 10^4 \log_2(1 + 100) = 66{,}6\,\mathrm{kbit/s}$$

Obzirom na to da je informacijska brzina *R* veća od kapaciteta kanala *C*, nemoguće je napraviti prijenos danim kanalom bez pogrešaka.

c) Da bismo osigurali prijenos bez pogrešaka, kapacitet kanala *C* mora biti veći ili jednak od informacijske brzine *R*. Dakle vrijedi:

$$C = 10^4 \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \geq 8 \cdot 10^4$$

$$\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \geq 8$$

$$1 + \frac{S}{N} \geq 2^8 = 256 \Rightarrow \frac{S}{N} = 255$$

Odnosno, u decibelima:

$$\frac{S}{N}\Big|_{\mathrm{dB}} = 10 \cdot \log\frac{S}{N} = 10 \cdot \log 255 = 24{,}1\,\mathrm{dB}$$

Dakle, za $\frac{S}{N} \geq 24{,}1\,\mathrm{dB}$ moguće je ostvariti prijenos navedenim kanalom bez pogrešaka.

***Zadatak-13*:** Na ulaz kvantizatora dolazi sinusni signal amplitude A_m koji koristi sve razine za rekonstrukciju signala. Minimalni zahtijevani omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora je 40 dB. Odredite broj kvantizacijskih nivoa kvantizatora te proračunajte odgovarajući omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora.

Rješenje:

Iz uvjeta zadatka dobivamo da je:

$$\frac{S}{N}\Big|_{\mathrm{dB}} \geq 40\,\mathrm{dB} \Rightarrow \frac{S}{N_q} = 10000$$

Gdje je S srednja snaga signala, a N_q srednja snaga kvantizacijskog šuma.

Ukupan broj L svih diskretnoh razina na ulazu kvantizatora možemo dobiti iz izraza:

$$\frac{S}{N_q} = \frac{3}{2} \cdot L^2 \Rightarrow L = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{S}{N_q}} \approx 81{,}6 \Rightarrow L = 82$$

Također vrijedi $L = 2^r$ gdje je r broj bita koji se koriste za opis svakog uzorka:

$$L = 2^r \Rightarrow r = \log_2 L \approx 6{,}36 \Rightarrow r = 7$$

Dakle, broj potrebnih bitova za opis svakog uzorka je 7.

Izračunajmo potrebni omjer $\frac{S}{N}\Big|_{\mathrm{dB}}$:

$$\frac{S}{N_q}\Big|_{\mathrm{dB}} = 1{,}76 + 6{,}02 \cdot r = 43{,}9\,\mathrm{dB}$$

***Zadatak-14*:** Signal $u_m(t)=10\sin(2\pi 1000t)$ uzorkuje se frekvencijom od 3 kHz. Uzorci se potom kvantiziraju u kvantizatoru ((jednoliko kvantiziranje) s osam razina. Proračunajte omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora.

Rješenje:

Iz broja diskretnih razina kvantizatora možemo dobiti broj bitova koji se koriste za opis svakog uzorka.

$$L=2^r$$
$$8=2^r \Rightarrow r=3$$

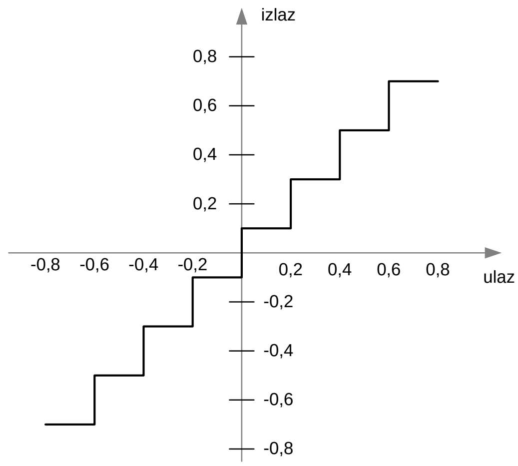
Sada lako dobijemo omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora, tj.:

$$\frac{S}{N_q}\Big|_{\mathrm{dB}}=1{,}76+6{,}02\cdot r=1{,}76+6{,}02\cdot 3=19{,}82\,\mathrm{dB}$$

Odnosno:

$$\frac{S}{N_q}=96{,}15.$$

***Zadatak-15*:** Na ulaz PCM (engl. *Pulse Code Modulation*) sustava dolazi signal $u_m(t) = 0{,}8\sin(2\pi 2000t + \frac{\pi}{4})$. Uzimanje uzoraka izvodi se u trenucima $t = kT_0$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ i $T_0 = 125\mu s$. Amplitude uzoraka nalaze se u intervalu $|u(t)| \le 0{,}8$ i kvantiziraju u kvantizatoru (jednoliko kvantiziranje) s osam kvantizacijskih razina (Slika 2.4). Koder izvodi kodiranje uzoraka binarnim kodom. Odredite analitički oblik signala na izlazu iz dekodera (prijamnik!).



Slika 2.4

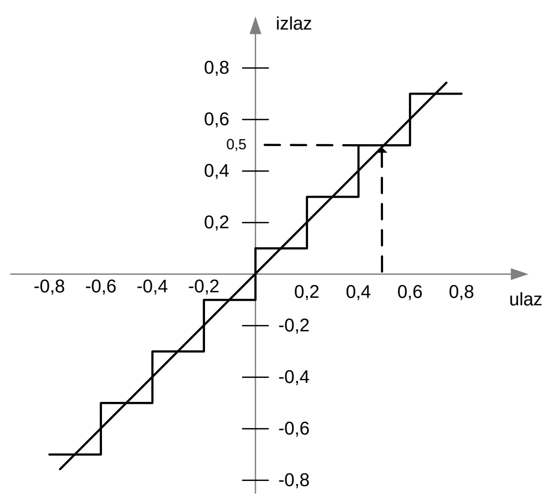
Rješenje:

Ako uzmemo uzorke signala $u_m(t) = 0{,}8\sin\left(2\pi 2000t + \frac{\pi}{4}\right)$ u trenucima $t = kT_0, k = 0, \pm1, \pm2, ...\mathrm{i}\, T_0 = 125\,\mu s$,

odnosno frekvencijom uzorkovanja $f_u = 8\,\mathrm{kHz}$, zabilježit ćemo slijedeće vrijednosti signala (zbog periodičnosti signala navedene su samo prve četiri vrijednosti):

$$u_m(0) = u_m(T_0) = 0{,}565\,\mathrm{V}$$
$$u_m(2T_0) = u_m(3T_0) = -0{,}565\,\mathrm{V}$$

Kvantizator će preslikati dane uzorke u kvantizacijske razine + 0,5 V odnosno -0,5 V, kao što i vidimo na sljedećoj slici.



Dakle, signal $u_m(t)$ na izlazu iz kvantizatora jednak je:

$$u_m(t)=\begin{cases} 0{,}5\,\mathrm{V}\,\text{za}\; u_m(0)=u_m(T_0) \\ -0{,}5\,\mathrm{V}\,\text{za}\; u_m(2T_0)=u_m(3T_0) \end{cases}$$

Signal na izlazu iz dekodera (prijemnik) će biti oblika:

$$u_m^{\prime}(t)=U^{\prime}\sin\left(2\pi 2000t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Budući da, zbog pogreške kvantizacije, vrijedi da je u trenucima $t=kT_0, k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \text{i}\, T_0=125\,\mu s$,

$u_m^{\prime}=\pm 0{,}5\,\mathrm{V},$ dobivamo:

$$u_m^{\prime}(0)=U^{\prime}\sin\left(2\pi 2000t+\frac{\pi}{4}\right)=0{,}5$$

$$U^{\prime}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}5\Rightarrow U^{\prime}=0{,}707$$

Dakle, signal na izlazu iz dekodera je oblika:

$$u_m^{\prime}(0)=0{,}707\cdot\sin\left(2\pi 2000t+\frac{\pi}{4}\right)[\mathrm{V}]$$

3. Zaštitno kodiranje

Zadatak-1: Dan je kôd [k+1, k] s parnim paritetom.
a) Izračunajte sve kodne riječi koda [4,3]!

b) Koje pogreške može detektirati ovakav kôd?

c) Izračunajte vjerojatnost nedetektiranih pogrešaka (p_{np}), uz uvjet da se pogreške na jednom bitu pojavljuju s vjerojatnošću p_g = 0,04!

Rješenje:

a) Kodne riječi koda [4, 3] su:

0000	1001
0011	1010
0101	1100
0110	1111

b) Ovaj kôd može detektirati jednostruke i trostruke pogreške. Uslučaju parnog broja pogrešaka, poslana kodna riječ bi prešla u neku od 8 kodnih riječi koda i pogreške ne bi bile detektirane.

c) Vjerojatnost nedetktiranih pogrešaka p_{np} jednaka je zbroju vjerojatnosti dvostrukih i četverostrukih pogrešaka i iznosi:

$$p_{np} = \binom{4}{2} p_g^2 (1 - p_g)^2 + \binom{4}{4} p_g^4 (1 - p_g)^0 = 8{,}8 \cdot 10^{-3}$$

Zadatak-2: Dan je binarni kôd [6, 3] s matricom **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Da li je slijed [101010] kodna riječ?

b) Neka je kodna riječ dana u obliku [*X*11100]. Odredite *X*.

c) Pretpostavimo da je kodna riječ [001111] odaslana, a [001101] primljena. Odredite sindrom!

d) Ispišite sve kodne riječi u ovom kodu.

e) Koji je najmanji mogući broj pogrešaka koje jednu kodnu riječ prevode u drugu.

Rješenje:

a) Ako je slijed [101010] kodna riječ, onda vrijedi $[101010] \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$

Matrica **H** je oblika:

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \middle| \; \mathbf{I} \right]$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vidimo da je uvijet $[101010] \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ ispunjen i slijed [101010] je kodna riječ danog koda.

b) Znamo da svaku kodnu riječ **c** nekog koda mora vrijediti $\mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$. Ako u gornji izraz uvrstimo **c**=[11100], s lijeve strane izraza dobit ćemo [*X*0*X*] iz čega zaključujemo da *X* mora biti jednak nuli.

c) U danom slučaju sindrom iznosi:

$$\mathbf{s} = [001101] \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = [001101] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [010]$$

d) Generirajuća matrica **G** danog koda je oblika

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ako sada uvrstimo sve kodirane poruke **d**, od [000] do [111] u izraz $\mathbf{c} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{G}$, dobiti ćemo sve kodne riječi **c** u ovom kodu:

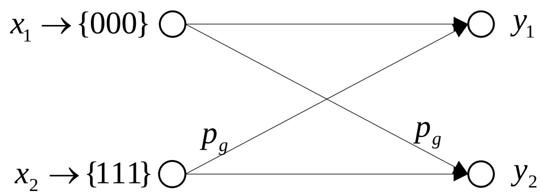
000000
001111
010011
011100
100101
101010
110110
111001

e) Najmanji mogući broj pogrešaka koje jednu kodnu riječ prevode u drugu jednak je tri.

Zadatak-3: Dvije kodne riječi "000" i "111" koriste se za prijenos informacija preko diskretnog binarnog simetričnog kanala u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa p=0,2. Na prijamnoj strani se kod dekodiranja koristi pravilo minimalne udaljenosti. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja. Također, odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja za slučaj binarnog kanala s brisanjem simbola u kojem je vjerojatnost brisanja p=0,2.

Rješenje:

a) Skicirajmo prvi kanal:



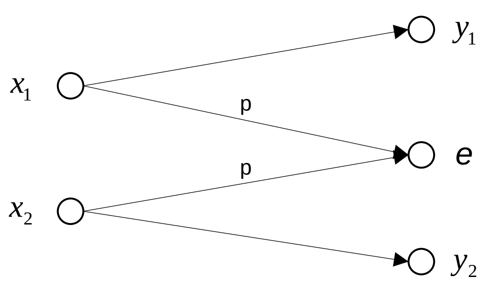
Slijed bitova na izlazu iz kanala će se dekodirati ovako:

$\underline{\underline{000}}$	$\underline{\underline{111}}$
001	101
010	110
100	011

Vjerojatnost pogrešnog kodiranja p_e iznosi:

$$p_e = \binom{3}{2} p^2(1-p) + \binom{3}{3} p^3(1-p)^0 = 3p^2(1-p) + p^3 = 0{,}1040$$

b) Skicirajmo kanal s brisanjem simobla:



Vjerojatnost pogrešnog dekodiranja za slučaj binarnog kanala s brisanjem simbola p_e iznosi:

$$p_e = \frac{1}{2}\binom{3}{3} p^3(1-p)^0 = \frac{1}{2}\cdot\ p^3 = 0{,}0040$$

Zadatak-4: Mjerenjem je utvrđeno da u binarnom komunikacijskom kanalu djeluju smetnje koje mogu uzrokovati pogrešan prijenos od jednog bita u slijedu od najmanje 17 uzastopnih bita. Za zaštitu informacije uporabljen je Hammingov koder, a duljina zaštitno kodiranog bloka prilagođena je uvjetima koji vladaju u kanalu.
Za informaciju zadanu s m_n binarnih elemenata:

m_1	m_2	$m_3\ldots$		m_n
1	0	1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1	....	1

a) Odredite prvi zaštitno kodirani blok.
b) Za koliko će se smanjiti ili povećati kodna brzina ako se zbog promjene u djelovanju smetnji duljina kodirane poruke postavi na 11 bita?

Rješenje:

a) Utvrđeno je da smetnje u kanalu mogu uzrokovati pogrešan prijenos jednog bita u slijedu od 17 bitova, odnosno na svakih 17 bitova prenesenih kanalom dolazi ili jedan ili nijedan pogrešan bit. Znamo da Hammingov koder može sigurno otkriti i ispraviti jednostruku pogrešku, te zaključujemo da kodna riječ može biti duljine najviše 17 bitova. Ako bi kodna riječ bila duga, npr. 18 bitova, postoji vjerojatnost da se u prijenosu dogode dvije pogreške i Hammingov kôd ih neće biti u stanju ispraviti. Dakle, za zaštitu informacije ćemo koristiti Hammingov koder [17,12], tj. kodna riječ će biti duljine 17 bitova i sastojat će se od 12 informacijskih i 5 zaštitnih bitova.

Znači prvi informacijski blok koji ćemo zaštititi je [101010101101].

Zaštitni bitovi kod kodne riječi kodirane Hammingovim kodom su postavljeni na pozicijama koje odgovaraju potencijama broja 2 (1, 2, 4, 8, 16,…) i dobivaju se kao paritetni bitovi određenih podgrupa informacijskih bitova poruke, kao što vidimo u izrazima dolje (u slučaju da nije drugačije naznačeno, pod „paritet" se zapravo podrazumjeva parni paritet):

$$x_1 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 \oplus m_5 \oplus m_7 \oplus \ldots = x_3 \otimes x_5 \otimes x_7 \otimes x_9 \otimes x_{11} \otimes \ldots$$
$$x_2 = m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_6 \oplus m_7 \oplus \ldots = x_3 \otimes x_6 \otimes x_7 \otimes x_{10} \otimes x_{11} \otimes \ldots$$
$$x_4 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_8 \oplus m_9 \oplus m_{10} \otimes \ldots m_{11} \otimes =$$
$$= x_5 \otimes x_6 \otimes x_7 \otimes x_{12} \otimes x_{13} \otimes x_{14} \otimes x_{15} \otimes \ldots$$

x_i označava *i*-ti bit kodne riječi, a m_i *i*-ti informacijski bit poruke.

Kodirajmo sada tim postupkom zadani informacijski blok [101010101101]:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}
_	_	1	_	0	1	0	_	1	0	1	0	1	1	0	_	1
$\underline{1}$		1		0		0		1		1		1		0		1
	$\underline{0}$	1			1	0			0	1			1	0		
			$\underline{1}$	0	1	0					1	1	1	0		
							$\underline{0}$	1	0	1	1	1	1	0		
															$\underline{1}$	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1

b) Kodna brzina *R* nekog koda jednaka je omjeru broja informacijskih bitova i ukupnog broja bitova u kodnoj riječi.

Kodna brzina koda (17,12) iznosi: $R_1 = \frac{12}{17} = 0{,}7059\left(70{,}59\%\right).$

Ako se duljina kodne riječi ograniči na 11 bitova, analizom možemo zaključiti da će se ona sastojati od 7 informacijskih i 4 zaštitna bita (zaštitni bitovi se nalaze na pozicijama 1, 2, 4 i 8, dakle ukupno ih ima četri), tj. koristit ćemo kôd [11,7].

Kodna brzina koda [11,7] iznosi: $R_1 = \frac{7}{11} = 0{,}6364\left(63{,}64\%\right)$.

Zaključujemo da se nakon postavljanja duljine kodne riječi na 11 bita kodna brzina smanjila za 0,0695 (6,95%) u odnosu na slučaj kada je duljina kodne riječi bila 17 bitova.

Zadatak-5: Slijed bita **x**=[10101010101] ulazi u Hammingov koder [15, 11] i nakon toga se prenosi prijenosnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita $p_g=2\times10^{-3}$.

a) Odredite generirajuću matricu **G**.

b) Odredite izlazni slijed iz kodera za dani ulazni slijed **x**.

c) Ako je primljena kodna riječ **c**=[11111100000000], odredite koja je kodna riječ poslana.

d) Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja (p_{pd}).

Rješenje:

a) Matrica provjere pariteta **H** koda [15,11] je oblika:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz matrice provjere pariteta **H** možemo dobiti generirajuću matricu **G** koda [15,11] koja je oblika:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Izlazni slijed iz kodera **c** možemo dobiti tako da pomnožimo ulazni slijed **x** = [10101010101] s generirajućom matricom **G**:

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{G} = [101101001010101]$$

c) Pomoću gore dobivene matrice provjere pariteta **H** i možemo izračinati sindrom **s**:

$$\mathbf{s}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=[1110]$$

Budući da je sindrom s jednak [1110], odnosno 7, zaključujemo da se dogodila pogreška u prijenosu i to na <u>sedmom bitu</u> kodne riječi.

Dakle, poslana je kodna riječ [111111100000000].

d) Vjerojatnost pogrešnog dekodiranja (p_{pd}) iznosi:

$$p_{pd}=1-\binom{15}{0}p_e^0(1-p_e)^{15}-\binom{15}{1}p_e^1(1-p_e)^{14}=4{,}129\cdot10^{-4}$$

Zadatak-6: Ciklični kôd [7, *k*] opisan je generirajućim polinomom $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

a) Odredite generirajuću matricu **G** = [**I**|**A**].

b) Odredite kodnu riječ koja počinje s [110].

c) Nacrtajte ciklički koder.

Rješenje:

a) Odredimo generirajuću matricu **G** danog cikličnog koda:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

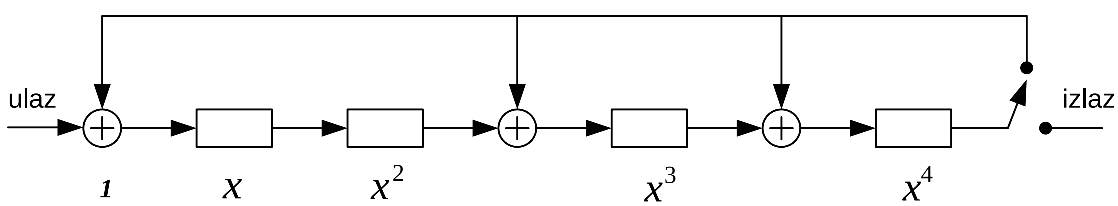
Dakle, matrica **G** iznosi:

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

b) Kod cikličkog koda [7,3] prva tri bita kodne riječi su informacijski bitovi te kodnu riječ možemo dobiti množenjem kodirane poruke [110] s generirajućom matricom **G**:

c = [110]·**G** = [1101001]

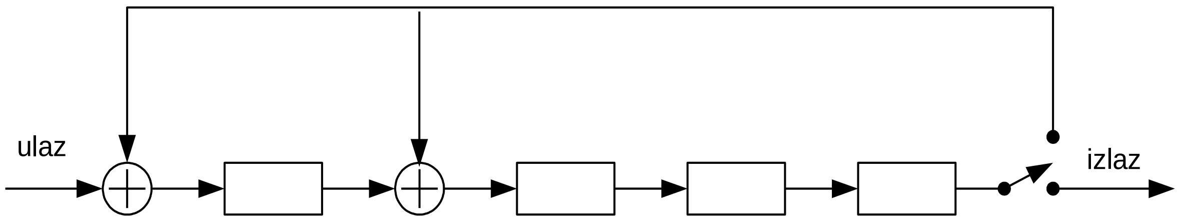
c) Ciklični koder za dani kôd izgleda ovako:



Zadatak-7: Na slici (Slika 3.1) dan je koder za ciklični kôd [15, *k*].

a) Odredi generirajući polinom $g(x)$.

b) Kodirajte slijed 10001001010.



Slika 3.1 Ciklički koder [15, *k*] u zadatku 7

Rješenje:

a) Iz slike kodera lako možemo očitati generirajući polinom $g(x)=x^4+x+1$ i isto tako (budući da je stupanj polinoma jednak četri) da se radi o cikličnom kodu [15,11].

b) Kôd je [15,11] dakle prvi kodirani slijed dobit će se iz prvih 11 bitova ulaznog slijeda, tj. iz "10001001010".

Jedno od temeljnih svojstava cikličnih kodova je da zaštitne bitove neke kodne riječi možemo dobiti kao ostatak dijeljenja kodirane poruke (tj. informacijskih bitova) napisane u polinomnom obliku te pomnožene sa x^{n-k} (n - duljina kodirane poruke, k - broj informacijskih bitova) i genererirajućeg polinoma $g(x)$, tj.

$$r(x) = \text{ost}\,\frac{x^{n-k}\cdot d\,(x)}{g(x)}$$

U našem slučaju to bi bilo:

$$\frac{x^{n-k}\cdot \mathrm{d}(x)}{g(x)} = \frac{x^4\left(x^{10}+x^6+x^3+x\right)}{g(x)} = x^{10}+x^7+x^4+1 \text{ uz ostatak } x+1$$

Vidimo da ostatak pri dijeljenju iznosi $x+1$, odnosno [0011] iz čega slijedi da je tražena kodna riječ **c**=[10001001010<u>0011</u>].

Zadatak-8: Potrebno je generirati ciklični kôd [n, k]=[6,2] koristeći jedan od niže navedenih generirajućih polinoma:

$$g(x)=x^3+x+1$$

$$g(x)=x^2+1$$

$$g(x)=x^4+x^2+1$$

a) Odredite generirajuću matricu **G**=[**I**|**A**].

b) Napišite sve kodne riječi za dani ciklični kôd.

c) Koliko pogrešaka može ispraviti dani kôd?

d) Nacrtajte ciklični koder [6,2] za odabrani polinom $g(x)$.

Rješenje:

a) Znamo da je ciklični kôd [6,2], tj. kodna riječ sadrži četiri zaštitna bita, iz čega zaključujemo da generirajući polinom mora biti četvrtog stupnja, te je

$$g(x)=x^4+x^2+1.$$

Sada lako možemo pomoću generirajućeg polinoma odrediti generirajuću matricu **G** koja je oblika:

$$\mathbf{G}=\left[\begin{array}{cc|cccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

b) Ciklični kôd je [6,2], dakle kodirane poruke su dvobitne i mogu biti 00,01,10 i 11.

Uz pomoć generirajuće matrice **G** lako možemo iz kodiranih poruka dobiti sve četiri kodne riječi **c** danog cikličnog koda.

d	$c=d\cdot G$
00	000000
01	010101
10	101010
11	111111

c) Za svaki linearni blok kôd vrijedi:

$$2^{n-k}\geq\sum_{i=0}^{t}\binom{n}{i}$$

gdje je ***n*** duljina kodne riječi, ***k*** broj informacijskih bitova u kodnoj riječi, a ***t*** broj pogrešaka koje kôd može ispraviti.

Primijenimo ovaj uvjet:

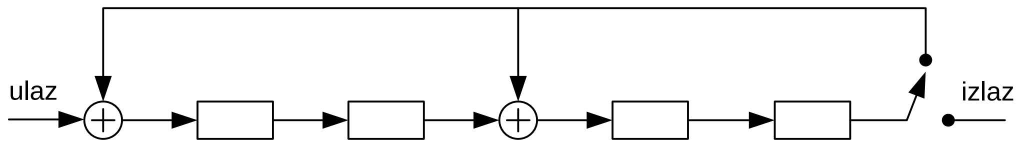
$$2^{n-k}\geq\sum_{i=0}^{t}\binom{n}{i}$$

$$2^{7-4}\geq\sum_{i=0}^{t}\binom{7}{i}$$

$$8\geq\binom{7}{0}+\binom{7}{1}=1+7=8$$

Iz gornjeg proračuna možemo vidjeti da dani kôd može ispraviti najviše jednu pogrešku.

d) Ciklični koder danog koda izgleda ovako:

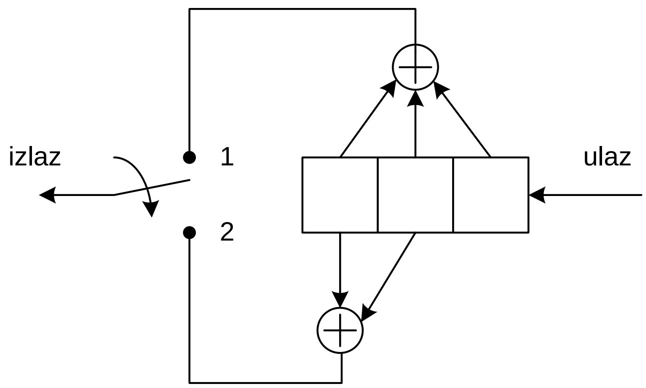


Zadatak-9: Za konvolucijski koder sa slike (Slika 3.2).

(a) Skicirajte dijagram stanja navodeći ulazne i izlazne bitove na prijelaznim granama dijagrama.

(b) Odredite kodiranu poruku koja se pojavljuje na izlazu kodera ako se na njegov ulaz dovede poruka **d**=[1001110100]. **Napomena:** bitovi poruke **d** ulaze u koder gledano s lijeva na desno.

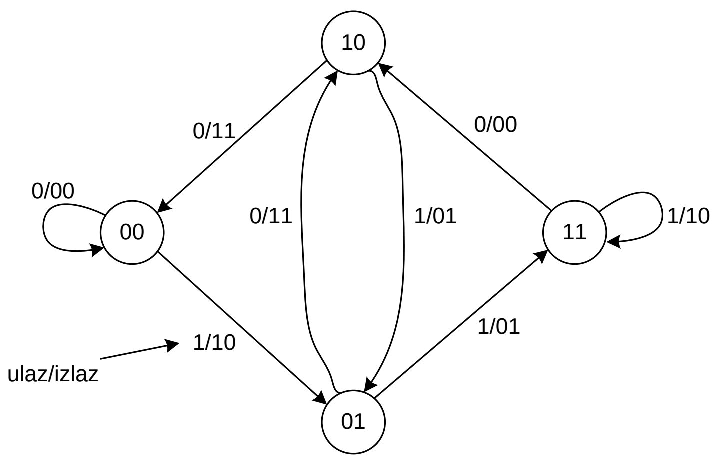
(c) Skicirajte rešetkasti dijagram za dani konvolucijski koder.



Slika 3.2 Konvolucijski koder u zadacima 9, 10 i 11

Rješenje:

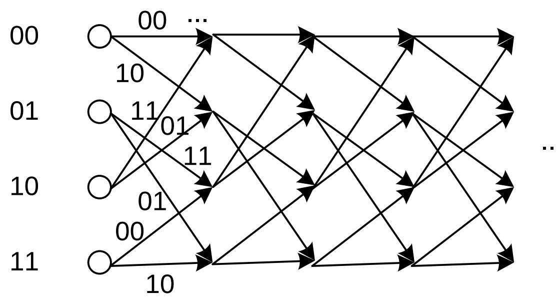
a)



b)

ulaz	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
izlaz	10	11	11	10	01	10	00	01	11	11

c)



Zadatak-10: Pozovimo se na zadatak-9.

(a) Neka se u prijenosu dogodi pogreška u kodiranoj poruci na trećem i sedmom bitu. Koristeći Viterbijev algoritam (uzimajući u obzir da se koristi dekoder s tvrdim odlučivanjem) potrebno je odrediti četiri preživjela puta nakon primitka posljednjeg bita kodirane poruke.

(b) Odredite preživjeli put s minimalnom udaljenosti, te na osnovu njega odredite najvjerojatniju poslanu kodiranu poruku.

Rješenje:

a)

poslana kodna riječ (s)	10	11	11	10	01	10	00	01	11	11
primljena kodna riječ (s`)	10	01	11	00	01	10	00	01	11	11

Viterbijev algritam.

$j =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	prethodno	sadašnje	Hamm.
s´=	10	01	11	00	01	10	00	01	11	11	stanje	stanje	dist.
putovi:	00	00	00	00	01	10	00	01	11	11	00	00	4
	10	11	11								10		1^*
	00	00	10								00	01	3
	10	11	01								10		2^*
	00	10	11								01	10	3
	10	01	00								11		2^*
	00	10	01								01	11	4
	10	01	10								11		1^*
	10	11	11	00							00	00	$1+0^*$
	10	01	00	11							10		$2+2$
	10	11	11	10							00	01	$1+1^*$
	10	01	00	01							10		$2+1$
	10	11	01	11							01	10	$2+2$
	10	01	10	00							11		$1+0^*$
	10	11	01	01							01	11	$2+1$
	10	01	10	10							11		$1+1^*$

10	11	11	00	00	00	00	1+1*
10	01	10	00	11	10		1+1
10	11	11	00	10	00	01	1+2
10	01	10	00	01	10		1+0*
10	11	11	00	11	01	10	2+1*
10	01	10	00	00	11		2+1
10	11	11	00	01	01	11	2+0*
10	01	10	00	10	11		2+2

10	11	11	00	00	00	00	00	2+1*
10	11	11	10	11	11	10		3+1
10	11	11	00	00	00	00	01	2+0*
10	11	11	10	11	11	10		3+2
10	01	10	00	01	01	01	10	1+1*
10	11	11	10	01	01	11		2+1
10	01	10	00	01	01	01	11	1+2
10	11	11	10	01	01	11		2+2*

10	11	11	00	00	00	00	00	00	3+0*
10	01	10	00	01	11	11	10		2+2
10	11	11	00	00	00	10	00	01	3+1*
10	01	10	00	01	11	01	10		2+1*
10	11	11	00	00	10	11	01	10	2+2
10	11	11	10	01	10	00	11		2+0*
10	11	11	00	00	10	01	01	11	2+1*
10	11	11	10	01	10	10	11		2+1

10	11	11	00	00	00	00	00	00	00	3+1
10	11	11	10	01	10	00	11	10		2+1*
10	11	11	00	00	00	00	10	00	01	3+2
10	11	11	10	01	10	00	01	10		2+0*
10	01	10	00	01	11	01	11	01	10	3+1*
10	11	11	00	00	10	01	00	11		3+1
10	01	10	00	01	11	01	01	01	11	3+0*
10	11	11	00	00	10	01	10	11		3+2

10 11 11 10 01 10 00 11 00	00	00	$3+2$
10 01 10 00 01 11 01 11 11	10		$4+0*$
10 11 11 10 01 10 00 11 10	00	01	$3+1*$
10 01 10 00 01 11 01 11 01	10		$4+1$
10 11 11 10 01 10 00 01 11	01	10	$2+0*$
10 01 10 00 01 11 01 01 00	11		$3+2$
10 11 11 10 01 10 00 01 01	01	11	$2+1*$
10 01 10 00 01 11 01 01 10	11		$3+1$

10 01 10 00 01 11 01 11 11 00	00	00	$4+2$
10 11 11 10 01 10 00 01 11 11	10		$2+0*$
10 01 10 00 01 11 01 11 11 10	00	01	$4+1$
10 11 11 10 01 10 00 01 11 01	10		$2+1*$
10 11 11 10 01 10 00 11 10 11	01	10	$4+0$
10 11 11 10 01 10 00 01 01 00	11		$3+2$
10 11 11 10 01 10 00 11 10 01	01	11	$4+1$
10 11 11 10 01 10 00 01 01 10	11		$3+1*$

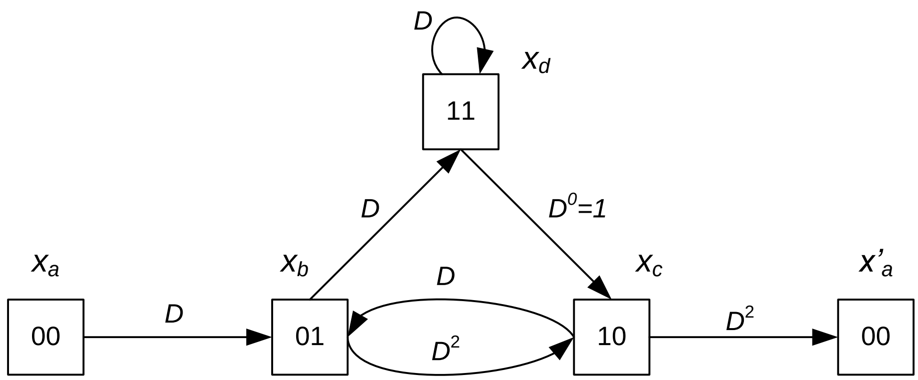
„*“ – preživjeli put

b) Put s minimalnom udaljenošću (2) označen je u tablici Viterbijevog algoritma, tj. najvjerojatnija poslana kodna riječ je **s**=[10 11 11 10 01 10 00 01 11 11].

Zadatak-11: Odredite prijenosnu funkciju $T(D)$ za konvolucijski koder sa slike (Slika 3.2, Zadatak-9). Odredite put s minimalnom mogućom udaljenosti (d_{min}).

Rješenje:

Niže je dan dijagram stanja na konvolucijski koder iz zadatka 9.



Dani dijagram stanja iskoristit ćemo u svrhu zadavanja slijedećih jednadžbi:

$$(1) x_b = D(x_a + x_c)$$
$$(2) x_c = D^2 x_b + x_d$$
$$(3) x_d = D(x_b + x_d)$$

$$\text{Iz}\,(3) \Rightarrow x_d = \frac{1}{1-D} x_b \underset{\longrightarrow}{(2)} x_c = \left(D^2 + \frac{D}{1-D} \right) x_b = \frac{D^2 - D^3 + D}{1-D} x_b \underset{\longrightarrow}{(1)} \frac{1-D}{D + D^2 - D^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1-D}{D + D^2 - D^3} - D \right) x_c = D \cdot x_a$$

Obzirom da je $x_a^` = D^2 x_c$ dobivamo $\dfrac{1 - D - D(D + D^2 - D^3)}{D + D^2 - D^3} \cdot \dfrac{x_a^`}{D^2} = D x_a$.

Prijenosna funkcija $T(D)$ definirana je kao:

$$T(D) = \frac{x_a^`}{x_a} = \frac{D^3(D + D^2 - D^3)}{1 - D - D^2 - D^3 + D^4} = \frac{D^4}{1 - D - D^2 - D^3 + D^4} + \frac{D^5}{1 - D - D^2 - D^3 + D^4} - \frac{D^6}{1 - D - D^2 - D^3 + D^4}$$

Lako se pokazuje da je minimalna moguća udaljenost koda $d_{\min}=4$ i da ista odgovara putu

$$00 \xrightarrow{10} 01 \xrightarrow{01} 11 \xrightarrow{00} 10 \xrightarrow{11} 00.$$

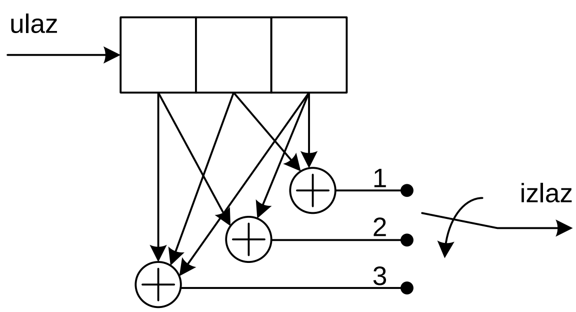
Zadatak-12: Za konvolucijski koder sa slike (Slika 3.3):

(a) Skicirajte dijagram stanja navodeći ulazne i izlazne bitove na prijelaznim granama dijagrama.

(b) Odredite izlazni slijed bitova ako je ulazni slijed **d**=[1100101]. **Napomena:** bitovi poruke **d** ulaze u koder gledano s lijeva na desno.

(c) Odredite prijenosnu funkciju $T(D)$.

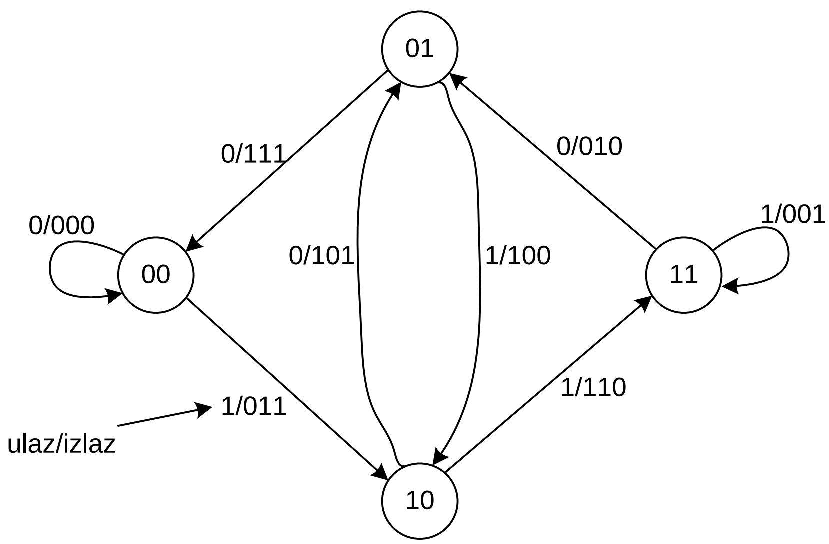
(d) Odredite minimalnu moguću udaljenost koda (d_{min}).



Slika 3.3 Konvolucijski koder u zadatku 12

Rješenje:

a)



b)

ulaz	1	1	0	0	1	0	1
izlaz	011	100	010	111	011	101	100

c)

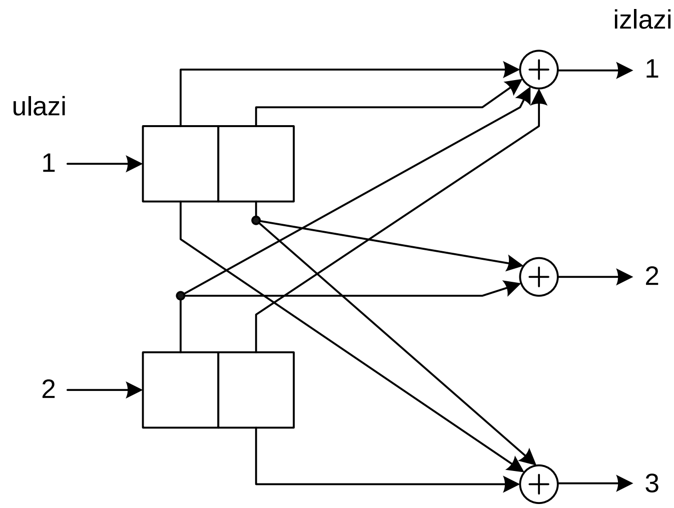
$$T(D) = \frac{D^7}{1 - D - D^3}$$

d) Put $00 \xrightarrow{011} 10 \xrightarrow{101} 01 \xrightarrow{111} 00$. daje minimalnu moguću udaljenost koda koja iznosi $d_{\min}=7$

Zadatak-13: Skicirajte konvolucijski koder (k=2, n=3, L=2) ako su dani njegovi funkcijski generatori:

$h_1^{(1)} = h_2^{(1)} = h_1^{(3)} = [1\,1]$, $h_1^{(2)} = h_2^{(3)} = [0\,1]$ i $h_2^{(2)} = [1\,0]$.

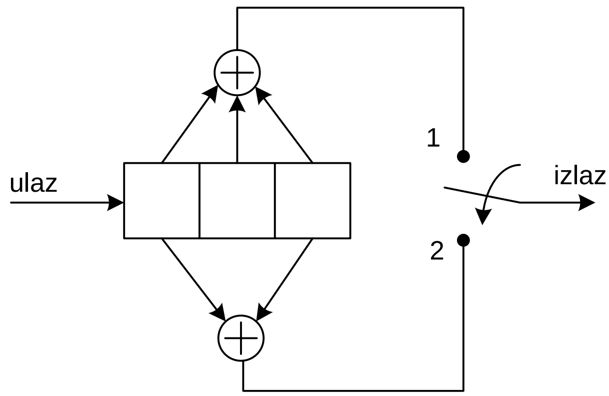
Rješenje:



Zadatak-14: Dan je konvolucijski koder kao na slici (Slika 3.4).

(a) Skicirajte dijagram stanja za dani koder.

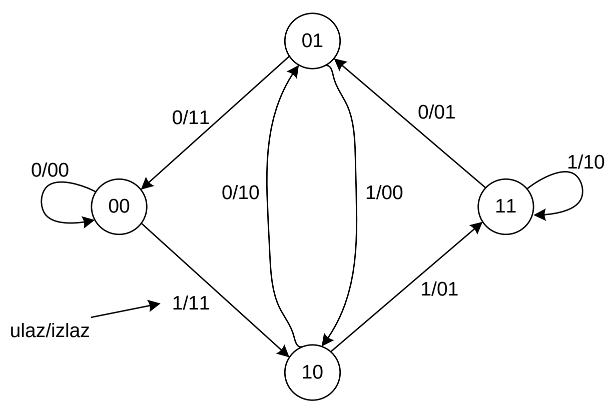
(b) Odredite prijenosnu funkciju $T(D, N)$ i iz iste odredite koliko ima putova udaljenosti 7.



Slika 3.4 Konvolucijski koder u zadatku 14

Rješenje:

a)



b) $T(D,N)=\dfrac{D^5 N}{1-2DN}$. U grafu postoje četiri puta udaljenosti 7.

4. Entropijsko kodiranje

Zadatak-1: Markovljevo izvorište definirano matricom prijelaznih vjerojatnosti, [$p(x_j/x_i)$], generira simbole iz skupa simbola $\boldsymbol{X}$ = {a, b, c}.

$$\left[p(x_j|x_i)\right]=\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6\end{bmatrix}$$

a) Optimalno kodirajte binarnim kodom (Huffman!) sve parove simbola.
b) Odredite srednju duljinu kodne riječi.
c) Provjerite je li zadovoljena Kraftova nejednakost za dobiveni skup kodnih riječi.

Rješenje:

Rješavajući sustav jednadžbi

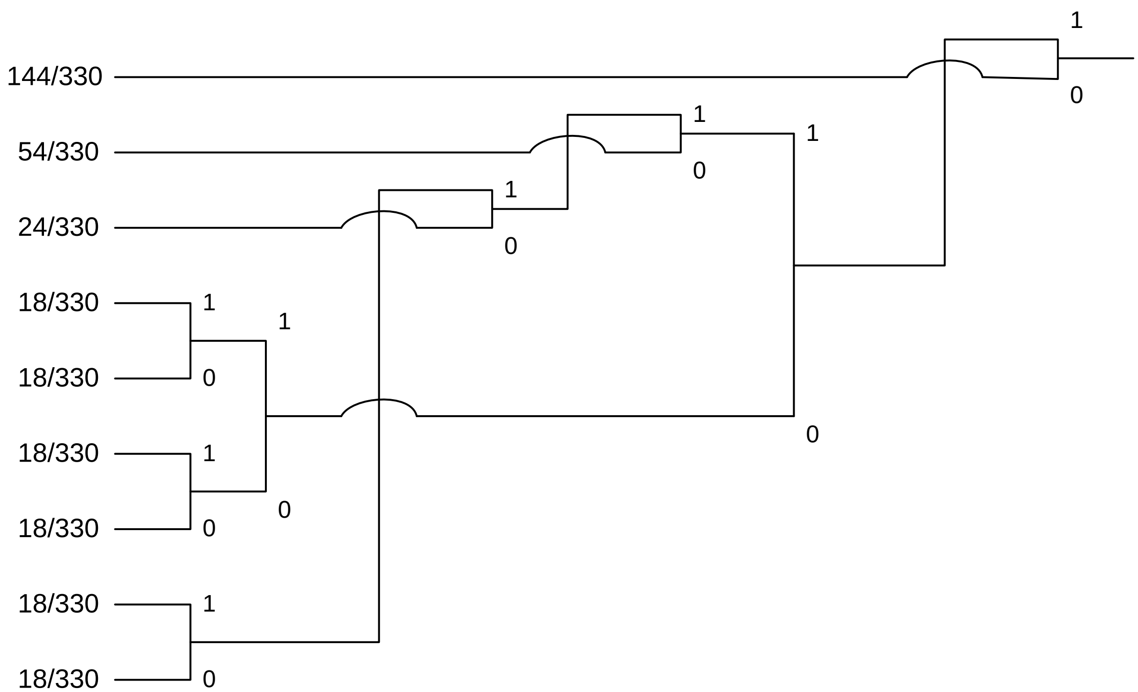
$$\begin{aligned}p_a &= 0{,}8p_a + 0{,}3p_b + 0{,}2p_c\\ p_b &= 0{,}1p_a + 0{,}4p_b + 0{,}2p_c\\ p_a + p_b + p_c &= 1\end{aligned}$$

Dobivamo vjerojatnosti pojavljivanja simbola na izvorištu, tj. $p_a = 18/33 = 6/11$, $p_b = 6/33 = 2/11$, $p_c = 9/33 = 3/11$.

Matrica združenih vjerojatnosti pojavljivanja simbola je:

$$\left[p(x_i, x_j)\right]=\begin{bmatrix}\frac{144}{330} & \frac{18}{330} & \frac{18}{330}\\ \frac{18}{330} & \frac{24}{330} & \frac{18}{330}\\ \frac{18}{330} & \frac{18}{330} & \frac{54}{330}\end{bmatrix}$$

a) Postupak kodiranja dan je na slici:



Iz grafa sa slike očitavamo:

$p_i\ (x_i, y_j) = p_i$	Kodna riječ	l_i
144/330	0	1
54/330	110	3
24/330	1110	4
18/330	1011	4
18/330	1010	4
18/330	1001	4
18/330	1000	4
18/330	11111	5
18/330	11110	5

b) $L = 2{,}636\,\text{bit/simbol}$

c) Lako se pokazuje da vrijedi: $\sum_{i=1}^{9} 2^{-l_i} \leq 1.$

Zadatak-2: Slijed simbola s vjerojatnostima (u %) pojavljivanja {8.1, 11.3, 8.6, 6, 9.8, 8.5, 3.1, 13.5, 6.3, 6, 9.1, 9.7} kodirajte dibitima (kvaternarnim simbolima) tako da **srednja duljina kodne riječi bude minimalna**. Izračunajte srednju duljinu kodne riječi (u dibitima) i efikasnost koda. Odredite za koliko se smanji ili poveća efikasnost koda ovim kodiranjem u odnosu na kodiranje istog skupa simbola binarnim kodom?

Rješenje:

Prilikom kodiranja u bilo kojoj drugoj bazi koja je različita od 2, potrebno je provjeriti da li imamo dovoljan broj simbola u cilju ispravnog provođenja algoritma kodiranja. Ako je broj simbola nedovoljan tada je potrebno dodati određeni broj simbola (s vjerojatnošću pojavljivanja 0) u postojeći skup u cilju provođenja kodiranja.
Prvo treba proračunati slijedeće:

$$k' = \left\lceil \frac{N-1}{B-1} \right\rceil \text{ i } N' = k'(B-1)+1, \qquad (*)$$

gdje je $\boldsymbol{N}$ broj simbola, a B baza u kojoj se kodiranje provodi. Ako je $N' - N \neq 0$ tada je potrebo u postojeći skup dodati još $N' - N$ simbola s vjerojatnošću pojavljivanja 0. U protivnom, kada je $N' - N = 0$ kodiranje možemo provesti bez dodavanja.

Postavlja se pitanje kako smo došli do formule (*). Odgovor ćemo dati kroz dva jednostavna primjera. Neka je baza, B, u kojoj treba provesti kodiranje 3. Tada, ako je broj simbola N = 3, 5, 7, 9, ... kodiranje je moguće provesti bez dodavanja novih simbola. Za sve druge vrijednosti bit će potrebno dodati određeni broj simbola, s vjerojatnošću pojavljivanja 0, u postojeći skup. Nadalje, zapišimo za dani slijed (3, 5, 7, 9, ...) brojeve koji su za jedan manjih od navedenih, tj. dobivamo (2, 4, 6, 8, ...) ili:

N		3		5		7		9	...
N'	2		4		6		8		...
$N' = k(B\text{-}1)$, k = 1, 2, ...									

Uočavamo, iz prethodne tablice, da bi smo kodirali u bazi 3 (B = 3) mora biti zadovoljeno sljedeće: $k(B-1) \geq (N-1)$, $k\in\mathbf{N}$ ili $k = \left\lceil \frac{N-1}{B-1} \right\rceil$. Kad odredimo <u>najmanji</u> k (označimo ga s k') za koji je prethodna nejednakost zadovoljena ostaje nam da nađemo novi broj simbola ($N' = k(B\text{-}1)+1$) za koji kodiranje moguće provesti. Razlika $N' - N$ određuje broj simbola koje treba dodati u postojeći skup simbola u cilju ispravnog provođenja postupka kodiranja.

Potpuno ista zakonitost vrijedi za B = 4.

N		4		7		10		13	...
N'	3		6		9		12		...
$N' = k(B\text{-}1)$, k = 1, 2, ...									

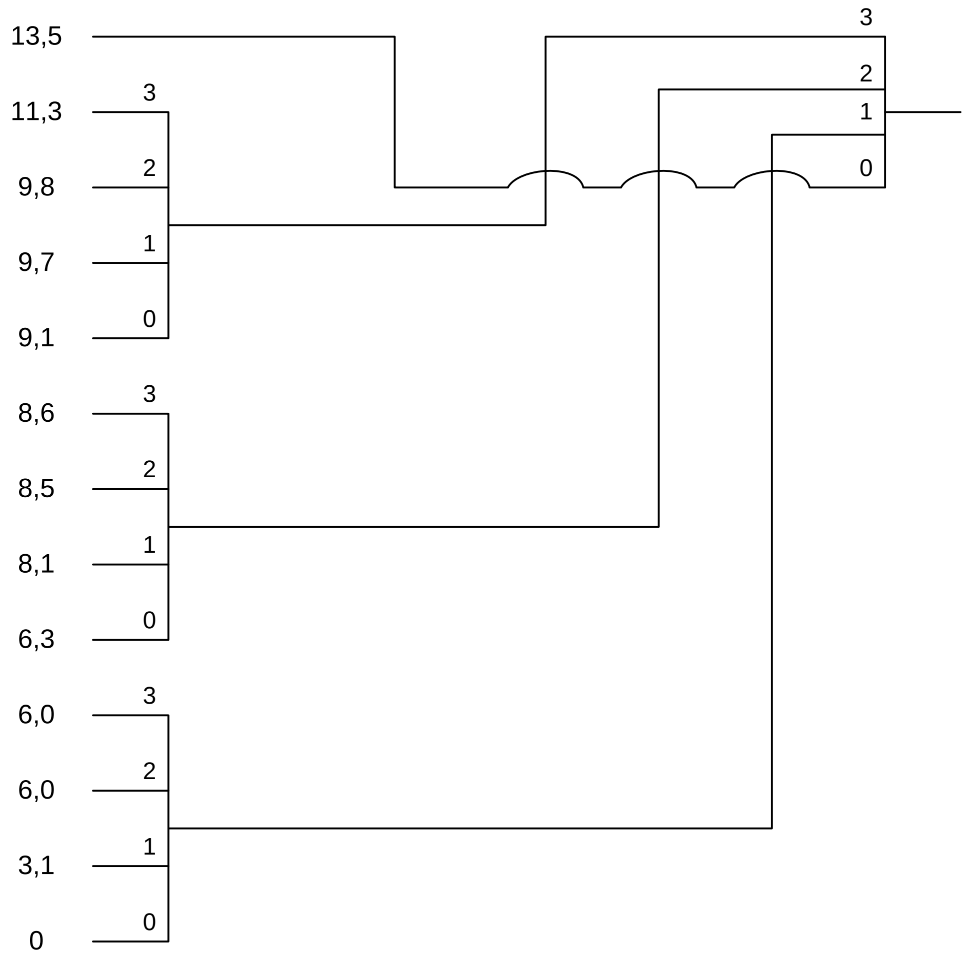
Uočavamo, iz prethodne tablice, da bi smo kodirali u bazi 4 (B=4) mora biti zadovoljeno sljedeće: $k(B-1) \geq (N-1)$, $k\in\mathbf{N}$ ili $k = \left\lceil \frac{N-1}{B-1} \right\rceil$. Vidimo da smo došli do istog matematičkog izraza kao i za bazu 3. Općenito gledano, potpuno isti zaključci vrijede za bilo koju drugu bazu.

U našem zadatku:

$$k' = \left\lceil \frac{12-1}{4-1} \right\rceil = 4 \quad \text{i} \quad N' = 4(4-1)+1 = 13.$$

Dakle, potrebno je dodati još jedan simbol s vjerojatnošću pojavljivanja 0.

Postupak kodiranja dan je na slici:



Iz grafa sa slike očitavamo:

p_i	Kodna riječ	l_i
13,5	0	1
11,3	33	2
9,8	32	2
9,7	31	2
9,1	30	2
8,6	23	2
8,5	22	2
8,1	21	2
6,3	20	2
6,0	13	2
6,0	12	2
301	11	2

Efikasnost koda definira se kao $\varepsilon_B = \frac{H(X)}{L}$, gdje je B baza u kojoj je provedeno kodiranje.

Za naš zadatak $\varepsilon_B = \frac{H(X)}{L} = 0{,}9408 \, uz \, L = \sum_{i=1}^{12} p_i l_i = 1{,}8650 \frac{\text{dibita}}{\text{simbolu}}$ i $H(X) = \sum_{i=1}^{12} p_i \log_4 p_i =$

$= 1{,}7546 \frac{\text{dibita}}{\text{simbolu}}$

Za slučaj kodiranja u bazi 2 dobivamo:

p_i	Kodna riječ	l_i
13,5	101	3
11,3	011	3
9,8	010	3
9,7	001	3
9,1	1111	4
8,6	1110	4
8,5	1101	4
8,1	1100	4
6,3	1001	4
6,0	1000	4
6,0	0001	4
3,1	0000	4

Efikasnost koda je:

$$\varepsilon_2 = \frac{H(X)}{L} = 0{,}9865 \, uz \, L = \sum_{i=1}^{12} p_i l_i = 3{,}5570 \frac{\text{dibita}}{\text{simbolu}} \text{ i } H(X) = \sum_{i=1}^{12} p_i \log_2 p_i = 3{,}5091 \frac{\text{dibita}}{\text{simbolu}}.$$

Vidimo da se efikasnost smanji za slučaj kodiranja s bazom 4.

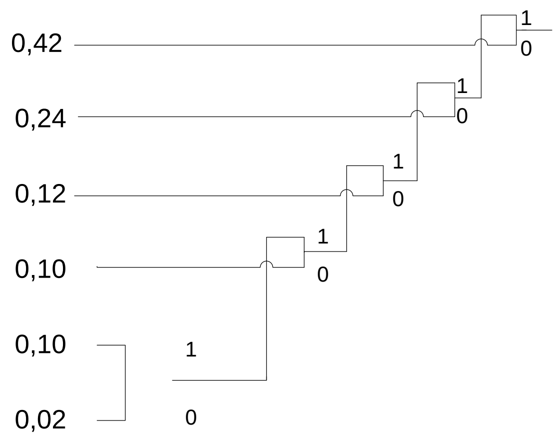
Zadatak-3: Dan je skup simbola sa sljedećim vjerojatnostima pojavljivanja:

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)=p_i$	0,24	0,42	0,10	0,12	0,10	0,02

Optimalno kodirajte dani skup simbola binarnim kodom tako da je srednja duljina kodne riječi minimalna (Huffman!). Odredite koliko mora biti trajanje binarnih simbola "0" i "1" tako da je prosječan broj simbola koje se prenesu komunikacijskim kanalom u jednoj sekundi 400.

Rješenje:

Kodirajmo zadane simbole:



Dobivamo:

p_i	Kodna riječ	l_i
0,42	0	1
0,24	10	2
0,12	110	3
0,10	1110	4
0,10	11111	5
0,02	11110	5

Srednja duljina kodne riječi L = 2,26 bit/simbol.
Dakle, prosječan broj bitova koji se prenesu komunikacijskim kanalom u jednoj sekundi je:

$$\overline{\upsilon} = 400\,\text{simbol/s} = 400\,\text{simbol/s} \cdot 2{,}26\,\text{bit/simbol} = 904\,\text{bit/s}$$

Te je trajanje binarnih simbola „0“ i „1“ jednako:

$$T = \frac{1}{\overline{\upsilon}} = 1{,}1\,\text{ms}$$

Napomena: Da smo simbole kodirali Shannon-Fanoovom metodom, rješenje bi izgledalo ovako:

x_i	$p(x_i)$					l_i
x_2	0,42	$\underline{0}$				1
x_1	0,24	1	$\underline{0}$			2
x_4	0,12	1	1	0	$\underline{0}$	4
x_3	0,10	1	1	$\underline{0}$	1	4
x_5	0,10	1	1	1	$\underline{0}$	4
x_6	0,02	1	1	1	1	4

Uočite da se srednja duljina kodne riječi $\boldsymbol{L}$ nije promjenila, te time ni ostale vrijednosti tražene u zadatku.

Zadatak-4: Mirna digitalizirana slika s bojama A, B, C,…, M opisana je tablicom:

(x_i)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
(f_i)	8000	1700	1400	1800	7000	4500	4500	5000	8000	2500	3000	3200	3800

x_i - boja, f_i – frekvencija pojavljivanja pojedine boje

a) Odredite optimalni binarni kôd za danu sliku (Huffman!).

b) Odredite vrijeme potrebno za prijenos optimalno kodirane slike između dva računala koja su povezana modemskom vezom 33600 bit/s.

Rješenje:

Zbrajanjem frekvencija pojavljivanja boja možemo dobiti ukupnu frekvenciju pojavljivanja boja (54400), a zatim i vjerojatnosti pojavljivanja pojedine boje, tj.

p(A)= 8000/54400=0,1474

p(B)= 0,0313

p(C)= 0,0257

p(D)= 0,0331

p(E)= 0,1287

p(F)= 0,0827

p(G)= 0,1287

p(H)= 0,0919

p(I)= 0,1471

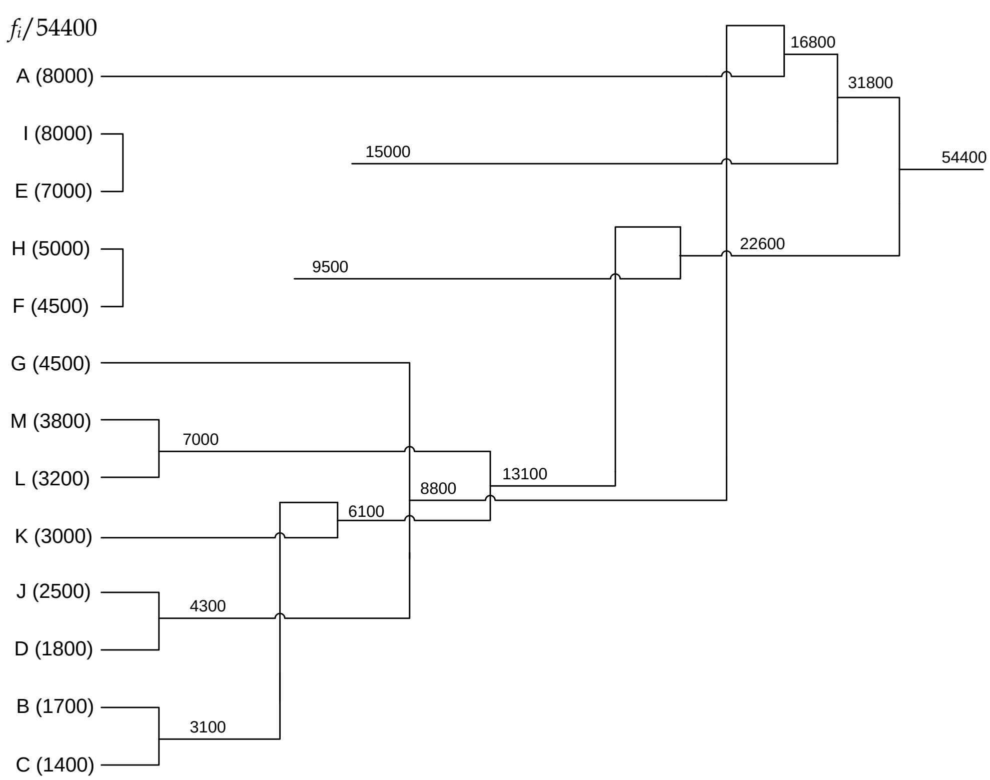
p(J)= 0,0460

p(K)= 0,0551

p(L)= 0,0588

p(M)= 0,0699

a) Huffmanov kôd:



Dobivamo:

simbol	kodna riječ	l_i
A	110	3
I	101	3
E	100	3
H	001	3
F	000	3
G	1111	4
M	0111	4
L	0110	4
K	0100	4
J	11101	5
D	11100	5
B	01011	5
C	01010	5

Ukupan broj bitova optimalno kodirane slike je jednak:

$$I(x)=8000\cdot 3+8000\cdot 3+7000\cdot 3\ldots=192500 \text{ bita}$$

b) Vrijeme potreno za prijenos optimalno kodirane slike modemskom vezom iznosi:

$$t=\frac{I(x)}{C}=\frac{192500\,\text{bit}}{33600\,\frac{\text{bit}}{\text{s}}}\approx 5{,}7292\,\text{s}$$

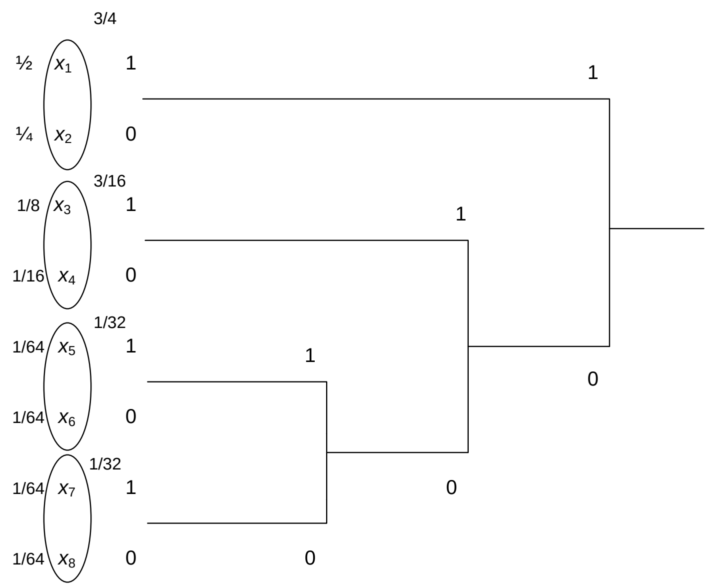
Zadatak-5: Mirna digitalizirana slika zadana je histogramom:

boja (x_i)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
frekvencija pojavljivanja	4096	2048	1024	512	128	128	128	128

Optimalno kodiranje slike (Huffman, binarni kôd) provedeno je tako da je srednja duljina kodne riječi minimalna i niti jedna kodna kompleksija nije dulja od četiri bita. Odredite vrijeme potrebno za prijenos optimalno kodirane slike između dva računala koja su povezana modemskom vezom (56000 bit/s).

Rješenje:

Da bi zadovoljili uvjete zadatka (niti jedan kodna iječ nije dulja od četri bita) potrebno je više simbola tretirati kao grupu čija je vjerojatnost pojavljivanja jednaka sumi vjerojatnosti pojavljivanja simbola. Na ovaj način smanjujemo broj simbola koje treba kodirati, a time i duljinu kodnih riječi. Nadalje, grupe kodiramo optimalno, a simbole unutar grupe ravnomjerno.



x_i	kodna riječ	l_i
x_1	11	2
x_2	10	2
x_3	011	3
x_4	010	3
x_5	0011	4
x_6	0010	4
x_7	0001	4
x_8	0000	4

Broj bitova slike jednak je:

$$I(x)=4096\cdot 2+2048\cdot 2+\ldots+128\cdot 4=18944 \text{ bita}$$

Vrijeme potrebno za prijenos slike iznosi:

$$t=\frac{18944}{56000}\approx 0{,}3382\,\text{s}$$

Zadatak-6: Neka je dano diskretno bezmemorijsko izvorište koje generira simbole x_i, $i = 1,..., 4$. Nad danim skupom simbola provedeno je optimalno kodiranje kako je to predočeno u tablici (Tablica 4.1). Generirana su četiri različita koda.

a) Provjerite je li zadovoljena Kraftova nejednakost za svaki kôd?

b) Koje se od navedenih kodnih kompleksija mogu jednoznačno dekodirati, a koje ne i zašto?

Tablica 4.1

x_i	kôd A	kôd B	kôd C	kôd D
x_1	00	0	0	0
x_2	01	10	11	100
x_3	10	11	100	110
x_4	11	110	110	111

Rješenje:

a)

Kôd A: $$K=\sum_{i=1}^{4}2^{-n_i}=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

Kôd B: $$K=\sum_{i=1}^{4}2^{-n_i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}>1$$

Kôd C: $$K=\sum_{i=1}^{4}2^{-n_i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$$

Kôd D: $$K=\sum_{i=1}^{4}2^{-n_i}=\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{8}<1$$

Kôd B ne zadovoljava Kraftovu nejednakost.

b) Kodovi A i D su „čisti“ prefiksni kodovi i mogu se jednoznačno dekodirati. Kôd B ne može se jednoznačno dekodirati. Na primjer, kodna riječ 11 je prefiks od kodne riječi 110. Kôd C ne može se jednoznačno dekodirati. Na primjer, binarni slijed 0110110 može se dekodirati kao $x_1x_2x_1x_4$ ili $x_1x_4x_4$.

Napomena: Kraftova nejednakost određuje minimalne duljine kodnih poruka potrebnih da bi se konstruirao prefiksni kôd.

Zadatak-7: Neka je dana slučajna varijabla X s m jednako vjerojatnih ishoda. Odredite za koje vrijednosti varijable m je srednja duljina kodne riječi (L) jednaka entropiji $H(X)$.

Napomena: Kodiranje je provedeno Huffmanovim kodom.

Rješenje:

Iz uvjeta zadatka dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot l_i = -\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \log_2 p_i$$

Svi ishodi varijable X su jednako vjerovatni, tj.:

$$p_i = 1/m, i = 1, \ldots, m \;\; i \;\; l_1 = l_2 = \ldots = l_m = l$$

Dakle vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \cdot l_i = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \cdot l_i = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \cdot \log_2 m$$

$$m \cdot \frac{1}{m} \cdot l = m \cdot \frac{1}{m} \cdot \log_2 m$$

Te je $m = 2^l, l \in \mathrm{N}$ ili $m = 2^i, i \in \mathrm{N}$.

Zadatak-8: Dan je skup simbola **X** = {s, w, i, m, _} s vjerojatnostima pojavljivanja $p_{\_} = 0.1$, $p_{m} = 0.1$, $p_{i} = 0.2$, , $p_{w} = 0.1$, $p_{s} = 0.5$. Optimalno kodirajte poruku "swiss_miss" koristeći aritmetičko kodiranje.

Rješenje:

Simbol	**Frekvencija pojavljivanja**	**Vjerojatnosti pojavljivanja**	**Komulativni podskupovi, [D_s, G_s)**
S	5	0.5	[0, 0.5)
W	1	0.1	[0.5, 0.6)
I	2	0.2	[0.6, 0.8)
M	1	0.1	[0.8, 0.9)
_	1	0.1	[0.9, 1)

Kodirajmo zadanu poruku:

$$D = 0; \quad G = 1$$

S: $D' = D + (G-D)\, D_s = 0+(1-0)\, 0 = 0$

$G' = D + (G-D)\, G_s = 0+(1-0)\, 0.5 = 0.5$

$D = 0$

$G = 0.5$

W: $D' = 0 + (0.5-0)\, 0.5 = 0.25$

$G' = 0 + (0.5-0)\, 0.6 = 0.3$

$D = 0.25$

$G = 0.3$

I: $D' = 0.25 + (0.3-0.25)\, 0.6 = 0.28$

$G' = 0.25 + (0.3-0.25)\, 0.8 = 0.29$

$D = 0.28$

$G = 0.29$

S: $D' = 0.28 + (0.29-0.28)\, 0 = 0.28$

$G' = 0.28 + (0.29-0.28)\, 0.5 = 0.285$

$D = 0.28$

$G = 0.285$

S: $D' = 0.28 + (0.285-0.28)\, 0 = 0.28$

$G' = 0.28 + (0.285-0.28)\, 0.5 = 0.2825$

$D = 0.28$

$G = 0.2825$

-:	$D' = 0.28 + (0.2825\text{-}0.28)\ 0.9 = 0.28225$
	$G' = 0.28 + (0.2825\text{-}0.28)\ 1 = 0.2825$
	$D = 0.28225$
	$G = 0.2825$
M:	$D' = 0.28225 + (0.2825\text{-}0.28225)\ 0.8 = 0.28245$
	$G' = 0.28 + (0.2825\text{-}0.28225)\ 0.9 = 0.282475$
	$D = 0.28245$
	$G = 0.282475$
I:	$D' = 0.28245 + (0.282475\text{-}0.28245)\ 0.6 = 0.282465$
	$G' = 0.28248 + (0.282475\text{-}0.28245)\ 0.8 = 0.28247$
	$D = 0.282465$
	$G = 0.28247$
S:	$D' = 0.282465 + (0.28247\text{-}0.282465)\ 0 = 0.282465$
	$G' = 0.282465 + (0.28247\text{-}0.282465)\ 0.5 = 0.2824675$
	$D = 0.282465$
	$G = 0.2824675$
S:	$D' = 0.282465 + (0.2824675\text{-}0.282465)\ 0 = 0.282465$
	$G' = 0.282465 + (0.2824675\text{-}0.282465)\ 0.5 = 0.282466625$
	$D = 0.282465$
	$G = 0.28246625$

Dakle, rješenje je bilo koji broj iz intervala [0.282465, 0.28246625).

Zadatak-9: Dan je skup simbola **X** = {1, 2, 3} s vjerojatnostima pojavljivanja p_1 = 0.8, p_2 = 0.02 i p_3 = 0.18. Dekodirajte primljenu kodiranu poruku 0.772352 duljine 4 simbola koja je kodirana aritmetičkim kodom.

Rješenje:

Simbol	**Vjerojatnosti pojavljivanja**	**Komulativni podskupovi, [D_s, G_s)**
1	0.8	[0, 0.8)
2	0.02	[0.8, 0.82)
3	0.18	[0.82, 1)

Dekodiranje poruke kodirane aritmetičkim kodom se provodi tako da se računaju pripadni intervali za svaki simbol i provjerava kojem intervalu kodirana poruka pripada.
Postupak se ponavlja onoliko puta koliko je poruka duga.

L = 0.772352 => očito je da kodirana poruka pripada intervalu [0, 0.8), te je prvi simbol poruke `1`.

$$D = 0; \quad G = 0.8$$

1: $D' = D + (G - D)\cdot D_s = 0 + (0.8-0)\cdot 0 = 0$
$G' = D + (G - D)\cdot G_s = 0 + (0.8-0)\cdot 0.8 = 0.64$

2: $D' = 0 + (0.8 - 0)\cdot 0.8 = 0.64$
$G' = 0 + (0.8 - 0)\cdot 0.82 = 0.6560$

3: $D' = 0 + (0.8 - 0)\cdot 0.82 = 0.6560$
$G' = 0 + (0.8 - 0)\cdot 1 = 0.8$

Vidimo da kodirana poruka pripada podintervalu trećeg simbola, tj. drugi simbol poruke je `3`.

$$D = 0.6560; \quad G = 0.8$$

1: $D' = 0.6560 + (0.8 - 0.6560)\cdot 0 = 0.6560$
$G' = 0.6560 + (0.8 - 0.6560)\cdot 0.8 = 0.7712$

2: $D' = 0.6560 + (0.8 - 0.6560)\cdot 0.8 = 0.7712$
$G' = 0 - 6560 + (0.8 - 0.6560)\cdot 0.82 = 0.7741$

Treći simbol poruke je simbol `2`.

$$D = 0.7712; \quad G = 0.7741$$

1: $D' = 0.7712 + (0.7741 - 0.7712)\cdot 0 = 0.7712$
$G' = 0.7712 + (0.7741 - 0.7712)\cdot 0.8 = 0.7735$

I četvrti simbol poruke je `1`, tj. poruke L = 1321.

Zadatak-10: Na izvoru se pojavljuju četiri simbola {1, 2, 3, 4}. Odnos vjerojatnosti pojavljivanja simbola je p_1:p_2:p_3:p_4=1:2:3:4. Slijed od 5 simbola kodiran je aritmetičkim kodom i dobivena je kodirana poruka (binarni zapis!):

$$(0.0011101)_2$$

a) Odredite prva četiri simbola iz kodiranog slijeda.
b) Kodirajte aritmetičkim kodom slijed od 4 simbola 2134.

Rješenje:

Izračunajmo vjerojatnosti pojavljivanja i komulativne podskupove za dane simbole:

Simbol	**Vjerojatnosti pojavljivanja**	**Komulativni podskupovi, [D_s, G_s)**
1	0.1	[0, 0.1)
2	0.2	[0.1, 0.3)
3	0.3	[0.3, 0.6)
4	0.4	[0.6, 1)

a) Kodirana poruka L, pretvorena u dekadski sustav, iznosi $L = (0,2265625)_{10}$.
Sada možemo dekodirati kodiranu poruku (zbog sličnosti s prethodnim zadatkom, postupak ćemo pisati skraćeno):
L = 0.2265625 => [0.1, 0.3) – prvi simbol kodiranog slijeda je ´2´.

D=0.1, G=0.3

1: $D´ = 0.1$, $G´ = 0.12$ 2: $D´ = 0.12$, $G´ = 0.16$ 3: $D´ = 0.16$, $G´ = 0.22$ 4: $D´ = 0.22$, $G´ = 0.3$

L = 0.2265625 => [0.22, 0.3) – drugi simbol kodiranog slijeda je ´4´.

D = 0.22, G = 0.3
1: $D´$ = 0.22, G = 0.228 => treći simbol kodiranog slijeda je ´1´.

D = 0.22, G = 0.228

1: $D´ = 0.2200$, $G´ = 0.2208$ 2: $D´ = 0.2208$, $G´ = 0.2224$ 3: $D´ = 0.2224$, $G´ = 0.2248$ 4: $D´ = 0.2248$, $G´ = 0.2280$

Četvrti simbol kodiranog slijeda je ´4´, tj. rješenje je 2414.

b) Kodirajmo slijed 2134:

$$D = 0; \quad G = 1$$

2: $D' = D + (G\text{-}D)\ D_s$=0+(1-0) 0.1=0.1

$G' = D + (G\text{-}D)\ G_s$=0+(1-0) 0.3=0.3

D = 0.1

G = 0.3

1: D' = 0.1 + (0.3-0.1) 0=0.10

G' = 0.1 + (0.3-0.1) 0.1=0.12

D = 0.10

G = 0.12

3: D' = 0.10 + (0.12-0.10) 0.3=0.106

G' = 0.10 + (0.12-0.10) 0.6=0.112

D = 0.106

G = 0.112

4: D' = 0.106 + (0.112-0.106) 0.6=0.1096

G' = 0.106 + (0.112-0.106) 1=0.1120

D = 0.1096

G = 0.1120

Rješenje je bilo koji broj iz intervala [0.1096, 0.1120).

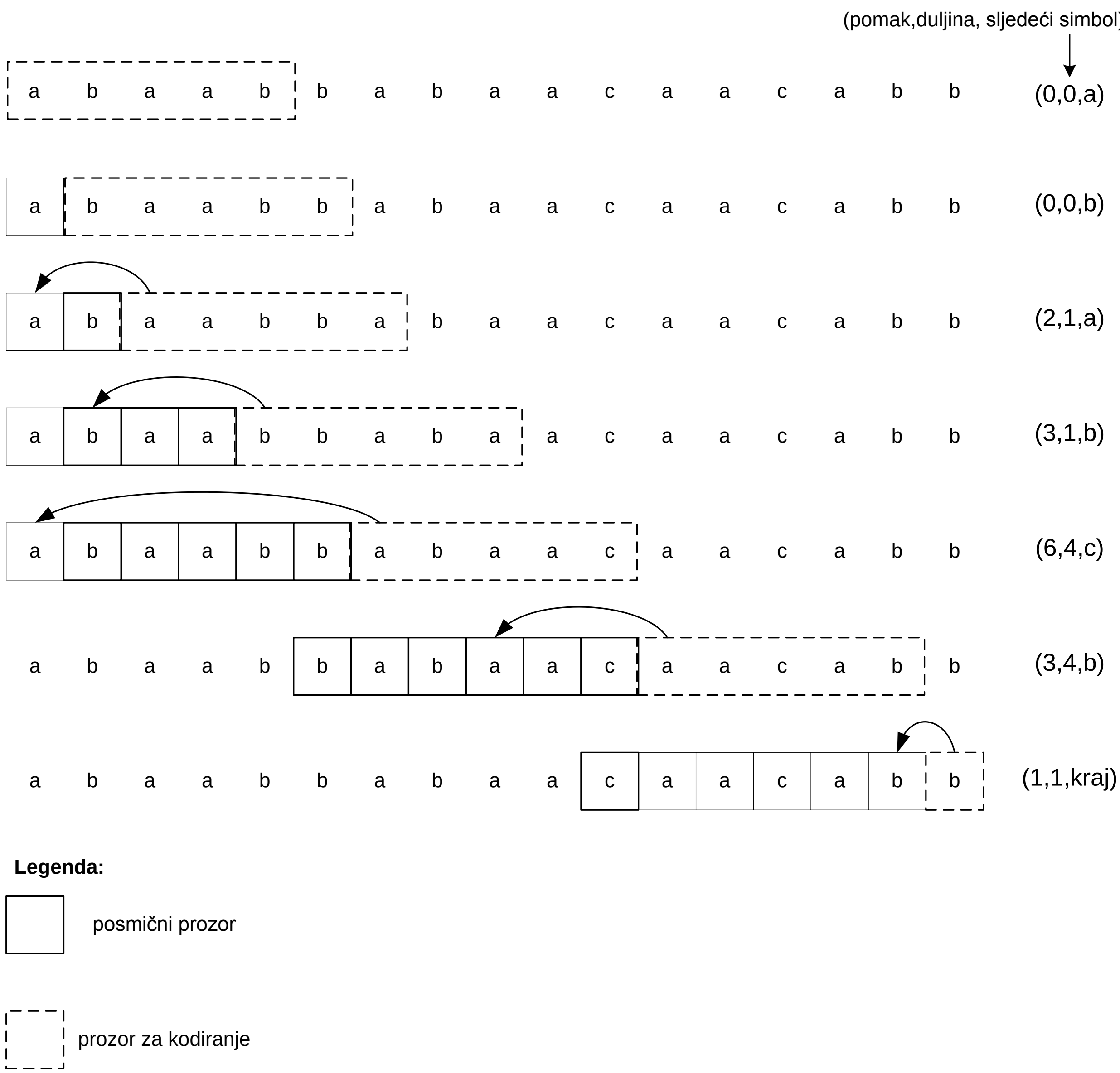
Zadatak-11: Koristeći algoritam LZ77 kodirajte poruku *abaabbabaacaacabb* uzimajući pri tome da je maksimalna duljina posmičnog prozora i prozora za kodiranje 6, odnosno 5 simbola.

Rješenje:

Kodiranjem poruke abaabbabaacaacabb algoritmom LZ77 uz zadane parametre dobivamo:

(0,0,a), (0,0,b), (2,1,a), (3,1,b), (6,4,c), (3,4,b), (1,1,kraj).

Postupak kodiranja



Zadatak-12: Uzimajući polazni rječnik *D* gdje je *D*[0] = A, *D*[1] = B, *D*[2] = C i *D*[3] = D kodirajte poruku BABAABAAA koristeći algoritam LZW.

Rješenje:

Polazni rječnik:

D[0] = A
D[1] = B
D[2] = C
D[3] = D

Postupak kodiranja:
A1) Na početku radna riječ postaje prvi ulazni simbol => RadnaRiječ =“B“
A2) Zatim s ulaza uzimamo slijedeći simbol poruke => NoviSimbol = „A“
Radna riječ proširena s tim novim simbolom daje novu riječ:
RadnaRiječ + NoviSimbol = „BA“ => nije u rječniku.
Ako nova riječ nije u rječniku, ona se dodaje u rječnik, a na izlaz kodera se šalje kôd za radnu riječ. D[4] = „BA“ („BA“ dodan u rječnik), na izlaz se šalje 1 (kôd za simbol „B“).
Simbol dobiven sa ulaza sada postaje radna riječ => RadnaRiječ = „A“**.**

B1) RadnaRiječ =“A“
B2) NoviSimbol = „B“ => RadnaRiječ + NoviSimbol = „AB“ => nije u rječniku.
D[5] = „AB“, na izlaz se šalje 0 (kôd za simbol „A“).

C1) RadnaRiječ =“B“
C2) Novisimbol = „A“ => RadnaRiječ + NoviSimbol = „BA“ => postoji u rječniku.
Ako nova riječ postoji u rječniku, onda ona postaje radna riječ:
RadnaRiječ“BA“.
NoviSimbol = „A“ => RadnaRiječ + NoviSimbol = „BAA“ => nije u rječniku.
D[6] = „BAA“, na izlaz se šalje 4 (kôd za simbol „BA“).

D1) RadnaRiječ =“A“
D2) NoviSimbol = „B“ => RadnaRiječ = „AB“
NoviSimbol = „A“=> RadnaRiječ + NoviSimbol = „ABA“ => nije u rječniku.
D[7] = „ABA“, na izlaz se šalje 5 (kôd za simbol „AB“).

E1) RadnaRiječ =“A“
E2) NoviSimbol = „A“=> RadnaRiječ + NoviSimbol = „AA“ => nije u rječniku.
D[8] = „AA“, na izlaz se šalje 0 (kôd za simbol „A“).

F1) RadnaRiječ =“A“
F2) NoviSimbol = „A“ => RadnaRiječ = „AA“
NoviSimbol = „ ", na izlaz se šalje 8 (kôd za simbole „AA“).

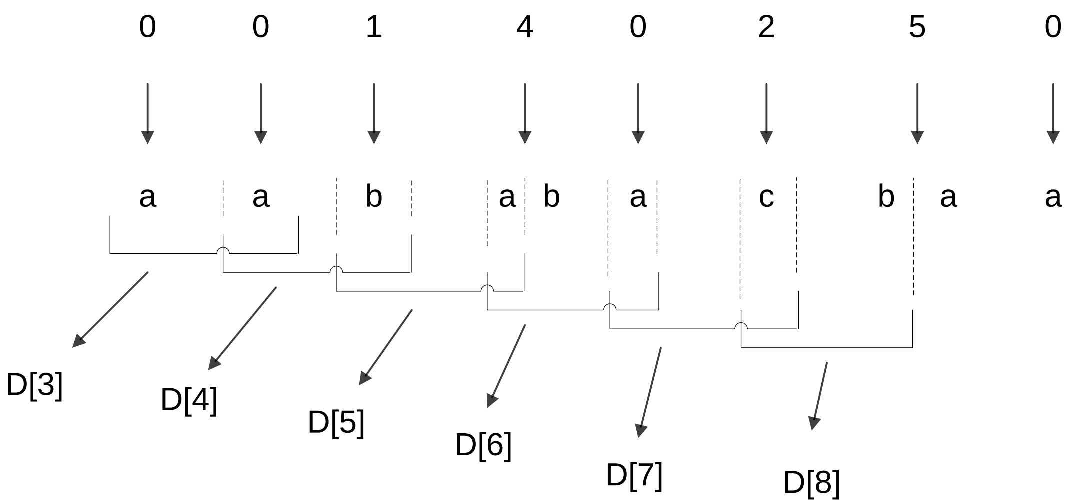
Kodna riječ je 1 0 4 5 0 8.

Zadatak-13: Uzimajući polazni rječnik *D* gdje je *D*[0] = a, *D*[1] = b i *D*[2] = c dekodirajte kodiranu poruku 0 0 1 4 0 2 5 0 koristeći algoritam LZW.

Rješenje:

Proces dekodiranja poruka kodiranih algoritmom LZW sastoji se od zamjenjivanja kodova pojedinih simbola samim simbolima i nadopunjavanju rječnika pri tome. Tako u zadanom primjeru prva dva simbola su nule. To znači ne samo da su prva dva simbola poruke „aa“, već i da je četvrti simbol rječnika „aa“, tj. *D*[3] = aa.

Dekodirajmo sada danu poruku:



Prošireni rječnik:

D[3] = aa	*D*[6] = aba
D[4] = ab	*D*[7] = ac
D[5] = ba	*D*[8] = cb

Zadatak-14: Uzimajući polazni rječnik *D* gdje je *D*[1] = r, *D*[2] = a, *D*[3] = b, *D*[4] = o i *D*[5] = w dekodirajte kodiranu poruku 5 2 3 3 2 1 6 8 10 12 9 11 7 16 5 4 4 11 21 23 4 koristeći algoritam LZW.

Rješenje:

Koristeći postupak opisan u prethodnom zadatku dobivamo rješenje:
wabbarwabbarwabbarwabbarwoorwoorwoo.

Rječnik:

D[6] = wa

D[7] = ab

D[8] = bb

D[9] = ba

D[10] = ar

D[11] = rw

D[12] = wab

D[13] = bba

D[14] = arw

D[15] = wabb

D[16] = bar

D[17] = rwa

D[18] = abb

D[19] = barw

D[20] = wo

D[21] = oo

D[22] = or

D[23] = rwo

D[24] = oor

D[25] = rwoo

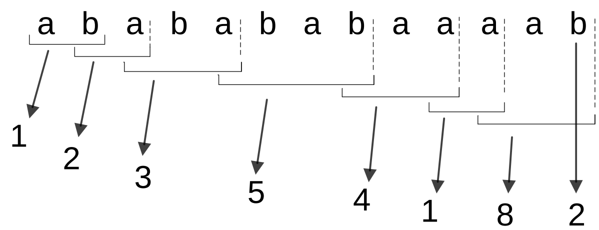
Zadatak-15: Uzimajući polazni rječnik *D* gdje je *D*[1] = a i *D*[2] = b kodirajte poruku ababababaaaab koristeći algoritam LZW. Dekodirajte kodiranu sekvencu koristeći isti polazni rječnik.

Rješenje:

Polazni rječnik:

D[1] = a
D[2] = b

Postupak kodiranja:
(Zbog velike sličnosti s prethodnim zadacima kodiranje nećemo detaljnjije raspisivati.).



Prošireni rječnik:

D[3] = ab	*D*[7] = baa
D[4] = ba	*D*[8] = aa
D[5] = aba	*D*[9] = aab
D[6] = abab	

Kodirana poruka glasi: 1 2 3 5 4 1 8 2.