Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Međuispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 22. studenog 2012.

Napomena: Svaki točno riješen zadatak boduje se s najviše 6 bodova. Svaki zadatak potrebno je rješavati na zasebnom listu papira. U svakom zadatku jasno istaknite konačni odgovor. U konačnom odgovoru na svako potpitanje, uz izvedeni izraz ili proračunati brojčani iznos tražene veličine **morate** navesti, tamo gdje ima smisla, **odgovarajuću** mjernu jedinicu. Trajanje ispita: 120 minuta.

ZADACI

1. zadatak: Razmatrajte kanal sa specifičnom strukturom šuma. Na ulaz kanala dolaze simboli iz skupa $X = \{x_1, ..., x_n\}$, a na izlazu kanala se pojavljuju simboli iz skupa $Y = \{y_1, ..., y_m\}$. Svakom ulaznom simbolu pridijeljena je vjerojatnost $p(x_i)$, $\forall\ i = 1, ..., n$, a svakom izlaznom simbolu vjerojatnost $p(y_j)$, $\forall\ j = 1, ..., m$. Pri tome vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j) = 1$$

Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu, $[P(Y|X)]$, zadana je kao:

$$\left[P(Y|X)\right] = \left[p(y_j|x_i)\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

U svakom stupcu matrice vrijedi: $a_{1j} = a_{2j} = ... = a_{nj}$, $\forall\ j = 1, ..., m$. Zadane su vjerojatnosti a_{1j}, $j = 1, ..., m$, što je dovoljno za potpuno opis matrice $[P(Y|X)]$. Također, matrice $[P(X)] = [p(x_i)]$ i $[P(Y)] = [p(y_j)]$ su definirane kao dijagonalne matrice:

$$\left[P(X)\right] = \begin{bmatrix} p(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix} \text{ i } \left[P(Y)\right] = \begin{bmatrix} p(y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(y_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(y_m) \end{bmatrix}$$

a) **(1 bod)** Odredite matricu $[P(X,Y)] = [p(x_i,y_j)]$ pomoću zadanih vjerojatnosti a_{1j} i $p(x_i)$;

b) **(1 bod)** Odredite vjerojatnosti $p(y_j)$, $\forall\ j = 1, ..., m$, pomoću zadanih vjerojatnosti a_{1j};

c) **(1 bod)** Odredite matricu $[P(X|Y)] = [p(x_i|y_j)]$ pomoću zadanih vjerojatnosti $p(x_i)$;

Napomena: rješenja pod a) i c) moraju imati konačan oblik kao zadana matrica $[P(Y|X)]$;

d) **(1 bod)** Odredite $h = H(Y|X = x_i)$, $\forall\ i = 1, ..., n$, kao funkciju zadanih vjerojatnosti a_{1j} i broja m;

e) **(1 bod)** Odredite entropiju $H(Y|X)$ kao funkciju od h;

f) **(1 bod)** Odredite izraz za kapacitet ovakvog kanala i njegovu brojčanu vrijednost.

Rješenja:

a) $[P(X,Y)] = [P(X)]\cdot P[Y|X]$, odnosno $[p(x_i,y_j)] = [p(x_i)]\cdot[p(y_j|x_i)]$

$$\left[P(X,Y)\right]=\begin{bmatrix} a_{11}p(x_1) & a_{12}p(x_1) & \cdots & a_{1m}p(x_1) \\ a_{11}p(x_2) & a_{12}p(x_2) & \cdots & a_{1m}p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11}p(x_n) & a_{12}p(x_n) & \cdots & a_{1m}p(x_n) \end{bmatrix}$$

b) Vjerojatnosti $p(y_j)$ moguće je odrediti iz matrice $[P(X, Y)]$. Zbroj svih elemenata u j-tom stupcu određuje vjerojatnost $p(y_j)$, $\forall\ j = 1, ..., m$. Dakle, s obzirom da vrijedi $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)=1$ tada je $p(y_j) = a_{1j}$, $\forall\ j = 1, ..., m$.

c) S obzirom da vrijedi $[P(X,Y)] = [P(X|Y)]\cdot[P(Y)]$, tj. $[p(x_i,y_j)] = [p(x_i|y_j)]\cdot[p(y_j)]$, za svaki element matrice $[P(X|Y)]$ vrijedi: $p(x_i|y_j) = p(x_i,y_j)/p(y_j)$. Sukladno tome, matrica $[P(X|Y)]$ ima oblik

$$\left[P(X|Y)\right]=\begin{bmatrix} p(x_1) & p(x_1) & \cdots & p(x_1) \\ p(x_2) & p(x_2) & \cdots & p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(x_n) & p(x_n) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$$

d) U slučaju zadanog kanala čija matrice $[P(Y|X)]$ ima identične retke, za entropiju $H(Y|X = x_i)$ vrijedi:

$$H(Y|X=x_i)=-\sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i)\log_2\left[p(y_j|x_i)\right]=-\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\log_2(a_{1j})=h\ \text{[bit/simbol]}$$

pri čemu je za zadanu matricu $[P(Y|X)]$ h realna konstanta.

e) Za entropiju šuma $H(Y|X)$ vrijedi:

$$H(Y|X)=\sum_{i=1}^{n} p(x_i)H(Y|X=x_i)=h\sum_{i=1}^{n} p(x_i)=h\left[\text{bit/simbol}\right]$$

f) Kapacitet kanala određujemo maksimizacijom transinformacije $I(X;Y)$ u kanalu. Za transinformaciju vrijedi: $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$. Entropiju $H(Y)$ moguće je izračunati pomoću vjerojatnosti a_{1j} na sljedeći način:

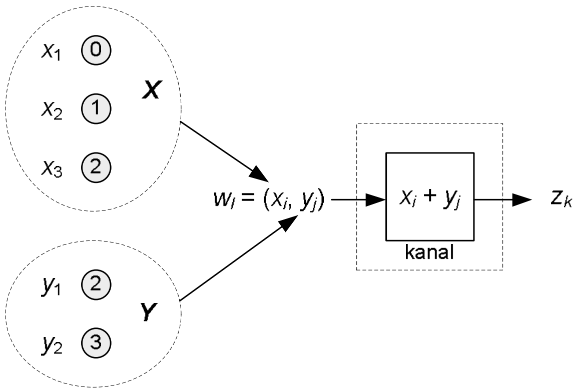
$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\log_2(a_{1j})=h\left[\text{bit/simbol}\right]$$

U našem slučaju, zbog činjenice da $H(Y|X)$ ima konstantan iznos h [bit/simbol], te da vjerojatnosti $p(y_j)$ ovise isključivo o a_{1j} i $H(Y) = h$ [bit/simbol] neovisno o razdiobi apriornih vjerojatnosti $p(x_i)$, kapacitet kanala možemo odrediti kao:

$$C=\max_{\{p(x_i)\}}\left[H(Y)-H(Y|X)\right]=0\left[\text{bit/simbol}\right]$$

Konačan rezultat je logičan jer vjerojatnosti $p(y_j)$ uopće ne ovise o razdiobi apriornih vjerojatnosti $p(x_i)$, pa je očito količina informacije o ulaznim simbolima koja se kanalom prenese do odredišta jednaka nuli.

2. zadatak: Sukladno slici, na ulaz kanala dolaze parovi simbola (x_i, y_j), $x_i \in X$, $x_i = i - 1$, $\forall\ i \in \{1, 2, 3\}$, i $y_j \in Y$, $y_j = j + 1$, $\forall\ j \in \{1, 2\}$. Nadalje, vrijedi $p(x_i) = 1/3$, $\forall\ x_i \in X$, i $p(y_j) = 1/2$, $\forall\ y_j \in Y$. Simboli x_i i y_j su potpuno neovisni jedni o drugima. Svaki par simbola (x_i,y_j) tvori simbol w_l, $l = 2i + j - 2$, $w_l \in W$. U kanalu se simboli x_i i y_j algebarski zbrajaju uslijed čega se na izlazu kanala pojavljuju simboli $z_k = x_i + y_j$, $k = i + j - 1$, $z_k \in Z$.



Matrice $[P(W)] = [p(w_l)]$ i $[P(Z)] = [p(z_k)]$ su definirane kao dijagonalne matrice:

$$\left[P(W)\right]=\begin{bmatrix} p(w_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(w_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p\left(w_{l_{\max}}\right) \end{bmatrix} \text{ i } \left[P(Z)\right]=\begin{bmatrix} p(z_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(z_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p\left(z_{k_{\max}}\right) \end{bmatrix}$$

a) **(1 bod)** Odredite matricu $[P(Z|W)] = [p(z_k|w_l)]$;

b) **(1 bod)** Odredite izraz za entropiju $H(W)$ kao funkciju od $H(X)$ i $H(Y)$, te brojčani iznos entropije $H(W)$;

c) **(1 bod)** Odredite matricu $[P(W,Z)] = [p(w_l,z_k)]$ i pomoću nje sve vjerojatnosti $p(z_k)$.

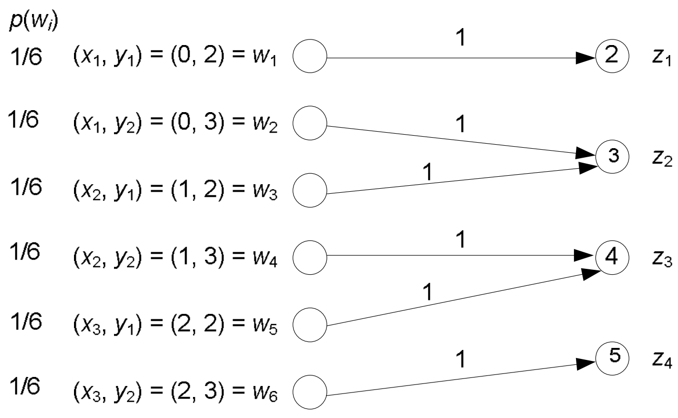
d) **(1 bod)** Odredite matricu $[P(W|Z)] = [p(w_l|z_k)]$;

e) **(1 bod)** Odredite brojčani iznos entropije $H(W|Z)$;

f) **(1 bod)** Odredite brojčani iznos transinformacije u promatranom kanalu.

Rješenja:

a) Na temelju teksta zadatka moguće je konstruirati preslikavanja parova simbola (x_i,y_j) u simbole w_l, odnosno z_k.



Temeljem slike na jednostavan način određujemo matricu $[P(Z|W)] = [p(z_k|w_l)]$:

$$[P(Z|W)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) S obzirom da su simboli x_i i y_j međusobno neovisni i vrijedi $p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j)$, tada je

$$H(W) = -\sum_{l=1}^{6} p(w_l)\log_2[p(w_l)] = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} p(x_i)p(y_j)\log_2[p(x_i)\,p(y_j)] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} p(x_i)p(y_j)\log_2[p(x_i)] - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} p(x_i)p(y_j)\log_2[p(y_j)] =$$

$$-\sum_{j=1}^{2} p(y_j)\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2[p(x_i)] - \sum_{i=1}^{3} p(x_i)\sum_{j=1}^{2} p(y_j)\log_2[p(y_j)] =$$

$$H(X)\left[\sum_{j=1}^{2} p(y_j)\right] + H(Y)\left[\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\right] = H(X) + H(Y)\,[\text{bit/simbol}]$$

S obzirom da vrijedi $p(x_i) = 1/3$, $\forall\ x_i \in X$, i $p(y_j) = 1/2$, $\forall\ y_j \in Y$, entropije $H(X)$ i $H(Y)$ je moguće odrediti kao $\log_2(3)$, odnosno $\log_2(2)$ [bit/simbol], pa entropija $H(W)$ ima iznos $\log_2(6) = 2{,}585$ bit/simbol.

c) S obzirom da vrijedi $[P(W,Z)] = [p(w_l,z_k)] = [p(z_k|w_l) \cdot p(w_l)]$, matrica $[P(W,Z)]$ ima sljedeće elemente

$$[P(W,Z)] = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Zbrajajući elemente matrice po stupcima dobivamo: $p(z_1) = 1/6$, $p(z_2) = 1/3$, $p(z_3) = 1/3$, $p(z_4) = 1/6$.

d) S obzirom da vrijedi $[P(W|Z)] = [p(w_l|z_k)] = [p(w_l,z_k)/p(z_k)]$, matrica $[P(W|Z)]$ ima sljedeće elemente

$$[P(W|Z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Entropiju $H(W|Z)$ određujemo na sljedeći način

$$H\left(W|Z\right) = -\sum_{l=1}^{6}\sum_{k=1}^{4} p\left(w_l, z_k\right)\log_2\left[p\left(w_k|z_l\right)\right] = -4\frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left[\text{bit/simbol}\right]$$

f) Transinformaciju u kanalu moguće je odrediti kao

$$I\left(W;Z\right) = H\left(W\right) - H\left(W|Z\right) = \log_2\left(6\right) - \frac{2}{3} = \log_2\left(3\right) + \frac{1}{3} = 1{,}918\left[\text{bit/simbol}\right]$$

Isti rezultat dobivamo i pomoću izraza $I(W; Z) = H(Z) - H(Z|W) = H(Z) = 1{,}918$ bit/simbol, jer je $H(Z|W)$ jednaka nuli, što je evidentno iz matrice $[P(Z|W)]$.

3. zadatak: Diskretni bezmemorijski izvor generira 11 simbola sa sljedećim vjerojatnostima pojavljivanja:

$p(x_1) = 0{,}16$; $p(x_2) = 0{,}14$; $p(x_3) = 0{,}13$; $p(x_4) = 0{,}12$; $p(x_5) = p(x_6) = 0{,}1$; $p(x_7) = p(x_8) = 0{,}06$; $p(x_9) = 0{,}05$, $p(x_{10}) = p(x_{11}) = 0{,}04$.

Izlaz izvora spojen je na koder informacije koji simbole kodira Huffmanovim kvaternarnim kodom, koristeći pri tome 4 kvaternarna simbola: 0, 1, 2 i 3. Pravilo kodiranja je takvo da se simbolu ili nadsimbolu veće vjerojatnosti pridružuje manji kvaternarni simbol (3 > 2 > 1 > 0). Također, ako dva simbola imaju jednaku vjerojatnost (npr. x_7 i x_8), tada se simbolu većeg indeksa (u ovom primjeru to je x_8) pridružuje veći kvaternarni simbol.

a) **(2 boda)** Kodirajte zadani skup simbola kvaternarnim Huffmanovim kodom koristeći gore navedeno pravilo te ispišite kvaternarne kodne riječi za sve simbole;

b) **(1 bod)** Izračunajte srednju duljinu kodne riječi na izlazu kodera informacije izraženu brojem kvaternarnih simbola po izvornom simbolu (jedinica: k.s./simbol);

c) **(1 bod)** Izračunajte efikasnost zadanog Huffmanovog koda (**preporuka**: prilikom proračuna entropije izvora umnoške $p\times\log(p)$ zaokružujte na tri decimalne znamenke);

d) **(2 boda)** U ovisnosti o vjerojatnostima pojavljivanja simbola x_i na izlazu izvora, izračunajte vjerojatnosti pojavljivanja kvaternarnih simbola na izlazu kodera informacije (**preporuka**: rezultate zaokružite na 3 decimalne znamenke);

Rješenja:

a) Prilikom kodiranja potrebno je nadopuniti skup izvornih simbola s dva simbola čije su vjerojatnosti pojavljivanja 0. Time je zadovoljen uvjet da je broj simbola $N = M + k\cdot(M-1)$, pri čemu je M broj simbola koje koristi koder informacije, što za kvaternarni kôd iznosi $M = 4$, dok je $k \in \mathbb{Z}$ i $k \geq 0$. Dakle, $13 = 4 + 3\cdot3$. Postupkom kodiranja dobivamo sljedeće kodne riječi:

x_i	$p(x_i)$	C(x_i)	l_i
x_1	0,16	2	1
x_2	0,14	3	1
x_3	0,13	00	2
x_4	0,12	01	2
x_5	0,1	02	2
x_6	0,1	03	2

x_7	0,06	11	2
x_8	0,06	12	2
x_9	0,05	13	2
x_{10}	0,04	100	3
x_{11}	0,04	101	3
x_{12}	0,0	102	3
x_{13}	0,0	103	3

b) Srednju duljinu kodne riječi na izlazu kodera informacije određujemo izrazom:

$$\overline{L}_4 = \sum_{i=1}^{11} l_i p(x_i) = 1,78 \left[\frac{\text{k.s.}}{\text{simbol}} \right]$$

c) Efikasnost zadanog Huffmanovog koda definirana je kao omjer entropije izvora i srednje duljine kodne riječi. S obzirom da je pod b) izračunata srednja duljina kodne riječi izražena brojem kvaternarnih simbola po simbolu izvora, potrebno je prvo izračunati entropiju izraženu brojem kvaternarnih simbola po izvornom simbolu [k.s./simbol]:

$$H_2(X) = -\sum_{i=1}^{11} p(x_i) \log_2 \left[p(x_i) \right] = -\sum_{i=1}^{11} p(x_i) \frac{\log_4 \left[p(x_i) \right]}{\log_4(2)} \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}} \right]$$

$$H_4(X) = -\sum_{i=1}^{11} p(x_i) \log_4 \left[p(x_i) \right] = H_2(X) \cdot \log_4(2) = \frac{1}{2} H_2(X) \left[\frac{\text{k.s.}}{\text{simbol}} \right]$$

$$H_2(X) = -\sum_{i=1}^{11} p(x_i) \log_2 \left[p(x_i) \right] = 3,309 \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}} \right]$$

Dakle, $H_4(X)$ = 1,6545, pa je efikasnost zadanog Huffmanovog koda moguće odrediti kao:

$$\varepsilon = \frac{H_4(X)}{\overline{L}_4} = 0,9295 = 92,95\% \approx 93\%$$

d) Svaka kodna riječ $C(x_i)$ sastoji se od n_{i0} kvaternarnih simbola 0, n_{i1} kvaternarnih simbola 1, n_{i2} kvaternarnih simbola 2 i n_{i3} kvaternarnih simbola 3, pri čemu za dobiveni kôd vrijedi $0 \leq n_{ix} \leq 2$, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dakle, vjerojatnosti kvaternarnih simbola moguće je odrediti na sljedeći način:

$$p(0) = \frac{\sum_{i=1}^{11} n_{i0} p(x_i)}{\sum_{i=1}^{11} l_i p(x_i)}, \; p(1) = \frac{\sum_{i=1}^{11} n_{i1} p(x_i)}{\sum_{i=1}^{11} l_i p(x_i)}, \; p(2) = \frac{\sum_{i=1}^{11} n_{i2} p(x_i)}{\sum_{i=1}^{11} l_i p(x_i)}, \; p(3) = \frac{\sum_{i=1}^{11} n_{i3} p(x_i)}{\sum_{i=1}^{11} l_i p(x_i)}$$

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = \frac{\sum_{i=1}^{11} (n_{i0} + n_{i1} + n_{i2} + n_{i3}) p(x_i)}{\sum_{i=1}^{11} l_i p(x_i)} = \frac{\overline{L}_4}{\overline{L}_4} = 1$$

Dakle, $p(0)$ = 0,7/1,78 = 0,393, $p(1)$ = 0,47/1,78 = 0,264, $p(2)$ = 0,32/1,78 = 0,180 i $p(3)$ = 0,29/1,78 = 0,163. Provjera: 0,393 + 0,264 + 0,18 + 0,163 = 1.

4. zadatak: Razmatrajte izvor koji generira četiri simbola iz skupa $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ s odgovarajućim vjerojatnostima pojavljivanja za koje vrijedi:

$$1 > p(x_1) = p_1 > p(x_2) = p_2 > p(x_3) = p_3 > p(x_4) = p_4 > 0 \text{ i } \sum_{i=1}^{4} p_i = 1.$$

Svi su simboli potpuno neovisni jedni o drugima. Nadalje, izvor je spojen s koderom informacije koji navedene simbole kodira binarnim simbolima sukladno algoritmu Shannon-Fano, a rezultat toga je prefiksni kôd. Kodne riječi na izlazu kodera informacije, $C(x_i)$, ovise o razdiobi vjerojatnosti simbola $x_i \in X$. Neka su zadane vjerojatnosti $p_3 = 0{,}19$ i $p_4 = 0{,}15$.

a) **(3 boda)** Odredite granice unutar kojih se smije nalaziti p_1 pa da kodna riječ $C(x_1)$ može imati duljinu jedan bit.

b) **(3 boda)** Neka izvor informacije generira poruku duljine 10 simbola x_2. Sukladno zahtjevu iz potpitanja a) da $C(x_1)$ može imati duljinu jedan bit, odredite koliko može iznositi najveći sadržaj informacije prenijet porukom sastavljenom od 10 simbola x_2. Rezultat zaokružite na dvije decimalne znamenke.

Rješenje:

a) Način kodiranja algoritmom Shannon-Fano ovisi o razdiobi vjerojatnosti $p(x_i)$. Pri tome je važno kako se simboli x_i, ovisno o $p(x_i)$, grupiraju. Bit je algoritma da prilikom podjele simbola u dvije grupe razlika zbroja vjerojatnosti simbola u jednoj i drugoj grupi bude minimalna. U slučaju zadanih simbola x_i i adekvatne razdiobe vjerojatnosti $p(x_i)$, konačan rezultat kodiranja algoritmom Shannon-Fano može biti:

1) $C(x_1) = 00$, $C(x_2) = 01$, $C(x_3) = 10$, $C(x_4) = 11$, ili

2) $C(x_1) = 0$, $C(x_2) = 10$, $C(x_3) = 110$, $C(x_4) = 111$.

Dakle, samo u drugom ishodu kodiranja moguće je ostvariti da $C(x_1)$ ima duljinu jednog bita. Da bi se simboli x_i dijelili u grupe na način koji odgovara binarnom kodu kreiranom u ishodu 2, mora vrijediti:

$| p_1 - (p_2 + p_3 + p_4)| \leq | (p_1 + p_2) - (p_3 + p_4)|$, tj. s obzirom da je $p_3 + p_4 = 0{,}19 + 0{,}15 = 0{,}34$

$| p_1 - p_2 - 0{,}34 | \leq | p_1 + p_2 - 0{,}34|$

Desna strana nejednakosti uvijek vrijedi zbog uvjeta $1 > p(x_1) > p(x_2) > p(x_3) > p(x_4) > 0$. Lijeva strana nejednakosti će polučiti sljedeći rezultat:

- za $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$ vrijedi: $p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \leq p_1 + p_2 - p_3 - p_4$, što daje: $2p_2 \geq 0$, a to uvijek vrijedi;

Međutim, iz uvjeta $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$, tj. $p_1 \geq p_2 + 0{,}34$, te uz $p_2 = 1 - p_1 - (p_3 + p_4) = 0{,}66 - p_1$ mora vrijediti: $2p_1 \geq 1$, tj. $\boldsymbol{p_1 \geq 0{,}5}$; istovremeno, zbog uvjeta $p_2 > p_3$, tj. $p_2 > 0{,}19$, te zbog jednakosti $p_1 + p_2 = 1 - (p_3 + p_4)$, slijedi $p_1 < 0{,}66 - 0{,}19$, tj. $\boldsymbol{p_1 < 0{,}47}$. S obzirom da je ova dva uvjeta za p_1 nemoguće istovremeno zadovoljiti, $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$ nije opcija koja pogoduje rješenju.

- za $p_1 \leq p_2 + p_3 + p_4$ vrijedi: $-p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq p_1 + p_2 - p_3 - p_4$, tj.

$-p_1 + p_2 + 0{,}34 \leq p_1 + p_2 - 0{,}34$,

i konačno: $\boldsymbol{p_1 \geq 0{,}34}$

Kao što je već ranije rečeno, zbog jednakosti $p_1 + p_2 = 1- (p_3 + p_4)$, slijedi $p_1 < 0{,}66 - 0{,}19$, tj. $\boldsymbol{p_1 < 0{,}47}$. Ova dva uvjeta za je moguće istovremeno zadovoljiti pa je konačno rješenje: $p_1 \in [0{,}34,\ 0{,}47)$.

b) Sukladno rezultatu iz a), te zbog $p_2 = 1 - (p_1 + p_3 + p_4)$, mora vrijediti: $p_2 \in (0{,}19,\ 0{,}32]$. Sadržaj informacije sadržan u jednom simbolu x_2 iznosi $I(x_2) = -\log_2(p_2)$ bita. Dakle, maksimalan sadržaj informacije kojeg može prenositi simbol x_2 uz ograničenje u zadatku iznosi $I(x_2) < -\log_2(0{,}19) = 2{,}396$ bita. Konačno, sadržaj informacije u poruci duljine 10 uzastopnih simbola x_2 mora zadovoljavati uvjet:

$$I\left(\underbrace{x_2 \ldots x_2}_{10\,\text{puta}}\right) < 23{,}96\,[bit]$$

5. zadatak: Razmatrajte izvor koji generira simbole iz skupa $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, čije su vjerojatnosti pojavljivanja na izlazu izvora $p(x_i) = 1/2^i$, za i = 1, ..., $m - 1$ i $p(x_{m-1}) = p(x_m)$, a zbroj svih vjerojatnosti $p(x_i)$ jednak je 1. Kombiniranjem tih simbola izvor generira poruke y_j, $j \in \boldsymbol{N}$, fiksne duljine od n simbola. Koder informacije kodira te poruke aritmetičkim kodom sa svojstvom prefiksnosti. Unutar bilo koje poruke ne postoje nikakve međuovisnosti između pojedinih simbola. Nadalje, koder informacije koristi pravilo da je svaka poruka kodirana brojem koji odgovara sredini intervala kreiranog aritmetičkim kodiranjem i taj broj pretvara u kodnu riječ sastavljenu od slijeda binarnih simbola. Sukladno prethodno navedenom pravilu, iz teorije je poznato da je broj bita koji je potreban za jednoznačan prikaz bilo koje poruke y_j duljine m simbola i to na takav način da ona nije prefiks neke druge kodne riječi y_k kreirane za neku drugu poruku duljine m simbola moguće izraziti kao:

$$l(y_j) = \left\lceil \log_2 \left\lceil \frac{1}{P(y_j)} \right\rceil \right\rceil + 1\,[\text{bit}],$$

gdje je $P(y_j)$ duljina promatranog podintervala dobivenog postupkom aritmetičkog kodiranja za poruku y_j.

a) **(3 boda)** Dokažite da je takvim kodom za zadani skup simbola i uz zadanu razdiobu vjerojatnosti nemoguće u bilo kojoj kodnoj riječi y_j postići manje od jednog bita po simbolu.

b) **(3 boda)** Ako promatramo isti skup simbola $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, ali s proizvoljnom razdiobom vjerojatnosti $p(x_i)$, pri čemu simbol x_1 ima najveću vjerojatnost $p(x_1)$, odredite koliko najmanje mora iznositi vjerojatnost $p(x_1)$, pa da je ovakvim kodom moguće u nekoj kodnoj riječi y_j postići manje od jednog bita po simbolu.

Rješenja:

a) Ako gore opisani kôd primijenimo na zadani skup simbola $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $p(x_i) = 1/2^i$ za i = 1, 2, ..., $m - 1$ i $\text{p}(x_{m-1}) = p(x_m)$ i na poruke y_j duljine n simbola x_i, tada je jasno da će najdulji podinterval $P(y_j)$ dati poruka sastavljena od n uzastopnih simbola x_1:

$$P\left(\underbrace{x_1 \ldots x_1}_{n\,\text{puta}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Najdulji podinterval dat će najkraću moguću duljinu kodirane poruke $l(y_j)_{\min}$ koja iznosi:

$$l\left(y_j\right)_{\min}=\left\lceil \log_2\left(\frac{1}{1/2^n}\right)\right\rceil+1=\left\lceil \log_2\left(2^n\right)\right\rceil+1=\lceil n\rceil+1=n+1[bit]$$

Dakle, prosječan broj bita po simbolu promatrane poruke y_j iznosit će L_{min} = $(n + 1)/n > 1$ bit/simbol. Nije potrebno posebno dokazivati da će za sve ostale poruke duljine n simbola L biti veći od L_{min}.

b) Ako želimo da u nekoj kodnoj riječi koja odgovara poruci y_j broj bita po simbolu bude manji od 1, tada mora biti ispunjeno sljedeće:

$$\left\lceil \log_2\frac{1}{P\left(y_j\right)}\right\rceil+1\leq n-1$$

Iz toga slijedi:

$$\left\lceil \log_2\left\lceil\frac{1}{P\left(y_j\right)}\right\rceil\right\rceil\leq n-2$$

$$\log_2\left\lceil\frac{1}{P\left(y_j\right)}\right\rceil\leq n-2$$

$$\vdots$$

$$P\left(y_j\right)\geq 2^{-n+2}$$

Ako kombiniramo n simbola x_1 iste vjerojatnosti u poruku y_j, tada mora vrijediti:

$$\left[p\left(x_1\right)\right]^n\geq 2^{-n+2}$$

$$p\left(x_1\right)\geq 2^{(-n+2)/n}$$

Dakle, vjerojatnost $p(x_1)$ mora imati vrijednost barem

$$p(x_1)\geq\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-2}}}$$

da bi broj bita po simbolu kodirane poruke y_j bio manji od 1.