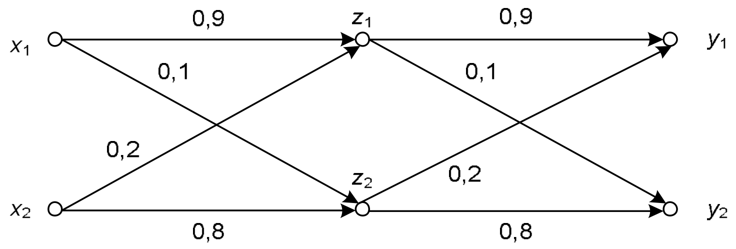
1. Dva binarna kanala serijski su povezana kako je to predočeno na slici 1. Odredite srednji uzajamni sadržaj informacije u sustavu kanala ako je $p(x_1) = p(x_2) = 0{,}5$.



Slika 1: Serijski spoj kanala.

a) 0,812 bit/simbol

b) 0,791 bit/simbol

c) 0,188 bit/simbol

d) 1,791 bit/simbol

Postupak rješavanja:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\,\log_2[p(x_i)] = -\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2) = 1\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Sa slike je vidljivo sljedeće:

$$\left[p\left(z_k|x_i\right)\right] = \left[p\left(y_j|z_k\right)\right] = \begin{bmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{bmatrix}$$

Nadalje vrijedi:

$$[p(x_i,z_k)] = [p(x_i)]\left[p(z_k|x_i)\right] = \begin{bmatrix}0{,}45 & 0{,}05\\ 0{,}1 & 0{,}4\end{bmatrix} \rightarrow [p(z_k)] = [0{,}55 \quad 0{,}45]$$

$$\left[p(z_k,y_j)\right] = [p(z_k)]\left[p(y_j|z_k)\right] = \begin{bmatrix}0{,}495 & 0{,}055\\ 0{,}09 & 0{,}36\end{bmatrix} \rightarrow \left[p(y_j)\right] = [0{,}585 \quad 0{,}415]$$

Dakle,

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{2} p(y_j)\log_2 p(y_j) = -\left[0{,}585\cdot\log_2(0{,}585) + 0{,}415\cdot\log_2(0{,}415)\right] = 0{,}979\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

$$\left[p(y_j)\right] = [p(z_k)]\left[p(y_j|z_k)\right] = [p(x_i)]\left[p(z_k|x_i)\right]\left[p(y_j|z_k)\right] = [p(x_i)]\left[p(y_j|x_i)\right]$$

$$\left[p(y_j|x_i)\right] = \left[p(z_k|x_i)\right]\left[p(y_j|z_k)\right] = \begin{bmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}83 & 0{,}17\\ 0{,}34 & 0{,}66\end{bmatrix}$$

$$\left[p(x_i,y_j)\right] = [p(x_i)]\left[p(y_j|x_i)\right] = \begin{bmatrix}0{,}415 & 0{,}085\\ 0{,}17 & 0{,}33\end{bmatrix}$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i,y_j)\log_2 p(x_i,y_j) = 1{,}791\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Konačno, srednji uzajamni sadržaj informacije u sustavu kanala iznosi

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 1 + 0{,}979 - 1{,}791 = 0{,}188\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

2. Dana je diskretna slučajna varijabla Z koja poprima vrijednosti 0 i 1 s vjerojatnostima $1-a$, odnosno a. Neka slučajna varijabla X, neovisna o Z, poprima vrijednosti iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ s vjerojatnostima $p(i) = q_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Neka su vjerojatnosti a i q_i odabrane tako da je entropija od $X \cdot Z$ najveća moguća. Odredite koliko iznosi a.

   a) $n/(n + 1)$

   b) $1/n$

   c) $1/(n + 1)$

   d) $1/2$

   Postupak rješavanja:

   S obzirom da slučajna varijabla Z poprima vrijednosti 0 i 1, pomnožena sa slučajnom varijablom X koja poprima jednu od vrijednosti iz skupa$\{1, 2, ..., n\}$ daje vrijednosti iz skupa $\{0, 1, ..., n\}$. Sukladno tome, vjerojatnosti koje poprimaju elementarni događaji slučajne varijable Y dani su sljedećim vektorom:

$$\mathbf{p}(\mathbf{Y})=\left[p(0),p(1),\ldots,p(n)\right]=\left[[(1-a)\sum_{i=1}^{n}q_i],aq_1,aq_2,...,aq_n\right]$$

S obzirom da je $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, vrijedi sljedeće

$$H(Y)=-\left[(1-a)\log_2(1-a)+a\sum_{i=1}^{n}q_i\left[\log_2(a)+\log_2(q_i)\right]\right]$$

$$H(Y)=-\left[(1-a)\log_2(1-a)+a\log_2(a)+a\sum_{i=1}^{n}q_i\log_2(q_i)\right]$$

$$H(Y)=H(Z)+aH(X)$$

$H(X)$ je najveći za $q_i=1/n$, $\forall$i $\in$ $\{1, 2, ..., n\}$, te iznosi $H(X) = \log_2(n)$.

$$H(Y)=-\left[(1-a)\log_2(1-a)+a\log_2(a)+a\cdot n\frac{1}{n}\log_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=-\left[\log_2(1-a)-p\log_2(1-a)+a\log_2(a)+a\log_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Maksimum neke funkcije dobivamo kad njenu prvu derivaciju izjednačimo s nulom:

$$\frac{-1}{(1-a)\ln(2)}-\log_2(1-a)-\frac{-a}{(1-a)\ln(2)}+\log_2(a)+\frac{a}{a\ln(2)}+\log_2\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

$$\frac{-(1-a)}{(1-a)\ln(2)}+\frac{1}{\ln(2)}-\log_2(1-a)+\log_2(a)-\log_2(n)=0$$

$$\log_2\left[\frac{a}{n(1-a)}\right]=0\rightarrow\frac{a}{n(1-a)}=1\rightarrow a=n(1-a)$$

Konačno rješenje je $a=\dfrac{n}{n+1}$

3. Neki komunikacijski kanal zadan je niže navedenom matricom $[p(Y|X)]$, uz nepoznate vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog skupa simbola X, pri čemu koristimo oznake $p_i = p(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Ako je $p_1 = 1/16$, $p_2 = 1/8$, odredite vjerojatnost p_3 za koju je moguće postići kapacitet kanala.

$$[p(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) 1/8

b) 1/16

c) 1/32

d) 3/16

Postupak rješavanja:

Kako su vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog skupa nepoznate, matricu $[P(X)]$ možemo definirati kao $[p(x_i)] = [p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6]$.

Matrica združenih vjerojatnosti:

$$[p(x_i, y_j)] = [p(x_i)p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_6 \end{bmatrix}$$

Kapacitet kanala računa se prema formuli:

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}} [H(Y) - H(Y|X)]$$

S obzirom da u zadanom kanalu nema šuma, $H(Y|X) = 0$ i vrijedi

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} H(Y) = log_2(4) = 2\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

a ta se vrijednost postiže kad su sve vjerojatnosti $p(y_j)$ međusobno jednake, tj. $p(y_1) = p(y_2) = p(y_3) = p(y_4)$. Iz tog uvjeta proizlazi $p_4 = p_5 = p_6 = p_1 + p_2 + p_3 = 1/4$. Uz zadane vjerojatnosti p_1 i p_2 proizlazi da p_3 mora iznositi 1/16.

4. Dan je skup simbola $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ s pripadajućim vjerojatnostima pojavljivanja: $p(s_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, m$. Simboli su jednoznačno kodirani prefiksnim kodom. Ako je $m = 6$ i ako su duljine kodnih riječi zadane kao $l_1 = l_2 = 1$, $l_3 = l_5 = 2$, $l_4 = l_6 = 3$, odredite najmanji broj simbola abecede prefiksnog koda.

a) 3

b) 2

c) 4

d) 1

Postupak rješavanja:

$$\sum_{i=1}^{m} d^{-l_i} \leq 1 \rightarrow \frac{1}{d}+\frac{1}{d}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{d^3}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{d^3}\leq 1$$

$$2d^2+2d+2-d^3\leq 0$$

Očito za $d = 1$ kod nema smisla. Za $d = 2$ (binarni kod) nejednakost nije zadovoljena, a za $d = 3$ je. Dakle, najmanji broj simbola abecede prefiksnog koda je 3.

5. Zadan je diskretan bezmemorijski izvor koji generira simbole iz skupa $\{a, b, c, d, e\}$ s frekvencijama pojavljivanja, f, zadanim na sljedeći način: $f(a) = 15$, $f(b) = 7$, $f(c) = f(d) = 6$ i $f(e) = 5$. Kodirajte dani skup Shannon-Fanoovom metodom kodiranja, a potom dekodirajte sljedeći slijed: 000111110111110000. Napomena: prilikom kodiranja simbolu ili nadsimbolu veće vjerojatnosti pridružuje se binarni simbol 1.

a) *abeceda*

b) *eaabaabe*

c) *eaeaaaeeb*

d) *abcedaa*

Postupak rješavanja:

$$p(x_i)=\frac{f_i}{N},\quad N=15+7+6+6+5=39,\quad f_i=\{15,7,6,6,5\}$$

$$p(a)=\frac{15}{39}=0.3846,\ p(b)=\frac{7}{39}=0.1794,\ p(c)=\frac{6}{39}=0.1539$$

$$p(d)=\frac{6}{39}=0.1539,\ p(e)=\frac{5}{39}=0.1282$$

Simbol	Vjerojatnost	Korak 1	Korak 2	Korak 3	Kodna riječ
a	0.3846	1	1		11
b	0.1794	1	0		10
c	0.1539	0	1		01
d	0.1539	0	0	1	001
e	0.1282	0	0	0	000

Dekodirani slijed riječi je: *eaabaabe*

6. Informacijski izvor šalje slijed sastavljen od n uzastopnih simbola a, a neposredno nakon toga šalje simbol * kao oznaku kraja slijeda. Predajnik pri tome koristi entropijsko kodiranje kodom LZ77. Duljina posmičnog prozora iznosi 1 simbol, a duljina prozora za kodiranje jednaka je m simbola. Koliko mora iznositi minimalna cjelobrojna duljina slijeda n pa da se za svaki $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ može postići da je zadnja trojka na izlazu kodera jednaka (0, 0, *).

   a) 1521 simbol

   b) 7561 simbol

   c) 211 simbol

   d) 2521 simbol

   Postupak rješavanja:

   Zbog zahtjeva da zadnja trojka bude oblika (0, 0, *) mora vrijediti $n = k \cdot m + 1$, pri čemu je k prirodni broj. To znači da broj $n - 1$ mora biti djeljiv sa svim prirodnim brojevima između 2 i 9, tj. $n - 1$ mora biti najmanji zajednički višekratnik tog skupa prirodnih brojeva. Dakle, $n - 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ simbol, a sam $n = 2521$ simbol.

   Napomena: u ovom zadatku u tekstu nedostaje ključna riječ minimalna (naknadno označena i ubačena gore). Zbog toga su točna rješenja b i d.

7. Diskretni bezmemorijski izvor generira simbole iz skupa $\{A, B\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p(A) = 0{,}99$ i $p(B) = 0{,}01$. Aritmetičkim kodom kodirana je poruka $\underbrace{AA\ldots A}_{n \times A}B$ te je dobiven podinterval [0,09652, 0,10466) koji jednoznačno definira poruku. Odredite koliko se simbola A nalazi u poruci. Osnovni intervali za simbole A i B zadani su kao [0,01, 1), odnosno [0, 0,01).

   a) 10 simbola

   b) 11 simbola

   c) 99 simbola

   d) 100 simbola

   Postupak rješavanja:

   Prilikom primjene aritmetičkog kodiranja intervali za svaki simbol u n-toj iteraciji, tj. za n-ti simbol, određuju se temeljem sljedećih jednakosti:

   $D_n = D_{n-1} + (G_{n-1} - D_{n-1}) \cdot D_s$ i $G_n = D_{n-1} + (G_{n-1} - D_{n-1}) \cdot G_s$, $n = 1, 2, \ldots$, uz $D_0 = 0$ $G_0 = 1$

   pri čemu su D_s i G_s granice zadane osnovnim intervalima za simbole A, odnosno B.

   Za zadani slijed simbola dobivamo sljedeće intervale:

   za prvi simbol A: $D_1 = 0 + 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}01$ $G_1 = 0 + 1 \cdot 1 = 1$

   za drugi simbol A: $D_2 = 0{,}01 + 0{,}99 \cdot 0{,}01 = 0{,}01 \cdot (1 + 0{,}99)$

   $G_2 = 0{,}01 + 0{,}99 \cdot 1 = 0{,}01 + 0{,}99 = 1$

   za treći simbol A: $D_3 = 0{,}01 \cdot (1 + 0{,}99) + (1 - 0{,}01 - 0{,}99 \cdot 0{,}01) \cdot 0{,}01 =$

   $= 0{,}01 \cdot (1 + 0{,}99 + 0{,}99^2)$

   $G_3 = 0{,}01 \cdot (1 + 0{,}99) + 0{,}99^2 \cdot 1 = 1$

za n-ti simbol A: $D_n = 0{,}01 \cdot (1 + 0{,}99 + 0{,}99^2 + \ldots + 0{,}99^{n-1}) = 1 - 0{,}99^n$

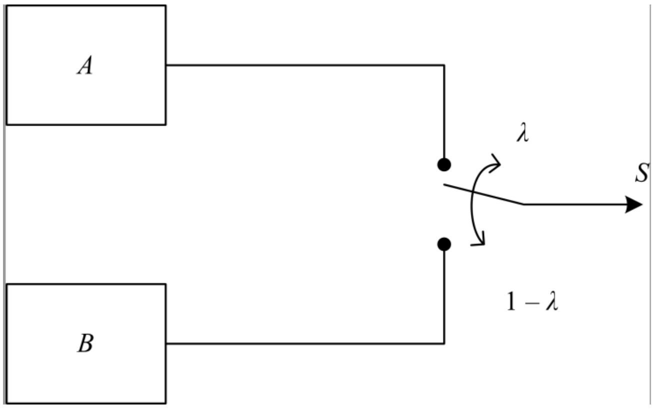
$G_n = 1$

za simbol B: $D_{n+1} = 1 - 0{,}99^n + (1 - 1 + 0{,}99^n) \cdot 0 = 1 - 0{,}99^n$

$G_{n+1} = 1 - 0{,}99^n + (1 - 1 + 0{,}99^n) \cdot 0{,}01 = 1 - 0{,}99^{n+1}$

Dakle, mora vrijediti da je $D_{n+1} = 0{,}09652$, odnosno $G_{n+1} = 0{,}10466$. Uzmimo jednakost $D_{n+1} = 0{,}09652$. Iz toga slijedi $0{,}99^n = 1 - 0{,}09652$. Logaritmiranjem dobivamo da je $n = 10{,}09929$. Uzmimo sada drugu jednakost, $G_{n+1} = 1 - 0{,}99^{n+1} = 0{,}10466$. Logaritmiranjem dobivamo $n + 1 = 10{,}99981$, odnosno $n = 9{,}99981$. Temeljem te dvije jednakosti očito je da je $n = 10$, tj. preostala tri ponuđena rješenja nisu moguća.

8. Dva izvora, A i B, spojena na preklopnik kako je predočeno slikom 2, generiraju simbole iz disjunktnih skupova. Preklopnik slučajno odabire izvor A s vjerojatnšću λ, odnosno izvor B s vjerojatnošću $1-\lambda$. Entropije izvora zadane su u natovima i označavamo ih kao H_A i H_B ($H_A \neq H_B$). Za koju će vjerojatnost λ entropija H_S na izlazu preklopnika S biti najveća? Napomena: priliko proračuna koristite prirodni logaritam.



Slika 2: Dva izvora spojena na preklopnik.

a) $\frac{e^{H_B}}{e^{H_A}+e^{H_B}}$

b) $\frac{e^{H_A}}{e^{H_A}+e^{H_B}}$

c) $\frac{e^{-H_A}}{e^{-H_A}+e^{-H_B}}$

d) $\frac{e^{-H_B}}{e^{-H_A}+e^{-H_B}}$

Postupak rješavanja:

Entropija na izlazu S jednaka je:

$$H_S = -\lambda \ln \lambda - (1-\lambda)\ln(1-\lambda) + \lambda H_A + (1-\lambda)H_B$$

Za granične slučajeve, $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$, entropija iznosi H_B , odnosno H_A . Ipak, u općem je slučaju, za neki $\lambda \in (0, 1)$, moguće dobiti veću entropiju. Izjednačavanjem derivacije H_S po λ s nulom dobivamo:

$$\ln\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) + H_A - H_B = 0$$

Dakle, kandidat za konačno rješenje je

$$\lambda_1 = \frac{e^{H_A}}{e^{H_A} + e^{H_B}}$$

Vrijedi $\lambda_1 \in (0, 1)$. Također, radi se i o lokalnom maksimumu budući da za $\lambda \in (0, 1)$ vrijedi da je druga derivacija H_S po λ manja od nule.

9. Slučajna varijabla X ima razdiobu ovisnu o vjerojatnosti λ:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda(1-\lambda)^x, & \text{za } x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Izračunajte entropiju od X. Napomena: očekivanje od X jednako je $\frac{1}{\lambda} - 1$.

a) $-\frac{\lambda \log \lambda + (1-\lambda) \log(1-\lambda)}{\lambda^2}$

b) $-\frac{\lambda \log \lambda + (1-\lambda) \log(1-\lambda)}{\lambda}$

c) $-\frac{\lambda \log \lambda + (1-\lambda) \log(1-\lambda)}{1-\lambda}$

d) $-\frac{\lambda \log \lambda + (1-\lambda) \log(1-\lambda)}{(1-\lambda)^2}$

Postupak rješavanja:

Entropiju možemo računati preko očekivanja:

$$H(X) = -E\{\log[p(X)]\}$$

Raspisivanjem dobivamo:

$$H(X) = -E\{\log[\lambda(1-\lambda)^X]\} = -\log \lambda - E[X] \log(1-\lambda)$$

Uvrštavanjem $E[X] = \frac{1}{\lambda} - 1$, dobivamo:

$$H(X) = -\frac{\lambda \log \lambda \; + \; (1-\lambda) \log(1-\lambda)}{\lambda}$$

10. Neki diskretni bezmemorijski izvor X generira dva simbola, x_1 i x_2, pri čemu je $p(x_1) = 0{,}9$ i $p(x_2) = 0{,}1$. Simboli x_1 i x_2 kodiraju se kodom C tako da je $C(x_1) = 0$, odnosno $C(x_2) = 1$. Pretpostavimo da neki sličan izvor X_2 generira parove simbola x_1 i x_2, pri čemu su vjerojatnosti $p(x_1)$ i $p(x_2)$ iste kao u slučaju izvora X. Neka su parovi simbola kodirani Huffmanovim kodom C_2. Odredite omjer učinkovitost koda C_2 prema kodu C.

a) 2

b) 0,645

c) 1,55

d) 1

Postupak rješavanja:

Za kod C vrijedi sljedeće:

$$L=\sum_{i=1}^{2} p\left(x_i\right) l_i=0,9+0,1=1$$

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{2} p\left(x_i\right) \log_2\left[p\left(x_i\right)\right]=-0,9 \log_2(0,9)-0,1 \log_2(0,1)=0,469 \text{ bit/simbol}$$

$$\varepsilon=\frac{H(X)}{L}=\frac{0,469}{1}=0,469=46,9\,\%$$

Za kod C_2 vrijedi:

simbol a_i	$P(a_i)$	kôd
$a_1=x_1\,x_1$	0,81	1
$a_2=x_1\,x_2$	0,09	00
$a_3=x_2\,x_1$	0,09	011
$a_4=x_2\,x_2$	0,01	010

$$L_2=\sum_{i=1}^{4} p(a_i) l_i=0,81+0,09 \cdot 2+0,09 \cdot 3+0,01 \cdot 3=1,29 \text{ bit/simbol}$$

$$H(X^2)=-\sum_{i=1}^{4} p(a_i) \log_2\left[p(a_i)\right]=$$

$$=-0,81 \log_2(0,81)-0,09 \log_2(0,09)-0,09 \log_2(0,09)-0,01 \log_2(0,01) \text{ bit/simbol}$$

$$H(X^2)=0,938 \text{ bit/simbol}$$

$$\varepsilon_2=\frac{H(X^2)}{L_2}=\frac{0,938}{1,29}=0,727=72,7\,\%$$

Dakle, $\varepsilon_2/\varepsilon=1,55$.

Teorija informacije, ak.g. 2014./2015., međuispit 26. studenog 2014. godine

Temeljem reakcija studenata na ponuđena rješenja zadataka i temeljem uočenih propusta u sastavljanju tekstova nekih zadataka obavještavamo vas da će prilikom bodovanja zadaće biti uzeti u obzir sljedeći odgovori kao točni.

U 6. zadatku pisalo je: Koliko mora iznositi cjelobrojna duljina slijeda n pa da se za svaki $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ može postići da je zadnja trojka na izlazu kodera jednaka (0, 0, *).

a trebalo je pisati: Koliko mora iznositi minimalna cjelobrojna duljina slijeda n pa da se za svaki $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ može postići da je zadnja trojka na izlazu kodera jednaka (0, 0, *).

Uslijed propuštene riječi minimalna moguća su rješenja označena slovima b) i d). Točno rješenje tj. svih 5 bodova dobit će studenti koji su zaokružili ili samo b) ili samo d) ili oboje, tj. b) i d). Studenti koji su na papiru točno riješili zadatak, ali nisu zaokruživali zbog dvojbe moraju se javiti porukom na alen.bazant@fer.hr i ako se ustanovi pregledom njihove zadaće da im je postupak i dobiveno rješenje točno, dobit će 5 bodova. Studenti koji su zaokruživali netočna rješenja a) i c) ili oboje ili a), odnosno c) u kombinaciji s točnim rješenjima dobit će negativne bodove. Studenti koji nemaju točnog postupka rješavanja niti su zaokruživali slova ispred odgovora neće dobiti bodove za ovaj zadatak.

U 7. zadatku zadane su granice intervala [0,09652, 0,10466) koji jednoznačno definira poruku sastavljenu od slova n uzastopnih A i B na kraju. Prilikom prepisivanja brojeva s kalkulatora došlo je do trivijalne zamjene znamenaka u podintervalu koji je trebao biti [0,09562, 0,10466). Pogledajmo razliku koja iz toga proizlazi:

> za interval [0,09652, 0,10466): mora vrijediti da je $D_{n+1} = 0{,}09652$, odnosno $G_{n+1} = 0{,}10466$. Uzmimo jednakost $D_{n+1} = 0{,}09652$. Iz toga slijedi $0{,}99^n = 1 - 0{,}09652$. Logaritmiranjem dobivamo da je $n = 10{,}09929$. Uzmimo sada drugu jednakost, $G_{n+1} = 1 - 0{,}99^{n+1} = 0{,}10466$. Logaritmiranjem dobivamo $n + 1 = 10{,}99981$, odnosno $n = 9{,}99981$. Temeljem te dvije jednakosti očito je da je $n = 10$, tj. preostala tri ponuđena rješenja nisu moguća.
>
> za interval [0,09562, 0,10466): mora vrijediti da je $D_{n+1} = 0{,}09562$, odnosno $G_{n+1} = 0{,}10466$. Uzmimo jednakost $D_{n+1} = 0{,}09562$. Iz toga slijedi $0{,}99^n = 1 - 0{,}09562$. Logaritmiranjem dobivamo da je $n = 10{,}00023$. Uzmimo sada drugu jednakost, $G_{n+1} = 1 - 0{,}99^{n+1} = 0{,}10466$. Logaritmiranjem dobivamo $n + 1 = 10{,}99981$, odnosno $n = 9{,}99981$. Temeljem te dvije jednakosti očito je da je $n = 10$, tj. preostala tri ponuđena rješenja nisu moguća.

S obzirom na minimalnu razliku koja iz toga proizlazi te s obzirom na ponuđena rješenja evidentno je da je jedino moguće točno rješenje ono ponuđeno pod a) tj. 10. U ovom slučaju dvojbe nije bilo jer i donja i gornja granica intervala moraju ukazivati na isti broj. Iz priloženog se vidi da je to svakako 10., tj. da ostala tri ponuđena rješenja nisu moguća. Stoga će samo odgovor pod a) biti priznat kao točan. Također, nema opravdanog razloga da netko tko ima ispravan postupak nije zaokružio odgovor a), jer kao što je ranije navedeno, u svjetlu ponuđenih rješenja nije bilo mjesta za dvojbu ni mogućnosti postojanja dva ili više točnih rješenja.