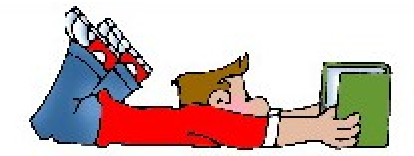
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva



Zbirka riješenih zadataka iz Teorije informacije

željko *i*lić
tomaž beriša
vedran mikac

Zagreb, 2010.

Sadržaj:

Teorija infromacije, kapacitet diskretnog komunikacijskog kanala, Markovljevi procesi

Zadatak – 1:

Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola **X** = $\{x_1, x_2\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p(x_1) = 0{,}2$ i $p(x_2) = 0{,}8$. Dva diskretna komunikacijska kanala, s uvjetnim matricama prijelaza $[p(y_j \mid x_i)]$ i $[p(z_k \mid y_j)]$, serijski su povezana na dano izvorište.

$$\left[p(y_j|x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \left[p(z_k|y_j)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}7 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

a) Odredite entropiju ulaznog skupa simbola, tj. $H(X)$.
b) Izračunajte vjerojatnost pojavljivanja simbola na izlazu iz sustava kanala.
c) Odredite entropiju izlaznog skupa simbola, tj. $H(Z)$.
d) Nacrtajte novonastali binarni komunikacijski kanal.
e) Odredite transinformaciju u cijelom sustavu kanala, tj. $I(X;Z)$.

Rješenje:

a) $H(X) = ?$

Entropiju ulaznog skupa simbola iznosi:

$$H(X) = -\sum_{n=1}^{2} p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i)$$

$$H(X) = -(0.2 \cdot \log_2 0.2 + 0.8 \cdot \log_2 0.8)$$

$$H(X) = 0.72 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

b) $p(z_k) = ?$

Potrebno je izračunati vjerojatnost pojavljivanja simbola na izlazu iz sustava kanala. Za to ćemo iskoristiti sljedeću formulu:

$$p(z_k) = p(y_j) \cdot p(z_k \mid y_j)$$

Prvo ćemo izračunati nepoznati $[p(y_j)]$ koristeći poznate vrijednosti:

$$\left[p(y_j)\right] = \left[p(x_i)\right] \cdot \left[p(y_j \mid x_i)\right]$$

$$\left[p(y_j)\right] = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[p(y_j)\right] = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.42 & 0.08 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Sada znamo sve što je potrebno za određivanje [$p(z_k)$], tj.

$$[p(z_k)] = [p(y_j)] \cdot [p(z_k \mid y_j)]$$

$$[p(z_k)] = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.42 & 0.08 & 0.02 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{[p(z_k)] = \begin{bmatrix} 0.126 & 0.096 & 0.504 & 0.142 & 0.08 & 0.048 & 0.002 & 0.002 \end{bmatrix}}}$$

c) <u>$H(Z) = ?$</u>

$$H(Z) = -\sum_{n=8}^{8} p(z_k) \cdot \log_2 p(z_k)$$

$$\underline{\underline{H(Z) = 2.1368 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}}}$$

d) <u>Skica novonastalog komunikacijskog kanala?</u>

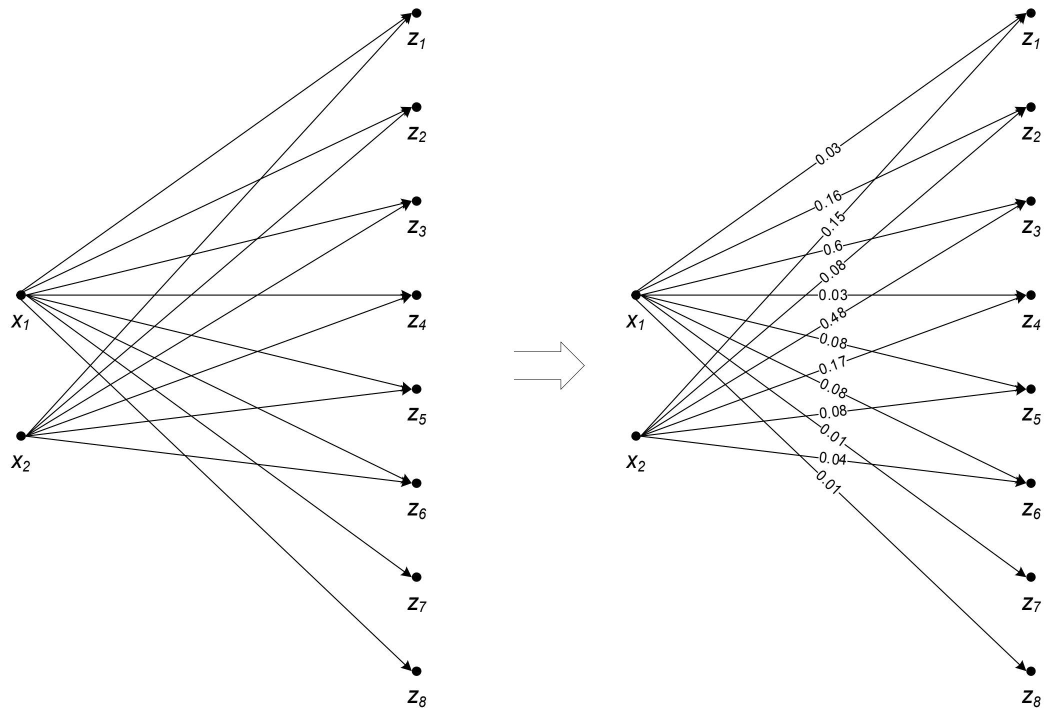
Jedan od načina da skiciramo novonastali komunikacijski kanal je da prvo nacrtamo sve njegove komponente – ulaze x_i, zatim y_j, te krajnji izlaz iz kanala z_k. Nakon što smo nacrtali sve točke, međusobno ih povežemo ovisno o vrijednostima koje očitamo iz matrica prijelaza. S obzirom da nam dio s točkama iz ***Y*** skupa nije potreban u skici, prikažemo samo prijelaze iz ulaza x_i do izlaza z_k – gledamo kojim putovima možemo doći iz skupa ***X*** do točaka iz skupa ***Z***, te usput računamo i vjerojatnosti koristeći vjerojatnosti koje su nam već poznate.

Ono što zapravo želimo je izračunati umnožak matrica:

$$[p(z_k \mid x_i)] = [p(y_j \mid x_i)] \cdot [p(z_k \mid y_j)]$$

$$[p(z_k \mid x_i)] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{[p(z_k \mid x_i)] = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.16 & 0.6 & 0.03 & 0.08 & 0.08 & 0.01 & 0.01 \\ 0.15 & 0.08 & 0.48 & 0.17 & 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$



e) <u>$I(X;Z) = ?$</u>

Transinformacija u cijelom sustavu kanala dobiva se pomoću forumule:

$$I(X;Z) = H(X) + H(Z) - H(X,Z)$$

Prvo je potrebno izračunati $H(X, Z)$. Za računanje iskoristit ćemo matricu $[p(z_k \mid x_i)]$ koju smo već odredili u d) dijelu zadatka. Dakle,

$$H(X,Z) = -\sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{8} p(x_i, z_k) \cdot \log_2 p(x_i, z_k)$$

$$[p(x_i, z_k)] = [p(x_i)] \cdot [p(z_k \mid x_i)]$$

$$[p(x_i, z_k)] = [0.2 \quad 0.8] \cdot \begin{bmatrix} 0.03 & 0.16 & 0.6 & 0.03 & 0.08 & 0.08 & 0.01 & 0.01 \\ 0.15 & 0.08 & 0.48 & 0.17 & 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[p(x_i, z_k)] = \begin{bmatrix} 0.006 & 0.032 & 0.12 & 0.006 & 0.016 & 0.016 & 0.002 & 0.002 \\ 0.12 & 0.064 & 0.384 & 0.136 & 0.064 & 0.032 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H(X,Z) = 2.7966 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}}$$

Na kraju, transinformacija u cijelom sustavu kanala jednaka je:

$$I(X;Z) = 0.72 + 2.1368 - 2.7966$$

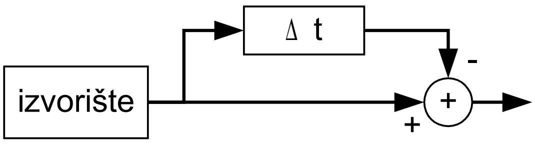
$$\underline{\underline{I(X;Z) = 0.0602 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}}}$$

Zadatak – 2:

Diskretno izvorište generira simbole iz skupa simbola $\boldsymbol{X} = \{4, 5, 6\}$. Statističke veze između dva uzastopna simbola koja izvorište generira dane su preko matrice združenih vjerojatnosti - $[p(x_i, x_j)]$.

$$\left[p(x_i, x_j)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}1172 & 0{,}1172 & 0{,}1563 \\ 0{,}0713 & 0{,}2138 & 0{,}0713 \\ 0{,}2023 & 0{,}0253 & 0{,}0253 \end{bmatrix}$$

Na izvorište je priključen sklop (slika) koji na izlazu daje razliku između dva uzastopna simbola generirana na izvorištu.



Odredite entopiju skupa simbola na izlazu sklopa sa slike.

<u>Rješenje:</u>

Na izlazu sklopa sa slike pojavljuje se razlika dva uzastopna simbola generirana na izvorištu. Broj mogućih ishoda je 5, i to: -2, -1, 0, 1, 2. Uzimajući sve moguće kombinacije simbola iz skupa X dobivamo sljedeće vjerojatnosti za pojedini događaj (x_i, y_j):

(x_i, y_j)	$p(x_i, y_j)$	$x_i - y_j$
4, 4	0.1172	0
4, 5	0.1172	-1
4, 6	0.1563	-2
5, 4	0.0713	1
5, 5	0.2138	0
5, 6	0.0713	-1
6, 4	0.2023	2
6, 5	0.0253	1
6, 6	0.0253	0

Definirajmo diskretnu slučajnu varijablu Y koja određuje vjerojatnosti pojavljivanja pojedinih razlika na izlazu, tj.

$$Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1563 & 0.1173 + 0.1173 & 0.1172 + 0.2138 + 0.0253 & 0.0713 + 0.0253 & 0.2023 \end{pmatrix}$$

odnosno:

$$Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1563 & 0.1885 & 0.3563 & 0.0966 & 0.2023 \end{pmatrix}.$$

Entropija $H(Y)$:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{n} p(y_j)\log_2 p(y_j)$$

$$H(Y) = -(0.1563\log_2 0.1563 + 0.1885\log_2 0.1885 + 0.3563\log_2 0.3563 + \\ 0.0966\log_2 0.0966 + 0.2023\log_2 0.2023) = 2.195 \text{ bit/simbol}$$

$\boldsymbol{H(Y)}$**=2.195 bit/simbol**

Zadatak – 3:
Komunikacijskim kanalom prenose se četiri poruke generirane iz skupa od četiri simbola **X** = $\{x_1,...,x_4\}$. Omjer vjerojatnosti njihovog pojavljivanja je $p(x_1)$: $p(x_2)$: $p(x_3)$: $p(x_4)$ =1:2:2:5. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je:

$$\left[p(y_j|x_i\right] = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$$

a) Odredite entropiju ulaznog i izlaznog skupa simbola.
b) Odredite entropiju šuma i transinformaciju u kanalu.

Rješenje:

a)

$$p(x_1):p(x_2):p(x_3):p(x_4) = 1:2:2:5$$

$$p(x_1) = 0.1$$
$$p(x_2) = p(x_3) = 0.2$$
$$p(x_4) = 0.5$$

$$\left[p(x_i)\right] = \left[0.1 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.5\right]$$

$$\left[p(y_j)\right] = \left[p(x_i)\right] \cdot \left[p(y_j \mid x_i)\right] = \left[0.3 \quad 0.21 \quad 0.26 \quad 0.23\right]$$

$$H(X) = -\sum_i p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i) = 1.761 \text{ bit/simbol}$$

$$H(Y) = -\sum_j p(y_j) \cdot \log_2 p(y_j) = 1.9869 \text{ bit/simbol}$$

b)

$$\left[p(x_i, y_j)\right] = \left[p(x_i)\right] \cdot \left[p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.02 & 0.05 \\ 0.02 & 0.04 & 0.1 & 0.04 \\ 0.02 & 0.1 & 0.04 & 0.04 \\ 0.25 & 0.05 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$H(X,Y) = -\sum_i \sum p(x_i, y_j) \cdot \log_2 p(x_i, y_j) = 3.5219 \text{ bit/simbol}$$

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 0.226 \text{ bit/simbol}$$

$$H(Y \mid X) = H(X,Y) - H(X) = 1.761 \text{ bit/simbol}$$

Zadatak – 4:

Na ulazu diskretnog komunikacijskog kanala, sa smetnjama, pojavljuju se četiri simbola **X** = $\{x_1,...,x_4\}$. Na izlazu istog kanala pojavljuju se ista četiri simbola. Statističke veze između ulaznog i izlaznog skupa simbola dane su preko matrice združenih vjerojatnosti - $[p(x_i, y_j)]$.

$$[p(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/32 \\ 1/16 & 1/8 & 1/32 & 1/32 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Odredite entropiju ulaznog i izlaznog skupa simbola.
b) Odredite združenu entropiju parova – $H(X, Y)$, entropiju šuma – $H(Y | X)$ i transinformaciju - $I(X; Y)$.
c) Procijenite donju granicu za kapacitet danog diskretnog komunikacijskog kanala.

<u>Rješenje:</u>

Iz matrice združenih vjerojatnosti - $[p(x_i, y_j)]$

$$[p(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

možemo dobiti (zbrajanjem redaka) vjerojatnosti pojavljivanja simbola na ulazu diskretnog komunikacijskog kanala, tj.

$$[p(x_i)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

dok zbrajanjem po stupcima dobivamo vjerojatnost pojavljivanja simbola na izlazu diskretnog komunikacijskog kanala, tj.

$$[p(y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

a)

$H(X) = -\sum_i p(x_i)\log_2 p(x_i) = 2$ bit/simbol ; $H(Y) = -\sum_j p(y_j)\log_2 p(y_j) = 1{,}75$ bit/simbol

b)

$H(X,Y) = -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i, y_j) = 3.375$ bit/simbol

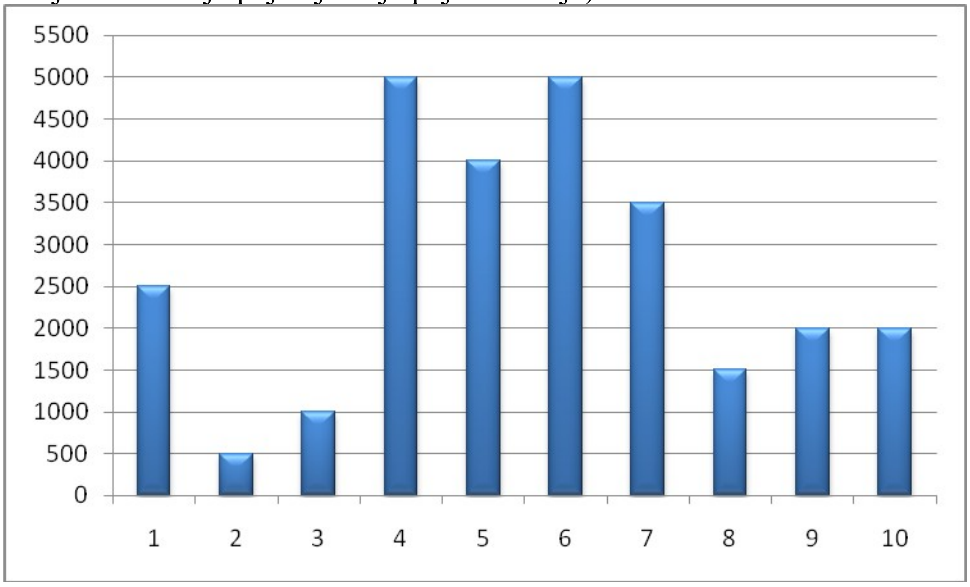
$H(Y | X) = H(X, Y) – H(X) = 3.375 – 2 = 1.375$ bit/simbol

$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 2 + 1.75 – 3.375 = 0.375$ bit/simbol

c)

Kapacitet kanala je definiran kao maksimum transinformacije, gdje se maksimizacija provodi po svim mogućim razdiobama vjerojatnosti pojave simbola na ulazu, tj. $C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = 0.375$ bit/simbol

Zadatak – 5:
Mirna digitalizirana slika s bojama "1", "2", "3", …, "10" zadana je histogramom (slika, na y-osi navedena je frekvencija pojavljivanja pojedine boje):



Svaka boja ("1", "2", "3", …, "10") kodira se jednim simbolom iz skupa simbola $\boldsymbol{X} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

a) Izračunajte srednji sadržaj informacije zadane slike.
b) Izračunajte minimalno vrijeme potrebno za prijenos dane slike od računala A do računala B modemom 56 kbit/s.

<u>**Rješenje:**</u>

a)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	2500	500	1000	5000	4000	5000	3500	1500	2000	2000
$p(x_i)$	0,926	0,019	0,037	0,185	0,148	0,185	0,13	0,056	0,074	0,074

$N = 10$: $p(x_i) = \dfrac{f_i}{\sum_{i=1}^{N} f_i}$ $\quad \sum_{i=1}^{N} f_i = 27000$

$H(X) = 3{,}0798$ bit/simbol

b)

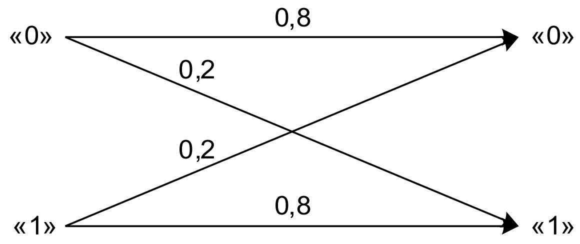
$$t = \frac{H(X) \cdot \sum_{i=1}^{N} f_i}{56\,\text{kbit/s}} = \frac{3{,}0798 * 27000}{56000} = 1{,}4849\,\text{s}$$

Zadatak – 6:

Četiri poruke, generirane iz skupa od četiri jednako vjerojatna simbola $\mathbf{X} = \{x_1,...,x_4\}$, kodirane binarnim kodom (x_1 – '00'; x_2 – '01'; x_3 – '10'; x_4 – '11'), prenose se binarnim simetričnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa 0,2. Izračunajte za koliko se promijeni ekvivokacija u kanalu ako se u prijenosu kao zaštita poruka uvede jedan paritetni bit (parni paritet!).

Rješenje:

Binarni simetrični kanal:



Izvorište generira simbole s jednakom vjerojtnošću pojavljivanja, tj.
$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = p(x_4) = 0.25$.

Kao prvo potrebno je odrediti matricu uvjetnih prijelaza kanala, tj. vjerojatnost preslikavanja simbola s ulaza kanala na njegov izlaz

$$\left[p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0.64 & 0.16 & 0.16 & 0.04 \\ 0.16 & 0.64 & 0.04 & 0.16 \\ 0.16 & 0.04 & 0.64 & 0.16 \\ 0.04 & 0.16 & 0.16 & 0.64 \end{bmatrix}.$$

Matrica združenih vjerojatnosti pojavljivanja simbola je:

$$\left[p(x_i, y_j)\right] = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.04 & 0.04 & 0.01 \\ 0.04 & 0.16 & 0.01 & 0.04 \\ 0.04 & 0.01 & 0.16 & 0.04 \\ 0.01 & 0.04 & 0.04 & 0.16 \end{bmatrix}.$$

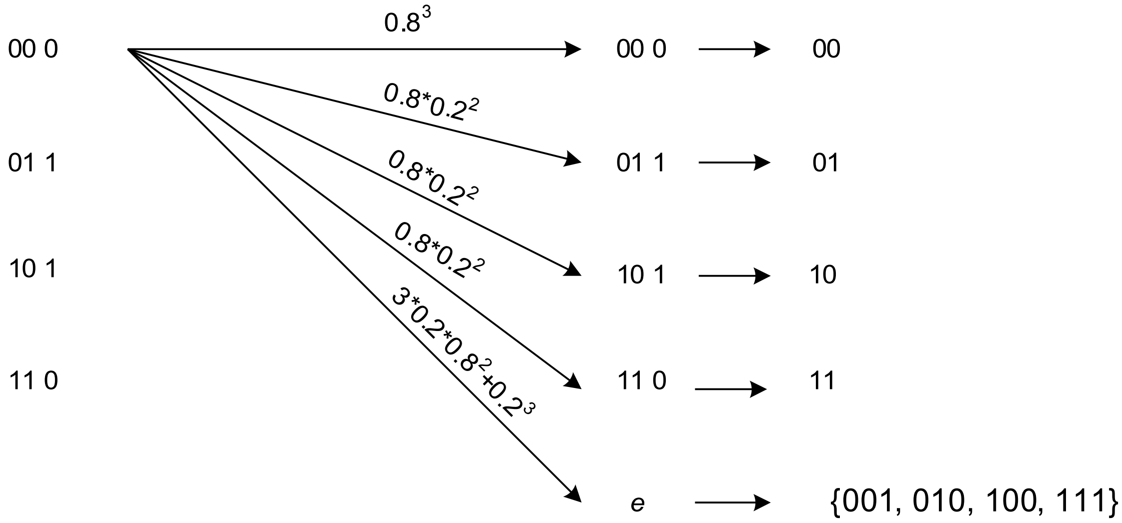
$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i, y_j) = 3.444 \text{ bit/simbol.}$$

Budući da su sve vjerojatnosti pojavljivanja simbola na izlazu kanala također jednake 0.25, dobijamo:

$$H(Y) = -\sum_{ji=1}^{4} p(y_j) \log_2 p(y_j) = 2 \text{ bit/simbol.}$$

$$H_1(X \mid Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1.444 \text{ bit/simbol}$$

Sada na isti način promatramo slučaj kada imamo jedan paritetni bit. Na slici je dan primjer za poruku x_1. Isto vrijedi i za ostale tri poruke. Važno je uočiti postojanje novog simbola (e) na izlazu komunikacijskog kanala. Dani simbol objedinjuje sve novo-nastale poruke koje ne pripadaju skupu {00 0, 01 1; 10 1; 11 0}.



$$\left[p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}512 & 0{,}032 & 0{,}032 & 0{,}032 & 0{,}392 \\ 0{,}032 & 0{,}512 & 0{,}032 & 0{,}032 & 0{,}392 \\ 0{,}032 & 0{,}032 & 0{,}512 & 0{,}032 & 0{,}392 \\ 0{,}032 & 0{,}032 & 0{,}032 & 0{,}512 & 0{,}392 \end{bmatrix}$$

Iz matrice uvjetnih prijelaza kanala dobivamo matricu združenih vjerojatnosti pojavljivanja simbola, tj.

$$\left[p(x_i, y_j)\right] = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.008 & 0.008 & 0.008 & 0.098 \\ 0.008 & 0.128 & 0.008 & 0.008 & 0.098 \\ 0.008 & 0.008 & 0.128 & 0.008 & 0.098 \\ 0.008 & 0.008 & 0.008 & 0.128 & 0.098 \end{bmatrix}$$

$p(y_1) = p(y_2) = p(y_3) = p(y_4) = 0.1520$
$p(e) = 0.392$

$H(Y) = -\sum_{i=1}^{5} y_i \log y_i = 2.182$ bit /symbol

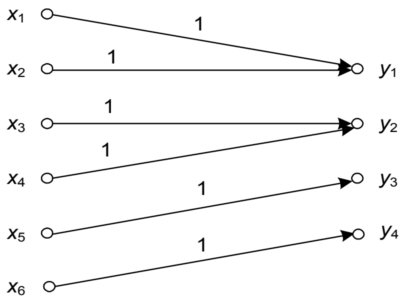
$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) = 3.501$ bit/simbol

$H_2(X \mid Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1.319$ bit/simbol

Dakle, razlika ekvivokacija iznosi:

$$\Delta H(X \mid Y) = \left| H_1(X \mid Y) - H_2(X \mid Y) \right| = 0{,}125 \text{ bit/simbol}$$

Zadatak – 7:
Odredite kapacitet kanala sa slike uz nepoznate vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog skupa simbola (X).



Rješenje:
Sa slike očitavamo matricu uvjetnih vjerojatnosti:

$$\left[p(y_j|x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kapacitet kanala računa se prema formuli:

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}}\left[H(Y) - H(Y|X)\right]$$

Uvjetna entropija $H(Y|X)$ računa se prema formuli:

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log_2 p(y_j|x_i)$$

Ukoliko u ovu formulu uvrstimo dobivenu matricu rezultat će biti: $H(Y|X) = 0$ bit/simbol.

Dakle, kapacitet zadanog kanala iznosi:

$$C = \max_{p(x_i)} H(Y) = \log_2 4 = 2 \text{ bit/simbol}$$

Zadatak – 8:

Rad nekog stroja može se opisati Markovljevim procesom prvog reda s osam stanja. Stroj mijenja svoj položaj svakih 10 sekundi na sljedeći način: u 60% slučajeva ostaje u istom položaju; u 40% slučajeva ide u drugi položaj (redni broj položaja!) ukoliko se nalazi u prvom položaju; u 40% slučajeva ide u sedmi položaj ukoliko se nalazi u osmom položaju; u svim ostalim slučajevima s vjerojatnošću 20% ide gore ili dolje za jedan položaj.

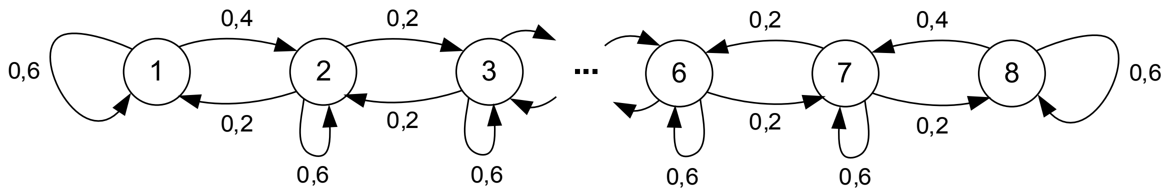
a) Skicirajte Markovljev lanac koji opisuje rad stroja.
b) Izračunajte stacionarne vjerojatnosti pojave stroja u nekom položaju
c) Izračunajte srednji vlastiti sadržaj informacije (entropija!) koji stroj generira svojim položajem ukoliko se uzima i ukoliko se ne uzima ovisnost u njegovom kretanju.

Napomena: Srednji vlastiti sadržaj infromacije za slučaj ovisnosti među simbolima izvorišta računa se po formuli:

$$H' = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, x_j)\log_2 p(x_j|x_i) \quad \text{[bit/simbol]}$$

<u>**Rješenje:**</u>

a)



b)

$$\left[p(x_j|x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$p(x_1) = 0{,}6\cdot p(x_1) + 0{,}2\cdot p(x_2) \Rightarrow \; p(x_2) = 2\cdot p(x_1) \quad (1)$$

$$p(x_2) = 0{,}4\cdot p(x_1) + 0{,}6\cdot p(x_2) + 0{,}2\cdot p(x_3) \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow (2) \Rightarrow \; p(x_3) = 2\cdot p(x_1) \quad (3)$$

$$p(x_3) = 0{,}2\cdot p(x_2) + 0{,}6\cdot p(x_3) + 0{,}2\cdot p(x_4) \quad (4)$$

$$(1), (3) \rightarrow (4) \Rightarrow \; p(x_4) = 2\cdot p(x_1)$$

...

Iz prethodno danih jednakosti lako uviđamo sljedeće:

$$p(x_1) + 6\cdot 2\cdot p(x_1) + p(x_1) = 1$$

$$14\cdot p(x_1) = 1 \Rightarrow \; p(x_1) = 1/14$$

$$p(x_2) = p(x_3) = \ldots = p(x_7) = 1/7; p(x_8) = 1/14$$

c) $H(X)$=2,9502 bit/položaj; $H'(X)$=1,3138 bit/položaj

Zadatak – 9:
Piksel na TV slici može poprimiti 128 različitih vrijednosti. Promatranjem susjednih piksela ustanovljeno je da piksel u 80% slučajeva zadržava istu vrijednost, a u 10% slučajeva ide u sljedeću višu ili nižu razinu. Pikseli krajnjih razina (0 i 127) imaju u 50% slučajeva istu vrijednost, a u 50% slučajeva prelaze u jednu višu, odnosno, nižu razinu.

a) Skicirajte Markovljev lanac koji opisuje izvor!

b) Izračunajte stacionarne vjerojatnosti pojave pojedinih razina piksela.

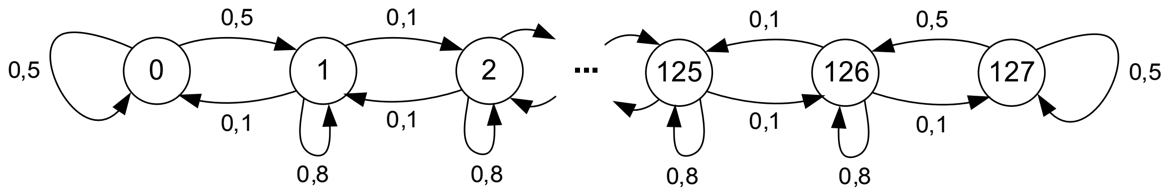
c) Izračunajte entropiju izvorišta ako ne postoji ovisnost među pikselima. Također, izračunajte entropiju izvorišta ako postoji ovisnost među pikselima.

d) Koliki je minimalni kapacitet kanala kojim se može prenositi video signal rezolucije 640x480 i brzine 25 slika u sekundi za slučaj kada postoji ovisnost među pikselima.

<u>**Rješenje:**</u>

Napomena: Korištena notacija: $p_i \equiv p(x_i)$.

a)



b) Zbog ergodičnosti izvorišta mora vrijediti:

$$\sum_{i=0}^{127} p_i = 1 \qquad (1)$$

$$[p_0\ p_1 \dots p_{127}] \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} = [p_0\ p_1 \dots p_{127}] \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) dobivamo linearni sustav od 128 jednadžbi sa 128 nepoznanica. Međutim, lako uočavamo:

i) $0{,}5p_0 + 0{,}1p_1 = p_0 \rightarrow p_1 = 5p_0$ ili $p_0 = 0{,}2p_1$ (3)

ii) $0{,}5p_0 + 0{,}8p_1 + 0{,}1p_2 = p_1$ (4)

(3) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow p_1 = p_2$

Lako se pokazuje da vrijedi: $p_1 = p_2 = \ldots = p_{126} = 5p_0$

iii) $p_{127} = 0{,}1p_{126} + 0{,}5p_{127} \rightarrow p_{126} = 5p_{127} \rightarrow p_0 = p_{127}$

Iz $\sum_{i=0}^{127} p_i = 1$ dobivamo $p_0 + 126(5p_0) + p_0 = 1 \rightarrow p_0 = \frac{1}{632}$, odnosno $p_{127} = \frac{1}{632}, p_i = \frac{5}{632}$, $i = 1, 2, ..., 126$.

c) Entropija izvorišta <u>ako ne postoji</u> ovisnost među pikselima je:

$$H(X) = -\sum p_i \log_2 p_i = -(2p_0 \log_2 p_0 + 126 \cdot 5p_0 \log_2(5p_0)) = 6{,}9892 \frac{\text{bit}}{\text{piksel}}$$

dok je entropija izvorišta <u>ako postoji</u> ovisnost među pikselima dana izrazom

$$H' = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, x_j) \log_2 p(x_j | x_i)$$

pri čemu vrijedi $[p(x_i, x_j)]=[p(x_i)][p(x_j|x_i)]$.

$$[p(x_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$[p(x_i, x_j)] = \frac{1}{632}\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$H'(X) = 0{,}9222 \frac{\text{bit}}{\text{piksel}}$$

d) $C_{\min} = 640 \cdot 480 \cdot 25 \cdot H'(X) \approx 7{,}0825 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$

Entropijsko kodiranje

Zadatak – 10:

i) Postoji li prefiksni kôd (baza 2!) sa sljedećim duljinama kodnih riječi: {5, 3, 4, 2, 1, 4}? Ako postoji, tada napišite sve kodne riječi danog koda. Ako ne postoji, tada zašto?

ii) Napišite sve kodne riječi prefiksnog koda čije su duljine kodnih riječi: 2, 4, 2, 3, 4, 2.

iii) Dan je prefiksni kôd s duljinama kodnih riječi kao pod ii). Za koje je vjerojatnosti pojavljivanja simbola $X = \{x_1,...,x_6\}$ srednja duljina kodne riječi jednaka entropiji - $H(X)$? Odredite $H(X)$.

<u>**Rješenje:**</u>

i)

$l_i = \{5,3,4,2,1,4\}$, $i = 1,...,6$.

Uvjet postojanja prefiksnog koda ispituje se preko Kraftove nejednakosti, tj. ako postoji prefiksni kôd s duljinama kodnih riječi l_i tada mora vrijediti $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \leq 1$. U našem slučaju $\sum_{i=1}^{6} 2^{-l_i} = 2^{-5} + 2^{-3} + ... + 2^{-4} = \frac{33}{32} > 1$.

Uvjet $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \leq 1$ nije ispunjen te zaključujemo da prefiksni kôd s duljinama kodnih riječi l_i ne postoji!

ii)

$l_i = \{2,4,2,3,4,2\}$, $i = 1,...,6$.

Uvjet $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \leq 1$ je ispunjen što znači da dani prefiksni kôd postoji.

l_i	2	4	2	3	4	2
kodna riječ	01	0000	10	001	0001	11

Napomena: Ovo je samo jedno od rješenja!

iii)

Iz uvjeta $H(X) = L(X) \rightarrow \sum_{i=1}^{6} p(x_i)\log_2 \frac{1}{p(x_i)} = \sum_{i=1}^{6} p(x_i) l_i \rightarrow l_i = \log_2 \frac{1}{p(x_i)} \rightarrow$

$p(x_i) = 2^{-l_i}$, $i = 1,...,6$.

Dakle, $[p(x_i)] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$, $i = 1,...,6$. $H(X)$=2,375 bit/simbol.

Zadatak – 11:
Dan je segment (**A**) neke slike. Optimalno kodirajte dani segment **A** binarnim kodom tako da je srednja duljina kodne riječi minimalna (Huffman!). Odredite srednju duljinu kodne riječi kao i veličinu memorije (u *kibibyte*-ima) potrebnu za pohranu danog segmenta slike.

A =

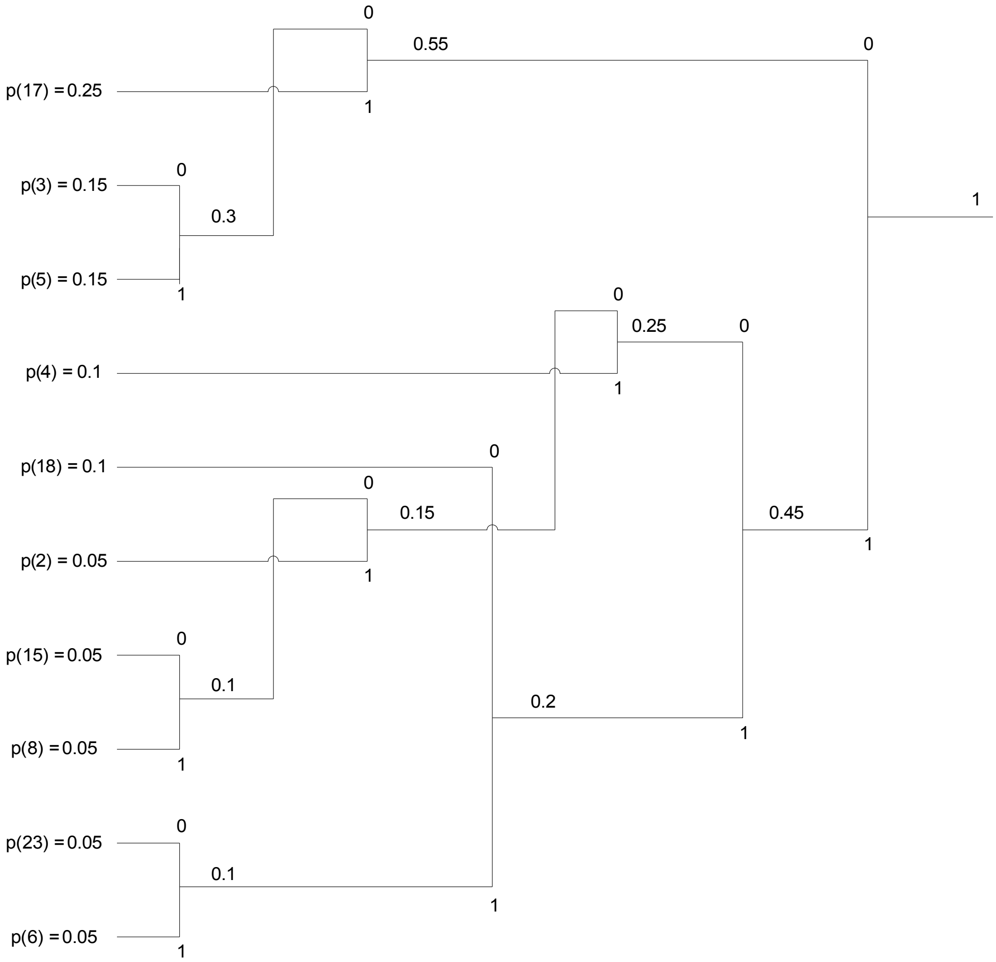
17	17	3	4	5
5	2	3	15	5
8	18	17	23	17
18	17	3	4	6

Rješenje:

Ukupno 20 svjetlina na danom segmentu slike **A**. Vjerojatnosti pojavljivanja pojedinih svjetlina slike iznose:

$p(17) = 5 / 20 = 0.25$
$p(3) = p(5) = 0.15$
$p(4) = p(18) = 0.1$
$p(2) = p(15) = p(8) = p(23) = p(6) = 0.05$

Optimalno kodiranje danog segmenta slike dano je niže.



Tablica svjetlina slike s kodnim riječima i njihovim duljinama je:

svjetlina slike **A**	kodna riječ	duljina kodne riječi (l_i) [bit/svjetlina]	frekvencija pojavljivanja pojedine svjetline slike (f_i)
17	01	2	5
3	000	3	3
5	001	3	3
4	101	3	2
18	110	3	2
2	1001	4	1
15	10000	5	1
8	10001	5	1
23	1110	4	1
6	1111	4	1

Srednja duljina kodne riječi iznosi L=3,1 bit/svjetlina. Potrebna veličina memorije za pohranu danog segmenta slike iznosi:

$$M = \sum_{i=1}^{10} f_i l_i = 62\,\text{bit} = 0{,}00756\,\text{kbyte}.$$

Zadatak – 12:

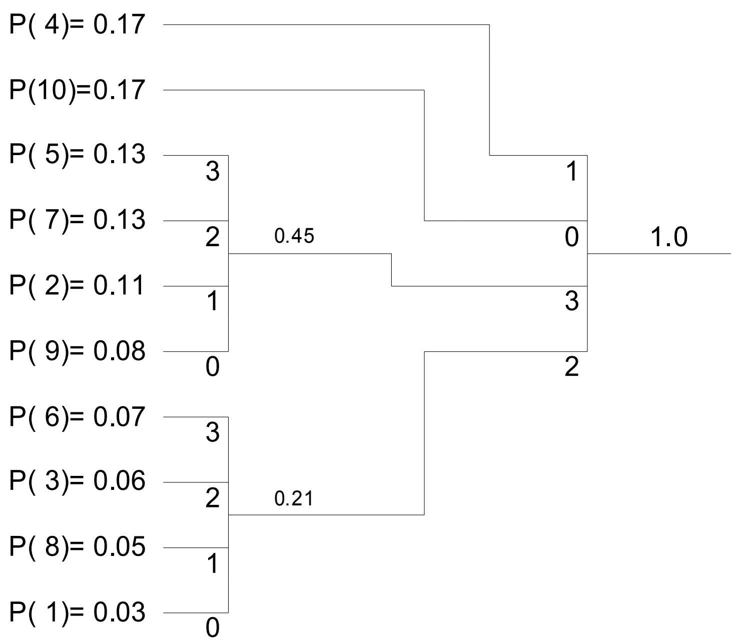
Neka je dano diskretno bezmemorijsko izvorište koje generira simbole x_i, i = 1,..., 10. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola (u %) dane su tablici:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x_i)$ [%]	3	11	6	17	13	7	13	5	8	17

a) Kodirajte dani skup simbola optimalnim kodom (Huffman!) tako da svaka kodna riječ ima paran broj bitova.
b) Odredite entropiju danog skupa simbola, tj. $H(X)$.
c) Odredite srednju duljinu kodne riječi.

Rješenje:

a) Osnovna ideja je kodirati zadani skup simbola kvartarnim kodom (baza 4!). Pretvorbom kvartarnog u binarni kôd osiguravamo paran broj bitova po svakoj kodnoj riječi jer jedna znamenka u bazi 4 predstavlja dvije znamenke u bazi 2.



x_i	4	10	5	7	2	9	6	3	8	1
kôd $_4$	1	0	33	32	31	30	23	22	21	20
kôd $_2$	01	00	1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000

b) $H_2(X)$=3,156 bit/simbol ili $H_4(X)$=1,5781 kvat. simbola/simbol

c) $L_2(X)$=3,32 bit/simbol ili $L_4(X)$=1,66 kvat. simbola/simbol

Zadatak – 13:

Dano je diskretno bezmemorijsko izvorište koje generira simbole x_i, i = 1, 2,... Svi simboli su jednako vjerojatni i maksimalna entropija izvorišnog skupa simbola iznosi $H(X)$=3,4594 bit/simbol.

a) Optimalno kodirajte ternarnim kodom (Huffman!) dani skup simbola X;
b) Odredite efikasnost danog koda.
c) Odredite za koliko se smanji ili poveća efikasnost koda ovim kodiranjem u odnosu na kodiranje istog skupa simbola binarnim kodom.

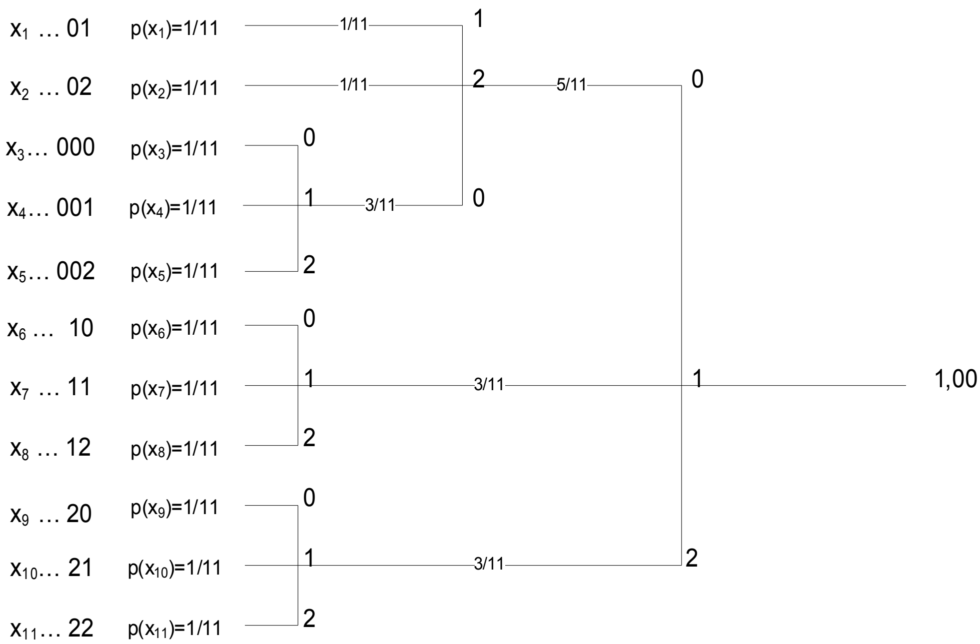
Rješenje:

$$p(x_1) = p(x_2) = \cdots = p(x_n) = \frac{1}{n}$$
$$H(X) = 3{,}4594 \text{ bit/simbol}$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) log_2\, p(x_i) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} log_2\, \frac{1}{n} = -n\frac{1}{n} log_2\, \frac{1}{n} = log_2 n$$

$$n = 2^{H(X)} = 2^{3{,}4594} = 11$$
$$p(x_1) = p(x_2) = \cdots = p(x_{11}) = \frac{1}{11}$$

a)



simbol (x_i)	vjerojatnost pojavljivanja $p(x_i) = p_i$	kodna riječ (C_i)	duljina kodne riječi (l_i)
x_1	1/11	01	2
x_2	1/11	02	2
x_3	1/11	000	3
x_4	1/11	001	3

x_5	1/11	002	3
x_6	1/11	10	2
x_7	1/11	11	2
x_8	1/11	12	2
x_9	1/11	20	2
x_{10}	1/11	21	2
x_{11}	1/11	22	2

b)

$$\varepsilon_3 = \frac{H(X)'}{L_3}$$

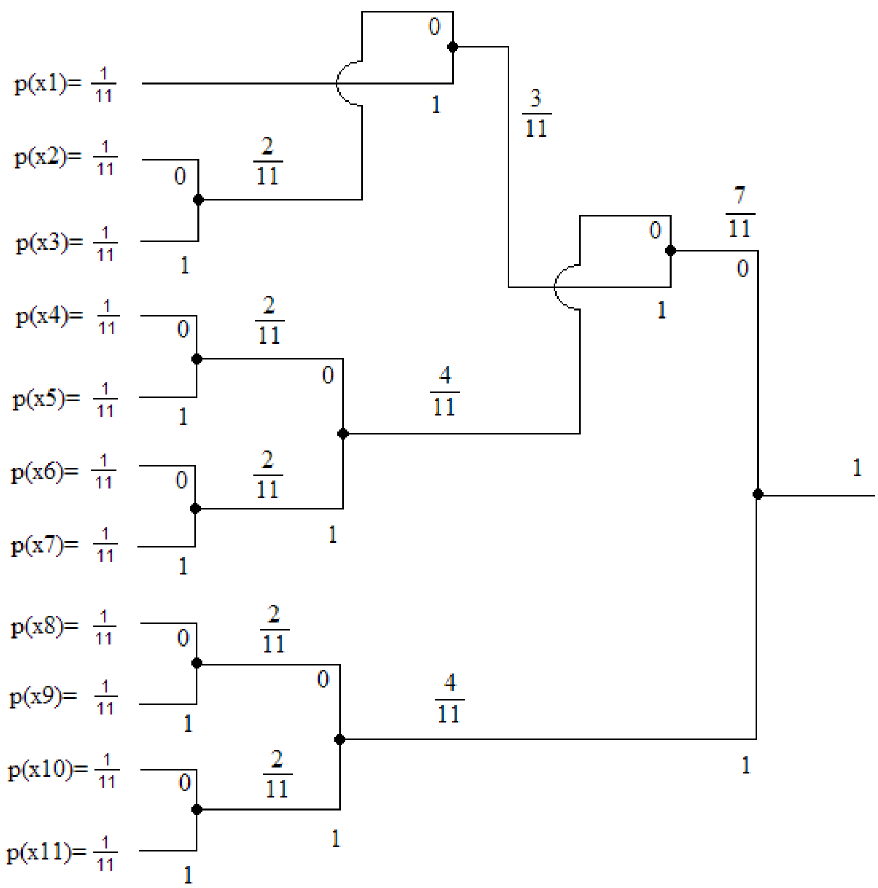
$$H(X)' = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) log_3\, p(x_i) = -11\frac{1}{11} log_3 \frac{1}{11} = -log_3 \frac{1}{11} = 2{,}183 \left[\frac{\text{trit}}{\text{simbol}}\right]$$

$$L_3 = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} l_i = \frac{1}{11}(2+2+3+3+3+2+2+2+2+2+2)$$

$$L_3 = 2{,}273 \left[\frac{\text{trit}}{\text{simbol}}\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{H(X)'}{L_3} = \frac{2{,}183}{2{,}273} = 0{,}9604$$

c)



SIMBOL (x_i)	VJEROJATNOST POJAVLJIVANJA $p(x_i) = p_i$	KODNA RIJEČ (*Ci*)	DULJINA KODNE RIJEČI (*li*)
x_1	1/11	100	3
x_2	1/11	1011	4
x_3	1/11	1010	4
x_4	1/11	1111	4
x_5	1/11	1110	4
x_6	1/11	1101	4
x_7	1/11	1100	4
x_8	1/11	011	3
x_9	1/11	010	3
x_{10}	1/11	001	3
x_{11}	1/11	000	3

$$\varepsilon_2 = \frac{H(X)}{L_2}$$

$$H(X) = 3{,}4594 \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} l_i = \frac{1}{11}(3+4+4+4+4+4+4+3+3+3+3)$$

$$L_2 = 3{,}546 \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{H(X)}{L_2} = \frac{3{,}4594}{3{,}546} = 0{,}9756$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 0{,}9756 - 0{,}9604 = 0{,}0152$$

Kodiranje binarnim kodom je efikasnije od kodiranja ternarnim kodom.

Zadatak – 14:
Na izvoru se pojavljuju četiri simbola $\{a, b, c, d\}$. Omjer vjerojatnosti pojavljivanja simbola je p_a:p_b:p_c:p_d=1:2:3:4. Slijed od 10 simbola kodiran je aritmetičkim kodom i dobivena je kodirana poruka (binarni zapis!): $(0,\ 00110110001001011101)_2$. Pronađite prvih pet simbola iz kodiranog slijeda, a potom kodirajte aritmetičkim kodom slijed od 4 simbola *acda*.

Rješenje:

Kodirana poruka $L=(0{,}2115144729614258)_{10}$

$p_a : p_b : p_c : p_d = 1:2:3:4$
$p_a = 0.1 \quad p_b = 0.2 \quad p_c = 0.3 \quad p_d = 0.4$

simbol x_i	$p(x_i)$	kumulativni podskupovi $[D_s, G_s)$
a	0,1	[0, 0.1)
b	0,2	[0.1, 0.3)
c	0,3	[0.3, 0.6)
d	0,4	[0.6, 1)

Dekodiranje poruke kodirane aritmetičkim kodom se provodi tako da se računaju pripadni intervali za svaki simbol i provjerava kojem intervalu kodirana poruka pripada. Postupak se ponavlja onoliko puta koliko je poruka duga.
Za proračun intervala koristimo sljedeće formule: $\begin{cases} D' = D + (G-D) \times D_S \\ G' = D + (G-D) \times G_S \end{cases}$

i) $L \rightarrow$ [0.1, 0.3); Kodirana poruka pripada intervalu [0.1, 0.3), te je prvi simbol poruke "`*b*".

ii) *D*=0.1; *G*=0.3
…
"*c*" *D*'=0.1+(0.3-0.1)*0.3=0.16; *G*'=0.1+(0.3-0.1)*0.6=0.22
...
$L \rightarrow$ [0.16, 0.22) → drugi simbol poruke je "*c*"

iii) *D*=0.16; *G*=0.22
…
"*d*" *D*'=0.16+(0.22-0.16)*0.6=0.196; *G*'=0.16+(0.22-0.16)*1=0.22
$L \rightarrow$ [0.196, 0.22) → treći simbol poruke je "*d*"

iv) *D*=0.196; *G*=0.22
…
"*d*" *D*'=0.2104; *G*'=0.22
$L \rightarrow$ [0.196, 0.22) → četvrti simbol poruke je "*d*"

v) *D*=0.2104; *G*=0.22
…
"*b*" *D*'=0.223; *G*'=0.21328

...
$L \rightarrow [0.223, 0.21328) \rightarrow$ peti simbol poruke je "*b*"

Dakle, prvih pet simbola kodiranog slijeda su „*bcddb*".

Drugi dio zadatka odnosi se na kodiranje slijeda simbola aritmetičkim kodom.

$$\begin{cases} D' = D + (G - D) \times D_S \\ G' = D + (G - D) \times G_S \end{cases}$$

D=0; G=1

"*a*"
D'=0+(1-0)*0=0
G'=0+(1-0)*0.1=0.1

D=0
G=0.1

"*c*"
D'=0.03
G'=0.06

D=0.03
G=0.06

"*d*"
D'=0.048
G'=0.060

D=0.048
G=0.060

"*a*"
D'=0.048
G'=0.0492

Kodirana poruka je bilo koji broj iz intervala [0.0480, 0.0492).

Primjer: $(0.0480)_{10}=(0.00001100010)_2$

Zadatak – 15:
Koristeći algoritam LZ77 kodirajte poruku *aaaabbbbbbccccccd** uzimajući pri tome da je maksimalna duljina posmičnog prozora (PP) i prozora za kodiranje (PZK) 6, odnosno 5 simbola. **Napomena:** "*" označava kraj slijeda.

Rješenje:

Napomena: Plavom bojom i pravokutnikom je označen posmični prozor (PP), a crvenom bojom i podvučeno prozor za kodiranje (PZK). Na početku kodiranja posmični prozor je prazan.

PP=6
PZK=5

1.Korak	*a a a a b b b b b b c c c c c c d **	(0,0,*a*)
2.Korak	*a a a a b b b b b b c c c c c c d **	(1,3,*b*)
3.Korak	*a a a a b b b b b b c c c c c c d **	(1,4,*b*)
4.Korak	*a a a a b b b b b b c c c c c c d **	(0,0,*c*)
5.Korak	*a a a a b b b b b b c c c c c c d **	(1,4,*c*)
6.Korak	*a a a a b b b b b b c c c c c c d **	(0,0,*d*)
7.Korak	*a a a a b b b b b b c c c c c c d **	(0,0,*)

Kodiran poruka glasi:

(0,0,*a*) (1,3,*b*) (1,4,*b*) (0,0,*c*) (1,4,*c*) (0,0,*d*) (0,0,*)

Zadatak – 16:
Uzimajući polazni rječnik *D* gdje je *D*[1]=*a* i *D*[2]=*b* kodirajte poruku *abbbbbbababababaaab* koristeći algoritam LZW.

Rješenje:

abbbbbbababababaaab
D[3]=*ab*
izlaz=[1]

abbbbbbababababaaab
D[4]=*bb*
izlaz=[2]

abbbbbbababababaaab
D[5]=*bbb*
izlaz=[4]

abbbbbbababababaaab
D[6]=*bbba*
izlaz=[5]

abbbbbbababababaaab
D[7]=*aba*
izlaz=[3]

abbbbbbababababaaab
D[8]=*abab*
izlaz=[7]

abbbbbbababababaaab
D[9]=*ba*
izlaz=[2]

abbbbbbababababaaab
D[10]=*aa*
izlaz=[1]

abbbbbbababababaaab
D[11]=*aab*
izlaz=[10]

abbbbbbababababaaab
izlaz= [2]

Kodirana poruka = [1, 2, 4, 5, 3, 7, 2, 1, 10, 2]

Zadatak – 17:

Uzimajući polazni rječnik D gdje je $D[0] = \#$, $D[1] = A$, $D[2] = B$, $D[3] = C$,..., $D[26] = Z$, dekodirajte kodiranu poruku 20 15 2 5 15 18 14 15 20 27 29 31 36 30 32 34 0 koristeći algoritam LZW.

Rješenje:

Prvo pogledajmo dio poruke koju imamo:

20	15	2	5	15	18	14	15	20	27	29	31	36	30	32	34	0
T	O	B	E	O	R	N	O	T								#

Dijelove poruke koji nedostaju, potrebno je otkriti algoritmom dekodiranja. Krenimo stoga od samog početka.

KORAK	ULAZ DEKODERA	DEKODIRANI SIMBOLI	SADRŽAJ RJEČNIKA
1	(20)	T	
2	(15)	O	(27) TO
3	(2)	B	(28) OB
4	(5)	E	(29) BE
5	(15)	O	(30) EO
6	(18)	R	(31) OR
7	(14)	N	(32) RN
8	(15)	O	(33) NO
9	(20)	T	(34) OT
10	(27)	TO	(35) TT
11	(29)	BE	(36) TOB
12	(31)	OR	(37) BEO
13	(36)	TOB	(38) ORT
14	(30)	EO	(39) TOBE
15	(32)	RN	(40) EOR
16	(34)	OT	(41) RNO
17	(0)	#	(42) OT#

Dobili smo dekodiranu poruku:

20	15	2	5	15	18	14	15	20	27	29	31	36	30	32	34	0
T	**O**	**B**	**E**	**O**	**R**	**N**	**O**	**T**	**TO**	**BE**	**OR**	**TOB**	**EO**	**RN**	**OT**	#

Zadatak – 18:
Dano je diskretno bezmemorijsko izvorište *X* koje generira simbole x_i, i = 1, 2,...100. Neka je *C* prefiksni kôd za *X*, tj. *C*(*X*). Dokažite da zbroj duljina kodnih riječi mora biti veći od 664.

Rješenje:

Aritmetička sredina *n* brojeva (a_1, $a_{2, \ldots,}$ a_n) definira se kao $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$. Geometrijska sredina istih brojeva se definira kao $G = \sqrt[100]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$. Za svaki prirodni broj *n* i sve realne brojeve (a_1, $a_{2, \ldots,} a_n$) vrijedi tzv. AG nejednakost, tj. $A \geq G$.

Budući da je *C* prefiksni kôd, za njega je ispunjena Kraftova nejednakost: $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \leq 1$.

Napišimo sad AG nejednakost za niz brojeva $2^{-l_i} \;\forall\, i = 1,...,100$:

$$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} 2^{-l_i} \geq \sqrt[100]{2^{-\sum_{i=1}^{100} l_i}}$$

Pomnožimo prethodnu nejednakost sa 100 i usporedimo je s Kraftovom nejednakošću, tj.:

$$100\sqrt[100]{2^{-\sum_{i=1}^{100} l_i}} \leq \sum_{i=1}^{100} 2^{-l_i} \leq 1$$

Nadalje,

$$\sqrt[100]{2^{-\sum_{i=1}^{100} l_i}} \leq \frac{1}{100} \quad |^{100}$$

$$2^{-\sum_{i=1}^{100} l_i} \leq \frac{1}{100^{100}} \quad | \log_2$$

$$-\sum_{i=1}^{100} l_i \leq \log_2\left(\frac{1}{100^{100}}\right) = -\log_2\left(100^{100}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{100} l_i \geq \log_2\left(100^{100}\right) \approx 664.39$$

Dakle, zbroj duljina kodnih riječi mora biti veći od 664 (miminalno 665).

Uvjerimo se da to vrijedi i za optimalni kôd. Optimalni kôd je onaj kôd kod kojeg je prosječna duljina kodne riječi jednaka entropiji.

Dakle, za optimalni kod vrijedi:

$$L(X) = H(X)$$

$$\sum_{i=1}^{100} l_i \cdot p_i = -\sum_{i=1}^{100} p_i \cdot \log_2(p_i)$$

odnosno

$$l_i = -\log_2(p_i) = \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$$

$$2^{l_i} = \frac{1}{p_i} \rightarrow \; p_i = 2^{-l_i}.$$

Budući da uvijek vrijedi $\sum_{i=1}^{100} p_i = 1$, slijedi da je:

$$\sum_{i=1}^{100} p_i = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{100} 2^{-l_i} = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{100} 2^{-l_i} \le 1$$

pa je i za kodne riječi optimalnog koda ispunjena Kraftova nejednakost, odnosno i optimalni kôd je prefiksni. Dakle, i zbroj duljina njegovih kodnih riječi mora biti veći od 664.

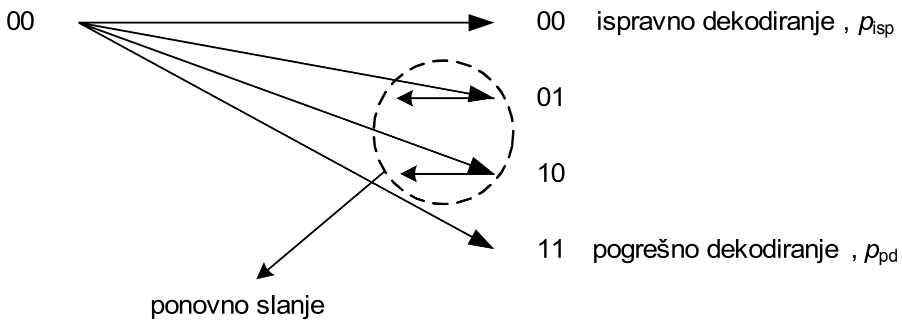
Zaštitno kodiranje

Zadatak – 19:
Dvije kodne riječi "00" i "11" koriste se za prijenos informacija preko diskretnog binarnog simetričnog kanala u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa $p < 0{,}5$. Na prijemnoj strani provodi se sljedeće pravilo dekodiranja: ako su u primljenoj kodnoj riječi dva bita različita prijemnik od predajnika traži ponovno slanje te kodne riječi. U svim drugim slučajevima prijemnik (dekoder kanala) provodi dekodiranje. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja.

Rješenje

Vjerojatnost pogrešnog dekodiranja računamo prema formuli $p_{pd}=1-p_{isp}$, gdje je p_{isp} vjerojatnost ispravnog dekodiranja.

Ispravno dekodiranje uključuje sljedeće slučajeve /Primjer za kodnu riječ 00. Isto vrijedi i za 11/:



00 →	00							$(1-p)^2$
	01 00	ili	10 00					$2p(1-p)^3$
	01 01 00	ili	01 10 00	ili	10 10 00	ili	10 01 00	$4p^2(1-p)^4$
	01 01 01 00	ili	...					$8p^3(1-p)^5$
	...							...

$$p_{isp} = (1-p)^2 + 2p(1-p)^3 + 4p^2(1-p)^4 + 8p^3(1-p)^5 + \ldots =$$
$$= (1-p)^2\left\{1 + 2p(1-p) + 4p^2(1-p)^2 + 8p^3(1-p)^3 + \ldots\right\} =$$
$$= (1-p)^2\left\{1 + (2p(1-p))^1 + (2p(1-p))^2 + (2p(1-p))^3 + \ldots\right\} =$$
$$= (1-p)^2 \frac{1}{1-2p(1-p)} = \frac{(1-p)^2}{1-2p+2p^2}$$

Konačno, $p_{pd} = 1 - p_{isp} = 1 - \dfrac{(1-p)^2}{1-2p+2p^2} = \ldots = \dfrac{p^2}{1-2p+2p^2}$

Napomena: U zatatku je korištena sljedeća zakonitost: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x};\ |x| < 1.$

Zadatak – 20:

Dan je binarni kôd K s kodnim riječima oblika $d_1d_2d_3c_4c_5c_6$ i duljinama 6 simbola, gdje su d_1, d_2, $d_3 \in F_2 = \{0, 1\}$ proizvoljni brojevi, dok c_4, c_5 i c_6, moraju zadovoljavati sljedeće:

$$c_4 \equiv d_1 + d_2 \pmod 2$$

$$c_5 \equiv d_2 + d_3 \pmod 2$$

$$c_6 \equiv d_1 + d_3 \pmod 2$$

i) Odredite generirajuću matricu **G** za dani kôd K.
ii) Odredite sve kodne riječi danog koda.
iii) Provjerite je li zadovoljen uvjet linearnosti za kôd K.
iv) Odredite matricu provjere pariteta – **H**.

Rješenje:

i)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii)

$$K = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right.$$

iii)

a. $\mathbf{c} = [000000] \in K$

b. Da bi provjerili ostale uvjete linearnosti trebamo vidjeti je li zbroj (u modulo 2 logici) bilo koje dvije kodne riječi koda K opet kodna riječ koja pripada kodu K i da li množenje bilo koje kodne riječ sa skalarom daje kodnu riječ koja pripada kodu K. Množenje je trivijalno jer se množi samo s $\{0, 1\}$ pa se uvjek dobije kodna riječ iz koda K, dok zbrajanje slijedi u nastavku:

$000000 = 001011 \oplus 001011$
$001011 = 010110 \oplus 011101$
$010110 = 101110 \oplus 111000$
$011101 = 100101 \oplus 111000$
$100101 = 101110 \oplus 001011$
$101110 = 110011 \oplus 011101$
$110011 = 010110 \oplus 100101$
$111000 = 011101 \oplus 100101$

Vidimo da se zbrajanjem bilo koje dvije kodne riječi uvijek dobije kodan riječ koja pripada kodu K.

iv)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak – 21:
Dan je binarni kôd $K \subset F^4{}_2$ s generirajućom matricom

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Pronađite standardni niz koda *K*.
ii) Odredite tablicu sindroma koda *K*.

Rješenje:

Kodne riječi su linearna kombinacija $\mathbf{c} = a_1$*[1010] + a_2*[0101], gdje su a_1 i a_2 elementi skupa {0 , 1}. Dakle kodne riječi danog koda su:

$$\mathbf{c}_1 = 0 * [\ 1\ 0\ 1\ 0\ ] \oplus\ 0 * [\ 0\ 1\ 0\ 1\ ] = [\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]$$
$$\mathbf{c}_2 = 0 * [\ 1\ 0\ 1\ 0\ ] \oplus\ 1 * [\ 0\ 1\ 0\ 1\ ] = [\ 0\ 1\ 0\ 1\ ]$$
$$\mathbf{c}_3 = 1 * [\ 1\ 0\ 1\ 0\ ] \oplus\ 0 * [\ 0\ 1\ 0\ 1\ ] = [\ 1\ 0\ 1\ 0\ ]$$
$$\mathbf{c}_4 = 1 * [\ 1\ 0\ 1\ 0\ ] \oplus\ 1 * [\ 0\ 1\ 0\ 1\ ] = [\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]$$

i) / ii)

$$K = \begin{cases} 0000 \\ 0101 \\ 1010 \\ 1111 \end{cases}$$

Hammingova udaljenost iznosi $d(K)$=2 te na temelju toga možemo izračunati koliko dani kôd može ispraviti pogrešaka, tj. $t = \left\lfloor \frac{d(K)-1}{2} \right\rfloor = 0$.

Standardni niz danog koda *K* je:

				sindrom
0000	1010	0101	1111	00
1000	0010	1101	0111	10
0100	1110	0001	1011	01
1100	0110	1001	0011	11

Također, postoji i sljedeća tablica standardnog niza:

				sindrom
0000	1010	0101	1111	00
0010	1000	0111	1101	10
0001	1011	0100	1110	01
1001	0011	1100	0110	11

Budući da postoje isti sindromi, to dani kôd *K* pogrešku ne može ispraviti.

Zadatak – 22:
Dan je binarni kôd K [n, k]=[7, 4] s generirajućom matricom

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Odredite matricu provjere pariteta – **H**.
ii) $d(K)$=?
iii) Provjerite je li dani kôd K perfektan.
iv) Odredite kodnu riječ koja je poslana ako je primljena kodna riječ c=[1110100].

Rješenje:

i) Prvo odredimo matricu **A**. Iz $\mathbf{G} = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}]$ slijedi $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$-\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = [-\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \ \mathbf{I}]$$

I na kraju, matrica provjere pariteta $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ii) Minimalna distanca blok koda K može se izračunati na više načina. Jedan od njih je: odredimo koliko minimalno stupaca u matrici **H** treba zbrojiti u aritmetici mod 2 da bi se dobilo 0. U matrici **H** nema jednakih stupaca te ih treba minimalno 3 za zbroj 0. Zato je $d(K) = 3$.

iii) Kôd je perfektan ako je zadovoljena sljedeća jednakost:

$$M = \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}}$$

Iz ii) izračunamo t (broj pogrešaka koje kôd K može ispraviti):

$$d(K) = 3 \Rightarrow t = \left\lfloor \frac{d(K) - 1}{2} \right\rfloor = 1$$

Također znamo da je $M = 2^k$.

$$2^k = \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}}$$

$$2^4 = \frac{2^7}{\binom{7}{0} + \binom{7}{1}}$$

$$16 = 16$$

Jednakost vrijedi, pa je kôd K perfektan.

iv) Izračunajmo sindrom po formuli, tj. $\mathbf{s} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobili smo da je sindrom jednak **0**, pa iz toga zaključujemo da je poslana kodna riječ jednaka primljenoj, tj $c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadatak – 23:
Za ternarni kôd K $[n, k]$=[4, 3] s generirajućom matricom **G** odredite matricu provjere pariteta **(H)** kao i sve kodne riječi koda $K^{\perp}$.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

U zadatku je potrebno izračunati matricu **H** i sve kodne riječi koda $K^{\perp}$. Da bi smo izračunali $K^{\perp}$, moramo znati matricu **H**, a da bismo odredili matricu **H** potrebno je prvo matricu **G** svesti na oblik **G**=[**I A**]. Prilikom svođenja matrice na standardni oblik dopuštene su operacije:

- zamjena redaka (R);
- zamjena stupca (S);
- pribrajanje jednog redka drugom.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad /R1+R2/ \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad /R2 \leftrightarrow R3/ \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} /R2+R1/$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} /R3+R2/ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} /R3+R3/ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{I} \ \mathbf{A}]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{H} = [-\mathbf{A}^T \ \mathbf{I}] = [-2 \quad 0 \quad -1 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 1]$$

Matrica **H** je generirajuća matrica za $K^{\perp}$, tj. $K^{\perp}$ = {0***H**, 1***H**, 2***H**}={0000, 1021, 2012}.

Zadatak – 24:

Dan je Hammingov kôd K s duljinom kodne riječi n = 3 bita. Odredite:

a) generirajuću matricu danog koda.
b) sve kodne riječi koda K kao i koda $K^{\perp}$.
c) vjerojatnost pogrešnog dekodiranja (p_{pd}) ako je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita u kanalu p_g=10^{-3}.

Rješenje:

a) $[n, k] = [3, 1]$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Kodne rječi koda K možemo dobiti preko matrice **G**, tj.

$$K = \begin{cases} 0 \cdot \mathbf{G} \\ 1 \cdot \mathbf{G} \end{cases} = \begin{cases} 000 \\ 111 \end{cases}$$

Kodne riječi koda $K^{\perp}$ dobijemo koristeći matricu **H**, jer je matrica **H** generirajuća matrica koda $K^{\perp}$:

$$K^{\perp} = \begin{cases} [00] \cdot \mathbf{H} \\ [01] \cdot \mathbf{H} \\ [10] \cdot \mathbf{H} \\ [11] \cdot \mathbf{H} \end{cases} = \begin{cases} 000 \\ 101 \\ 110 \\ 011 \end{cases}$$

c) Radi se o Hammingovom kodu koji može ispraviti jednostruku pogrešku, pa do pogrešnog dekodiranja može doći kad se dogodi dvostruka ili trostruka pogreška. Ukupna vjerojatnost pogrešnog dekodiranja (p_{pd}) jednaka je zbroju vjerojatnosti dvostruke pogreške i vjerojatnosti trostruke pogreške, tj.

$$p_{\mathrm{pd}} = p_2 + p_3 = \underbrace{\binom{3}{2} p_g^{\,2} \left(1 - p_g\right)}_{\substack{\text{dvostruka}\\ \text{pogreška}}} + \underbrace{\binom{3}{3} p_g^{\,3}}_{\substack{\text{trostruka}\\ \text{pogreška}}} = 2.998 \cdot 10^{-6}$$

Zadatak – 25:

Dan je Hammingov binarni kôd K $[n, k]$=[7,4]. Kodne riječi koda K se prenose komunikacijskim kanalom s brisanjem simbola. Odredite kodnu riječ koja je poslana ako je primljena kodna riječ **c**'=[101?01?].

Rješenje:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Neka je **c**'=[101x01y] tada iz **c**'***H**$^{\mathrm{T}}$= [000] dobivamo

$$\left.\begin{array}{l} 1 \oplus 1 \oplus y = 0 \\ 1 \oplus 1 \oplus y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0$$

$$x \oplus 1 \oplus y = 0 \Rightarrow x = 1$$

Dakle, poslana kodna riječ je **c**=[1011010].

Zadatak – 26:
Mjerenjem je utvrđeno da u binarnom komunikacijskom kanalu djeluju smetnje koje mogu uzrokovati pogrešan prijenos od jednog bita u slijedu od najmanje 8 uzastopnih bita. Za zaštitu informacije uporabljen je Hammingov koder, a duljina zaštitno kodiranog bloka prilagođena je uvjetima koji vladaju u kanalu. Za slijed bitova 10100100... odredite <u>prvi</u> zaštitno kodirani blok bitova ali tako da je kodna brzina maksimalna.

<u>Rješenje:</u>

$$p_g = \frac{1}{8}$$

kodna brzina $\varepsilon = \frac{k}{n}$

Hammingov koder → bitovi zaštite su na svakom 2^{i-1} mjestu, odnosno na **1.**, **2.**, **4.**, **8.** itd. mjestu

- Možemo promatrati kodne riječi duljina 6,7, 8 i 9 bitova jer su one najbliže duljini slijeda u kojem se dogodi jedna pogreška:

n	Z_i – i-ti bit zaštite P_m – m-ti bit podataka									k	$\varepsilon = \frac{k}{n}$
6	Z_1	Z_2	P_1	Z_3	P_2	P_3	-	-	-	3	0,500
7	Z_1	Z_2	P_1	Z_3	P_2	P_3	P_4	-	-	4	**0,571**
8	Z_1	Z_2	P_1	Z_3	P_2	P_3	P_4	Z_4	-	4	0,500
9	Z_1	Z_2	P_1	Z_3	P_2	P_3	P_4	Z_4	P_5	5	0,555

Ako bi koristili kodnu riječ duljine 8, imali bi jedan bit zaštite Z_4 koji ne bi štitio niti jedan bit podataka i ne bi bilo moguće odretiti taj bit, tako da riječ duljine 8 ne dolazi u obzir.

U slučaju duljine 9, moguća je dvostruka pogreška jer se greške događaju jednom u svakih 8 bitova, tako da npr. može doći do pogreške na prvom i zadnjem bitu jedne kodne riječi, što bi mogli detektirati, ali ne i otkriti.

Ostaju na izbor kodne riječi duljine 6 i 7 od kojih odabiremo **riječ duljine 7** jer ima veću kodnu brzinu (0,571).

Ulazni niz je 10100100..., a kako je broj bitova koji kodiramo $k = 4$, uzimamo prva 4 bita (**1010**) i kodiramo ih Hammingovim kodom [7, 4].

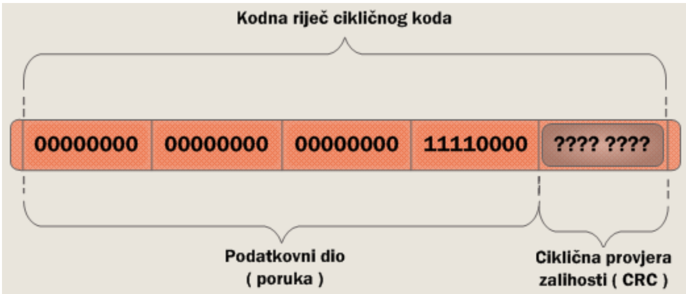
	Z_1	Z_2	**1**	Z_3	**0**	**1**	**0**
Z_1	**1**		**1**		**0**		**0**
Z_2		**0**	**1**			**1**	**0**
Z_3				**1**	**0**	**1**	**0**
Rezultat	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

Zašittni paritetni bitovi su 101, a konačan prvi zaštitno kodirani blok bitova ulaznog niza je **1011010.**

Zadatak – 27:
Prijenosna tehnologija ATM (engl. *Asynchronous Transfer Mode*) koristi 8-bitnu cikličnu provjeru zalihosti (CRC, engl. *Cyclic Redundancy Check*) kao zaštitu zaglavlja ATM ćelije. Zaglavlje ćelije veličine je 5 okteta što uključuje i polje zaštite (8 bitova). Za generiranje CRC-a koristi se polinom $g(x)=x^8+x^2+x+1$. Odredite cikličnu provjeru zalihosti za ATM ćeliju čiji je sadržaj prva četiri okteta zaglavlja sljedeći: 0000 00000000 00000000 00001111 000 0.

<u>Rješenje:</u>

Imamo situaciju prikazanu sljedećom slikom:



Dakle, trebamo izračunati CRC, odnosno zaštitni dio kodne riječi. Ako koristimo zapis polinomom i poruku označimo sa *d(x)*, onda je $d(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4$.

Generirajući polinom je zadan u zadatku, tj. $g(x)=x^8+x^2+x+1$. Koristeći formulu (knjiga [1]) $r(x) = d(x)\cdot x^r \bmod[g(x)]$, gdje je r stupanj polinoma $g(x)$, a $r(x)$ je zaštitni dio kodne riječi, odnosno ostatak pri dijeljenju polinoma $d(x)*x^r$ polinomom $g(x)$. Nadalje,
$d(x)\cdot x^r = \left(x^7 + x^6 + x^5 + x^4\right)\cdot x^8 = x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12}$.
Postupak djeljenja:

$$\left(\cancel{x}^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12}\right) \div \left(x^8 + x^2 + x + 1\right) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x$$

$$\cancel{x}^{15} \pm x^9 \pm x^8 \pm x^7$$

$$— \rightarrow\ \cancel{x}^{14} + x^{13} + x^{12} + x^9 + \cancel{x}^8 + \cancel{x}^7$$

$$— \rightarrow\ \cancel{x}^{14} \pm \cancel{x}^8 \pm \cancel{x}^7 \pm x^6$$

$$— \rightarrow\ — \rightarrow\ \cancel{x}^{13} + x^{12} + x^9 + \cancel{x}^6$$

$$— \rightarrow\ — \rightarrow\ \cancel{x}^{13} \pm x^7 \pm \cancel{x}^6 \pm x^5$$

$$— \rightarrow\ — \rightarrow\ — \rightarrow\ \cancel{x}^{12} + x^9 + x^7 + \cancel{x}^5$$

$$— \rightarrow\ — \rightarrow\ — \rightarrow\ \cancel{x}^{12} \pm x^6 \pm \cancel{x}^5 \pm x^4$$

$$— \rightarrow\ — \rightarrow\ — \rightarrow\ — \rightarrow\ \cancel{x}^9 + x^7 + x^6 + x^4$$

$$— \rightarrow\ — \rightarrow\ — \rightarrow\ — \rightarrow\ \cancel{x}^9 \pm x^3 \pm x^2 \pm x$$

$$— \rightarrow\ — \rightarrow\ — \rightarrow\ — \rightarrow\ — \rightarrow\ x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 11011110$$

Napomena: Treba imati u vidu da je -1=1 u aritmetici modulo 2!

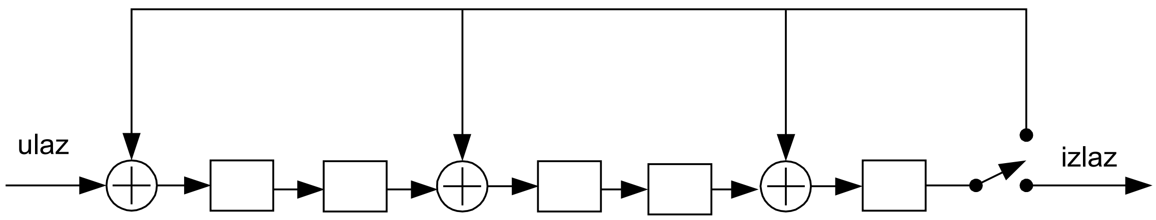
Rješenje: $r(x)$ = CRC = [11011110]

Zadatak – 28:

Na slici dan je koder za ciklični kôd [15, *k*].

a) Odredite generirajuću matricu **G** = [**I** | **A**].

b) Kodirajte slijed bitova 1001110100.



Rješenje:

a) Sa slike uočavamo da je generirajući polinom: $g(x)=x^5+x^4+x^2+1$.

Za dani ciklični kôd [n, k] duljina kodne riječi je n = 15 bitova dok iz generirajućeg polinoma vidimo da je r = 5, tj. $k = n - r = 10$.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Slijed bitova koji ulazi u koder je **d**=[1001110100] dok se na izlazu pojavljuje kodna riječ **c**=**d*G**=[**d** *00001*][1001110100 *00001*], s tim da su zadnjih 5 bitova zaštitni bitovi.

Zadatak – 29:

Neka je K linearni ciklični kôd kojem pripada kodna riječ 011011.

a) Ispišite sve kodne riječi danog koda u binarnom i polinomskom zapisu.
b) Odredite generirajući polinom $g(x)$ danog koda K.
c) Kodirajte poruku 11 koristeći $g(x)$.

Rješenje:

a) Da bi odredili ostale kodne riječi cikličkog koda zadanu riječ ćemo posmaknuti svaki put za jedan bit u lijevo dok ne dobijemo prvotno zadanu kodnu riječ.

$$011011 \xrightarrow{\;\leftarrow\;} 110110 \xrightarrow{\;\leftarrow\;} 101101 \xrightarrow{\;\leftarrow\;} 011011$$

Sada imamo tri kodne riječi te njima dodamo još kodnu riječ 000000 jer je ciklični kôd ujedno i linearan blok kôd, a linearni blok kodovi moraju sadržavati kodnu riječ **0**. Dakle,

$$K = \left\{ \begin{matrix} 000000 \\ 011011 \\ 110110 \\ 101101 \end{matrix} \right\}$$

Kodne riječi u polinomskom zapisu su redom (osim prve jer za nju je polinomski zapis 0):

K={0, x^4+x^3+x+1, $x^5+x^4+x^2+x$, $x^5+x^3+x^2+1$ }

b) Generirajući polinom je onaj polinomski zapis kodne riječi koji je jedini polinom svog stupnja i ima najmanji stupanj od svih polinoma u kodu, tako da je

$$g(x)= x^4+x^3+x+1.$$

c) Polinomski zapis poruke **d**=[1 1], koju treba kodirati, je $d(x) = x + 1$ tako da je zaštitni dio kodne riječi

$$r(x) = \frac{x^r * d(x)}{g(x)} = \frac{x^4 * (x+1)}{x^4+x^3+x+1} = \frac{x^5+x^4}{x^4+x^3+x+1}$$

$$\begin{array}{l} (x^5+x^4) \div (x^4+x^3+x+1) = x \\ \underline{\;x^5+x^4+x^2+x\;} \\ \qquad\qquad x^2+x \quad \longrightarrow \quad 0110 \end{array}$$

Kodirana poruka je **c**=[110110].

Zadatak – 30:
Ako je poznat spektar signala $g(t)$, tj. $G(f)$, potrebno je pronaći amplitudni spektar signala $g_1(t)=g(t-t_0)$.

Rješenje:

Neka je $G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$ tada

$$G_1(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt=\left|\begin{matrix} t-t_0=\mu \;\rightarrow\; t=t_0+\mu \\ dt=d\mu \end{matrix}\right|=$$

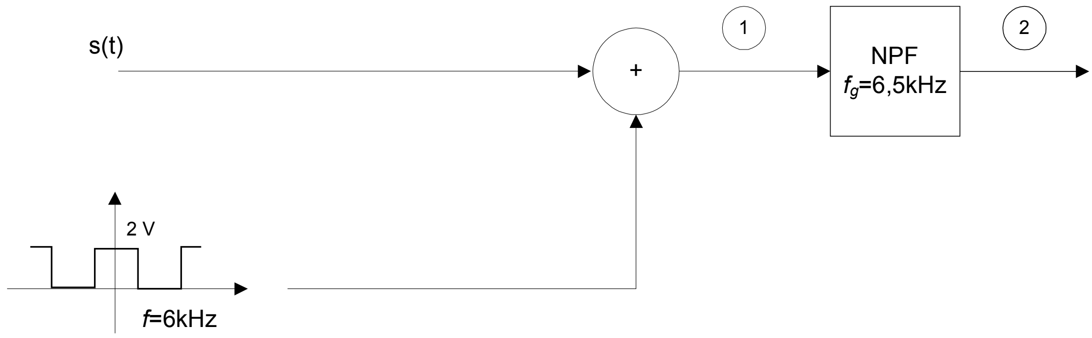
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu)e^{-j2\pi f(t_0+\mu)}d\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu)e^{-j2\pi ft_0}e^{-j2\pi f\mu}d\mu=e^{-j2\pi ft_0}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu)e^{-j2\pi f\mu}d\mu}_{G(\mu)}=$$

$$=G(\mu)e^{-j2\pi ft_0},$$

tj. $G_1(f)=G(\mu)e^{-j2\pi ft_0}$.

Amplitudni spektar signala $g(t-t_0)$ je isti kao i amplitudni spektar signala $g(t)$ ili drugim riječima rečeno: „Pomak signala u vremenu ne utječe na njegov amplitudni spektar“.

Zadatak – 31:
Za danu shemu sa slike skicirajte spektar signala u točkama 1 (do 25 kHz) i 2, a potom odredite srednju snagu signala na izlazu idealnog nisko-propusnog filtra (NPF) granične frekvencije f_g = 6,5 kHz.

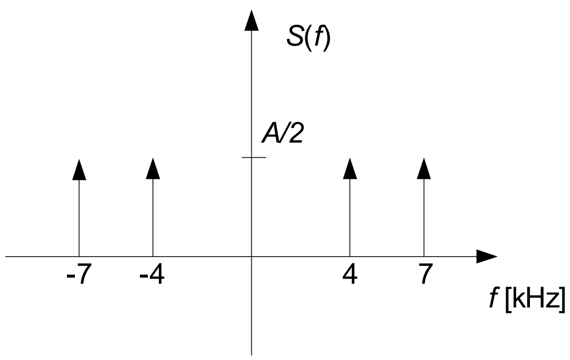


$s(t) = 8\cos(14000\pi t) + 8\cos(8000\pi t)$ [V].

Rješenje:

Neka je $g(t)$ periodičan slijed pravokutnih impulsa. Zbog svojstva linearnosti Fourierove transformacije $s(t) + g(t) \xrightarrow{F.T.} S(f) + G(f)$ vrijedi da je spektar zbroja signala na izlazu zbrajala jednak pojedinačnom zbroju spektra signala.

Skicirajmo spektar za signal $s(t)$:



Spektar slijeda pravokutnih impulsa – $G(f)$:

Amplituda: $A = 2$ V
Frekvencija: $f = 6$ kHz

Osnovni period: $T_0 = \dfrac{1}{6 \cdot 10^3} \rightarrow \dfrac{\tau}{T_0} = \dfrac{1}{2}$

Kao i svaki periodičan signal, tako je i periodičan slijed pravokutnih impulsa moguće razviti u Fourierov red. Koeficijenti razvoja u Fourierov red dani su izrazom:

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

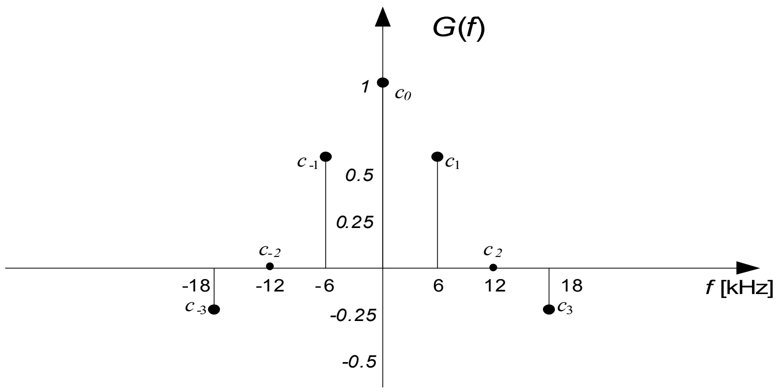
što nakon sređivanja daje jednostavniji izraz:

$$c_k = A\frac{\tau}{T_0}\cdot\frac{\sin(k\pi\tau/T)}{k\pi\tau/T}.$$

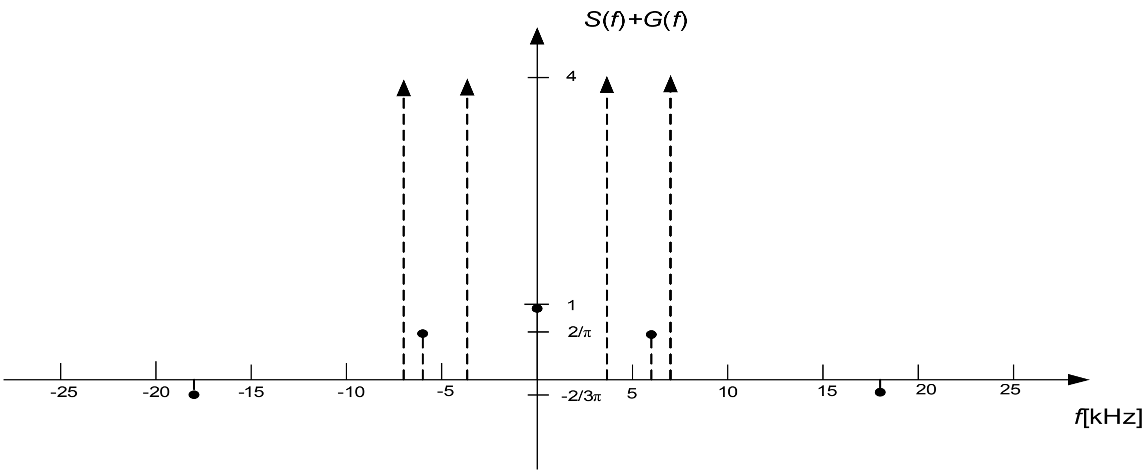
Komponente spektra c_k pojavljuju se samo na frekvencijama k/T_0 [Hz].
Uvrštavanjem brojeva dobivamo vrijednosti koeficijenata:

$$c_0 = A\frac{\tau}{T_0} = 1 \qquad c_1 = c_{-1} = \frac{2}{\pi} \qquad c_2 = c_{-2} = 0$$

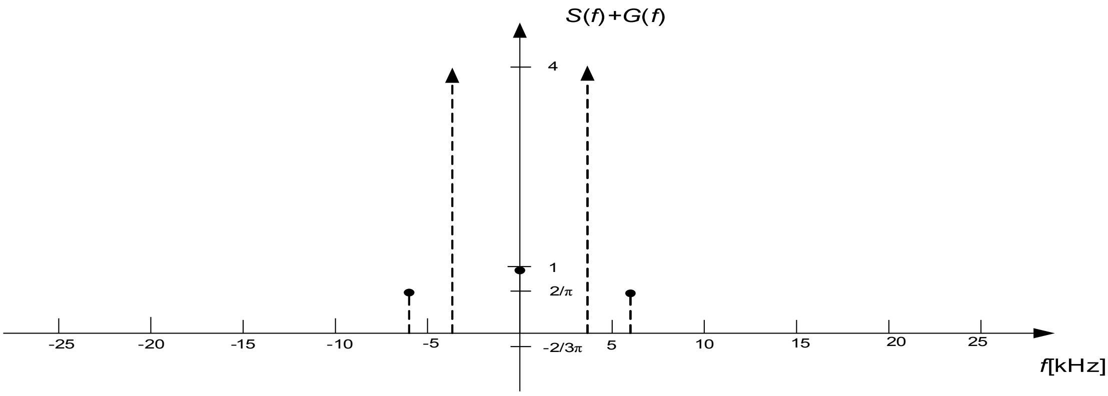
$$c_3 = c_{-3} = -\frac{2}{3\pi} \qquad c_4 = c_{-4} = 0$$



Zbrajanjem spektara $S(f)$ i $G(f)$ dobivamo za točku (1):



NPF propušta frekvencije od $-f_g$ do f_g , gdje je f_g = 6kHz, pa spektar u točki (2) izgleda ovako:



Srednja snaga na izlazu NPF-a iznosi: $P = 1 + 2\left(4^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\right) = 33{,}81\,\mathrm{W}$.

Zadatak – 32:

Na signal $s(t) = 20\cos 2\pi\, 1t\ [\mathrm{V}]$ u LTI komunikacijskom sustavu djeluje bijeli šum spektralne gustoće snage $S_N(f) = e^{-3|f|}$ [W/Hz]. Novonastali signal se dovodi na ulaz filtra amplitudnog odziva $|H(f)|$.

a) Odredite omjer S/N (snaga signala / snaga šuma) na ulazu filtra.
b) Odredite omjer S/N (u dB!) na izlazu filtra ako je $|H(f)|=1$ za $|f| < 2$ Hz.

Rješenje:

a) A=20 V

$$S = \frac{A^2}{2} = 200\,\mathrm{W}$$

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} S_N(f)df = \int_{-\infty}^{0} e^{3f}df + \int_{0}^{+\infty} e^{-3f}df = \frac{2}{3}\,\mathrm{W}$$

$$\frac{S}{N} = 300$$

b) A=20 V

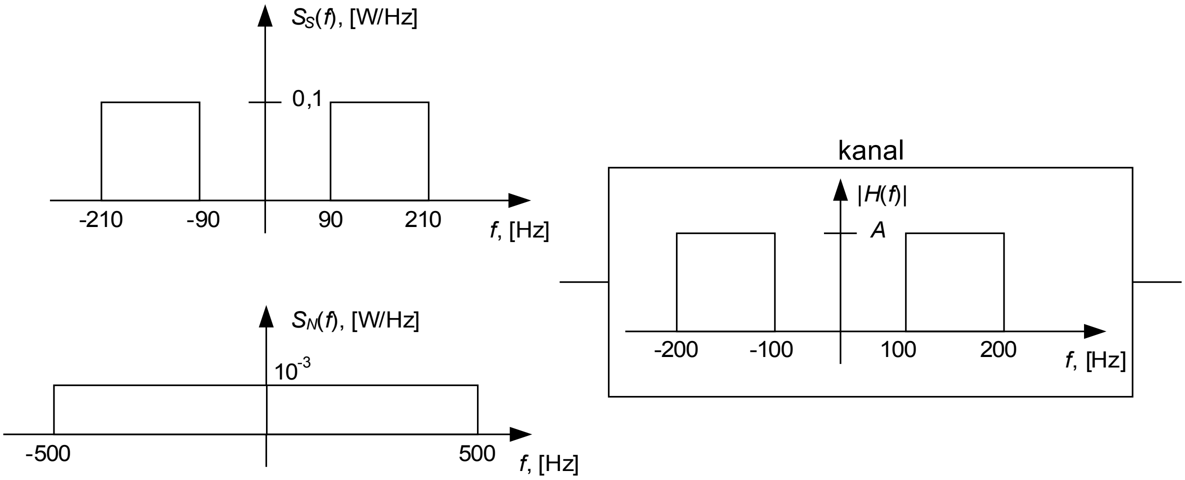
$$S = \frac{A^2}{2} = 200\,\mathrm{W}$$

$$N = 2\int_{0}^{2} e^{-3f}df = \frac{2}{-3}\cdot e^{-3f}\Big|_0^2 = \frac{-2}{3}\cdot(e^{-6}-1) = \frac{2}{3}(1-e^{-6})\,\mathrm{W}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) \approx 24{,}782\,\mathrm{dB}$$

Zadatak – 33:

Na ulaz kanala (slika) dovodi se signal spektralne gustoće snage $S_S(f)$. Na signal djeluje pojasno ograničeni bijeli šum čija je spektralna gustoća snage $S_N(f)$. Odredite za koliko se promjeni omjer S/N (snaga signala / snaga šuma) na izlazu kanala u odnosu na njegov ulaz, tj. odredite $\Delta\,(S/N) = \left(S/N\right)_{\text{izlaz}} / \left(S/N\right)_{\text{ulaz}}$.



__Rješenje:__

Ulaz:

$$P_S = 2\cdot\int_{90}^{210} 0.1\,df = 24 \quad [\text{W}]$$

$$P_N = \int_{-500}^{500} 0.001\,df = 1 \quad [\text{W}]$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{ULAZ} = \frac{P_S}{P_N} = 24$$

Izlaz:

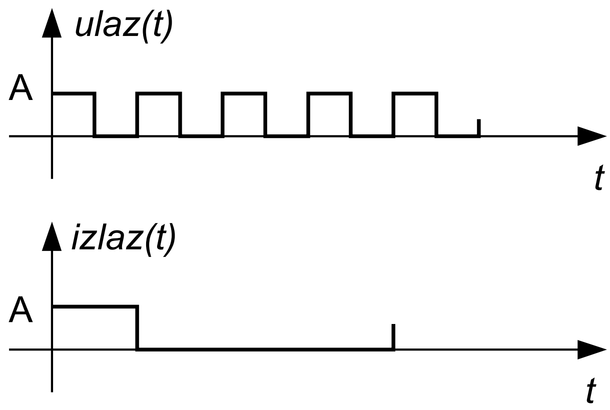
$$P_S = 2\cdot A^2\cdot\int_{100}^{200} 0.1\,df = 20A^2 \quad [\text{W}]$$

$$P_N = 2\cdot A^2\cdot\int_{100}^{200} 0.001\,df = 0.2A^2 \quad [\text{W}]$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{IZLAZ} = \frac{P_S}{P_N} = 100$$

$$\Delta\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IZLAZ}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{ULAZ}} = \frac{100}{24} \approx 4.17$$

Zadatak – 34:
Periodični slijed pravokutnih impulsa amplitude 4 [V], frekvencije *f*=100 kHz i omjera impuls:pauza 2 doveden je na ulaz sklopa za *dijeljenje frekvencije* čija je karakteristika (ulaz-izlaz) predočena na slici. Signal na izlazu iz djelitelja frekvencije propušten je kroz idalni nisko-propusni filtar (NPF) granične frekvencije 30 kHz. Skicirajte spektar signala na izlazu iz NPF-a.



Rješenje:

Sa ulazno-izlazne karakteristike djelitelja se vidi da on mijenja frekvenciju ulaznog signala, kao i omjer impuls-pauza ulaznog signala. Kako se mijenja frekvencija, odnosno omjer $\frac{\tau}{T_0}$, da bi zadržali snagu ulaznog signala, potrebno je promijeniti amplitudu.

Izračunajmo prvo promijenu frekvencije, odnosno omjer $\frac{f_{izlazna}}{f_{ulazna}}$. Prema ulazno-izlaznoj karakteristici vrijedi $\frac{T_{izlazno}}{T_{ulazno}} = 4$, budući je djeljitelj „produžio“ trajanje osnovnog perioda ulaznog signala četiri puta (izlaznom signalu impuls traje jedan period ulaznog signala, a pauza tri perioda ulaznog signala). Obzirom da $T_0 = \frac{1}{f_0}$, to je $\frac{f_{izlazna}}{f_{ulazna}} = \frac{T_{ulazno}}{T_{izlazno}} = \frac{1}{4}$.

Dakle, izlazna frekvencija se smanjila četiri puta i iznosi 25 kHz.

Snaga pravokutnog signala se računa prema formuli: $P = A^2 \frac{\tau}{T_0} = A^2 \mu$, gdje je $\mu = \frac{\tau}{T_0}$.

Također, mora vrijediti:

$P_{ulazna} = P_{izlazna}$, odnosno, $A^2_{ulaz} \cdot \mu_{ulaz} = A^2_{iizlaz} \cdot \mu_{izlaz}$, iz čega slijedi $A_{izlaz} = A_{ulaz} \sqrt{\frac{\mu_{ulaz}}{\mu_{izlaz}}}$.

U našem slučaju je $\mu_{ulaz} = \frac{2}{3}$ (jer je $\frac{\tau}{T_0 - \tau} = 2 \rightarrow \frac{\tau}{T_0} = \frac{2}{3}$), $\mu_{izlaz} = \frac{1}{4}$, te je stoga

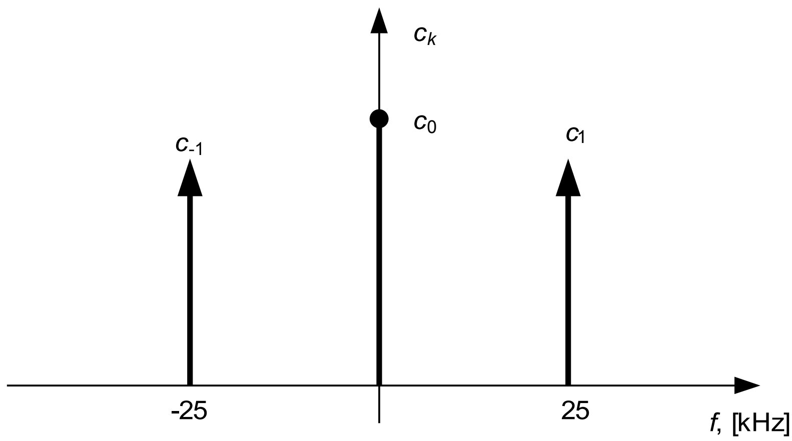
$$A_{izlaz} = 4\sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}}} = 4\sqrt{\frac{8}{3}} = 6{,}532\,[\text{V}]$$

Prilikom propuštanja kroz NPF, sve komponente spektra čije su frekvencije manje od 30 kHz će proći kroz filtar. Stoga je potrebno nacrtati samo one komponente spektra pravokutnog signala za koje vrijedi $kf_0 < 30\,\text{kHz}$, gdje je f_0 frekvencija na izlazu iz djelitelja. Nadalje, za $k \in \{0,1\}$ dobivamo

$$c_0 = A\frac{\tau}{T_0} = 6{,}532\frac{1}{4} = 1{,}633\ [\text{V}]$$

$$c_1 = c_{-1} = A\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin(\frac{\tau}{T_0}k\pi)}{\frac{\tau}{T_0}k\pi} = 1{,}633\frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}} = 1{,}47\ [\text{V}].$$

Konačno, spektar signala na izlazu iz NPF-a je:



Zadatak – 35:
Neka je dan signal $s(t)$=20cos100πt+17cos500πt [V]. Odredite minimalni broj bitova potrebnih za kodiranje svakog uzorka signala $s(t)$ ali tako da je omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma veći od 50 dB. **Napomena:** Svi koraci kvantizacije međusobno su jednaki!

Rješenje:

$r = ?$

Iz uvjeta zadatka dobivamo:

$$10\log\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log\left(\frac{3S}{m_{\max}^2}2^{2r}\right) > 50\ .$$

Maksimalna vrijednost ovog signala je 37 V, a minimalna -37 V. Prema tome,

$$m_{\max} = 37\ \text{V}\ .$$

Potrebno je još samo odrediti snagu signala. Ona je jednaka zbroju snagâ pojedinih (sinusnih) komponenata ulaznog signala:

$$S = \frac{20^2}{2} + \frac{17^2}{2} = 344.5\ \text{W}$$

Nadalje,

$$10\log\left(\frac{1033.5}{1369}2^{2r}\right) > 50$$

$$\log\left(\frac{1033.5}{1369}\right) + \log\left(2^{2r}\right) > 5$$

$$\log\left(2^{2r}\right) > 4.878$$

$$\log(2)\cdot\log_2\left(2^{2r}\right) > 4.878$$

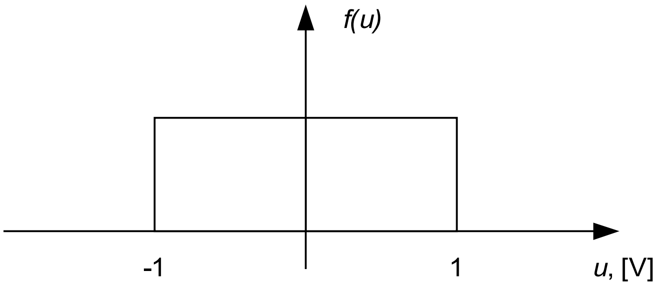
$$2r > 16.204$$

$$r = \lceil 8.102 \rceil$$

$$r = 9$$

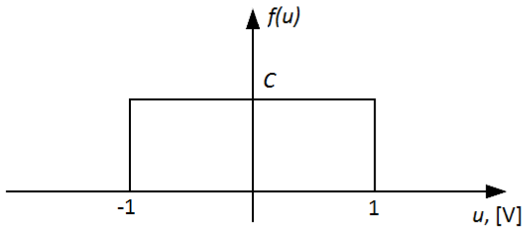
Za kodiranje svakog uzorka ovog signala potrebno je najmanje devet bitova.

Zadatak – 36:
Na slici je dana funkcija gustoće vjerojatnosti razine signala $u(t)$. Odredite omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora koji koristi 32 kvantizacijske razine. **Napomena:** Kvantizator provodi jednoliko kvantiziranje i amplitude uzoraka nalaze se u intervalu [-1, 1].



Rješenje:

Iz grafa funkcije gustoće vjerojatnosi razine signala dobivamo:

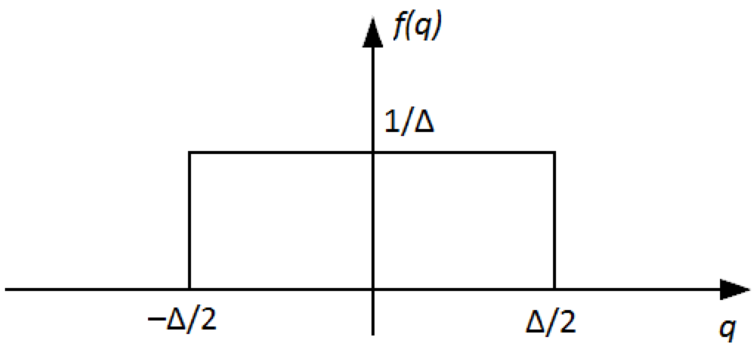


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du = 1$$

$$\int_{-1}^{1} C\, du = 1 \quad 2 \cdot C = 1 \quad C = \frac{1}{2}$$

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}, |u| \leq 1 \\ 0, inace \end{cases}$$

Nadalje, funkcija gustoće vjerojatnosti razine kvantizacijskog šuma:



$$\Delta = \frac{2 \cdot m_{\max}}{L} \quad m_{\max} = 1 \quad L = 32$$

$$\Delta = \frac{2 \cdot 1}{32} = \frac{1}{16}$$

$$f(q) = \begin{cases} 16, |q| \le \frac{1}{32} \\ 0, inace \end{cases}$$

snaga šuma: $P_N = \sigma_Q^2 = E(Q^2) - (E(Q))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 f(q)\, dq = 16 \cdot \int_{-1/32}^{1/32} q^2\, dq = 16 \cdot \left.\frac{q^3}{3}\right|_{-1/32}^{1/32} = \frac{1}{3072}$ W

snaga signala:

$P_S = \sigma_U^2 = E(U^2) - (E(U))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u)\, du = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} u^2\, du = \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$ W

$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{P_S}{P_N} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3072}} = 1024$ ili $\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_S}{P_N}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3072}}\right) = 30{,}1$ dB

Zadatak – 37:
Dva govorna signala (svaki ima pojas prijenosa 4 kHz) dovode se na ulaz 2-kanalnog PCM (engl. *Pulse Code Modulation*) sustava koji koristi kvantizator s 256 kvantizacijskih razina i provodi kodiranje binarnim kodom. Kanali se na izlazu PCM-a multipleksiraju u jedan cjeloviti kanal. Odredite brzinu prijenosa bitova u multipleksiranom kanalu.

Rješenje:

2 govorna signala
$B = 4\,\text{kHz}$ pojas prijenosa svakog signala
$L = 256$ kvantizacijskih razina
$R_m = ?$

f_u - frekvencija uzorkovanja;
Rm - brzina prijenosa u multipleksiranom kanalu

Dvokanalni PCM $\rightarrow$ $L = 2^r = 256 \Rightarrow r = 8$
$f_u = 2 \cdot B = 8000\,\text{Hz} = 8\,\text{kHz}$
$R = f_u \cdot r = 64\,\text{kbit/s}$
$R_m = 2 \cdot R = 128\,\text{kbit/s}$

Brzina prijenosa bitova u multipleksiranom kanalu iznosi 128 kbit/s.

Zadatak – 38:
Analogni signal odašilje se koristeći sustav PCM (engl. *Pulse Code Modulation*). Odredite s koliko bitova je potrebno kodirati svaki uzorak tako da na prijemnoj strani, nakon dekodiranja, vrijednost svakog uzorak bude unutar granica ±0,5% njegove vrijednosti od vrha do vrha. **Napomena:** Kvantizator provodi jednoliko kvantiziranje.

Rješenje:

Vrijednost svakog uzorka treba biti unutar granica $\pm 0.5\%$ njegove vrijednosti od vrha do vrha $\xRightarrow{slijedi} \frac{\Delta}{2} = 0{,}005 * 2m_{max}$.

Vrijedi formula $\Delta = \frac{2*m_{max}}{L} = \frac{2*m_{max}}{2^r} \xRightarrow{slijedi} 2^r = \frac{2*m_{max}}{\Delta} = \frac{2*m_{max}}{2*0{,}005*2m_{max}} = 100$

$r = log_2 100 = 6.643$

Obzirom da *r* mora biti cijeli broj, a greška mora biti unutar zadanje vrijednosti, tj. manja od zadane vrijednosti: $\Delta\downarrow \xRightarrow{slijedi} r\uparrow$, *r* mora biti cijeli broj veći od 6.643, tj. *r* = 7.

Zadatak – 39:
Signal $u(t)$ dovodi se na ulaz A/D pretvornika u kojem kvantizator koristi osam kvantizacijskih razina. Neka je funkcija gustoće vjerojatnosti razine signala $u(t)$:

$$p(u) = \begin{cases} k|u|, & |u(t)| \leq 4\,\mathrm{V} \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$$

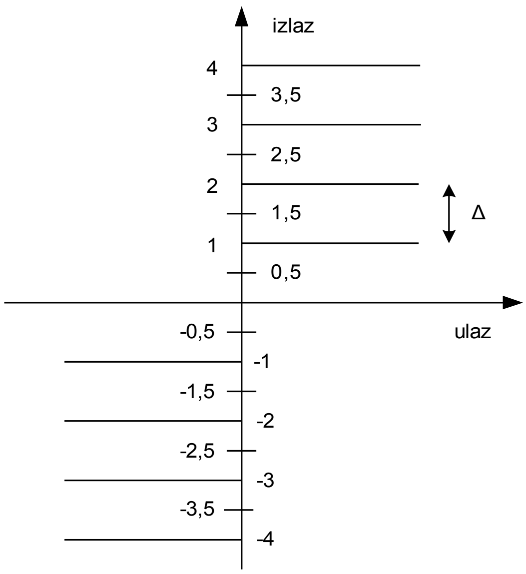
a) Odredite srednju kvadratnu grešku nastalu uslijed kvantiziranja.
b) Odredite za koliko se promijeni srednja kvadratna greška uslijed kvantiziranja ako se kvantiziranje uzoraka izvede sa četiri kvantizacijske razine.

Rješenje:

Srednju kvadratnu grešku računamo prema sljedećoj formuli

$$\bar{N}_q^2 = \int_{u_{q_i}-\frac{\Delta}{2}}^{u_{q_i}+\frac{\Delta}{2}} \left(u - u_{q_i}\right)^2 p(u)du\ ,\ i=1, 2, 3, ...$$

gdje su u_{q_i} kvantizacijske razine, tj. u našem slučaju {-3.5, -2.5, ..., 3.5} → vidi niže danu sliku!



Nadalje, odredimo vrijednost konstante k u funkciji $p(u)$. Vrijedi,

$$\int_{-4}^{0} -k \cdot u \cdot du + \int_{0}^{4} k \cdot u \cdot du = 1 \Rightarrow \quad k = 1/16.$$

a)

$$\bar{N}_{q(8)}^2 = \frac{1}{16}\left\{ -\int_{-4}^{-3}(u+3{,}5)^2 udu - \int_{-3}^{-2}(u+2{,}5)^2 udu - \int_{-2}^{-1}(u+1{,}5)^2 udu - \int_{-1}^{0}(u+0{,}5)^2 udu + \int_{0}^{1}(u-0{,}5)^2 udu + \ldots \right.$$

$$\left. + \int_{3}^{4}(u-3{,}5)^2 udu \right\} = \ldots = 0{,}0833\,\mathrm{V}^2$$

b)

$$\overline{N}^2_{q(4)} = \frac{1}{16}\left\{-\int_{-4}^{-2}(u+3)^2 u du - \int_{-2}^{0}(u+1)^2 u du + \int_{0}^{2}(u-1)^2 u du + \int_{2}^{4}(u-3)^2 u du\right\} = \ldots = 0{,}333\,\mathrm{V}^2$$

Dakle, $\Delta\overline{N}^2_q = \left|\overline{N}^2_{q(8)} - \overline{N}^2_{q(4)}\right| = 0{,}25\,\mathrm{V}^2$.

Zadatak – 40:
Analitički dokažite da za kapacitet idealnog AWGN kanala s beskonačnim pojasom prijenosa vrijedi:

$$C_\infty = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{S}{\eta} \quad \text{[bit/s]},$$

gdje je S srednja snaga signala i $\eta/2$ spektralna gustoća snage bijelog Gaussovog šuma.

Rješenje:

$$C_\infty = \lim_{B \to \infty} B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N_0 \cdot B}\right) = \lim_{B \to \infty} \log_2\left(1 + \frac{S}{N_0 \cdot B}\right)^B$$

Prepoznajemo oblik: $\lim_{t \to \infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$

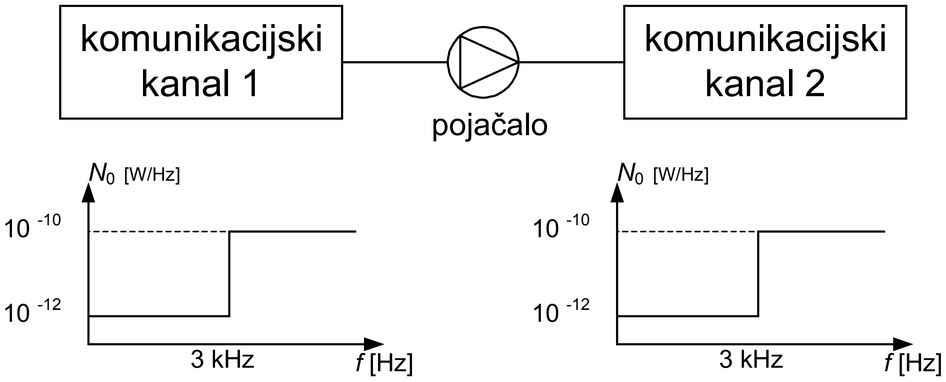
Uvodimo zamjenu varijabli: $t = \frac{N_0 \cdot B}{S}$

Nakon zamjene varijabli dobivamo:

$$C_\infty = \lim_{t \to \infty} \log_2\left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{N_0 \cdot B}{S}}\right]^{\frac{S}{N_0}} = \lim_{t \to \infty} \log_2\left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{S}{N_0}} = \log_2 e^{\frac{S}{N_0}}$$

$$C_\infty = \frac{S}{N_0} \cdot \log_2 e = \frac{S}{N_0} \cdot \frac{\ln e}{\ln 2} = \frac{S}{N_0} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{S}{\eta} \cdot \frac{1}{\ln 2} \, [\text{bit/s}]$$

Zadatak – 41:
Signal snage 8 W prenosi se komunikacijskim sustavom koji se sastoji od dva segmenta, tj. kanala (slika). Prvi komunikacijski kanal zauzima frekvencijski pojas prijenosa od 3100 do 6600 Hz, a drugi od 200 do 2700 Hz. Između kanala nalazi se pojačalo snage. Koliko mora biti pojačanje snage signala da bi ukupni kapacitet danog sustava bio jednak kapacitetu prvog segmenta. Pojačanje izraziti u dB.



Rješenje:

$S_1 = 8\,\mathrm{W}$

1. komunikacijski kanal: [3100 - 6600] Hz $\Rightarrow$ $B_1 = 3500\,\mathrm{Hz} \rightarrow N_{01} = 10^{-10}\,\mathrm{W/Hz}$

2. komunikacijski kanal: [200 – 2700] Hz $\Rightarrow$ $B_2 = 2500\,\mathrm{Hz} \rightarrow N_{02} = 10^{-12}\,\mathrm{W/Hz}$

Iz uvjeta zadatka slijedi da je $C_{uk} = C_1$

$$C_1 = B_1 \cdot \log_2\left(1 + \frac{S_1}{N_{01}B_1}\right) = 85561\,[\mathrm{bit/s}]$$

Komunikacijski kanal 1 ima veći kapacitet od komunikacijskog kanala 2. Iz toga zaključujeno da je $C_{uk} = C_2$ zbog serijske veze kanala, tj. vrijedi $C_2 = C_1$.

$$C_2 = C_1 = B_1 \cdot \log_2\left(1 + \frac{S_2}{N_{02}B_2}\right)$$

$$2500 \cdot \log_2\left(1 + \frac{S_2}{10^{-12} \cdot 2500}\right) = 85561\,[\mathrm{bit/s}]$$

$S_2 = 50{,}1846\,\mathrm{W}$

Pojačanje snage iznosi: $A = 10\log\left(\frac{S_2}{S_1}\right) = 7{,}97\,\mathrm{dB}$.

Zadatak – 42:
Govorni signal se na ulazu nekog prijenosnog sustava uzorkuje s frekvencijom uzorkovanja f_u=8 kHz, a potom kodira s 8 bitova po uzorku. Odnos srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu iznosi 20 dB. Odredite potrebni pojas prijenosa ako se šum u kanalu smanji za 3 dB.

Rješenje:

$f_u = 8\,\mathrm{kHz}$

$n = 8\,\mathrm{bit}$

Prijenosna brzina: $R = f_u \cdot n = 64\ \mathrm{kbit/s}$

$$\frac{S}{N_1} = 20\,\mathrm{dB} \longrightarrow 20 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{S}{N_1}\right) \rightarrow \frac{S}{N_1} = 100$$

$$10 \cdot \log_{10} N_1 - 10 \cdot \log_{10} N_2 = 3 \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 1.9953$$

$$\frac{S}{N_2} = \frac{S}{N_1} \cdot \frac{N_1}{N_2} = 100 \cdot 1.9953 = 199.53$$

$$B_2 = \frac{R}{\log_2\left(1 + \frac{S}{N_2}\right)} = \frac{64}{\log_2(1 + 199.53)} = 8368\,\mathrm{Hz}$$

Zadatak – 43:
Za prijenos podataka na raspolaganju je komunikacijski kanal podijeljen na dva segmenta (dva potkanala) čiji su frekvencijski pojasevi prijenosa B_1=1800 Hz i B_2=B Hz. U prvom potkanalu (B_1) omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 30 dB. Srednja snaga signala u drugom potkanalu iznosi 5 W dok je spektralna gustoća snage bijelog Gaussovog šuma (N_0) u istom potkanalu 10^{-6} W/Hz. Koliko iznosi frekvencijski pojas prijenosa drugog potkanala ako je zahtijevana maksimalna prijenosna brzina u komunikacijskom kanalu 50 kbit/s.

Rješenje:

$$10\log\left(\frac{S_1}{N_1}\right) = 30\,\mathrm{dB} \Rightarrow \frac{S_1}{N_1} = 1000$$

$$C_{ukupno} = C_1 + C_2$$

$$C_1 = B_1 \log_2\left(1+\frac{S_1}{N_1}\right) = 1800\log_2(1+1000) = 17941.01\left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$C_2 = C_{ukupno} - C_1 = 50000\left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}\right] - 17941.01\left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}\right] = 32058.99\left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$C_2 = B_2 \log_2\left(1+\frac{S_2}{N_0 B_2}\right) = B_2 \log_2\left(1+\frac{5}{10^{-6}B_2}\right) \Rightarrow B_2 = \frac{32058.99}{\log_2\left(1+\frac{5}{10^{-6}B_2}\right)}\left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}\right]$$

Gore dobivena jednadžba rješava se iteracijski. Jednadžba se zapiše u obliku:

$$B_2^* = \frac{32058.99}{\log_2\left(1+\frac{5W}{10^{-6}B_2}\right)}$$

Algoritam rješavanja je sljedeći:

1) U prvome se koraku za vrijednost varijable B_2 uzme neka početna vrijednost – u našem slučaju 1 Hz.
2) Vrijednost varijable B_2 uvrsti se u jednadžbu i izračuna se vrijednost varijable B_2^*.
3) Uspoređuju se vrijednosti varijabli B_2 i B_2^*.
   a. Ukoliko su vrijednosti varijabli različite, varijabla B_2 poprima vrijednost varijable B_2^* i algoritam se vraća na korak 2.
   b. Ukoliko su vrijednosti varijabli jednake, algoritam staje s izvođenjem. Pronašli smo traženu vrijednost varijable B_2.

Dobivene vrijednosti po koracima su:

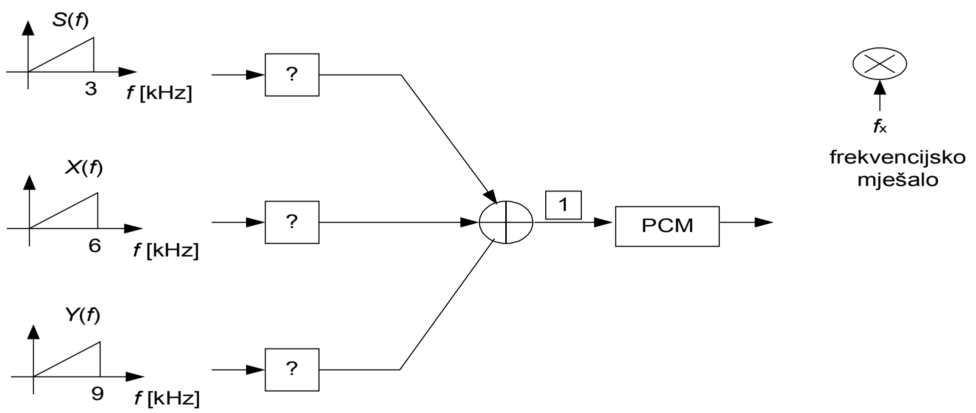
1. $B_2 = 1\,\mathrm{Hz}$, $B_2^* = 1440.63\,\mathrm{Hz}$
2. $B_2 = 1440.63\,\mathrm{H}z$, $B_2^* = 2725.77\,\mathrm{Hz}$
3. $B_2 = 2725.77\,\mathrm{Hz}$, $B_2^* = 2956.97\,\mathrm{Hz}$

4. $B_2 = 2956.97\,\mathrm{Hz}$, $B_2^* = 2989.34\,\mathrm{Hz}$
5. $B_2 = 2989.34\,\mathrm{Hz}$, $B_2^* = 2993.71\,\mathrm{Hz}$
6. $B_2 = 2993.71\,\mathrm{Hz}$, $B_2^* = 2994.30\,\mathrm{Hz}$
7. $B_2 = 2994.30\,\mathrm{Hz}$, $B_2^* = 2994.39\,\mathrm{Hz}$
8. $B_2 = 2994.39\,\mathrm{Hz}$, $B_2^* = 2994.40\,\mathrm{Hz}$
9. $B_2 = 2994.40\,\mathrm{Hz}$, $B_2^* = 2994.40\,\mathrm{Hz}$ → **vrijednosti varijabli B_2 i B_2^* su jednake!**

***B*₂ = 2994.40 Hz**

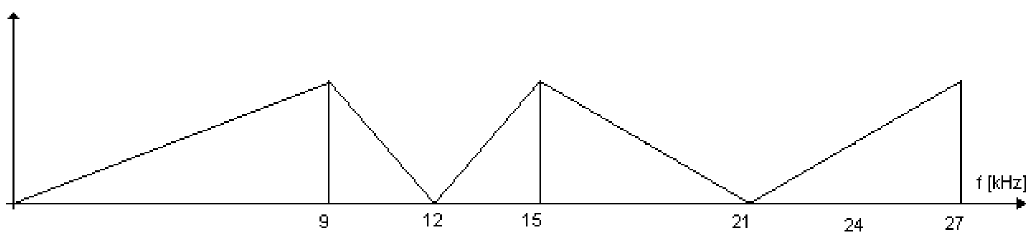
Zadatak – 44:

3. Za sustav prijenosa sa slike potrebno je odrediti:
   i. **minimalni** frekvencijski pojas prijenosa (točka 1) za tri informacijska izvora čiji su spektri predočeni slikom. Na raspolaganju imamo **dva** frekvencijska mješala koja treba staviti na mjesto upitnika na slici dok na mjesto trećeg upitnika ne stavljamo ništa. Isto tako potrebno je odrediti vrijednosti frekvencija (f_x) za frekvencijska mješala!
   ii. **minimalnu** frekvenciju uzorkovanja u PCM koderu!
   iii. izlaznu brzinu (izraženu u kbit/s) iz PCM kodera, ako se svaki uzorak kodira s 8 bitova.

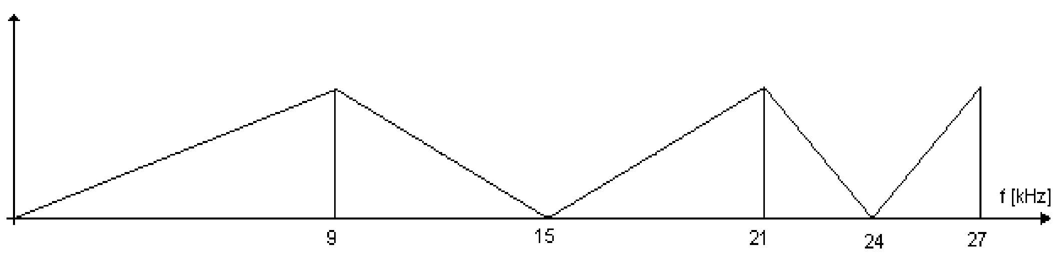


Rješenje:

i) Minimalni frekvencijski pojas ostvaruje se postavljanjem mješala u grane gdje su informacijski izvori $S(f)$ (3 kHz) i $X(f)$ (6 kHz). Spektar signala u točki 1 predočen je na sljedećim slikama (Postoje dva rješenja navedenog problema!).



Frekvencijska mješala f_1=12 kHz i f_2=21 kHz



Frekvencijska mješala f_1=15 kHz i f_2=24 kHz

Minimalni frekvencijski pojas prijenosa: $B_{\min} = 27\,\text{kHz}$

ii) Minimalna frekvencija uzorkovanja mora biti dvostruko veća od frekvencije signala da bi signal zadržao svoja informacijska svojstva, tj.

$$f_u \geq 2 \cdot B = 54\,\text{kHz}$$

iii) Broja bitova po uzorku: $n = 8$
Izlazna brzina iz PCM kodera: $R = f_u \cdot n = 432\,\text{kbit/s}$

Zadatak – 45:
Analitički dokažite da minimalni omjer (u dB!) energije signala po bitu prema spektralnoj gustoći snage šuma koji osigurava pouzdan prijenos jednog bita informacije iznosi -1,59 dB.

Rješenje:

$$C = B\log_2\left(1 + \frac{E_b C}{N_0 B}\right) \rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\frac{C}{B}} - 1}{\frac{C}{B}}$$

Učinkovitost prijenosnog pojasa: $\eta = \frac{C}{B}$

Zanimljivo je promotriti što se događa s omjerom $\frac{E_b}{N_0}$ kada $\eta \to 0$, odnosno $B \to \infty$.

$$\frac{E_b}{N_0} = \lim_{B\to\infty}\frac{2^{\frac{C}{B}} - 1}{\frac{C}{B}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \text{L'Hospitalovo pravilo} = \lim_{B\to\infty}\frac{2^{\frac{C}{B}}\ln(2)\left(\frac{-C}{B^2}\right)}{-\frac{C}{B^2}} = \lim_{B\to\infty}2^{\frac{C}{B}}\ln(2) = \ln(2)\lim_{B\to\infty}2^{\frac{C}{B}} = \ln(2) =$$

$= 0{,}6932$

ili $\frac{E_b}{N_0} = -1{,}59\,\text{dB}$

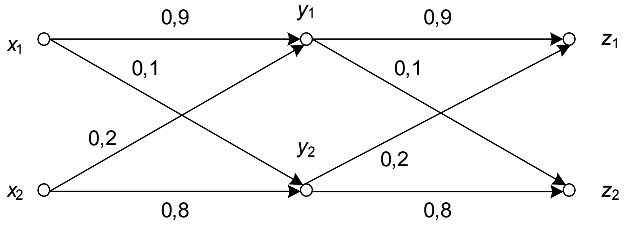
Zadaci za vježbu

Teorija infromacije, kapacitet diskretnog komunikacijskog kanala, Markovljevi procesi

1. Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su sljedeće: $p(x_1) = 0.4$, $p(x_2) = 0.3$, $p(x_3) = 0.2$ i $p(x_4) = 0.1$. Izračunajte količinu informacije koja se prenosi u poruci $x_1x_2x_1x_3$.

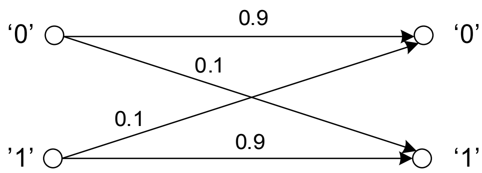
   Rješenje: [6,70 bit/poruka]

2. Dva binarna kanala serijski su povezana kako je to predočeno na slici. Odredite srednji uzajamni sadržaj informacije ($I(X;Z)$) u sustavu kanala ako je $p(x_1)= p(x_2)=0{,}5$.



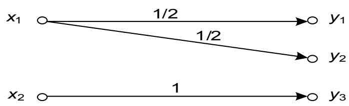
   Rješenje: [0,1878 bit/simbol]

3. Četiri poruke, generirane iz skupa od četiri jednako vjerojatna simbola $\mathbf{X} = \{x_1,...,x_4\}$, kodirane binarnim kodom (x_1 – '00'; x_2 – '01'; x_3 – '10'; x_4 – '11'), prenose se binarnim simetričnim kanalom (slika). Izračunajte transinformaciju u kanalu ako se u prijenosu kao zaštita poruka uvede jedan paritetni bit (parni paritet!).



   Rješenje: [1,3012 bit/simbol]

4. Odredite kapacitet kanala sa slike.



   Rješenje: [1 bit/simbol]

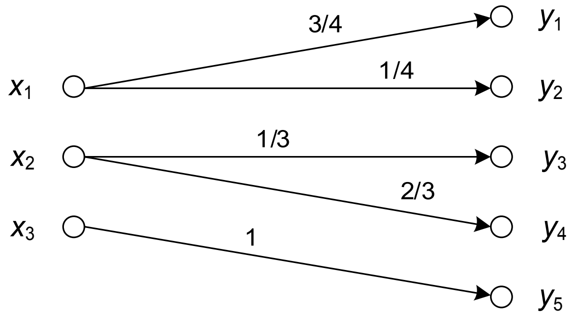
5. Komunikacijskim kanalom prenose se četiri poruke generirane iz skupa od četiri simbola $\mathbf{X} = \{x_1,...,x_4\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su sljedeće: $\mathbf{p}_X = [p/2, p/2, (1-p)/2, (1-p)/2]$, slijedno gledano ($p \in (0, 1)$). Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je:

$$\left[p(y_j|x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1-f & f & 0 & 0 \\ f & 1-f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ uz } 0 \le f \le 1.$$

Odredite općeniti izraz za varijablu p koji osigurava maksimalnu količinu informacije po simbolu koja se u prosjeku može prenijeti danim kanalom. (**Napomena:** $H(f) = \log_2 \frac{1}{f} + \log_2 \frac{1}{1-f}$))

Rješenje: [$p = 1/\left(1 + 2^{H(f)}\right)$]

6. Odredite kapacitet kanala sa slike uz nepoznate vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog skupa simbola (X).



Rješenje: [1,5849 bit/simbol]

7. Mjerni uređaj mjeri napon čija je funkcija gustoće vjerojatnosti zadana jednadžbom

$$f(u) = a \cdot u \cdot (3 - u), u \in [0,3]$$
$$f(u) = 0, u \notin [0,3]$$
$$a \in R$$

Uređaj može prikazati samo cijele brojeve i polovine, koji su zaokruženi na prvi veću vrijednost (npr. 1,2V se zaokružuje na 1,5 V, a 1,9 V se zaokružuje na 2,0 V). Ako se napon uzorkuje svakih 10 ms, koliki je ukupni srednji sadržaj informacije generiran za jednu minutu?

Rješenje: [1,83 kbyte]

8. Na ulazu diskretnog komunikacijskog kanala pojavljuju se simboli **X** = {0, 1, 2, 3, 4}. Uvjetne vjerojatnosti prijelaza u kanalu dane su sljedećim izrazom $p(y_j | x_i) = \begin{cases} 0.5, \; y_j = (x_i \pm 1) \bmod 5 \\ 0, \text{inace} \end{cases}$.

Odredite kapacitet danog kanala.

Rješenje: [1,322 bit/simbol]

9. *Serijska veza ili kaskadiranje BSK-a*. Neka je k binarnih simetričnih kanala (BSK), svaki s vjerojatnošću pogrešnog prijenosa p, vezano u seriju. Odredite opći izraz za vjerojatnost pogrešnog prijenosa ekvivalentnog BSK-a.

Rješenje: [$\frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2p)^k\right)$]

10. Na ulazu diskretnog binarnog komunikacijskog kanala pojavljuju se dva simbola **X** = {x_1, x_2} s vjerojatnostima 1-u i u, slijedno gledano. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je $\left[p(y_j | x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f & g \end{bmatrix}$, f+g=1. Odredite $u = F(f, g)$ za koje se ostvaruje maksimum $I(X;Y)$.

Napomena: F je funkcija.

Rješenje: [$u = \dfrac{f^{f/g}}{1 + g \cdot f^{f/g}}$]

11. Dana je diskretna slučajna varijabla Z koja poprima vrijednosti 0 i 1 s vjerojatnostima 1-p i p, slijedno gledano. Neka slučajna varijabla X, neovisna od Z, poprima vrijednosti 1, 2, ...,n s vjerojatnostima $\mathbf{q}=[q_1, q_2, ..., q_n]$ i neka je $Y=XZ$.

    a) Odredite $H(Y)$ u ovisnosti o $H(X)$ i $H(Z)$.
    b) Odredite p i $\mathbf{q}$ uz uvjet da je $H(Y)$ maksimalno.

    Rješenje: [a) $H(Y)= H(Z)+pH(X)$; b) $p=n/(n+1)$, $\mathbf{q}=[1/n, ...,1/n]$]

12. Dano je n diskretnih bezmemorijskih kanala s kapacitetima $C_1, C_2, ..., C_n$, slijedno gledano. Ulazni i izlazni skupovi simbola za različite kanale su disjunktni. Neka je ukupni (sumarni) kanal za svih n kanala definiran kao kanal koji ima na raspolaganju svih n kanala ali samo jedan kanal može koristiti za prijenos u danom vremenskom trenutku. Dokažite da je kapacitet ukupnog (sumarnog) kanala jednak $C = \log_2 \sum_{i=1}^{n} 2^{C_i}$.

    Rješenje: []

13. *Z-kanal.* Na ulazu diskretnog binarnog komunikacijskog kanala pojavljuju se dva simbola $\mathbf{X} = \{x_1, x_2\}$. Odredite vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog skupa simbola za koje se postiže maksimum transinformacije te nakon toga odredite kapacitet danog kanala. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je $\left[p(y_j|x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$.

    Rješenje: [1/5, 4/5, 0.322 bit/simbol]

Entropijsko kodiranje

14. Dan je skup simbola (S) s pripadajućim vjerojatnostima pojavljivanja (p_i):

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$

    Simboli su jednoznačno kodirani prefiksnim kodom. Ako je m = 6 i ako su duljine kodnih riječi $\{l_1, l_2, ..., l_6\} = \{1, 1, 2, 3, 2, 3\}$, slijedno gledano, odredite najmanji broj simbola abecede prefiksnog koda.

    Rješenje: [3]

15. Dano je diskretno bezmemorijsko izvorište koje generira simbole $\{a, b, c, d, e\}$ čije su frekvencije pojavljivanja {15, 7, 6, 6, 5} slijedno gledano. Kodirajte dani skup simbola Shannon-Fanoovom metodom optimalnog kodiranja, a potom dekodirajte sljedeći slijed: 00011111011111000.

    Rješenje: [*abeceda*]

16. Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su sljedeće: $\mathbf{p}$ = [0,1 0,1 0,21 0,3 0,14 0,15], slijedno gledano. Dani skup simbola optimalno kodirajte Huffmanovim kôdom (baza 3!). Odredite entropiju izvorišnog skupa simbola i srednju duljinu kôdne riječi. Potom, odredite entropiju beskonačno duge kodirane poruke koja se pojavljuje na izlazu danog kodera infromacije (Na izlazu kodera informacije pojavljuju se samo tri simbola – 0, 1 i 2!). **Napomena:** Prilikom kodiranja granu s većom vjerojatnošću kodirati s većim brojem!

    Rješenje: [$H(X)$ = 2,47 bit/simbol, L = 1,69 tribit/simbol, $H^*(X)$ = 0,99 bit/simbol]

17. Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su sljedeće: $\mathbf{p}$ = [10/28, 6/28, 5/28, 4/28, 2/28, 1/28], slijedno gledano.

    a) Dani skup simbola optimalno kodirajte binarnim Huffmanovim kôdom i odredite duljine kodnih riječi.

    b) Odredite vjerojatnosti pojavljivanja skupa simbola X za slučaj da se koristi Shannonova metoda optimalnog kodiranja i ako se zahtijeva ista duljina kodne riječi za svaki simbol kao pod a).

    Rješenje: [a) l_i={2, 2, 2, 3, 4, 4}, i=1,…,6; b) {1/4, 1/4, 1/4, 1/8, 1/16, 1/16}]

18. Na izvoru se pojavljuju četiri simbola {1, 2, 3, 4}. Omjer vjerojatnosti pojavljivanja simbola je $p_1{:}p_2{:}p_3{:}p_4$=1:2:3:4. Slijed od 5 simbola kodiran je aritmetičkim kodom i dobivena je kodirana poruka (binarni zapis!): $(0{,}101010)_2$. Pronađite prva četiri simbola iz kodiranog slijeda.

    Rješenje: [4223]

19. Na izvoru se pojavljuje šest simbola {*a*, *e*, *i* , *o*, *u* , *!*} s vjerojatnostima pojavljivanja {0.2, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1}, slijedno gledano. Poznato je da simbol *!* predstavlja kraj kodirane poruke. Dekodirajte kodiranu poruku, kodiranu aritmetičkim kodom, čiji je dekadski zapis 0,23354321.

    Rješenje: [*eaii!*]

20. Koristeći algoritam LZ77 kodirajte poruku *aaaabbbccd** uzimajući pri tome da je maksimalna duljina posmičnog prozora i prozora za kodiranje 6, odnosno 5 simbola.

    Rješenje: [(0,0,*a*), (1,3,*b*), (1,2,*c*), (1,1,*d*), (0,0,*)]
    Napomena: "*" označava kraj slijeda.

21. Uzimajući polazni rječnik D gdje je $D[0] = a$, $D[1] = b$ dekodirajte kodiranu poruku 0 1 0 4 5 koristeći algoritam LZW.

    Rješenje: [*abaaaaaa*]

Zaštitno kodiranje

22. Postoji li binarni blok kôd K koji može ispraviti jednostruku pogrešku i koji pri tome ima 52 kodne riječi svaka duljine 9 bitova?

    Rješenje: [ne; **Napomena:** Dokaz se provodi preko Hammingove međe (engl. *Sphere packing bound*)]

23. Dan je binarni blok kôd K s kodnim riječima {00000, 10010, 10100, 00110}.
    a) Dokažite da se generirajuća matrica **G** danog koda ne može zapisati standardnom obliku.
    b) Odredite kôd K' koji je ekvivalentan kodu K i čija je matrica **G'** u standardnom obliku.

    Rješenje: [a) Postoje tri različite matrice **G** za kôd K i niti jedna nije u standardnom obliku. Jedno od rješenja je: $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) Postoje tri različite matrice **G'** za kôd K'. Jedno od rješenja je /zamjena drugog i trećeg stupca u matrici **G**/: $\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; K'={00000, 10010, 01010, 11000}]

24. Dan je binarni blok kôd K s kodnim riječima {10011, 11101, 01110, 00000}.
    a) Koliko pogrešaka dani kôd može otkriti i ispraviti?
    b) Da li je kôd K linearan?

Rješenje: [a) $s = 2$; $t = 1$ b) da]

25. Za bilo koji $n \geq 1$ linearni binarni blok kôd K ($[n, k, d]$) ima samo dvije kodne riječi, i to 000...0 i 111...1 i iste su duljine n. Odredite k i udaljenost koda – d.

Rješenje: [$k = 1$; $d = n$]

26. Odredite sve kodne riječi linearnog binarnog blok koda K čija je matrica provjere pariteta **H**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje: [0000000, 0110111, 0111100, 0001011, 1110000, 1000111, 1001100, 1111011]

27. Dan je linearni binarni blok kôd K s matricom provjere pariteta **H**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako je primljena kodna riječ $\mathbf{c}'$ = [110110], odredite kodnu riječ koja je poslana.

Rješenje: [pogreška na drugom bitu, 100110]

28. Dan je binarni kôd K $[n, k]$=[7, 4] s generirajućom matricom

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Neka je K^* prošireni kôd čije su kodne riječi dobivene tako što je na početak svake kodne riječi koda K dodan bit pariteta (parni!). Na ulazu dekodera kanala koda K^* pojavljuje se slijed bitova 0111100100110011... Odredite sindrom za <u>prvu</u> primljenu kodnu riječ.

Rješenje: [1110]

29. Odredite kodnu brzinu za sljedeće kodove:

(a) K={0000, 0101, 1010, 1111};
(b) K={0000, 1110, 1111, 0101, 1010};
(c) K={0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111};
(d) K je kôd sa 16 kodnih riječi i duljinom kodne riječi 7 bitova.

Rješenje: [(a) 0.5; (b) ≈0.5805; (c) 0.75; (d) 4/7]

30. Dan je linearni binarni blok kôd K s matricom provjere pariteta **H** tj. $\mathbf{H}^T$:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Odredite distancu koda K.

(b) Odredite kodnu riječ ($\neq \mathbf{0}$) koda K koja ima minimalnu težinu.
Rješenje: [(a) 2; (b) 001010]

31. Dan je binarni kôd K s kodnim riječima K={0101, 1010, 1100}. Odredite sve kodne riječi koda $K^{\perp}$ ($K^{\perp}$ je dualni kôd koda K!).

    Rješenje: [0000, 1111]

32. Za zaštitu poruka u prijenosu uporabljen je Hammingov koder $[n, k] = [7, 4]$. Odredite sindrom, $S(\mathbf{y}')$, za primljenu kodnu riječ $\mathbf{y}'$ = [1101110].

    Rješenje: [001]

33. Slijed bita $\mathbf{x}$ = [1010101...] ulazi u Hammingov koder $[n, k] = [7, 4]$ i nakon toga se prenosi prijenosnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita 0,004. Odredite za koliko se smanji vjerojatnost ispravnog dekodiranja slijeda $\mathbf{x}$ ako se umjesto Hammingovog kodera kao zaštita uporabi paritet (parni!).

    Rješenje: [0,01951]

34. Tri poruke p_1=[1011], p_2=[0110] i p_3=[1011] kodiraju se Hammingovom metodom zaštitnog kodiranja, a potom se dobivene kodne riječi upisuju u tablicu kao na slici. Na mjestima A1, B1, C1, A2, B2, C2, A4, B4 i C4 nalaze se kontrolni bitovi. Kodne riječi se potom čitaju iz tablice i odašilju u kanal i to tako da se čitanje provodi kolona po kolona počevši od A1, potom B1, C1, A2, B2,… Na kanalu se pojavljuju pogreške u nizu tj. jedna iz druge (tzv. snopovite pogreške).

    a) Odrediti kolika može biti maksimalna duljina snopa pogrešaka tako da dekoder na prijemnoj strani može provesti dekodiranje bez pogreške.
    b) Ako je primljeni slijed bitova: ***0***10011100000010111101. Provedi dekodiranje! Bit ***0*** je prvi pročitan iz tablice na predajnoj strani.
    Napomena: Na prijemnoj strani primljeni slijed bitova se prvo složi u tablicu, a potom se provodi dekodiranje.

	1	2	3	4	5	6	7	
A								kodna riječ p_1
B								kodna riječ p_2
C								kodna riječ p_3

    Rješenje: [a) 3; b) pogreška u prvoj kodnoj riječi na drugom bitu i pogreška u trećoj kodnoj riječi na trećem bitu]

35. Izvorište generira 128 poruka, iz skupa od 128 jednako vjerojatnih simbola $\mathbf{X} = \{x_0 \ldots, x_{127}\}$, koje se kodiraju ravnomjernim binarnim kodom. Poruke se prije odašiljanja u kanal kodiraju Hammingovom metodom zaštitnog kodiranja. Komunikacijski kanal ima širinu pojasa prijenosa 4 kHz dok omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu iznosi 30 dB. Odredite koliko se poruka u sekundi može prenositi danim komunikacijskim kanalom.

    Rješenje: [≈ 3624 poruka/s]

36. Dan je binarni kôd $[n, k] = [6, 3]$ čije su kodne riječi oblika $d_1d_2d_3c_4c_5c_6$ i gdje su d_i-ovi i c_i-ovi bitovi poruke, odnosno, bitovi zaštite. Bitovi zaštite proračunavaju se na sljedeći način:

$$c_4 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3$$
$$c_5 = d_1 \oplus d_3$$
$$c_6 = d_2 \oplus d_3$$

Ako je primljena kodna riječ $\mathbf{y} = [010111]$. Odredite kodnu riječ koja je poslana.

Rješenje: [010101]

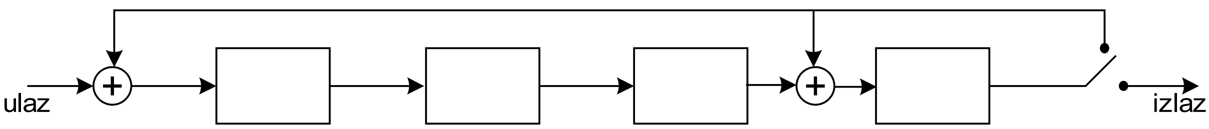
37. Dan je linearni ternarni kôd K $[n, k]=[3, 2]$ s generirajućom matricom **G:**

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ispišite sve kodne riječi danog koda K i odredite minimalnu distancu koda.

Rješenje: [000, 012, 021, 101, 110, 122, 202, 211, 220; $d_{\min}(K)=2$]

38. Na slici je dan koder za ciklični kôd $[15, k]$. Odredite cikličnu provjeru zalihosti (engl. *Cyclic Redundancy Check*, CRC) za prvu kodnu riječ koja se pojavljuje na izlazu iz kodera ako se na ulazu kodera pojavljuje slijed bitova: 101010101010101...



Rješenje: [1101]

39. Generirajući polinom $g(x)=x^3+x^2+1$ koristi se u cikličnom kodu $[7, k]$. Odredite sindrom za <u>prvu</u> primljenu kodnu riječ ako se na ulazu dekodera cikličnog koda pojavljuje sljedeći slijed bitova: 1001110000110110...

Rješenje: [$x^2 + x$]

40. Odredite broj koji dolazi na mjesto znaka „?” tako da ISBN (engl. *International Standard Book Number*) broj 0-13-1?9139-9 bude točan.

Rješenje: [3]

Signali i sustavi

41. Zadan je signal $x(t) = 1 + \cos(2\pi 1000t + \pi/8)$ [V]. Odredite srednju snagu signala na otporniku $R = 10$ Ω.

Rješenje: [0,15 W]

42. Zadan je signal definiran sljedećim izrazom:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \alpha, t \in R$$

pri čemu je $\alpha > 0$. Odredite iznos amplitudnog spektra te funkcije na frekvenciji 10 Hz i uz $\alpha = 30$.

Rješenje: [0,014]

43. Promatrajte periodičan slijed pravokutnih impulsa definiran sljedećim izrazom:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{za} \quad 0 \le |t| < \tau/2 \\ 0 & \text{za} \quad \tau/2 < |t| \le T_0/2 \end{cases}, \quad t \in R$$

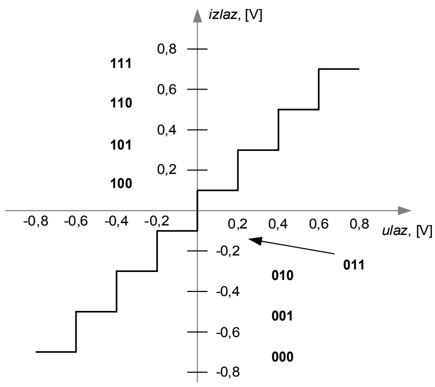
Odredite s kojim postotkom istosmjerna komponenta tog signala sudjeluje u srednjoj snazi tog signala, ako omjer trajanja impulsa i trajanja pauze iznosi 1 : 4.

Rješenje: [20 %]

44. Kroz idealni niskopropusni filtar granične frekvencije f_g = 10 MHz propustimo bijeli šum spektralne gustoće snage 10^{-10} W/Hz. Unutar pojasa propuštanja amplitudni odziv filtra je konstantan i iznosi 0,2. Koliko iznosi srednja snaga šuma na izlazu filtra?

Rješenje: [0,08 mW]

45. Signal $u_m(t) = 0{,}8\sin(2\pi\, 4000t + \frac{\pi}{4})$ [V] prigušen je za 5 dB. Odredite kodnu kompleksiju koja će izaći iz PCM (engl. *Pulse Code Modulation*) kodera za uzorak signala uzet u trenutku t_0=0 [s]. Amplitude uzoraka nalaze se u intervalu $|u(t)| \le 0{,}8$ [V] i kvantiziraju u kvantizatoru (jednoliko kvantiziranje) s osam kvantizacijskih razina (slika). Koder izvodi kodiranje uzoraka binarnim kodom.



Rješenje: [101]

46. Signal $u_m(t)$ = sin(2π1000t + π /4) [V] uzorkuje se frekvencijom od 4 kHz. Uzorci se potom kvantiziraju u kvantizatoru s 32 razine pri čemu raspon napona uzoraka koji se mogu pojaviti na ulazu kvantizatora varira između -3 V i +3 V. Proračunajte omjer srednje snage signala $u_m(t)$ i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu promatranog kvantizatora.

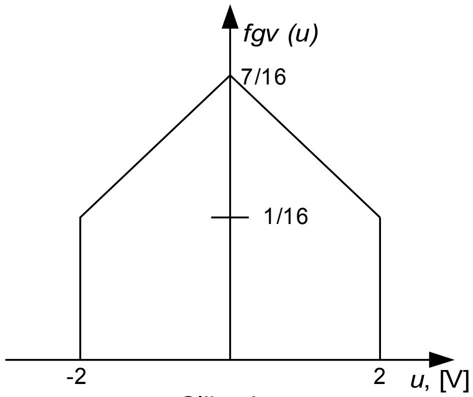
Rješenje: [22,32 dB]

47. Na slici (Slika A) je dana funkcija gustoće vjerojatnosti (*fgv*) razine signala $g(t)$. Dani signal se uzorkuje s minimalnom dozvoljenom frekvencijom uzorkovanja f_s, a potom kvantizira u kvantizatoru sa četiri kvantizacijske razine (Slika B). Signal $g(t)$ zauzima pojas prijenosa od 0 do 4 kHz.

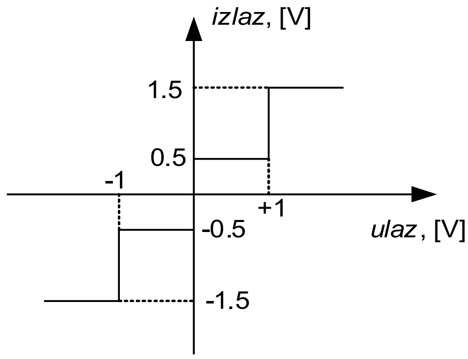
a) Odredite srednju snagu signala $g(t)$.

b) Skicirajte graf funkcije gustoće vjerojatnosti razine signala na izlazu (*fgv*(*izlaz*)) iz kvantizatora.

c) Odredite omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma.

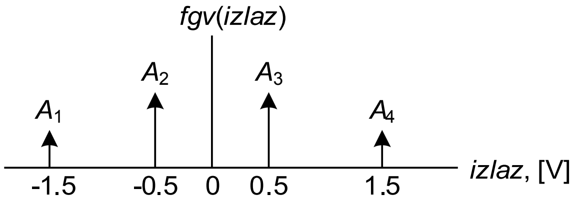


Slika A



Slika B

Rješenje: [a) 0.8333 W ; b) vidi niže danu sliku (Slika C), A_1=A_4=5/32, A_2=A_3=11/32; c) 10.5030]



Slika C

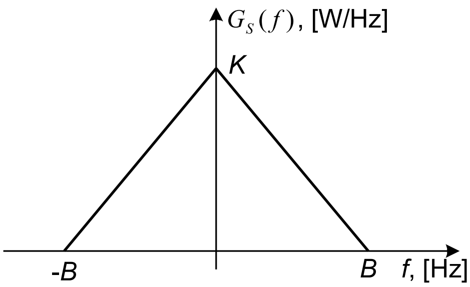
48. Analogni signal, širine prijenosnog pojasa od 10 kHz, uzorkuje se s minimalnom dozvoljenom frekvencijom uzorkovanja f_s, a potom kvantizira u kvantizatoru s L = 256 razina. Odredite vrijeme trajanja (τ) jednog bita binarno-kodiranog signala na izlazu iz kodera.

    Rješenje: [6,25 μs]

49. Signal $s(t)=\cos(200\pi\cdot t)+2\cos(320\pi\cdot t)$ [V] idealno je uzorkovan s frekvencijom uzorkovanja f_s=300 Hz, a potom propušten kroz idealni nisko-propusni filtar granične frekvencije f_g = 250 Hz. Na kojim frekvencijama se nalaze komponente signala koje su "prošle" kroz filtar?

    Rješenje: [100-, 140-, 160-, i 200-Hz]

50. Na slici je predočena spektralna gustoća snage signala *s(t)*. Odrediti srednju snagu signala.



    Rješenje: [KB [W]]

51. Signal u kontinuiranom vremenu, $x_a(t)$, može se jednoznačno rekonstruirati iz svojih uzoraka $x_a(nT_u)$ kada je T_u = 1 ms. Odredite najveću frekvenciju u spektru signala $X_a(f)$.

    Rješenje: [0,5 kHz]

52. Sliku entropije $H(X)$ = $0{,}75\cdot10^6$ bita potrebno je prenijeti AWGN kanalom u kojem djeluje šum spektralne gustoće snage $4\cdot10^{-18}$ W/kHz. Kolika je srednja snaga signala potrebna za prijenos zadane količine informacije u vremenu T = 375 s uz uvjet da kanal bude optimalno iskorišten, ako širina prijenosnog pojasa kanala iznosi B = 1 kHz?

Rješenje: [$24 \cdot 10^{-18}$ W]

53. Ako se u AWGN kanalu srednja snaga signala S [W] poveća x puta, odredite za koliko se promijeni kapacitet kanala, uz pretpostavku da u kanalu djeluje bijeli Gaussov šum srednje snage šuma N [W], a kanal ima karakteristiku idealnog niskog propusta širine prijenosnog pojasa B [Hz]. Uzmite u obzir i pretpostavku da je S/N puno veći od 1.

Rješenje:[poveća se za $B \cdot \log_2(x)$ [bit/s]]

54. Na signal s Gaussovom funkcijom gustoće vjerojatnosti i srednje snage 1,9 W djeluje u AWGN kanalu bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $7{,}5 \cdot 10^{-9}$ W/Hz. Koliko iznosi maksimalni iznos kapaciteta ostvariv u takvom kanalu?

Rješenje: [182,74 Mbit/s]

55. Neperiodični signal $m(t)$, energije E_m i Fourierove transformacije $M(f)$ ($M(f) \neq 0$ za $f \in [-B, B]$) prenosi se komunikacijskim kanalom. Neka je poslani signal oblika $x(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t)$ [V], gdje je $f_c >> B$ (ali ne i zanemarivo!). Pretpostavimo da u kanalu nema šuma, tj. primljeni signal $r(t)$ jednak je poslanom ($r(t) = x(t)$). Odredite energiju signala $r(t)$.

Rješenje: [$E_m/2$]

56. Na ulazu niskopropusnog komunikacijskog kanala (širina prijenosnog pojasa B [Hz]), konstantnog amplitudnog odziva od 0.8 unutar pojasa propuštanja, dovodi se signal $s(t)$ čija je spektralna gustoća snage ([W/Hz]), $S_s(f) = \begin{cases} a\dfrac{|f|}{B} \; za \; |f| \leq B \\ 0 \; inace \end{cases}$ (a=konst., $a \in \mathbf{R}^+$). U kanalu djeluje bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $N_0/2 = a10^{-10}$ W/Hz. Odredite kapacitet danog komunikacijskog kanala uz uvjet da je faktor slabljenja omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi (engl. *SNR-gap*) šuma Γ=0 dB.

Rješenje: [$\approx 31{,}57B$ bit/s]

57. Na ulazu LTI sustava djeluje signal obilježja stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ čija je autokorelacijska funkcija $R_X(\tau) = e^{-0{,}5|\tau|}$ i očekivanje nula. Na ulazu istog sustava djeluje bijeli Gaussov šum $N(t)$ čija je spektralna gustoća snage $N_0/2$. Pretpostavimo da se na ulaz nekog niskopropusnog filtra prijenosne funkcije $H(f)$ dovodi signal $N(t)$ i da se na njegovom izlazu pojavljuje signal čija je spektralna gustoća snage $S_X(f)$. Odredite $|H(f)|^2$.

Rješenje: [$\dfrac{8}{N_0(1+16\pi^2 f^2)}$]

58. Analogni signal dovodi se na ulaz sklopa za analogno-digitalnu (A/D) pretvorbu. Amplitude uzoraka nalaze se u intervalu ±8V. Odredite s koliko bitova je potrebno kodirati svaki uzorak tako da na prijemnoj strani, nakon dekodiranja, vrijednost svakog uzorak bude unutar granica ±20μV njegove polazne vrijednosti. **Napomena:** Kvantizator provodi jednoliko kvantiziranje.

Rješenje: [19]

59. Analogni signal, pojasa prijenosa 4 kHz, uzorkuje se s minimalnom dozvoljenom frekvencijom uzorkovanja f_s, a potom kvantizira u kvantizatoru s L = 8 razina. Dvije od osam razina kvantizatora pojavljuju se s vjerojatnošću 0.25, druge dvije s vjerojatnošću 1/8 i preostale četiri razine s vjerojatnošću 1/16. Odredite minimalnu moguću informacijsku brzinu na izlazu kodera .

Rješenje: [22000 bit/s]

60. Signal $s(t)=4\sin(2\pi 35000t)$ [V] dovodi se na ulaz sklopa za analogno-digitalnu (A/D) pretvorbu. Amplitude uzoraka ravnaju se prema jednolikoj razdiobi. Odredite minimalnu prijenosnu brzinu na izlazu A/D pretvornika ako je minimalni zahtijevani omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma 65 dB. **Napomena:** Svi koraci kvantizacije međusobno su jednaki!

Rješenje: [770 [kbit/s]]

61. Za prijenos podataka na raspolaganju je komunikacijski kanal podijeljen na dva segmenta (dva potkanala) čiji su frekvencijski pojasevi prijenosa B_1 [Hz], odnosno B_2 [Hz]. Srednja snaga signala u prvom potkanalu (P_1) jednaka je srednjoj snazi signala u drugom potkanalu (P_2), dok je amplitudni odziv u drugom potkanalu jednak $\alpha_2=\alpha_1/2$ (**Napomena:** Amplitudni odziv za oba potkanala je konstantan unutar pojasa propuštanja!). Spektralna gustoća snage bijelog Gaussovog šuma u oba potkanala iznosi $N_0/2$ [W/Hz]. Odredite omjer B_2/B_1 koji osigurava da je maksimalna prijenosna brzina u prvom potkanalu (C_1) jednaka maksimalnoj prijenosnoj brzini u drugom potkanalu (C_2), tj. $C_1=C_2$. Također, omjer energije signala po bitu prema spektralnoj gustoći snage šuma u prvom potkanalu iznosi 100, tj. $\frac{\varepsilon_{b(1)}}{N_0}=100$. **Napomena:** Vrijedi $\frac{\varepsilon_{b(i)}}{N_0}=\frac{\alpha_i^2 P_i}{C_i N_0}$ za $i=1, 2$.

Rješenje: [$\approx$ 1,316]

62. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-10)\sin\left(\frac{\pi}{20}t\right)dt = ?$

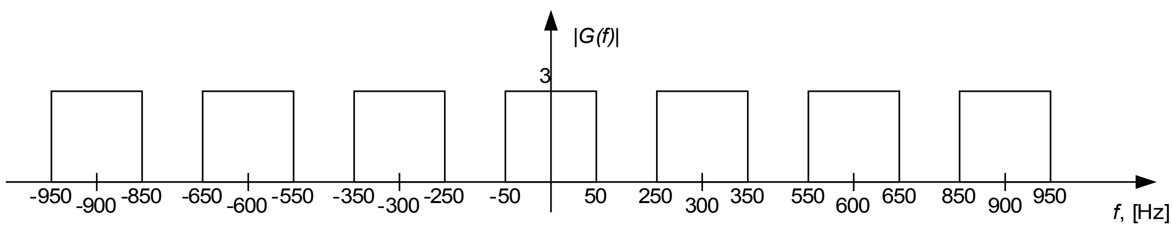
Rješenje: [1]

63. Na ulaz filtra, čiji je impulsni odziv $h(t)=\mathrm{rect}((t-3)/2)$, dovodi se signal $x(t)=\mathrm{rect}((t-1)/3)$ [V]. Odredite signal na izlazu filtra - $y(t)$. **Napomena:** Filtar se može promatrati kao LTI sustav.

Rješenje: $$y(t)=\begin{cases} 0, \ t<1.5 \\ \text{linearni rast od 0 do 2}, \ 1.5\le t<3.5 \\ 2, \ 3.5\le t<4.5 \\ \text{linearni pad od 2 do 0}, \ 4.5\le t<6.5 \\ 0, \ t\ge 6.5 \end{cases} \quad \text{[V]}$$

64. Signal $g(t)=\mathrm{sinc}(100t)$ [V] idealno je uzorkovan s frekvencijom uzorkovanja f_s=300 Hz. Skicirajte spektar uzorkovanog signala od -1 kHz do 1 kHz.

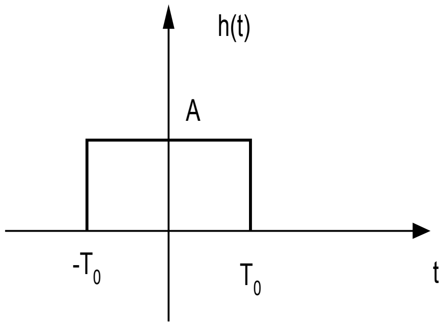
Rješenje:

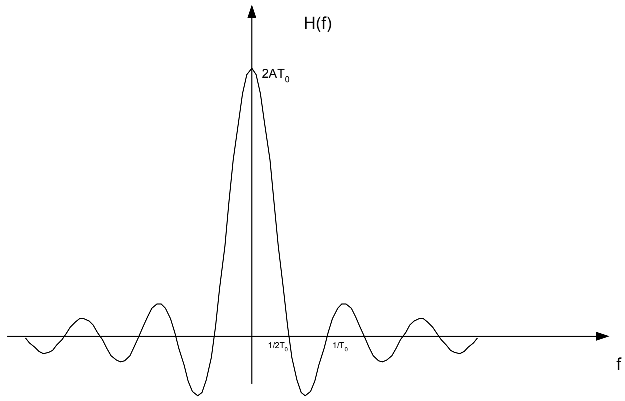


Literatura

1. **Hwei P. Hsu**, *Analog and Digital Communications*, Shaum's Outline Series - McGraw-Hill, 1993.
2. **M. Roden,** *Analog and Digital Communication Systems*, 3rd ed., Prentice Hall, 1991.
3. **M. Schwartz**, *Information, Transmission, Modulation and Noise*, 4th ed., McGraw-Hill, 1990.

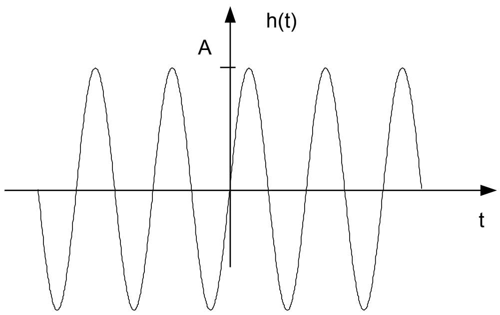
DODATAK I Fourierov transformat nekih funkcija

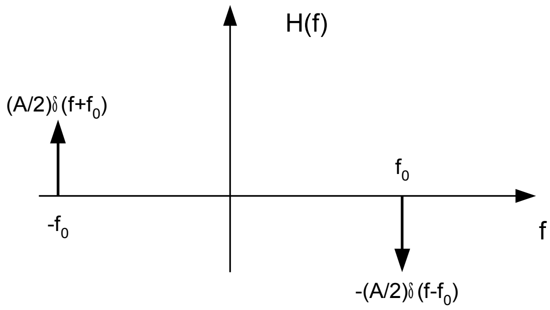




$$h(t) = \begin{cases} A & |t| < T_0 \\ \dfrac{A}{2} & t = T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases}$$

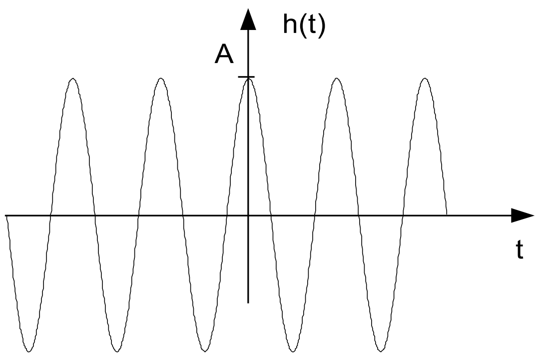
$$H(f) = 2AT_0 \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$$

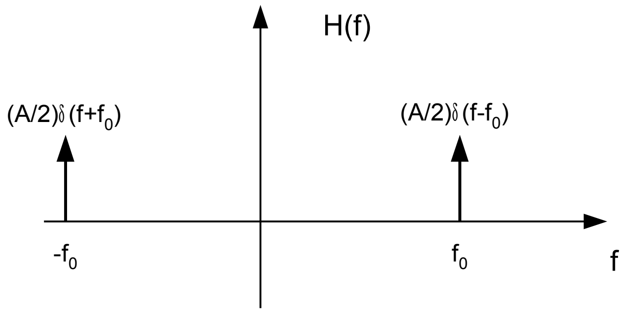




$$h(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$$

$$H(f) = -j\frac{A}{2}\delta(f - f_0) + j\frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$





$$h(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

$$H(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$