

9. Koder informacije koji koristi aritmetičko kodiranje na svom ulazu prima poruke sastavljene od dva simbola, X i Y . Osnovni intervali u za simbole X i Y su $[0, 1/3)$, odnosno $[1/3, 1)$. Kôd kojeg kreira koder informacije je prefiksni i sadrži binarne simbole 0 i 1. Ako se na ulazu koder informacije pojavi poruka sastavljena od deset simbola, odredite koja je najmanja moguća duljina kodne riječi kreirane algoritmom aritmetičkog koda, a da pri tome bude zadržano svojstvo prefiksnosti koda, tj. da kodna riječ odabrana **za bilo koji** podinterval nije prefiks neke druge kodne riječi odabrane za neki drugi podinterval.

Postupak rješavanja:

U knjizi "Uvod u teoriju informacije i kodiranje" na stranicama 264 i 265 stoji sljedeće:

"Prilikom kodiranja, bilo koja vrijednost iz odabranog podintervala u potpunosti definira podinterval, a time i kodiranu poruku. Postavlja se pitanje koju vrijednost iz dobivenog podintervala odabrati kao karakterističnu vrijednost, tj. kodnu riječ. Može se pokazati [49] da je poruku x moguće jednoznačno kodirati tako da se uzme neka vrijednost iz podintervala dobivenog za poruku x opisanim postupkom, da se ta vrijednost zapiše u binarnom obliku, te da se iz takvog zapisa uzme prvih $l(x)$ binarnih znamenki, gdje je $l(x)$:

$$l(x) = \left\lceil \log \frac{1}{P(x)} \right\rceil + 1 \text{ [bit]},$$

gdje je $P(x)$ duljina promatranog podintervala. Može se pokazati i da se na ovakav način dobiva prefiksni kôd, tj. da kôd za bilo koji podinterval nije prefiks koda za neki drugi podinterval."

Temeljem navedenog, zadatak je trebalo riješiti na sljedeći način. Ako na ulaz koder informacije dođe deset simbola, tada su moguće sve kombinacije simbola $x = x_1 \dots x_{10}$, pri čemu je $x_i \in \{X, Y\}$, $i = 1, \dots, 10$, a prilikom kodiranja duljina podintervala **za bilo koji** slijed od deset simbola određena je izrazom

$$P_j(x) = \prod_{i=1}^{10} p(x_i), p(x_i) = \begin{cases} 1/3 & \text{za } x_i = X \\ 2/3 & \text{za } x_i = Y \end{cases}, j = 1, \dots, 2^{10}$$

Dakle, da bi kod bio prefiksni, **za bilo koji** podinterval potrebno je odabrati $l_j(x)$ binarnih znamenki, pri čemu vrijedi:

$$l_j(x) = \left\lceil \log \left[\frac{1}{P_j(x)} \right] \right\rceil + 1 \text{ [bit]}, j = 1, \dots, 2^{10}$$

U konačnici trebalo je odrediti minimalnu vrijednost od $l_j(x)$, a da pri tome ostane sačuvano svojstvo prefiksnosti koda. S obzirom da vrijedi da je $(2/3)^{10} \geq P_j(x) \geq (1/3)^{10}$, tada je evidentno da će $l_j(x)$ imati minimalnu vrijednost kad je $P_j(x)$ maksimalan, tj. kad iznosi $(2/3)^{10}$. Shodno tome, konačno rješenje iznosi 7 bita.