Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Završni ispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 31. siječnja 2013.

Svaki točno riješen zadatak boduje se s najviše 5 bodova. Molim studente da prilikom rješavanja ispita obrate pažnju na sljedeće elemente.

a) Svaki zadatak potrebno je rješavati na zasebnom listu papira. U svakom zadatku jasno istaknite konačne odgovore. U konačnom odgovoru na svako potpitanje, uz izvedeni izraz ili proračunati brojčani iznos tražene veličine **morate** navesti, tamo gdje ima smisla, **odgovarajuću** mjernu jedinicu.

b) U svakom zadatku odgovori po potpitanjima moraju biti navedeni abecednim redom. Ako neko od potpitanja niste rješavali, pored slova potpitanja stavite crticu (primjer: a) –).

c) Zadatke koje ste dobili ne predajete na kraju ispita u košuljici, već ih slobodno možete zadržati. Dakle, u košuljici predajete samo postupke rješavanja zadataka. Papire s postupcima rješavanja poredajte po brojevima zadataka, od manjeg prema većim.

Napomena: **Nepridržavanje gore navedenih naputaka može se odraziti na bodovanje**.

Trajanje ispita: 180 minuta.

ZADACI

1. zadatak: Razmatrajte kôd C koji nastaje horizontalnim binarnim paritetnim kodiranjem parnim paritetom temeljem kojeg se svakoj poruci $[x_1\ x_2\ ...\ x_k]$ duljine k bita na njen kraj dodaje paritetni bit R, uslijed čega nastaje kodna riječ $[x_1\ x_2\ ...\ x_k\ R]$ duljine n bita, $x_1, x_2, ...\ x_k, R \in F_2 = \{0, 1\}$.

a) **(2 boda) O**dredite udaljenost koda C i potvrdite ju dokazom.

b) **(1 bod)** Je li kôd C perfektan? Dokažite tvrdnju koristeći definiciju perfektnosti koda!

c) **(1 bod)** Odredite generirajuću matricu koda C u standardnom obliku i matricu provjere pariteta koda C u standardnom obliku za $n = 5$.

d) **(1 bod)** Uz zadani $n = 5$, odredite vjerojatnost da je sindromskim dekodiranjem primljene kodne riječi koda C utvrđena pogreška u prijemu. Prijenos kodnih riječi odvija se binarnim simetričnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa simbola $p_g = 0{,}01$.

Rješenja:

a) Kodom C moguće je kodirati $2^k = 2^{n-1}$ poruka, pri čemu najmanja Hammingova udaljenost između dvije različite poruke, $\mathbf{p}_1$ i $\mathbf{p}_2$, iznosi 1 bit. Neka se dvije poruke, $\mathbf{p}_1 = [x_{11}\ x_{12}\ ...\ x_{1k}]$ i $\mathbf{p}_2 = [x_{21}\ x_{22}\ ...\ x_{2k}]$, razlikuju u jednom bitu x_{ij}: $x_{1j} \neq x_{2j}$, $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Njihovim kodiranjem nastat će kodne riječi $\mathbf{x}_1 = [x_{11}\ x_{12}\ ...\ x_{1k}\ R_1]$ i $\mathbf{x}_2 = [x_{21}\ x_{22}\ ...\ x_{2k}\ R_2]$, pri čemu vrijedi: $R_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1k}$, $R_2 = x_{21} + x_{22} + ... + x_{2k}$. Dakle, $R_1 + R_2 = (x_{11} + x_{21}) + (x_{12} + x_{22}) + ... + (x_{1k} + x_{2k}) = 1$, što znači da će se te dvije kodne riječi razlikovati u jednom od bitova poruke, x_{ij}, te u paritetnom bitu R_i, $i \in \{1, 2\}$uslijed čega udaljenost koda C iznosi 2.

b) Perfektan binarni kôd K s oznakom $(n, M, d(K))$ mora zadovoljavati izraz:

$$M = \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t}}$$

Pri tome vrijedi: t = $\lfloor [d(K) - 1]/2 \rfloor$, odnosno $d(K) \geq 2t + 1$. U slučaju paritetnog koda C zadanog u ovom zadatku, udaljenost koda, $d(C)$, iznosi 2, pa je $t = 0$. Sukladno tome moralo bi vrijediti: $M = 2^n$, međutim, kôd C ima 2^{n-1} kodnih riječi pa je zbog toga nije perfektan.

c) Uz n = 5, kôd C ima oznaku [5, 4, 2]. Uzmimo sve poruke duljine 4 bita koje sadrže samo po jednu binarnu jedinicu, kreirajmo adekvatne kodne riječi i formirajmo generirajuću matrica koda C u standardnom obliku:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}=\left[\mathbf{I}_4\middle|\mathbf{A}\right]$$

Sukladno tome, matrica za provjeru pariteta koda C ima oblik:

$$\mathbf{H}==\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\middle|\mathbf{I}_1\right]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

d) Sindromsko dekodiranje se provodi prema načelu: $S(\mathbf{y})$ = $\mathbf{y}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$. Ako je sindrom $S(\mathbf{y})$ različit od vektora $\mathbf{0}$ = [0], tada je otkrivena pogreška u prijenosu. Sindrom će biti različit od nule samo ako je nastupio neparan broj pogrešaka na 5 bita, tj. ako su nastale 1, 3 ili 5 pogrešaka. Sukladno tome, vjerojatnost pogreške P_e iznosi:

$$P_e=\binom{5}{1}p_g(1-p_g)^4+\binom{5}{3}p_g^3(1-p_g)^2+\binom{5}{5}p_g^5(1-p_g)^0=0,048$$

2. zadatak: Razmatrajte jako pouzdan prijenosni sustav u kojem se svaki bit štiti pomoću Hammingovog koda Ham(r), $r\in\mathbf{N}$. Zadani kôd je linearan binarni blok kôd.

a) **(1 bod)** Odredite minimalni r koji je potreban za zaštitu poruke duljine jednog bita i sukladno tome napišite matricu provjere pariteta koda Ham(r) u standardnom obliku.

b) **(1 bod)** Kôd određen u potpitanju a) zvat ćemo nadalje u zadatku kôd K. Odredite generirajuću matricu koda K u standardnom obliku.

c) **(1 bod)** Je li kôd K cikličan? Dokažite tvrdnju koristeći definiciju cikličnog koda.

d) **(1 bod)** Na ulaz dekodera kanala koji koristi kôd K dolazi slijed od 12 bita: 111000101000. Odredite izlaz iz dekodera kanala.

e) **(1 bod)** Pretpostavite da su koder kanala i dekoder kanala koji koriste kôd K povezani binarnim simetričnim kanalom s vjerojatnošću pogreške simbola p_g = 0,01. Odredite vjerojatnost neotkrivene pogreške na slijedu od tri uzastopna simbola koji zajedno čine kodnu riječ (**Napomena**: ne razmatrajte slučaj da pogreške nije bilo).

Rješenja:

a) Ham(r) je binarni Hammingov kôd. Za $r \geq 2$ vrijedi da je Ham(r) linearan blok kod oznake [2^r − 1, 2^r − 1 − r]. Dakle, za zaštitu poruke duljine 1 bita minimalno je potreban kôd Ham(2): k = 2^r − 1 − r = 1 iz čega slijedi r = 2. Ham(2) je linearan binarni blok kôd s oznakom [3, 1, 3]. Matrica provjere pariteta ima dva retka i sadrži binarne ekvivalente brojeva 1, 2 i 3 koji određuju pozicije unutar kodne riječi. Jedna od mogućih matrica provjere pariteta je:

$$\mathbf{H}_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

Matrica provjere pariteta koda Ham(2) u standardnom obliku može poprimiti samo jedan oblik:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Generirajuća matrica koda K ima samo jedan redak. Generirajuću matricu koda K u standardnom obliku možemo dobiti pomoću matrice provjere pariteta koda Ham(2) u standardnom obliku:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \middle| \mathbf{I}_2\right], \mathbf{G} = \left[\mathbf{I}_1 \middle| \mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Kôd K je cikličan ako je 1) linearan blok kôd i 2) ako bilo koji ciklični posmak kodne riječi iz K opet daje kodnu riječ iz K.

Kôd K sadrži samo dvije kodne riječi:

$$K = \begin{cases} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{cases}$$

Dakle, kôd K je linearan jer vrijedi $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in K$, i $a \cdot \mathbf{x} \in K$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ i $a \in \{0, 1\}$. također, ciklični posmak riječi 000, odnosno 111 uvijek daje iste te riječi. Dakle, kôd K je cikličan.

d) Ako na ulaz dekodera kanala koji koristi kôd K dolazi slijed od 12 bita: 111000101000, tada će, zbog sposobnosti koda da ispravi jednostruke pogreške bita i dekodiranjem prema načelu najbližeg susjeda, na izlazu dekodera kanala biti slijed: 1010.

e) Dekoder kanala slijed bita dekodira u blokovima od po 3 bita. Dekoder neće otkriti pogrešku na kodnoj riječi samo ako nastupi pogreška na sva tri bita kodne riječi: $P_{\mathrm{e}} = p_{\mathrm{g}}^3 = 0{,}01^3 = 10^{-6}$.

3. zadatak: Zadan je linearan binarni ciklični kôd K s oznakom (4, 4, $d(K)$).

a) **(2 boda)** Odredite sve kodne riječi i udaljenost koda K.

b) **(2 boda)** Odredite generirajući polinom koda K i pomoću njega generirajuću matricu koda K u standardnom obliku.

c) **(1 bod)** Odredite polinom za provjeru pariteta koda K i pomoću njega matricu provjere pariteta koda K u standardnom obliku.

Rješenja:

a) Sama oznaka koda K jasno govori da kôd sadrži četiri kodne riječi duljine 4 bita, a s obzirom da je linearan, mora sadržavati i riječ 0000. Dakle, uvidom u sve moguće kombinacije od po 4 bita, njih ukupno 16, eliminacijom nemogućih kombinacija preostale su sljedeće kodne riječi:

$$K = \begin{cases} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{cases}$$

Općenito, neki kôd je cikličan ako je 1) linearan blok kôd i 2) ako bilo koji ciklični posmak kodne riječi iz tog koda opet daje kodnu riječ iz istog koda. Vrlo je lako ustanoviti da kôd K zadovoljava oba uvjeta. Udaljenost koda je $d(K) = 2$.

b) Generirajući polinom koda K mora biti faktor polinoma $x^4 - 1$. Taj je polinom moguće faktorizirati kao $x^4 - 1 = (x^2 + 1)\cdot(x^2 + 1)$ ili kao $x^4 - 1 = (x + 1)\cdot(x^3 + x^2 + x + 1)$. Polinom $(x^2 + 1)$ određuje kôd dimenzije $k = n - r = 4 - 2 = 2$, polinom $(x + 1)$ određuje kôd dimenzije $k = n - r = 4 - 1 = 3$, dok polinom $(x^3 + x^2 + x + 1)$ određuje kôd dimenzije $k = n - r = 4 - 3 = 1$. Od sva tri generirajuća polinoma zadani kôd K [4, 2] jedino je moguće generirati polinomom $g(x) = (x^2 + 1)$. Pomoću tog polinoma možemo kreirati generirajuću matricu:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

koja ujedno ima i standardni oblik.

c) S obzirom da mora vrijediti $g(x)\cdot h(x) = x^n - 1$, što u slučaju zadanog koda K znači:

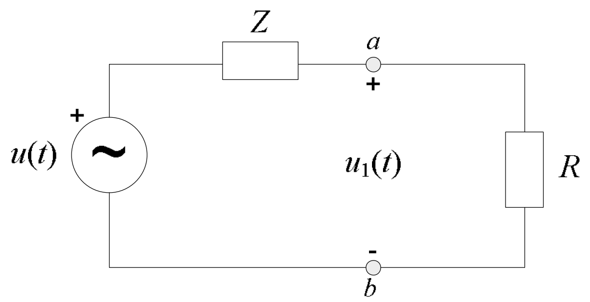
$(x^2 + 1)\cdot h(x) = x^4 - 1$

tada je vrijedi polinom za provjeru pariteta koda K dan kao $h(x) = (x^2 + 1)$. Uslijed toga će matrica za provjeru pariteta koda K biti jednaka

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

što je ujedno i njen standardni oblik.

4. zadatak: Razmatrajte naponski izvor koji generira napon $u(t)$. Unutarnji otpor izvora je realan i iznosi Z ohma, a na stezaljke a i b spojen mu je otpornik otpora R ohma. Napon između stezaljki a i b opisan je funkcijom $u_1(t)$.



Pretpostavite da je napon $u(t)$ zadan kao periodičan slijed pravokutnih impulsa definiranih sljedećim izrazom:

$$u(t) = \begin{cases} A & \text{za } 0 \le t < T/2 \\ -A & \text{za } T/2 \le t < T \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

pri čemu je A amplituda signala $u(t)$ zadana u voltima, a T je trajanje perioda signala $u(t)$ u sekundama.

a) **(2 boda)** Odredite izraz za Fourierove koeficijente u_k napona $u(t)$, $\forall k \in \mathbf{Z}$ (naputak: možete koristiti svojstvo Fourierove transformacije da istosmjerna komponenta u vremenskoj domeni opisana funkcijom $x(t) = K$ [V], $\forall f \in \mathbf{R}$, i delta funkcija $X(f) = K\cdot\delta(f)$ čine Fourierov transformacijski par). Konačan izraz za koeficijente u_k mora biti izražen kao funkcija od A i k.

b) **(1 bod)** Koristeći koeficijente u_k iz a) napišite matematički izraz za spektar signala $U(f)$.

c) **(1 bod)** Odredite izraz za srednju snagu P_1 koju razvija napon $u_1(t)$ na otporniku otpora R ohma. Izraz za snagu P_1 prikažite kao funkciju veličina A, Z i R.

d) **(1 bod)** Odredite maksimalan iznos kojeg može poprimit snaga P_1 u odnosu na zadanu amplituda napona izvora, A, i unutarnji otpor izvora, Z. Prikažite izraz za snagu P_1 kao funkciju od A i Z.

Rješenja:

a) Napon $u(t)$ možemo prikazati kao zbroj dva napona, $u_1(t)$ i $u_2(t)$, pri čemu vrijedi:

$$u_1(t)=\begin{cases}2A & \text{za}\, 0\le t<T/2\\ 0 & \text{za}\, T/2\le t<T\end{cases}, t\in\mathbb{R} \quad i \quad u_2(t)=-A, \forall t\in\mathbb{R}$$

Koristeći izraz za Fourierove koeficijente periodičnog slijeda pravokutnih impulsa, c_k:

$$c_k=A\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}$$

te sukladno definiciji napona $u_1(t)$, dobivamo

$$u_{1k}=2A\frac{1}{2}\frac{\sin\left(k2\pi\frac{1}{T}\frac{T/2}{2}\right)}{k2\pi\frac{1}{T}\frac{T/2}{2}}=A\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}, k\in\mathbb{Z}.$$

Napon $u_2(t)$ je istosmjerna komponenta koja ima samo jedan Fourierov koeficijent,

$$u_{2k}=\begin{cases}-A & za\, k=0\\ 0 & za\, k\neq 0\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$$

Nadalje vrijedi:

$$u_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[u_1(t)+u_2(t)\right]e^{-jk\omega_0 t}dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u_1(t)e^{-jk\omega_0 t}dt+\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u_2(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=u_{1k}+u_{2k}$$

Konačan izraz za Fourierove koeficijente zadanog napona $u(t)$ je:

$$u_k=\begin{cases}0 & za\, k=0\\ A\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} & za\, k\neq 0\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$$

b) Izraz za spektar signala $U(f)$ je sljedeći:

$$U(f)=\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}A\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right), k\in\mathbb{Z}$$

c) Snaga P_1 na otporniku otpora R oma vezana je uz snagu izvora P izrazom:

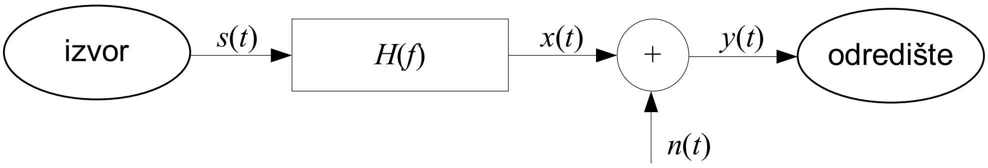
$$P_1=P\frac{R}{Z+R}[W]$$

Trenutni iznos snage izvora, $p(t)$, povezan je s naponom izvora, $u(t)$, sljedećim izrazom: $p(t) = u^2(t)/(Z + R)$. S obzirom da je $u^2(t) = A^2$, $\forall t \in \mathbf{R}$, vrijedi: $p(t) = A^2/(Z + R)$. Očito je da se radi o konstanti pa je i srednja vrijednost snage izvora, P, jednaka trenutnoj vrijednosti: $P = A^2/(Z + R)$. Dakle,

$$P_1 = \frac{A^2}{Z+R}\frac{R}{Z+R} = A^2\frac{R}{(Z+R)^2}\,[W]$$

d) Ako A i Z promatramo kao zadane (fiksne) veličine, snaga P_1 će poprimiti maksimalan iznos ako je ispunjen uvjet: $Z = R$. Tada je $P_1 = A^2/(4Z)$.

5. zadatak: Razmatrajte komunikacijski kanal u kontinuiranom vremenu prikazan na donjoj slici.



Dakle, kanal koji povezuje izvor i odredište je serijski spoj linearnog i vremenski neovisnog (LTI) kanala prijenosne funkcije $H(f)$ i AWGN kanala u kojem djeluje šum $n(t)$. Pretpostavimo da je signal na izlazu izvora, $s(t)$, širokopojasni signal obilježja stacionarnog slučajnog procesa čija spektralna gustoća snage $S_s(f)$ iznosi 10 μW/Hz za $|f| \leq 10$ MHz, a na ostalim je frekvencijama jednaka nuli. Neka kanal prijenosne funkcije $H(f)$ ima obilježje idealnog niskopropusnog kanala i neka vrijedi $|H(f)| = 0{,}1$ za $|f| \leq 1$ MHz i $|H(f)| = 0$ na ostalim frekvencijama. Nadalje, neka je $n(t)$ bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage 0,5 nW/Hz, $\forall f \in \mathbf{R}$. Također, pretpostavimo da signal $x(t)$ ima Gaussovu razdiobu amplituda i da su svi njegovi uzorci međusobno neovisni.

a) **(1 bod)** Odredite iznos kapaciteta zadanog AWGN kanala.

b) **(1 bod)** Koliko iznosi standardna devijacija signala $x(t)$ na otporniku otpora 1 ohm, ako je $E[x(t)] = 0$?

c) **(1 bod)** Odredite dinamiku u zadanom AWGN kanalu.

d) **(1 bod)** Koliko iznosi smanjenje omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u zadanom AWGN kanalu uzrokovano primjenom realnog kodnog sustava uslijed kojeg prijenosna brzina iznosi 50% od kapaciteta zadanog AWGN kanala?

e) **(1 bod)** Koliko bi iznosio kapacitet zadanog AWGN kanala, ako je $|H(f)| = 0{,}1$ $\forall f \in R$?

Napomena: sve proračunate brojčane iznose zaokružite na najviše tri decimale.

Rješenja:

a) Kapacitet AWGN kanala određujemo izrazom:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)[\text{bit/s}]$$

pri čemu je S srednja snaga signala $x(t)$, B je širina frekvencijskog pojasa na kojeg je signal $x(t)$ ograničen u AWGN kanalu, a N je srednja snaga šuma $n(t)$. Srednju snagu signala $x(t)$ određujemo pomoću njegove spektralne gustoće snage $S_x(f)$ za koju vrijedi:

$$S_x(f)=S_s(f)\left|H(f)\right|^2=\begin{cases}0{,}1\ \mu\text{W/Hz} & |f|\le 1\text{MHz}\\ 0 & |f|>1\text{MHz}\end{cases}$$

Sukladno tome, $S = 2B{\cdot}S_x(f)$, pri čemu je B širina prijenosnog pojasa kanala prijenosne funkcije $H(f)$ i iznosi 1 MHz (to je širina frekvencijskog pojasa na koji je ograničen signal $x(t)$). Dakle, $S = 2{\cdot}10^{-1} = 200$ mW. Bijeli Gaussov šum $n(t)$ spektralne gustoće snage $N_0/2$ = 0,5 nW/Hz će unutar pojasa širine $2B$ = 2 MHz razviti srednju snagu $N = N_0B$ = 1 mW. Dakle, $C = 10^6\log_2(1 + 200)$ = 7,651 Mbit/s.

b) Standardna devijacija signala $x(t)$, σ_x, određena je srednjom snagom tog signala. S obzirom da je $E[x(t)] = 0$, tada vrijedi: $S = \sigma_x^2/R$. Uz zadani R = 1 ohm, σ_x = 0,446 V.

c) Dinamika u AWGN kanalu određene je izrazom: $C = 2BD$, što znači da je $D = C/(2B)$ = 3,826 bit/simbol.

d) U AWGN kanalu s realnim kodnim sustavom ostvarena je prijenosna brzina $R = C/2$. Smanjenje omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma uzrokovano primjenom realnog kodnog sustava definirano je izrazom:

$$\Gamma=\frac{S/N}{2^{C/(2B)}-1}$$

Uvrstimo li u taj izraz sljedeće vrijednosti: S = 200 mW, N = 1 mW, C = 7,651 Mbit/s i B = 1 MHz, dobit ćemo: Γ = 15,178.

e) Ako je $|H(f)| = 0{,}1\ \forall f \in R$, tada je signal $x(t)$ ograničen na pojas frekvencija širine B = 10 MHz (proizlazi iz definicije spektralne gustoće snage signala $s(t)$). Tada je njegova srednja snaga S = $2B{\cdot}S_x(f) = 2B{\cdot}S_s(f){\cdot}|H(f)|^2$ = 2 W. Kapacitet je moguće odrediti sljedećim izrazom: $C = 10^7\log_2[1 + 2/(2{\cdot}10^7{\cdot}0{,}5{\cdot}10^{-9})]$ = 76,51 Mbit/s.

6. zadatak: Razmatrajte naponski signal $x(t) = 10{\cdot}\cos(2000\pi t){\cdot}\cos(6000\pi t)$ [V].

a) **(1 bod)** Sukladno Nyquistovom teoremu o uzorkovanju signala u osnovnom pojasu frekvencija odredite minimalnu frekvenciju uzorkovanja s kojom bi morali uzorkovati signal $x(t)$.

b) **(1 bod)** Odredite srednju snagu signala $x(t)$ na otporniku otpora 1 ohm.

c) **(1 bod)** Signal $x(t)$ dovodimo na kvantizator koji provodi jednoliku kvantizaciju (korak kvantiziranja je konstantan). Ako kvantizator svaki uzorak kodira s 8 bita, odredite koliko najviše smije iznositi maksimalni **raspon** amplituda signala na ulazu kvantizatora pa da pri kvantizaciji signala $x(t)$ bude ostvaren omjer S/Q (omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma kvantiziranja) od barem 40 dB.

d) **(1 bod)** Odredite koliko minimalno smije iznositi raspon amplituda na ulazu kvantizatora pa da prilikom kvantizacije signala $x(t)$ ne dođe do izobličenja. Napomena: karakteristika kvantizatora je simetrična, tj. raspon amplituda se kreće od $-A_m$ do A_m.

e) **(1 bod)** Koliko minimalno mora iznositi prijenosna brzina kanala kroz koji se prenose kodirani uzorci signala $x(t)$, ako odaberemo frekvenciju uzimanja uzoraka signala $x(t)$ koja je dvostruko veća od minimalno potrebne?

Napomena: sve proračunate brojčane iznose zaokružite na najviše tri decimale.

Rješenja:

a) Signal $x(t) = 10{\cdot}\cos(2000\pi t){\cdot}\cos(6000\pi t)$ možemo napisati kao zbroj dva signala:

$$5\cos(4000\pi t) + 5\cos(8000\pi t)$$

Najveća frekvencija u spektru signala $x(t)$ iznosi f_m = 4000 Hz, što znači da frekvencija uzorkovanja, f_u, mora biti veća od 8 kHz.

b) Spektar signala $x(t)$ definiran je izrazom:

$$X(f)=\frac{5}{2}\delta(f-2000)+\frac{5}{2}\delta(f+2000)+\frac{5}{2}\delta(f-4000)+\frac{5}{2}\delta(f+4000)$$

Ovo je u stvari prikaz razvoja signala $x(t)$ u Fourierov red, što pokazuje da se radi o periodičnom signalu osnovne frekvencije 2 kHz. Adekvatni Fourierovi koeficijenti su: $c_{-1} = c_1 = c_{-2} = c_2 = 5/2$. Primijenimo li izraz za srednju snagu periodičnog signala dobit ćemo:

$$P_x=|c_0|^2+2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=4\left(\frac{5}{2}\right)^2=25[\mathrm{W}]$$

c) Ako kvantizator koristi r = 8 bita po uzorku, tada za srednju snagu kvantizacijskog šuma, Q, vrijedi:

$$Q=\frac{1}{3}A_m^2 2^{-2r}$$

pri čemu je A_m najveća amplituda signala koji se smije pojaviti na ulazu kvantizatora. Kako bi zadovoljili uvjet da omjer srednje snage signala $x(t)$, S, prema srednjoj snazi šuma, Q, iznosi barem 40 dB, mora vrijediti $S/Q \geq 10^4$. Dakle,

$$\frac{25}{A_m^2 2^{-16}/3}\geq 10^4 \rightarrow A_m \leq \sqrt{\frac{75\cdot 2^{16}}{10^4}}=22{,}17[\mathrm{V}]$$

Dakle, najveći dozvoljeni raspon amplituda signala na ulazu kvantizatora smije iznositi najviše 44,34 volta.

d) S obzirom da maksimalna vrijednost signala $x(t)$ iznosi 10 V (moguće dokazati derivacijom, ali je vidljivo i na temelju grube skice funkcije), tada raspon amplituda na ulazu kvantizatora mora iznositi najmanje 20 V pa da prilikom kvantizacije signala $x(t)$ ne dođe do izobličenja.

e) Dakle, ako signal $x(t)$ uzorkujemo frekvencijom 16 kHz, i svaki uzorak kvantiziramo i kodiramo s 8 bita, tada mora vrijediti $R \geq 16\cdot 8 = 128$ kbit/s.