

## Osnovni pojmovi teorije informacije

**Zadatak-1:** Na ulazu binarnog simetričnog kanala pojavljuju se dva simbola  $X=\{0, 1\}$  s vjerojatnostima pojavljivanja  $\{0.5, 0.5\}$ . Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je

$$[p(y_j | x_i)] = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix},$$

gdje je  $\varepsilon$  vjerojatnosti pogrešnog prijenosa.

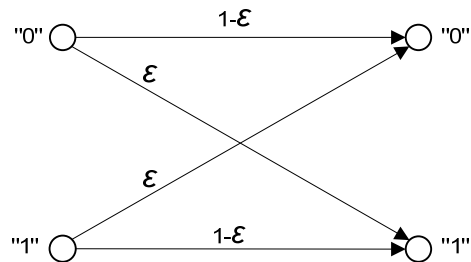
- Odredite entropiju ulaznog skupa simbola, tj.  $H(X)$ .
- Odredite entropiju izlaznog skupa simbola, tj.  $H(Y)$ .
- Odredite združenu entropiju  $H(X, Y)$ .
- Odredite srednji uzajamni sadržaj informacije (transinformacija) između ulaznog i izlaznog skupa simbola, tj.  $I(X; Y)$ .
- Za koje vrijednosti varijable  $\varepsilon$  je transinformacija maksimalna?
- Za koju vrijednost varijable  $\varepsilon$  je kapacitet kanala minimalan?

### Rješenje:

Uz pomoć matrice uvjetnih vjerojatnosti prijelaza

$$[p(y_j | x_i)] = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

možemo skicirati kanal:



- Imamo zadane vrijednosti ulaznih simbola  $p_0 = p(0) = 1/2$  i  $p_1 = p(1) = 1/2$  te možemo izračunati entropiju ulaznog skupa simbola:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^2 p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i) = 1 \text{ bit/simbol}$$

- Poznavanjem vjerojatnosti pojavljivanja ulaznih simbola i matrice uvjetnih vjerojatnosti prijelaza moguće je dobiti matricu združenih vjerojatnosti, a iz nje (zbrajanjem po stupcima) vjerojatnosti pojavljivanja izlaznih simbola, a time i entropiju izlaznog skupa simbola  $H(Y)$ .

$$[p(x_i, y_i)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\varepsilon) & \frac{1}{2}\varepsilon \\ \frac{1}{2}\varepsilon & \frac{1}{2}(1-\varepsilon) \end{bmatrix} \Rightarrow p(y=0) = 1/2, p(y=1) = 1/2$$

$$\Rightarrow H(Y) = 1 \text{ bit/simbol}$$

- Združena entropija  $H(X, Y)$  jednaka je

$$H(X, Y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_i) \log_2 p(x_i, y_i)$$

$$= -1(1-\varepsilon) \log_2 \left[ \frac{1}{2}(1-\varepsilon) \right] - \varepsilon \log_2 \left( \frac{1}{2}\varepsilon \right)$$

$$= \dots = 1 - \varepsilon \log_2 \varepsilon - (1-\varepsilon) \log_2 (1-\varepsilon).$$

- $I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = 1 + \varepsilon \log_2 \varepsilon + (1-\varepsilon) \log_2 (1-\varepsilon).$

- Transinformacija je maksimalna za slučajeve  $\left. \begin{matrix} \varepsilon = 0 \\ \varepsilon = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow I(X; Y) = 1 \text{ bit/simbol}.$

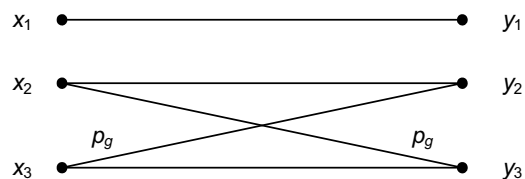
- Kapacitet je maksimum transinformacije ( $C = \max_{p(x_i)} I(X; Y)$ )

U d) dijelu zadatka izračunali smo  $I(X; Y)$ , pa znamo da je kapacitet  $C$  jednak:

$$C(\varepsilon) = \max_{p(x_i)} I(X; Y) = 1 + \varepsilon \log_2 \varepsilon + (1-\varepsilon) \log_2 (1-\varepsilon).$$

Deriviranjem prethodnog izraza po varijabli  $\varepsilon$  dobivamo da je kapacitet  $C$  minimalan za  $\varepsilon = 1/2$  i iznosi  $C_{\min} = 0$ .

**Zadatak-2:** Diskretni komunikacijski kanal predočen je na slici (Slika 2.1):



Slika 2.1

Vjerojatnosti pojavljivanja simbola  $x_i$  definirane su kao  $p(x_i) = p_i$ . Koji uvjet mora biti ispunjen (uz  $\sum_i p(x_i) = 1$ ) tako da vrijedi:  $H(X) = H(Y)$ ? **Napomena:**  $p_g = \text{konst.} \neq 0$ !

### Rješenje:

Iz slike kanala možemo dobiti matricu vjerojatnosti prijelaza kanala, a zatim i matricu združenih vjerojatnosti:

$$[p(y_i | x_i)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_g & p_g \\ 0 & p_g & 1-p_g \end{bmatrix}; [p(x_i, y_i)] = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2(1-p_g) & p_2 p_g \\ 0 & p_3 p_g & p_3(1-p_g) \end{bmatrix}$$

Iz matrice združenih vjerojatnosti slijedi:

$$[p(y_j)] = [p_1 \quad p_2 + p_g(p_3 - p_2) \quad p_3 + p_g(p_2 - p_3)]$$

Iz uvjeta zadatka,  $H(X) = H(Y)$ , dobivamo:

$$p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + p_3 \log_2 p_3 = p_1 \log_2 p_1 + (p_2 + p_g(p_3 - p_2)) \log_2 (p_2 + p_g(p_3 - p_2)) + (p_3 + p_g(p_2 - p_3)) \log_2 (p_3 + p_g(p_2 - p_3))$$

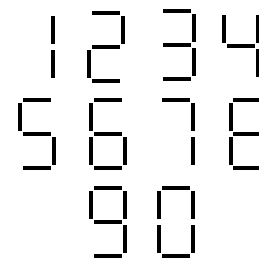
te je:

$$\begin{array}{ll} p_2 = p_2 + p_g(p_3 - p_2) & p_3 = p_3 + p_g(p_3 - p_2) \\ p_2 = p_3 & p_2 = p_3 \\ \text{ili} & \text{ili} \\ p_2 = p_3 + p_g(p_2 - p_3) & p_3 = p_2 + p_g(p_3 - p_2) \\ p_2(1 - p_g) = p_3(1 - p_g) & p_3(1 - p_g) = p_2(1 - p_g) \\ p_2 = p_3 & p_2 = p_3 \end{array} \quad \text{. Isto se dobije iz:}$$

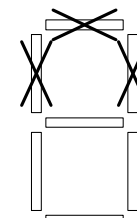
Dakle, da bi za dani kanal vrijedilo  $H(X) = H(Y)$ , mora biti  $p_2 = p_3$ .

**Zadatak-3:** Digitalni sklop za prikaz simbola (7-segmentni indikator) prikazuje simbole u formatu kao na slici (Slika 2.2). Svi simboli (0 - 9) pojavljuju se na indikatoru sklopa s jednakom vjerojatnošću pojavljivanja. Zbog kvara na uređaju otkazale su gornje tri oznake (Slika 2.3).

- Izračunajte prosječnu entropiju po jednom prikazu na 7-segmentnom indikatoru prije kvara.
- Izračunajte prosječnu entropiju po jednom prikazu na 7-segmentnom indikatoru nakon kvara.



Slika 2.2

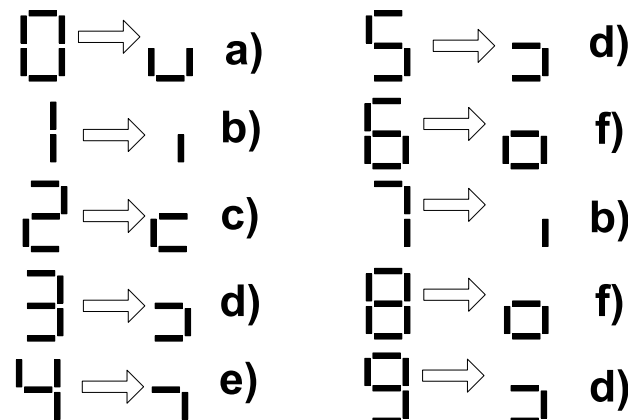


Slika 2.3

### Rješenje:

a)  $H(Y) = \log_2 10 = 3,3219 \text{ bit/simbol}$ .

b) Nakon kvara 7-segmentnog indikatora, početni simboli prelaze u (novi simboli su označeni slovima od "a" do "f"):



Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza kanala je:

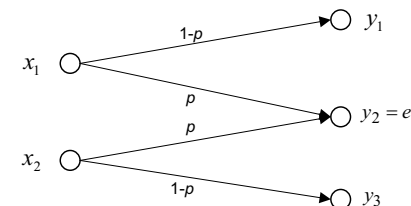
$$[p(y_j | x_i)] = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[p(y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

Entropija jednog prikaza na pokazniku nakon kvara je:

$$H(Y) = - \sum_{i=1}^6 p(y_j) \log_2(y_j) = 2,4464 \text{ bit/simbol.}$$

**Zadatak-4:** Odredite kapacitet binarnog kanala s brisanjem simbola predloženog na slici (Slika 2.4). Također,  $p(x_1) = \alpha$  i  $p(x_2) = 1 - \alpha$ .



Slika 2.4

**Rješenje:**

Kapacitet  $C$  je:  $C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X; Y); \quad I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$

Iz slike možemo dobiti matricu uvjetnih vjerojatnosti prijelaza i matricu združenih vjerojatnosti:

$$[p(y_j | x_i)] = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix};$$

$$[p(x_i, y_j)] = [p(x_i)] [p(y_j | x_i)] = \begin{bmatrix} \alpha(1-p) & \alpha p & 0 \\ 0 & (1-\alpha)p & (1-\alpha)(1-p) \end{bmatrix};$$

$$[p(y_j)] = [\alpha(1-p) \quad p \quad (1-\alpha)(1-p)]$$

Pomoću ovih matrica možemo dobiti entropiju izlaznog skupa, entropiju šuma i transinformaciju:

$$H(Y) = - \sum_{j=1}^3 p(y_j) \cdot \log_2 p(y_j)$$

$$= -\alpha(1-p) \log_2 [\alpha(1-p)] - p \log_2 p - (1-\alpha)(1-p) \log_2 [(1-\alpha)(1-p)]$$

$$= (1-p) [-\alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha) \log_2 (1-\alpha)] - p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$$

$$H(Y|X) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j | x_i) =$$

$$= -\alpha(1-p) \log_2 [(1-p)] - \alpha p \cdot \log_2 p - (1-\alpha)p \cdot \log_2 p - (1-\alpha)(1-p) \log_2 [(1-p)]$$

$$= -p \cdot \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$$

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) = (1-p) [-\alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha) \log_2 (1-\alpha)]$$

$$= (1-p) H(X)$$

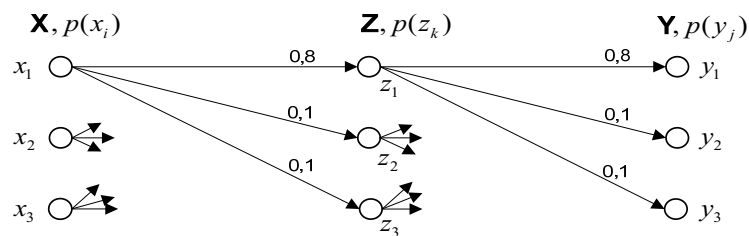
$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X; Y) = \max_{\{p(x_i)\}} (1-p) H(X) = (1-p) \max_{\{p(x_i)\}} H(X)$$

Entropija izvorišta je maksimalna ako je  $p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_n)$  za  $i = 1, \dots, n$  i iznosi  $H(X) = \log_2 n$ .  
 $\Rightarrow \max_{\{p(x_i)\}} H(X) = 1 \text{ bit/simbol} \Rightarrow C = 1 - p \text{ bit/simbol.}$

**Zadatak-5:** Tri simbola jednakih vjerojatnosti pojavljivanja prenose se preko dva serijski vezana kanala u kojima je vjerojatnost ispravnog prijenosa 0,8, a svi mogući pogrešni prijelazi su jednako vjerojatni. Odredite vjerojatnosti pojave simbola  $y_j$  na izlazu kanala ako je na ulazu simbol  $x_i$  za sve parove  $i, j$ .

### Rješenje:

Na slici (Slika 2.5) dan je model kanala opisanog u zadatku. Iz razloga preglednosti slike samo su navedeni prijelazi za jedan ulazni simbol.



Slika 2.5

Vjerojatnosti pojave simbola na ulazu u kanal su jednake i iznose  $1/3$ , tj.  $p(x_i) = \frac{1}{3}$  za  $i = 1, \dots, 3$ .

Da bi odredili vjerojatnosti  $p(y_j | x_i)$  moramo pronaći vezu između ulaznog i izlaznog skupa simbola.

Također, sa slike vidimo da je  $\begin{bmatrix} p(z_k | x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(y_j | z_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$ , odnosno

$$\begin{bmatrix} p(x_i | z_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{8}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{8}{30} \end{bmatrix}.$$

Iz uvjeta  $p(z_k) = \sum_{i=1}^3 p(x_i, z_k)$ , za  $k=1,2,3$  dobivamo  $p(z_1) = p(z_2) = p(z_3) = 1/3$  ili drugačije

zapisano  $\mathbf{p}[Z] = \mathbf{p}[z_1 \ z_2 \ z_3] = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]$ . Važno je uočiti da se vektor vjerojatnosti  $\mathbf{p}[Z]$  mogao dobiti klasičnim množenjem matrica, tj.  $\mathbf{p}[Z] = \mathbf{p}[X] \times \mathbf{p}[Z | X]$ .

$$\text{Iz } \begin{bmatrix} p(x_i | z_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{8}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{8}{30} \end{bmatrix}$$

dobivamo vrijednost pojave simbola na izlazu iz kanala, tj.  $p(y_1) = p(y_2) = p(y_3) = 1/3$  ili drugačije zapisano

$$\mathbf{p}[Y] = \mathbf{p}[y_1 \ y_2 \ y_3] = [1/3 \ 1/3 \ 1/3].$$

I u ovom slučaju vrijedi slijedeća jednakost  $\mathbf{p}[Y] = \mathbf{p}[Z] \times \mathbf{p}[Y | Z]$ .

Da bismo odredili vjerojatnost  $p(y_j | x_i)$  poslužiti ćemo se prethodno napisanim izrazima, tj.  $\mathbf{p}[Y] = \mathbf{p}[Z] \times \mathbf{p}[Y | Z]$   
 $= \mathbf{p}[X] \times \mathbf{p}[Z | X] \times \mathbf{p}[Y | Z] = \mathbf{p}[X] \times \mathbf{p}[Y | X]$ , tj. uočavamo da je  $\mathbf{p}[Y | X] = \mathbf{p}[Z | X] \times \mathbf{p}[Y | Z]$ , što nakon proračuna daje:

$$\begin{bmatrix} p(y_j | x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,66 & 0,17 & 0,17 \\ 0,17 & 0,66 & 0,17 \\ 0,17 & 0,17 & 0,66 \end{bmatrix}$$

**Zadatak-6:** Veličina ( $v$ ) koju mjeri instrument poprima osam vrijednosti sa sljedećim vjerojatnostima:

$v_i$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$p(v_i)$	0,05	0,05	0,15	0,25	0,30	0,05	0,05	0,10

Odredite srednji sadržaj informacije koju daje instrument u jedinici vremena (bit/s) ako se pokazivanje mijenja svakih 15 ms.

**Rješenje:**

Količina informacije koju daje instrument po jednom prikazu je:

$$I(v) = - \sum_{i=1}^8 p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i) = \dots = 2,6282 \text{ bit}$$

Ako se pokazivanje instrumenta mijenja svakih  $t = 15\text{ms}$ , tada je količina informacije koju daje instrument u jedinici vremena:

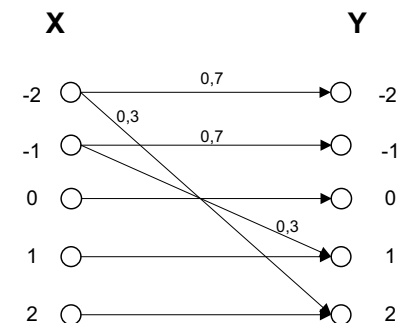
$$C = \frac{I(v)}{t} = 175,214 \text{ bit/s.}$$

**Zadatak-7:** Instrumentom očitavamo vrijednosti iz skupa simbola  $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Sve vrijednosti su jednako vjerojatne. Na pokazniku instrumenta pokvaren je indikator za "minus" koji se ne upali u 30% slučajeva. Ako sustav promatramo kao komunikacijski kanal, potrebno je:

- grafički prikazati vjerojatnosti prijelaza u kanal;
- odrediti vjerojatnost pojave pojedine vrijednosti na indikatoru instrumenta;
- odrediti entropiju ulaznog i izlaznog skupa simbola;
- izračunati transinformaciju i ekvivokaciju u ovom sustavu.

**Rješenje:**

- Indikator za „minus“ na pokazniku se ne upali u 30% slučajeva, dakle vjerojatnost da će pokaznik prikazati vrijednost "-2" kao "-2" je 0.7, a kao "2" je 0.3. Analogno zaključujemo i za "-1", dok se ostale vrijednosti prikazuju ispravno. Grafički prikaz kanala je:



- Iz skice kanala možemo dobiti matricu uvjetnih vjerojatnosti prijelaza i matricu združenih vrijednosti:

$$[p(y_j | x_i)] = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(x_i) = 0,2, \quad i = 1, \dots, 5$$

$$[p(x_i, y_j)] = [p(x_i)][p(y_j | x_i)] = \begin{bmatrix} 0,14 & 0 & 0 & 0 & 0,06 \\ 0 & 0,14 & 0 & 0,06 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Iz matrice združenih vjerojatnosti zbrajanjem po stupcima dobivamo vrijednosti pojave pojedine vrijednosti na indikatoru instrumenta:

$$[p(y_j)] = [0,14 \quad 0,14 \quad 0,2 \quad 0,26 \quad 0,26]$$

c)  $H(X) = \log_2 5 = 2,32 \text{ bit/simbol}$

$$H(Y) = - \sum_{j=1}^5 p(y_j) \log_2 p(y_j) = \dots = 2,268 \text{ bit/simbol}$$

d)  $I(X; Y) = - \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^5 p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) p(y_j)}$

$$H(X|Y) = H(X) - I(X; Y)$$

$$I(X; Y) = \dots = 1,9167 \text{ bit/simbol}$$

$$H(X/Y) = \dots = 0,4053 \text{ bit/simbol}$$

**Zadatak-8:** Komunikacijskim kanalom prenose se tri poruke "a", "b" i "c", generirane iz skupa simbola  $X = \{a, b, c\}$ . Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su  $p(a) = p(b) = 2 \times p(c)$ . Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je:

$$[p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

a) Odredite vjerojatnosti pojavljivanja pojedinih simbola na izlazu iz kanala.

b) Odredite ekvivokaciju i transinformaciju u kanalu.

c) Izračunajte promjenu transinformacije ako se provede zaštita tako da se svaka poruka u prijenosu jednom ponovi.

**Rješenje:**

$$p(a) = p(x_1) = 0,4$$

a)  $p(b) = p(x_2) = 0,4$   $[p(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} 0,28 & 0,04 & 0,08 \\ 0,08 & 0,28 & 0,04 \\ 0,02 & 0,04 & 0,14 \end{bmatrix}$

$$p(c) = p(x_3) = 0,0$$

$$H(X) = 1,5219 \text{ bit/simbol} \quad [p(y_j)] = [0,38 \quad 0,36 \quad 0,26]$$

b)  $H(X|Y) = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i|y_j) = 1,124 \text{ bit/simbol}$

$$[p(x_i|y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{0,28}{0,38} & \frac{0,08}{0,38} & \frac{0,02}{0,38} \\ \frac{0,04}{0,36} & \frac{0,28}{0,36} & \frac{0,04}{0,36} \\ \frac{0,08}{0,26} & \frac{0,04}{0,26} & \frac{0,14}{0,26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7368 & 0,2105 & 0,0526 \\ 0,1111 & 0,7778 & 0,1111 \\ 0,3077 & 0,1538 & 0,5385 \end{bmatrix}$$

$$I_{(1)}(X; Y) = H(X) - H(X/Y) = 0,3979 \text{ bit/simbol}$$

**Napomena:** Transinformacija se mogla dobiti i preko  $H(Y)$  i  $H(Y/X)$ .

$$H(Y) = 1,566 \text{ bit/simbol} \text{ i } H(Y/X) = 1,1723 \text{ bit/simbol}.$$

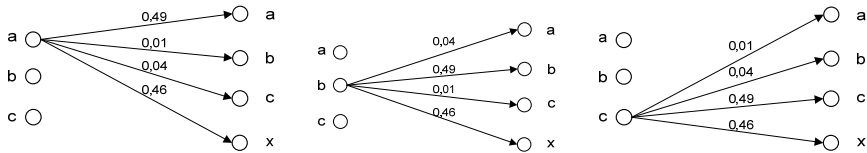
c) Ako se svaka poruka u prijenosu jednom ponovi, na strani prijemnika se, ovisno o tome da li je došlo do grešaka u prijenosu, može pojaviti devet različitih kombinacija, 'aa', 'ab', ..., 'cc'. Od njih devet, samo se 'aa', 'bb' i 'cc' mogu dekodirati, a ostalih šest su nedefinirane. Njih ćemo u grafu prijelaza označiti stanjem 'x'.

Vjerojatnost prijema nedefinirane kombinacije prilikom slanja simbola 'a' (znači kanalom će putovati 'aa') zbog pogrešaka u prijenosu je:

$$\begin{aligned}
 ab &= 0,7 \cdot 0,1 = 0,07 \\
 ac &= 0,7 \cdot 0,2 = 0,14 \\
 ba &= 0,1 \cdot 0,7 = 0,07 \\
 bc &= 0,1 \cdot 0,2 = 0,02 \\
 ca &= 0,2 \cdot 0,7 = 0,14 \\
 cb &= 0,2 \cdot 0,1 = \underline{0,02} \\
 &\quad \underline{0,46}
 \end{aligned}$$

Analogno možemo dobiti vjerojatnosti prijema nedefinirane kombinacije i za simbole 'b' i 'c', One isto iznose 0,46.

c) Graf prijelaza (razlomljen na tri grafa radi preglednosti) izgleda ovako:



$$[p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 0,49 & 0,01 & 0,04 & 0,46 \\ 0,04 & 0,49 & 0,01 & 0,46 \\ 0,01 & 0,03 & 0,49 & 0,46 \end{bmatrix}$$

$$[p(x_i|y_j)] = [p(x_i)] \cdot [p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 0,196 & 0,004 & 0,016 & 0,184 \\ 0,016 & 0,196 & 0,004 & 0,184 \\ 0,002 & 0,008 & 0,098 & 0,092 \end{bmatrix}$$

$$[p(y_j)] = [0,214 \quad 0,208 \quad 0,118 \quad 0,46]$$

$$I_{(2)}(X;Y) = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 p(x_i|y_j) \log_2 p \frac{(y_i/x_j)}{p(y_j)} = 1,124 \text{ bit/simbol}$$

$$\Delta I(X;Y) = |I_{(2)}(X;Y) - I_{(1)}(X;Y)| = 0,7146 \text{ bit/simbol}$$

**Zadatak-9:** Neka je dano izvorište na čijem izlazu se pojavljuju dva simbola, i to: točka (•) i crta (-). Trajanje (•) je 0,2 s, dok je trajanje (-) tri puta dulje. Vjerojatnost pojavljivanja (•) je dva puta veća od vjerojatnosti pojavljivanja (-), dok je trajanje stanke između simbola 0,2 s. Izračunajte prosječnu brzinu generiranja simbola na izvorištu i to u bit/s.

**Rješenje:**

$$t_{(\bullet)} = 0,2 \text{ s}, \quad p_{(\bullet)} = 2/3$$

$$t_{(-)} = 0,6 \text{ s}, \quad p_{(-)} = 1/3$$

$$\underline{t_s = 0,2 \text{ s}}$$

Prosječna količina informacije po jednom simbolu iznosi:

$$H(X) = -p_{(\bullet)} \log_2 p_{(\bullet)} - p_{(-)} \log_2 p_{(-)} = 0,667 \cdot 0,585 + 0,333 \cdot 1,585 = 0,92 \text{ bit/simbol}$$

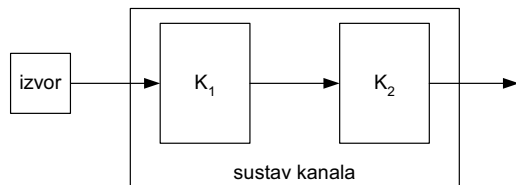
Prosječno trajanje simbola iznosi:

$$T_s = p_{(\bullet)} \cdot t_{(\bullet)} + p_{(-)} \cdot t_{(-)} + t_s = 0,533 \text{ s/simbol}$$

Informacijska brzina izvorišta iznosi:

$$R = \frac{0,92 \text{ bit/simbol}}{0,533 \text{ s/simbol}} = 1,726 \text{ bit/s}$$

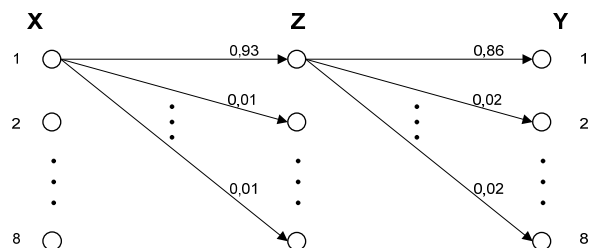
**Zadatak-10:** Komunikacijski kanali spojeni su serijski kako je prikazano na slici (Slika 2.6). Na kanal  $K_1$  priključen je informacijski izvor koji generira 8 jednako vjerojatnih poruka koje se kodiraju skupom simbola  $X = \{x_1, \dots, x_8\}$ . Vjerojatnost ispravnog prijenosa u kanalu  $K_1$  je 0,93, u kanalu  $K_2$  je 0,86 dok su svi drugi prijelazi jednako vjerojatni. Izračunajte transinformaciju u sustavu kanala. Također, izračunajte ekvivokaciju u kanalima  $K_1$ ,  $K_2$  i u sustavu kanala.



Slika 2.6

### Rješenje:

Označimo skup simbola na izlazu iz kanala  $K_1$  slovom  $Z$ , apotom skicirajmo graf kanala:



$$p(x_i) = \frac{1}{8}, \quad i = 1, \dots, 8$$

$$[p(z_k / x_i)] = \begin{bmatrix} 0,93 & 0,01 & \dots & 0,01 \\ 0,01 & 0,93 & \dots & 0,01 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,01 & 0,01 & \dots & 0,93 \end{bmatrix}$$

$$[p(x_i, z_k)] = [p(x_i)] \cdot [p(z_k / x_i)] = \begin{bmatrix} 0,11625 & 0,00125 & \dots & 0,00125 \\ 0,00125 & 0,11625 & \dots & 0,00125 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,00125 & 0,0125 & \dots & 0,11625 \end{bmatrix}$$

Iz gornje matrice združenih vjerojatnosti kanala  $K_1$  možemo dobiti vjerojatnosti pojave simbola  $p(z_k)$  na izlazu

$$\text{kanala } K_1: p(z_k) = \frac{1}{8}, k = 1, \dots, 8$$

Analogno za  $K_2$ :

$$[p(y_j / z_k)] = \begin{bmatrix} 0,86 & 0,02 & \dots & 0,02 \\ 0,02 & 0,86 & \dots & 0,02 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,02 & 0,02 & \dots & 0,86 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow p(y_j) = \frac{1}{8}, j = 1, \dots, 8$$

$$[p(y_j / x_i)] = [p(z_k / x_i)] \times [p(y_j / z_k)] = \begin{bmatrix} 0,8012 & 0,0284 & \dots & 0,0284 \\ 0,0284 & 0,8012 & \dots & 0,0284 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,0284 & 0,0284 & \dots & 0,8012 \end{bmatrix}$$

$$j = i \Rightarrow 0,93 \cdot 0,86 + 7 \cdot 0,01 \cdot 0,02 = 0,8012$$

$$j \neq i \Rightarrow 0,93 \cdot 0,02 + 0,86 \cdot 0,01 + 6 \cdot 0,01 \cdot 0,02 = 0,0284$$

Transinformacija i ekvivokacija u sustavu kanala iznose:

$$I(X; Y) = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 p(x_i) \cdot p(y_j / x_i) \log_2 \frac{p(y_j / x_i)}{p(y_j)} = 8 \cdot 0,125 \cdot 0,8012 \cdot \log_2 \left( \frac{0,8012}{0,125} \right) + 7 \cdot 8 \cdot 0,0284 \cdot 0,125 \cdot \log_2 \left( \frac{0,0284}{0,125} \right) = 1,7223 \text{ bit/simbol}$$

$$H(X/Y) = H(X) - I(X; Y) = \log_2 8 - I(X; Y) = 1,2776 \text{ bit/simbol}$$

Ekvivokacija u kanalu  $K_1$ :

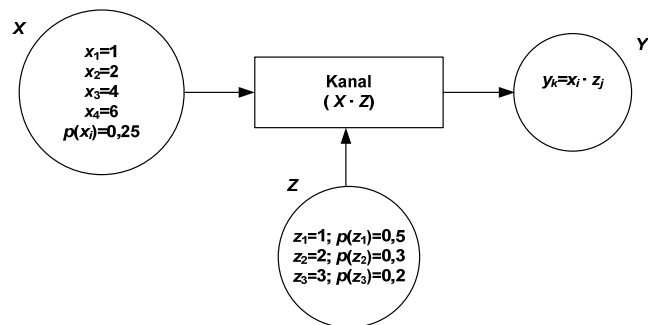
$$\begin{aligned} H(X/Z) &= - \sum_{i=1}^8 \sum_{k=1}^8 p(x_i, z_k) \log_2 p(x_i / z_k) \\ &= - \sum_{i=1}^8 \sum_{k=1}^8 p(x_i, z_k) \log_2 \frac{p(x_i, z_k)}{p(z_k)} \\ &= - 8 \cdot 0,11625 \cdot \log_2 \left( \frac{0,11625}{0,125} \right) - 56 \cdot 0,00125 \cdot \log_2 \left( \frac{0,00125}{0,125} \right) \\ &= 0,562438 \text{ bit/simbol} \end{aligned}$$

Ekvivokacija u kanalu  $K_2$ :

$$\begin{aligned} H(Z/Y) &= - \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^8 p(z_k, y_j) \log_2 \frac{p(z_k / y_j)}{p(y_j)} \\ &= - \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^8 p(z_k) \cdot p(y_j / z_k) \log_2 \frac{p(z_k) \cdot (y_j / z_k)}{p(y_j)} \\ &= - 8 \cdot 0,125 \cdot 0,86 \cdot \log_2 \left( \frac{0,125 \cdot 0,86}{0,125} \right) - 56 \cdot 0,125 \cdot 0,02 \cdot \log_2 \left( \frac{0,125 \cdot 0,02}{0,125} \right) \\ &= 0,977268 \text{ bit/simbol} \end{aligned}$$



**Zadatak-11:** Izvorište emitira simbole  $x_i$  koji se prenose u kanalu s djelovanjem šuma  $z_j$ . Na odredištu se pojavljuju simboli  $y_k$ . Vrijednosti simbola i vjerojatnosti pojavljivanja dani su na slici (Slika 2.7). Šum u kanalu djeluje na taj način da se njegova vrijednost multiplicira sa simbolima iz izvora.



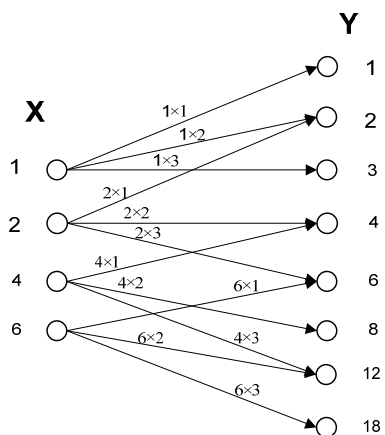
Slika 2.7

Odredite:

- $H(Y)$ .
- $I(X;Y)$ .

### Rješenje:

Skicirajmo kanal:



$$p(x_i) = 1/4, \quad [p(z_j)] = [0,5 \quad 0,3 \quad 0,2]$$

Šum u kanalu djeluje tako da se njegova vrijednost pomnoži sa simbolom iz izvora. Ako smo, na primjer, poslali  $x_4$ , čija je vrijednost jednaka 6, u 50% slučajeva na izlazu iz kanala pojavit će se 6, u 30% slučajeva pojavit će se 12, a u 20% slučajeva 18.

Iz grafa prijelaza možemo očitati u kojim će se sve slučajevima pojaviti određeni simbol na izlazu, te će se, na primjer, na izlazu pojaviti '2' kada je poslan  $x_1$ , a u kanalu djeluje  $z_2$ , ili kada je poslan  $x_2$ , a u kanalu djeluje  $z_1$ .

## Komunikacijski kanali u kontinuiranom vremenu

**Zadatak-1:** Razvijte u kompleksni eksponencijalni Fourierov red funkciju  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \sin^2(2\pi f_0 t)$ .

### Rješenje:

Zadana je funkcija  $x(t)$ :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \sin^2(2\pi f_0 t) = \cos \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t, \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

Raspišimo funkciju  $x(t)$  koristeći prikaz funkcija sinus i kosinus u kompleksnom obliku:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \left( e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right) + \left[ \frac{1}{2j} \left( e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t} \right) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} - \frac{1}{4} \left( e^{j2\omega_0 t} - 2 + e^{-j2\omega_0 t} \right) \\ &= -\frac{1}{4} e^{-j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{4} e^{j2\omega_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo kompleksni Fourierov red čiji su koeficijenti jednaki  $c_0 = \frac{1}{2}$ ,  $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = c_{-2} = -\frac{1}{4}$ , dok su ostale vrijednosti  $c_k = 0$ .

**Zadatak-2:** Odredite koji su od navedenih signala (a)-(c) signali snage, signali energije ili niti jedno od toga.

(a)  $x(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$

(b)  $x(t) = u(t)$

(c)  $x(t) = t \cdot u(t)$

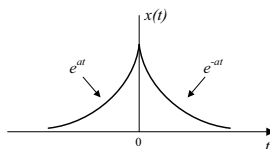
gdje je  $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ .

**Rješenje:**

a)  $x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{a} < \infty$$

Dakle, signal  $x(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$  je signal energije.

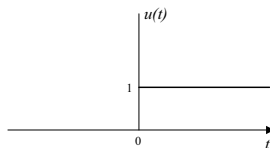


b)  $x(t) = u(t)$

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T 1^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} = \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

Dakle, signal  $x(t) = u(t)$  je signal snage.

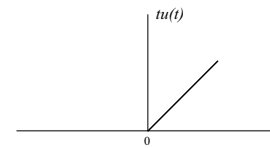


c)  $x(t) = tu(t)$

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T t^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} t^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{(T/2)^3}{3} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T^2}{24} = \infty$$

Dakle,  $x(t) = tu(t)$  nije niti signal energije niti signal snage.



**Zadatak-3:** Signal šuma,  $n(t)$ , ima spektralnu gustoću snage  $S_n(f)$  definiranu kao

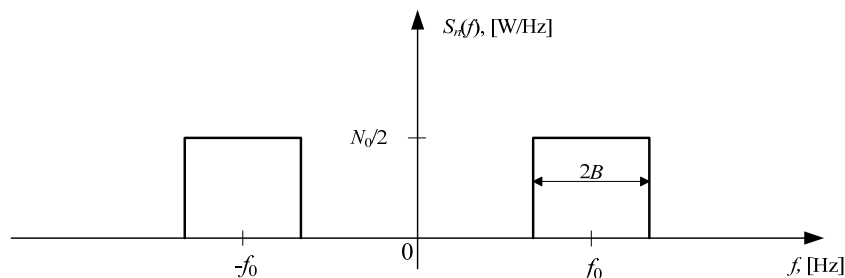
$$S_n(f) = \begin{cases} N_0/2 & \text{za } f_0 - B < |f| < f_0 + B \text{ [W/Hz]} \\ 0 & \text{za ostale vrijednosti } f \end{cases}$$

(a) Odredite autokorelacijsku funkciju šuma (Napomena:  $f_0 > B$ ).

(b) Odredite srednju snagu šuma.

**Rješenje:**

a) Skicirajmo graf spektralne gustoće snage  $S_n(f)$  šuma  $n(t)$ .



Izračunajmo autokorelacijsku funkciju danog šuma:

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-f_0-B}^{-f_0+B} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi ft} df + \int_{f_0-B}^{f_0+B} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi ft} df \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{1}{j2\pi t} \left[ e^{j2\pi ft} \right]_{-f_0-B}^{-f_0+B} + e^{j2\pi ft} \left[ e^{j2\pi ft} \right]_{f_0-B}^{f_0+B} \\ &= \frac{N_0}{4j\pi t} \left[ e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{j2\pi B t} - e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi B t} + e^{j2\pi t(f_0+B)} - e^{j2\pi t(f_0-B)} \right] \\ &= \frac{N_0}{4j\pi t} \left[ e^{-j2\pi f_0 t} (e^{j2\pi B t} - e^{-j2\pi B t}) + e^{j2\pi f_0 t} (e^{j2\pi B t} - e^{-j2\pi B t}) \right] \\ &= \frac{N_0}{4j\pi t} (e^{j2\pi B t} - e^{-j2\pi B t}) (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) \\ &= \frac{N_0}{4j\pi t} \cdot 2j \sin(2\pi B t) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t) \\ &= \frac{4N_0 B}{4} \cdot \frac{\sin(2\pi B t)}{2\pi B t} \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t) \\ &= 2BN_0 \cdot \frac{\sin(2\pi B t)}{2\pi B t} \cdot \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

b) Srednja snaga šuma jednaka je autokorelacijskoj funkciji šuma u trenutku  $t = 0$  i iznosi:

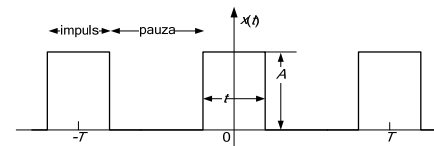
$$P(t) = R_n(0) = 2BN_0$$

**Zadatak-4:** Dan je periodički slijed pravokutnih impulsa  $x(t)$  amplitude  $A$  [V], frekvencije  $f=2$  kHz i omjera  $\tau/T=1/4$  (Slika 3.1).

(a) Skicirajte spektar danog signala.

(b) Odredite vrijednosti komponenata spektra ( $c_0$  do  $c_5$ ).

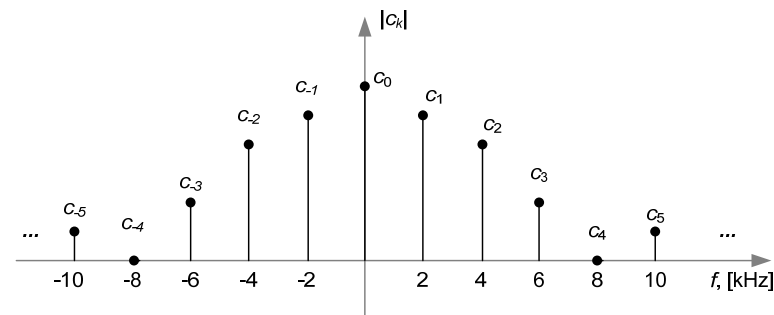
(c) Izračunajte omjer snaga  $\frac{\sum_{i=-3}^3 P_i}{P}$ .



Slika 3.1

**Rješenje:**

a) Skicirajmo spektar danog signala:



b) Vrijednost komponenata spektra su:

$$c_k = A \frac{\tau}{T} \frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2} \text{ i } c_0 = \frac{A\tau}{T}$$

$$c_0 = A/4 \text{ (istosmjerna komponenta); } c_1 = c_{-1} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}; c_2 = c_{-2} = \frac{A}{2\pi}; c_3 = c_{-3} = \frac{A}{3\sqrt{2\pi}};$$

$$c_4 = c_{-4} = 0; c_5 = c_{-5} = \frac{A}{5\sqrt{2\pi}}.$$

$$\text{c) Omjer snaga } \frac{\sum_{i=-3}^3 P_i}{P} \text{ jednak je: } \frac{\sum_{i=-3}^3 P_i}{P} = \frac{\frac{A^2}{16} + 2 \cdot \frac{A^2}{2\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \right)}{A^2/4} = 0,902. \quad (P = A^2 \frac{\tau}{T})$$

**Zadatak-5:** Periodički slijed pravokutnih impulsa  $x(t)$  (Slika 3.1. Zadatak-4) frekvencije 10 kHz i omjera impuls-pauza 3:1 treba biti propušten kroz idealni niskopropusni filter, ali tako da se barem 90% snage signala prenese na izlaz filtra.

- (a) Odredite graničnu frekvenciju filtra  $f_g$ . (Napomena: Kod proračuna raditi s najmanje 3 decimalna mjesta!)
- (b) Skicirajte realni dio spektra signala na ulazu u filter za područje od -80 do 80 kHz.
- (c) Odredite poziciju prve nultoeke ovojnice spektra signala.

### Rješenje:

- a) Ukupna snaga pravokutnog signala na ulazu jednaka je:

$$P_{uk} = \frac{A^2 \tau}{T}; \quad \frac{\tau}{T} = \frac{3}{4}$$

Snaga istosmjerne komponente signala jednaka je:

$$P_0 = |C_0|^2 = \frac{A^2 \tau^2}{T^2} = \frac{\tau}{T} \cdot P_{uk}$$

Snaga ostalih komponenata signala jednaka je:

$$\begin{aligned} P_k = |C_k|^2 &= \left[ \frac{A\tau}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)} \right| \right]^2 \\ &= \frac{A^2 \tau^2}{T^2} \frac{T^2}{k^2 \pi^2 \tau^2} \sin^2\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) \\ &= \frac{A^2}{k^2 \pi^2} \sin^2\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) \\ &= \frac{T^2}{\pi k^2 \pi^2} \sin^2\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) \cdot P_{uk} \end{aligned}$$

Kada uvrstimo zadane podatke, dobivamo:

$$P_k = \frac{4}{3k^2 \pi^2} \sin^2\left(\frac{3k\pi}{4}\right) \cdot P_{uk}$$

Izračunajmo snage prvih nekoliko komponenti:

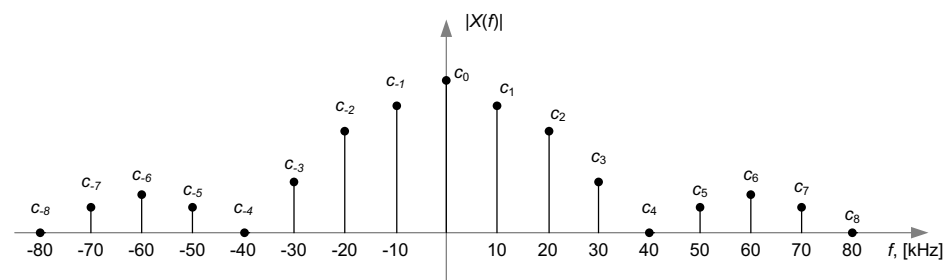
$$\begin{aligned} P_0 &= 0,7500 \cdot P_{uk} \\ P_1 &= P_{-1} = 0,0675 \cdot P_{uk} \\ P_2 &= P_{-2} = 0,0388 \cdot P_{uk} \\ P_3 &= P_{-3} = 0,0075 \cdot P_{uk} \\ P_4 &= P_{-4} = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Uočavamo da vrijedi:

$$\sum_{k=-2}^2 P_k = 0,9626 \cdot P_{uk}$$

Iz čega zaključujemo da je granična frekvencija filtra  $f_g > 20$  kHz.

- b) Skicirajmo realni dio spektra signala na ulazu u filter:



- c) Ovojnica spektra prolazi kroz nulu u točkama  $f = \frac{k}{\tau}, k \in \mathbb{N}$ .

Dakle, pozicija prve nultoeke ovojnice spektra signala je na frekvenciji:

$$f = \frac{1}{\tau} = 13,3 \text{ kHz.}$$

**Zadatak-6:** Odredite prijenosnu funkciju LTI sustava čiji je impulsni odziv  $h(t) = 0.5e^{-10|t|}$ .

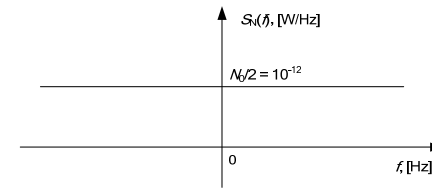
**Rješenje:**

Prijenosna funkcija  $H(f)$  i impulsni odziv  $h(t)$  čine Fourierov transformacijski par i vrijedi:

$$h(t) = 0.5 \cdot e^{-10|t|} = \begin{cases} 0.5 \cdot e^{-10t} & \text{za } t \geq 0 \\ 0.5 \cdot e^{+10t} & \text{za } t \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(f) &= F[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= 0.5 \cdot \int_{-\infty}^0 e^{10t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt + 0.5 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-10t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\ &= 0.5 \cdot \int_{-\infty}^0 e^{(10-j2\pi f)t} dt + 0.5 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t(10+j2\pi f)} dt \\ &= 0.5 \cdot \left( \frac{1}{10-j2\pi f} e^{(10-j2\pi f)t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{10+j2\pi f} e^{-t(10+j2\pi f)} \Big|_0^{+\infty} \right) \\ &= 0.5 \cdot \left( \frac{1}{10-j2\pi f} (1-0) - \frac{1}{10+j2\pi f} (0-1) \right) \\ &= 0.5 \cdot \left( \frac{1}{10-j2\pi f} + \frac{1}{10+j2\pi f} \right) \\ &= \frac{10}{100 + 4\pi^2 \cdot f^2} \end{aligned}$$

**Zadatak-9:** Dan je kontinuirani komunikacijski sustav s frekvencijskim pojasom prijenosa od 4 kHz i aditivnim bijelim Gaussovim šumom spektralne gustoće snage  $S_N(f)$  (Slika 3.3). Odredite kapacitet danog prijenosnog sustava ako se na prijamnoj strani zahtijeva snaga signala od 0,1 mW.



**Slika 3.3**

**Rješenje:**

Snagu šuma  $N$  možemo dobiti iz spektralne gustoće snage  $N_0$  i širine prijenosnog pojasa kanala  $B$ :

$$N = \frac{N_0}{2} \cdot 2B = N_0 \cdot B = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^{-9} \text{ W}$$

Sada možemo lako dobiti omjer signal-šum:

$$\frac{S}{N} = \frac{0.1 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-9}} = 1.25 \cdot 10^4$$

i naposljetku i kapacitet kanala  $C$ :

$$C = B \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) = 4000 \cdot \log_2 (1 + 1.25 \cdot 10^4) = 54.44 \cdot 10^3 \text{ bit/s.}$$

**Zadatak-10:** Signal  $x(t) = 3\cos(12000\pi \cdot t) + \cos(5000\pi \cdot t) + \cos(10000\pi \cdot t)$  [V] prisutan je u kanalu s aditivnim pojasno ograničenim bijelim šumom spektralne gustoće snage 0,2 mW/Hz za 0-12 kHz i 0 mW/Hz iznad 12 kHz. Na prijamnoj strani signal i pridodani šum propušteni su kroz idealni pojasnopropusni filter sa širinom pojasa 1 kHz i centralnom frekvencijom pojasa propuštanja na 6 kHz.

(a) Izračunajte srednji omjer signal šum na ulazu u filter (u dB!).

(b) Izračunajte srednji omjer signal šum na izlazu iz filtra (u dB!).

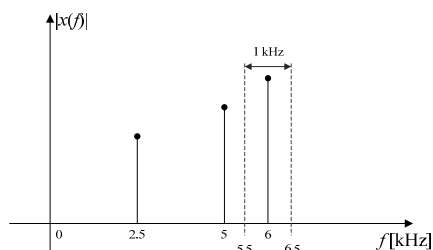
### Rješenje:

Zadano je:

$$x(t) = 3\cos(2\pi \cdot 6000 \cdot \tau) + \cos(2\pi \cdot 2500 \cdot \tau) + \cos(2\pi \cdot 5000 \cdot \tau)$$

$$N_0 = \begin{cases} 0,2 \text{ mW/Hz za } [0-12]\text{kHz} \\ 0 \text{ ostalo} \end{cases}$$

a) Skicirajmo spektar signala  $x(t)$  i naznačimo filter na skici:



Snaga signala  $x(t)$  na ulazu u filter jednaka je zbroju snaga frekvencijskih komponenata signala, tj.

$$S = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 + \frac{1}{2} A_3^2 = \frac{1}{2} 3^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} 1^2 = 5,5 \text{ W}$$

Snaga šuma na ulazu u filter jednaka je:

$$N_1 = N_0 \cdot B_1 = 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 2,4 \text{ W}$$

Te je srednji omjer signal šum na ulazu u filter izražen u dB jednak:

$$\left. \frac{S}{N_1} \right|_{\text{dB}} = 10 \cdot \log \frac{S}{N_1} = 10 \cdot \log \frac{5,5}{2,4} = 3,6015 \text{ dB}$$

b) Na slici vidimo da filter propušta samo komponentu  $3\cos(2\pi \cdot 6000 \cdot \tau)$  signala  $x(t)$ , te da je snaga signala na izlazu iz filtra jednaka:

$$S = \frac{1}{2} \cdot A_1^2 = \frac{1}{2} 3^2 = 4,5 \text{ W}$$

Snaga šuma na izlazu iz filtra jednaka je:

$$N_1 = N_0 \cdot B_1 = 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 0,2 \text{ W}$$

te je omjer srednje snage signala naprema srednjoj snazi šuma na izlazu iz filtra (izražen u dB) jednak:

$$\left. \frac{S}{N_2} \right|_{\text{dB}} = 10 \cdot \log \frac{S}{N_2} = 10 \cdot \log \frac{4,5}{0,2} = 13,5218 \text{ dB}$$

**Zadatak-11:** Govorni signal se na ulazu nekog prijenosnog sustava uzorkuje s frekvencijom uzorkovanja  $f_u=8$  kHz, a potom kodira s 8 bitova po uzorku. Omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu iznosi 30 dB. Odredite potrebni pojas prijenosa ako se šum u kanalu poveća za 3 dB.

**Rješenje:**

Šum u kanalu se poveća za 3 dB, tj. vrijedi:

$$3\text{ dB}=10\cdot\log N_2-10\cdot\log N_1=10\cdot\log\frac{N_2}{N_1}\Rightarrow\frac{N_2}{N_1}=1,9953$$

Iz frekvencije uzorkovanja  $f_u$  i broja bitova po uzorku  $n$  možemo dobiti informacijsku brzinu  $R=f_u\cdot n=64\text{ kbit/s}$ .

Kapacitet kanala  $C$  mora biti veći ili jednak od informacijske brzine  $R$ , te zaključujemo, budući da je širina pojasa proporcionalna s kapacitetom kanala, da je potrebna širina pojasa ona širina pojasa koju dobijemo za  $C=R$  i iznosi:

$$B=\frac{C}{\log_2\left(1+\frac{S_1}{N_2}\right)}=\frac{C}{\log_2\left(1+\frac{S_1}{N_1}\cdot\frac{N_1}{N_2}\right)}=\frac{C}{\log_2\left(1+\frac{1000}{1,9953}\right)}=7,133\text{ kHz}$$

**Zadatak-12:** Na ulaz sklopa za analogno-digitalnu (A/D) pretvorbu signala dovodi se analogni signal širine pojasa prijenosa 4 kHz. Signal se uzorkuje frekvencijom uzorkovanja koja je 1.25 puta veća od minimalne dozvoljene frekvencije uzorkovanja. Nakon toga se svaki uzorak kodira s 8 bitova.

a) Odredite informacijsku brzinu na izlazu sklopa za A/D pretvorbu.

b) Da li je moguće informacijski slijed bitova iz A/D pretvornika prenositi bez pogrešaka kanalom s aditivnim bijelim Gaussovim šumom u kojem je omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma ( $S/N$ ) 20 dB i koji ima pojas prijenosa 10 kHz.

c) Odredite omjer  $S/N$  (u dB) koji osigurava prijenos bez pogrešaka za b) dio zadatka.

**Rješenje:**

a) Minimalna dozvoljena frekvencija uzorkovanja  $f_u$  jednaka je:

$$f_u=2\cdot B=8\text{ kHz}$$

iz čega dobivamo da je frekvencija  $f_u=10\text{ kHz}$ .

Iz toga slijedi da je informacijska brzina  $R$  jednaka:

$$R=f_u\cdot n=10^4\cdot 8=80\text{ kHz}$$

b) Izračunajmo kapacitet zadanog kanala.

$$C=B\cdot\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)=10^4\log_2(1+100)=66,6\text{ kbit/s}$$

Obzirom na to da je informacijska brzina  $R$  veća od kapaciteta kanala  $C$ , nemoguće je napraviti prijenos danim kanalom bez pogrešaka.

c) Da bismo osigurali prijenos bez pogrešaka, kapacitet kanala  $C$  mora biti veći ili jednak od informacijske brzine  $R$ . Dakle vrijedi:

$$\begin{aligned} C &= 10^4 \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \geq 8 \cdot 10^4 \\ \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) &\geq 8 \\ 1 + \frac{S}{N} &\geq 2^8 = 256 \Rightarrow \frac{S}{N} = 255 \end{aligned}$$

Odnosno, u decibelima:

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{\text{dB}} = 10 \cdot \log \frac{S}{N} = 10 \cdot \log 255 = 24,1\text{ dB}$$

Dakle, za  $\frac{S}{N} \geq 24,1\text{ dB}$  moguće je ostvariti prijenos navedenim kanalom bez pogrešaka.

**Zadatak-13:** Na ulaz kvantizatora dolazi sinusni signal amplitude  $A_m$  koji koristi sve razine za rekonstrukciju signala. Minimalni zahtijevani omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora je 40 dB. Odredite broj kvantizacijskih nivoa kvantizatora te proračunajte odgovarajući omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora.

**Rješenje:**

Iz uvjeta zadatka dobivamo da je:

$$\frac{S}{N_q} \Big|_{\text{dB}} \geq 40 \text{ dB} \Rightarrow \frac{S}{N_q} = 10000$$

Gdje je  $S$  srednja snaga signala, a  $N_q$  srednja snaga kvantizacijskog šuma.

Ukupan broj  $L$  svih diskretnih razina na ulazu kvantizatora možemo dobiti iz izraza:

$$\frac{S}{N_q} = \frac{3}{2} \cdot L^2 \Rightarrow L = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{S}{N_q}} \approx 81,6 \Rightarrow L = 82$$

Također vrijedi  $L = 2^r$  gdje je  $r$  broj bita koji se koriste za opis svakog uzorka:

$$L = 2^r \Rightarrow r = \log_2 L \approx 6,36 \Rightarrow r = 7$$

Dakle, broj potrebnih bitova za opis svakog uzorka je 7.

Izračunajmo potrebni omjer  $\frac{S}{N} \Big|_{\text{dB}}$ :

$$\frac{S}{N_q} \Big|_{\text{dB}} = 1,76 + 6,02 \cdot r = 43,9 \text{ dB}$$

**Zadatak-14:** Signal  $u_m(t) = 10 \sin(2\pi 1000t)$  uzorkuje se frekvencijom od 3 kHz. Uzorci se potom kvantiziraju u kvantizatoru ((jednoliko kvantiziranje) s osam razina. Proračunajte omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora.

**Rješenje:**

Iz broja diskretnih razina kvantizatora možemo dobiti broj bitova koji se koriste za opis svakog uzorka.

$$L = 2^r$$

$$8 = 2^r \Rightarrow r = 3$$

Sada lako dobijemo omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora, tj.:

$$\frac{S}{N_q} \Big|_{\text{dB}} = 1,76 + 6,02 \cdot r = 1,76 + 6,02 \cdot 3 = 19,82 \text{ dB}$$

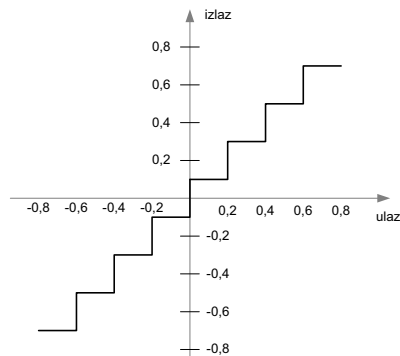
Odnosno:

$$\frac{S}{N_q} = 96,15.$$



**Zadatak-15:** Na ulaz PCM (engl. *Pulse Code Modulation*) sustava dolazi signal  $u_m(t) = 0,8 \sin(2\pi 2000t + \frac{\pi}{4})$ .

Uzimanje uzoraka izvodi se u trenucima  $t = kT_0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  i  $T_0 = 125 \mu s$ . Amplitude uzoraka nalaze se u intervalu  $|u(t)| \leq 0,8$  i kvantiziraju u kvantizatoru (jednoliko kvantiziranje) s osam kvantizacijskih razina (Slika 3.4). Koder izvodi kodiranje uzoraka binarnim kodom. Odredite analitički oblik signala na izlazu iz dekodera (prijemnik!).



Slika 3.4

### Rješenje:

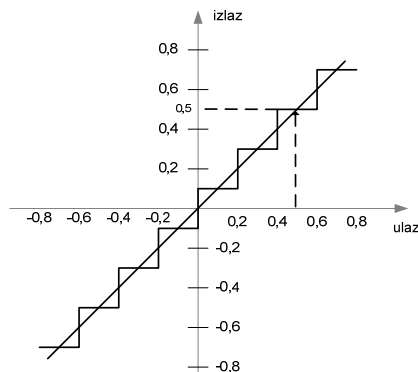
Ako uzmemo uzorke signala  $u_m(t) = 0,8 \sin(2\pi 2000t + \frac{\pi}{4})$  u trenucima  $t = kT_0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  i  $T_0 = 125 \mu s$ ,

odnosno frekvencijom uzorkovanja  $f_u = 8 \text{ kHz}$ , zabilježiti ćemo slijedeće vrijednosti signala (zbog periodičnosti signala navedene su samo prve četiri vrijednosti):

$$u_m(0) = u_m(T_0) = 0,565 \text{ V}$$

$$u_m(2T_0) = u_m(3T_0) = -0,565 \text{ V}$$

Kvantizator će preslikati dane uzorke u kvantizacijske razine  $+0,5 \text{ V}$  odnosno  $-0,5 \text{ V}$ , kao što i vidimo na sljedećoj slici.



Dakle, signal  $u_m(t)$  na izlazu iz kvantizatora jednak je:

$$u_m(t) = \begin{cases} 0,5 \text{ V} & \text{za } u_m(0) = u_m(T_0) \\ -0,5 \text{ V} & \text{za } u_m(2T_0) = u_m(3T_0) \end{cases}$$

Signal na izlazu iz dekodera (prijemnik) će biti oblika:

$$u'_m(t) = U' \sin\left(2\pi 2000t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Budući da, zbog pogreške kvantizacije, vrijedi da je u trenucima  $t = kT_0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  i  $T_0 = 125 \mu s$ ,

$u'_m = \pm 0,5 \text{ V}$ , dobivamo:

$$u'_m(0) = U' \sin\left(2\pi 2000t + \frac{\pi}{4}\right) = 0,5$$

$$U' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,5 \Rightarrow U' = 0,707$$

Dakle, signal na izlazu iz dekodera je oblika:

$$u'_m(0) = 0,707 \cdot \sin\left(2\pi 2000t + \frac{\pi}{4}\right) [\text{V}]$$

## Zaštitno kodiranje

*Zadatak-1:* Dan je kôd  $[k+1, k]$  s parnim paritetom.

a) Izračunajte sve kodne riječi kôda  $[4,3]$ !

b) Koje pogreške može detektirati ovakav kôd?

c) Izračunajte vjerojatnost nedetektiranih pogrešaka ( $p_{np}$ ), uz uvjet da se pogreške na jednom bitu pojavljuju s vjerojatnošću  $p_g = 0,04$ !

### Rješenje:

a) Kodne riječi kôda  $[4, 3]$  su:

0000	1001
0011	1010
0101	1100
0110	1111

b) Ovaj kôd može detektirati jednostruke i trostruke pogreške. U slučaju parnog broja pogrešaka, poslana kodna riječ bi prešla u neku od 8 kodnih riječi kôda i pogreške ne bi bile detektirane.

c) Vjerojatnost nedetektiranih pogrešaka  $p_{np}$  jednaka je zbroju vjerojatnosti dvostrukih i četverostrukih pogrešaka i iznosi:

$$p_{np} = \left(\frac{4}{2}\right) p_g^2 (1 - p_g)^2 + \left(\frac{4}{4}\right) p_g^4 (1 - p_g)^0 = 8,8 \cdot 10^{-3}$$

*Zadatak-2:* Dan je binarni kôd  $[6, 3]$  s matricom  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Da li je slijed  $[101010]$  kodna riječ?

b) Neka je kodna riječ dana u obliku  $[X11100]$ . Odredite  $X$ .

c) Pretpostavimo da je kodna riječ  $[001111]$  odaslana, a  $[001101]$  primljena. Odredite sindrom!

d) Ispišite sve kodne riječi u ovom kodu.

e) Koji je najmanji mogući broj pogrešaka koje jednu kodnu riječ prevode u drugu.

### Rješenje:

a) Ako je slijed  $[101010]$  kodna riječ, onda vrijedi  $[101010] \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$

Matrica  $\mathbf{H}$  je oblika:

$$\mathbf{H} = \left[ \mathbf{A}^T \mid \mathbf{I} \right]$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vidimo da je uvijek  $[101010] \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$  ispunjen i slijed  $[101010]$  je kodna riječ danog kôda.

b) Znamo da svaku kodnu riječ  $\mathbf{c}$  nekog kôda mora vrijediti  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ . Ako u gornji izraz uvrstimo  $\mathbf{c} = [11100]$ , s lijeve strane izraza dobit ćemo  $[X0X]$  iz čega zaključujemo da  $X$  mora biti jednak nuli.

c) U danom slučaju sindrom iznosi:

$$\mathbf{s} = [001101] \cdot \mathbf{H}^T = [001101] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [010]$$

d) Generirajuća matrica  $\mathbf{G}$  danog kôda je oblika

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ako sada uvrstimo sve kodirane poruke  $\mathbf{d}$ , od  $[000]$  do  $[111]$  u izraz  $\mathbf{c} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{G}$ , dobiti ćemo sve kodne riječi  $\mathbf{c}$  u ovom kodu:

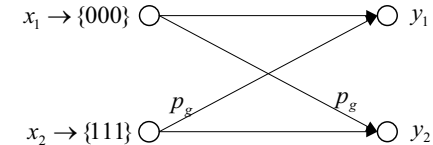
000000  
001111  
010011  
011100  
100101  
101010  
110110  
111001

e) Najmanji mogući broj pogrešaka koje jednu kodnu riječ prevode u drugu jednak je tri.

**Zadatak-3:** Dvije kodne riječi "000" i "111" koriste se za prijenos informacija preko diskretnog binarnog simetričnog kanala u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa  $p=0,2$ . Na prijamoj strani se kod dekodiranja koristi pravilo minimalne udaljenosti. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja. Također, odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja za slučaj binarnog kanala s brisanjem simbola u kojem je vjerojatnost brisanja  $p=0,2$ .

**Rješenje:**

a) Skicirajmo prvi kanal:



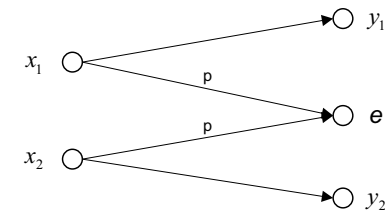
Slijed bitova na izlazu iz kanala će se dekodirati ovako:

<u>000</u>	<u>111</u>
001	101
010	110
100	011

Vjerojatnost pogrešnog kodiranja  $p_e$  iznosi:

$$p_e = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = 3p^2(1-p) + p^3 = 0,1040$$

b) Skicirajmo kanal s brisanjem simbola:



Vjerojatnost pogrešnog dekodiranja za slučaj binarnog kanala s brisanjem simbola  $p_e$  iznosi:

$$p_e = \frac{1}{2} \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = \frac{1}{2} \cdot p^3 = 0,0040$$

**Zadatak-4:** Mjerenjem je utvrđeno da u binarnom komunikacijskom kanalu djeluju smetnje koje mogu uzrokovati pogrešan prijenos od jednog bita u slijedu od najmanje 17 uzastopnih bita. Za zaštitu informacije uporabljen je Hammingov koder, a duljina zaštitnog kodiranog bloka prilagođena je uvjetima koji vladaju u kanalu.

Za informaciju zadanu s  $m_n$  binarnih elemenata:

$m_1$	$m_2$	$m_3...$		$m_n$
1	0	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1	....	1

- Odredite prvi zaštitni kodirani blok.
- Za koliko će se smanjiti ili povećati kodna brzina ako se zbog promjene u djelovanju smetnji duljina kodirane poruke postavi na 11 bita?

### Rješenje:

- Utvrđeno je da smetnje u kanalu mogu uzrokovati pogrešan prijenos jednog bita u slijedu od 17 bitova, odnosno na svakih 17 bitova prenesenih kanalom dolazi ili jedan ili nijedan pogrešan bit. Znamo da Hammingov koder može sigurno otkriti i ispraviti jednostruku pogrešku, te zaključujemo da kodna riječ može biti duljine najviše 1 bitova. Ako bi kodna riječ bila duga, npr. 18 bitova, postoji vjerojatnost da se u prijenosu dogode dvije pogreške i Hammingov kôd ih neće biti u stanju ispraviti. Dakle, za zaštitu informacije ćemo koristiti Hammingov koder [17,12], tj. kodna riječ će biti duljine 17 bitova i sastojat će se od 12 informacijskih i 5 zaštitnih bitova.

Znači prvi informacijski blok koji ćemo zaštititi je [101010110101].

Zaštitni bitovi kod kodne riječi kodirane Hammingovim kodom su postavljeni na pozicijama koje odgovaraju potencijama broja 2 (1, 2, 4, 8, 16,...) i dobivaju se kao paritetni bitovi određenih podgrupa informacijskih bitova poruke, kao što vidimo u izrazima dolje (u slučaju da nije drugačije naznačeno, pod „paritet“ se zapravo podrazumjeva parni paritet):

$$x_1 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 \oplus m_5 \oplus m_7 \oplus \dots = x_3 \otimes x_5 \otimes x_7 \otimes x_9 \otimes x_{11} \otimes \dots$$

$$x_2 = m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_6 \oplus m_7 \oplus \dots = x_3 \otimes x_6 \otimes x_7 \otimes x_{10} \otimes x_{11} \otimes \dots$$

$$x_4 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_8 \oplus m_9 \oplus m_{10} \oplus \dots m_{11} \otimes =$$

$$= x_5 \otimes x_6 \otimes x_7 \otimes x_{12} \otimes x_{13} \otimes x_{14} \otimes x_{15} \otimes \dots$$

$x_i$  označava  $i$ -ti bit kodne riječi, a  $m_i$   $i$ -ti informacijski bit poruke.

Kodirajmo sada tim postupkom zadani informacijski blok [101010110101]:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	$x_{16}$	$x_{17}$
—	—	1	—	0	1	0	—	1	0	1	1	0	1	0	—	1
<u>1</u>		1		0		0		1		1		0		0		1
	<u>0</u>	1			1	0			0	1			1	0		
			<u>1</u>	0	1	0					1	0	1	0		
							<u>0</u>	1	0	1	1	0	1	0		
															<u>1</u>	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1

- Kodna brzina  $R$  nekog koda jednaka je omjeru broja informacijskih bitova i ukupnog broja bitova u kodnoj riječi.

Kodna brzina koda (17,12) iznosi:  $R_1 = \frac{12}{17} = 0,7059 (70,59\%)$ .

Ako se duljina kodne riječi ograniči na 11 bitova, analizom možemo zaključiti da će se ona sastojati od 7 informacijskih i 4 zaštitna bita (zaštitni bitovi se nalaze na pozicijama 1, 2, 4 i 8, dakle ukupno ih ima četiri), tj. koristit ćemo kôd [11,7].

Kodna brzina koda [11,7] iznosi:  $R_1 = \frac{7}{11} = 0,6364 (63,64\%)$ .

Zaključujemo da se nakon postavljanja duljine kodne riječi na 11 bita kodna brzina smanjila za 0,0695 (6,95%) u odnosu na slučaj kada je duljina kodne riječi bila 17 bitova.

**Zadatak-5:** Slijed bita  $\mathbf{x}=[101010101]$  ulazi u Hammingov koder  $[15, 11]$  i nakon toga se prenosi prijenosnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita  $p_g=2 \times 10^{-3}$ .

- Odredite generirajuću matricu  $\mathbf{G}$ .
- Odredite izlazni slijed iz koda za dani ulazni slijed  $\mathbf{x}$ .
- Ako je primljena kodna riječ  $\mathbf{c}=[1111110000000]$ , odredite koja je kodna riječ poslana.
- Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja ( $p_{pd}$ ) na izlazu iz koda.

### Rješenje:

- Matrica provjere pariteta  $\mathbf{H}$  koda  $[15,11]$  je oblika:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz matrice provjere pariteta  $\mathbf{H}$  možemo dobiti generirajuću matricu  $\mathbf{G}$  koda  $[15,11]$  koja je oblika:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Izlazni slijed iz koda  $\mathbf{c}$  možemo dobiti tako da pomnožimo ulazni slijed  $\mathbf{x} = [101010101]$  s generirajućom matricom  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{c} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{G} = [101101001010101]$$

- Pomoću gore dobivene matrice provjere pariteta  $\mathbf{H}$  i možemo izračinati sindrom  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^T = [1110]$$

Budući da je sindrom  $\mathbf{s}$  jednak  $[1110]$ , odnosno 7, zaključujemo da se dogodila pogreška u prijenosu i to na sedmom bitu kodne riječi.

Dakle, poslana je kodna riječ  $[111111100000000]$ .

- Vjerojatnost pogrešnog dekodiranja ( $p_{pd}$ ) iznosi:

$$p_{pd} = 1 - \binom{15}{0} p_e^0 (1 - p_e)^{15} - \binom{15}{1} p_e^1 (1 - p_e)^{14} = 4,129 \cdot 10^{-4}$$

**Zadatak-6:** Ciklični kôd  $[7, k]$  opisan je generirajućim polinomom  $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ .

- Odredite generirajuću matricu  $\mathbf{G} = [\mathbf{I} | \mathbf{A}]$ .
- Odredite kodnu riječ koja počinje s  $[110]$ .
- Nacrtajte ciklički koder.

### Rješenje:

- Odredimo generirajuću matricu  $\mathbf{G}$  danog cikličnog koda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

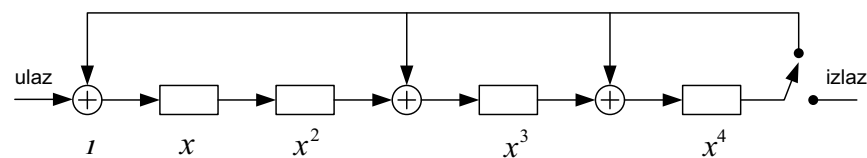
Dakle, matrica  $\mathbf{G}$  iznosi:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kod cikličkog koda  $[7,3]$  prva tri bita kodne riječi su informacijski bitovi te kodnu riječ možemo dobiti množenjem kodirane poruke  $[110]$  s generirajućom matricom  $\mathbf{G}$ :

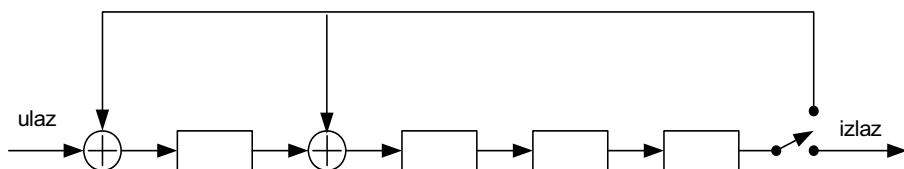
$$\mathbf{c} = [110] \cdot \mathbf{G} = [1101001]$$

- Ciklički koder za dani kôd izgleda ovako:



Zadatak-7: Na slici (Slika 4.1) dan je koder za ciklički kôd [15, k].

- Odredi generirajući polinom  $g(x)$ .
- Kodirajte slijed 10001001010.



Slika 4.1 Ciklički koder [15, k] u zadatku 7

### Rješenje:

- Iz slike kodera lako možemo očitati generirajući polinom  $g(x)=x^4+x+1$  i isto tako (budući da je stupanj polinoma jednak četiri) da se radi o cikličnom kodu [15,11].
- Kôd je [15,11] dakle prvi kodirani slijed dobit će se iz prvih 11 bitova ulaznog slijeda, tj. iz "10001001010".

Jedno od temeljnih svojstava cikličnih kodova je da zaštitne bitove neke kodne riječi možemo dobiti kao ostatak dijeljenja kodirane poruke (tj. informacijskih bitova) napisane u polinomnom obliku te pomnožene sa  $x^{n-k}$  ( $n$  - duljina kodirane poruke,  $k$  - broj informacijskih bitova) i generirajućeg polinoma  $g(x)$ , tj.

$$r(x) = \text{ost} \frac{x^{n-k} \cdot d(x)}{g(x)}$$

U našem slučaju to bi bilo:

$$\frac{x^{n-k} \cdot d(x)}{g(x)} = \frac{x^4(x^{10} + x^6 + x^3 + x)}{g(x)} = x^{10} + x^7 + x^4 + 1 \text{ uz ostatak } x+1$$

Vidimo da ostatak pri dijeljenju iznosi  $x+1$ , odnosno [0011] iz čega slijedi da je tražena kodna riječ  $c=[100010010100011]$ .

Zadatak-8: Potrebno je generirati ciklični kôd  $[n, k]=[6,2]$  koristeći jedan od niže navedenih generirajućih polinoma:

$$g(x)=x^3+x+1$$

$$g(x)=x^2+1$$

$$g(x)=x^4+x^2+1$$

- Odredite generirajuću matricu  $G=[I|A]$ .
- Napišite sve kodne riječi za dani ciklični kôd.
- Koliko pogrešaka može ispraviti dani kôd?
- Nacrtajte ciklični koder [6,2] za odabrani polinom  $g(x)$ .

### Rješenje:

- Znamo da je ciklični kôd [6,2], tj. kodna riječ sadrži četiri zaštitna bita, iz čega zaključujemo da generirajući polinom mora biti četvrtog stupnja, te je

$$g(x)=x^4+x^2+1.$$

Sada lako možemo pomoću generirajućeg polinoma odrediti generirajuću matricu  $G$  koja je oblika:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ciklični kôd je [6,2], dakle kodirane poruke su dvobitne i mogu biti 00,01,10 i 11.

Uz pomoć generirajuće matrice  $G$  lako možemo iz kodiranih poruka dobiti sve četiri kodne riječi  $c$  danog cikličnog koda.

$\underline{d}$	$\underline{c} = \underline{d} \cdot G$
00	000000
01	010101
10	101010
11	111111

- Za svaki linearni blok kôd vrijedi:

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

gdje je  $n$  duljina kodne riječi,  $k$  broj informacijskih bitova u kodnoj riječi, a  $t$  broj pogrešaka koje kôd može ispraviti.

Primijenimo ovaj uvjet:

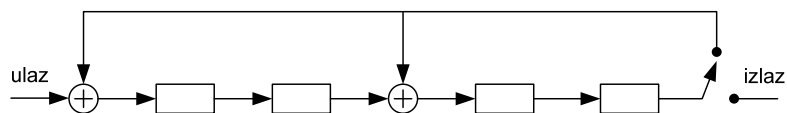
$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

$$2^{7-4} \geq \sum_{i=0}^t \binom{7}{i}$$

$$8 \geq \binom{7}{0} + \binom{7}{1} = 1 + 7 = 8$$

Iz gornjeg proračuna možemo vidjeti da dani kôd može ispraviti najviše jednu pogrešku.

d) Ciklični koder danog koda izgleda ovako:



## Entropijsko kodiranje

*Zadatak-1:* Markovljevo izvorište definirano matricom prijelaznih vjerojatnosti,  $[p(x_j/x_i)]$ , generira simbole iz skupa simbola  $X = \{a, b, c\}$ .

$$[p(x_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$$

- Optimalno kodirajte binarnim kodom (Huffman!) sve parove simbola.
- Odredite srednju duljinu kodne riječi.
- Provjerite je li zadovoljena Kraftova nejednakost za dobiveni skup kodnih riječi.

### Rješenje:

Rješavajući sustav jednažbi

$$p_a = 0,8p_a + 0,3p_b + 0,2p_c$$

$$p_b = 0,1p_a + 0,4p_b + 0,2p_c$$

$$p_c = 0,1p_a + 0,3p_b + 0,6p_c$$

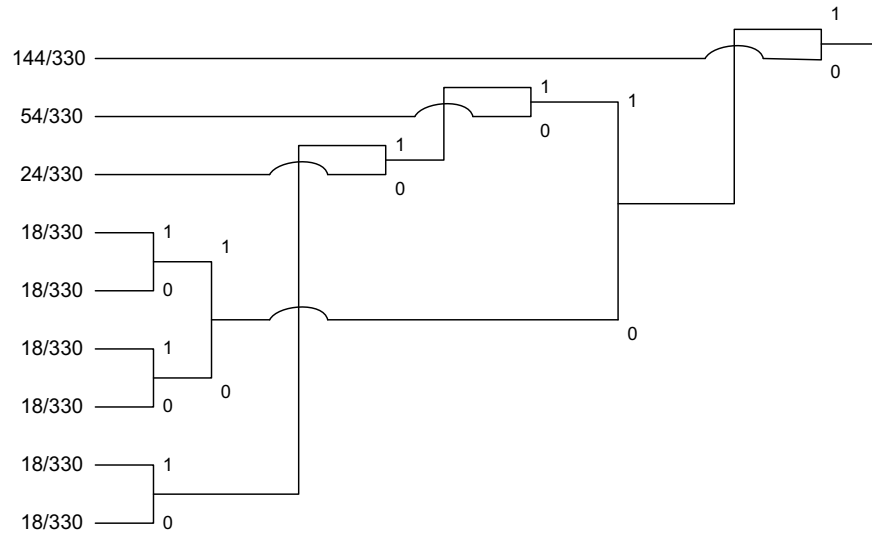
Dobivamo vjerojatnosti pojavljivanja simbola na izvorištu, tj.  $p_a = 18/33 = 6/11$ ,  $p_b = 6/33 = 2/11$ ,

$$p_c = 9/33 = 3/11.$$

Matrica združenih vjerojatnosti pojavljivanja simbola je:

$$[p(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{144}{330} & \frac{18}{330} & \frac{18}{330} \\ \frac{18}{330} & \frac{24}{330} & \frac{18}{330} \\ \frac{18}{330} & \frac{18}{330} & \frac{54}{330} \end{bmatrix}$$

a) Postupak kodiranja dan je na slici:



Iz grafa sa slike očitavamo:

$p_i(x_i, y_j) = p_i$	Kodna riječ	$l_i$
144/330	0	1
54/330	110	3
24/330	1110	4
18/330	1011	4
18/330	1010	4
18/330	1001	4
18/330	1000	4
18/330	11111	5
18/330	11110	5

b)  $L = 2,636 \text{ bit/simbol}$

c) Lako se pokazuje da vrijedi:  $\sum_{i=1}^9 2^{-l_i} \leq 1$ .

**Zadatak-2:** Slijed simbola s vjerojatnostima (u %) pojavljivanja  $\{8.1, 11.3, 8.6, 6, 9.8, 8.5, 3.1, 13.5, 6.3, 6, 9.1, 9.7\}$  kodirajte dabitima (kvaternarnim simbolima) tako da **srednja duljina kodne riječi bude minimalna**. Izračunajte srednju duljinu kodne riječi (u dabitima) i efikasnost koda. Odredite za koliko se smanji ili poveća efikasnost koda ovim kodiranjem u odnosu na kodiranje istog skupa simbola binarnim kodom?

### Rješenje:

Prilikom kodiranja u bilo kojoj drugoj bazi koja je različita od 2, potrebno je provjeriti da li imamo dovoljan broj simbola u cilju ispravnog provođenja algoritma kodiranja. Ako je broj simbola nedovoljan tada je potrebno dodati određeni broj simbola (s vjerojatnošću pojavljivanja 0) u postojeći skup u cilju provođenja kodiranja.

Prvo treba proračunati slijedeće:

$$k' = \left\lceil \frac{N-1}{B-1} \right\rceil \text{ i } N' = k'(B-1) + 1, \quad (*)$$

gdje je  $N$  broj simbola, a  $B$  baza u kojoj se kodiranje provodi. Ako je  $N' - N \neq 0$  tada je potrebo u postojeći skup dodati još  $N' - N$  simbola s vjerojatnošću pojavljivanja 0. U protivnom, kada je  $N' - N = 0$  kodiranje možemo provesti bez dodavanja.

Postavlja se pitanje kako smo došli do formule (\*). Odgovor ćemo dati kroz dva jednostavna primjera. Neka je baza,  $B$ , u kojoj treba provesti kodiranje 3. Tada, ako je broj simbola  $N = 3, 5, 7, 9, \dots$  kodiranje je moguće provesti bez dodavanja novih simbola. Za sve druge vrijednosti bit će potrebno dodati određeni broj simbola, s vjerojatnošću pojavljivanja 0, u postojeći skup. Nadalje, zapišimo za dani slijed  $(3, 5, 7, 9, \dots)$  brojeve koji su za jedan manjih od navedenih, tj. dobivamo  $(2, 4, 6, 8, \dots)$  ili:

$N$		3		5		7		9	...
$N'$	2		4		6		8		...
$N' = k(B-1), k = 1, 2, \dots$									

Uočavamo, iz prethodne tablice, da bi smo kodirali u bazi 3 ( $B = 3$ ) mora biti zadovoljeno sljedeće:  $k(B-1) \geq (N-1)$ ,

$k \in \mathbb{N}$  ili  $k = \left\lceil \frac{N-1}{B-1} \right\rceil$ . Kad odredimo najmanji  $k$  (označimo ga s  $k'$ ) za koji je prethodna nejednakost zadovoljena

ostaje nam da nađemo novi broj simbola ( $N' = k(B-1) + 1$ ) za koji kodiranje moguće provesti. Razlika  $N' - N$  određuje broj simbola koje treba dodati u postojeći skup simbola u cilju ispravnog provođenja postupka kodiranja.

Potpuno ista zakonitost vrijedi za  $B = 4$ .

$N$		4		7		10		13	...
$N'$	3		6		9		12		...
$N' = k(B-1), k = 1, 2, \dots$									

Uočavamo, iz prethodne tablice, da bi smo kodirali u bazi 4 ( $B = 4$ ) mora biti zadovoljeno sljedeće:  $k(B-1) \geq (N-1)$ ,

$k \in \mathbb{N}$  ili  $k = \left\lceil \frac{N-1}{B-1} \right\rceil$ . Vidimo da smo došli do istog matematičkog izraza kao i za bazu 3. Općenito gledano, potpuno isti zaključci vrijede za bilo koju drugu bazu.

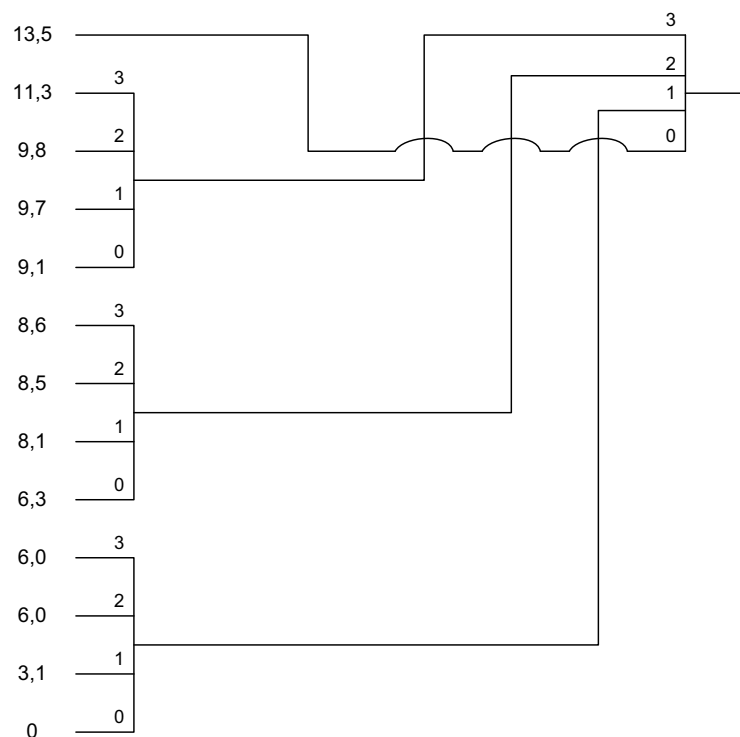
U našem zadatku:

$$k' = \left\lceil \frac{12-1}{4-1} \right\rceil = 4 \text{ i } N' = 4(4-1) + 1 = 13.$$

Dakle, potrebno je dodati još jedan simbol s vjerojatnošću pojavljivanja 0.



Postupak kodiranja dan je na slici:



Iz grafa sa slike očitavamo:

$p_i$	Kodna riječ	$l_i$
13,5	0	1
11,3	33	2
9,8	32	2
9,7	31	2
9,1	30	2
8,6	23	2
8,5	22	2
8,1	21	2
6,3	20	2
6,0	13	2
6,0	12	2
301	11	2

Efikasnost koda definira se kao  $\varepsilon_B = \frac{H(X)}{L}$ , gdje je B baza u kojoj je provedeno kodiranje.

$$\text{Za naš zadatak } \varepsilon_B = \frac{H(X)}{L} = 0,9408 \text{ uz } L = \sum_{i=1}^{12} p_i l_i = 1,8650 \frac{\text{dibita}}{\text{simbolu}} \text{ i } H(X) = \sum_{i=1}^{12} p_i \log_4 p_i =$$

$$= 1,7546 \frac{\text{dibita}}{\text{simbolu}}$$

Za slučaj kodiranja u bazi 2 dobivamo:

$p_i$	Kodna riječ	$l_i$
13,5	101	3
11,3	011	3
9,8	010	3
9,7	001	3
9,1	1111	4
8,6	1110	4
8,5	1101	4
8,1	1100	4
6,3	1001	4
6,0	1000	4
6,0	0001	4
301	0000	4

Efikasnost koda je:

$$\varepsilon_2 = \frac{H(X)}{L} = 0,9865 \text{ uz } L = \sum_{i=1}^{12} p_i l_i = 3,5570 \frac{\text{dibita}}{\text{simbolu}} \text{ i } H(X) = \sum_{i=1}^{12} p_i \log_2 p_i = 3,5091 \frac{\text{dibita}}{\text{simbolu}}.$$

Vidimo da se efikasnost smanji za slučaj kodiranja s bazom 4.

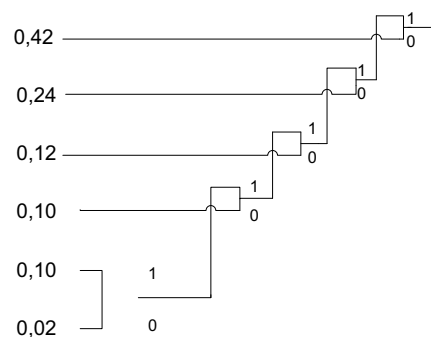
Zadatak-3: Dan je skup simbola sa sljedećim vjerojatnostima pojavljivanja:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)=p_i$	0,24	0,42	0,10	0,12	0,10	0,02

Optimalno kodirajte dani skup simbola binarnim kodom tako da je srednja duljina kodne riječi minimalna (Huffman!). Odredite koliko mora biti trajanje binarnih simbola "0" i "1" tako da je prosječan broj simbola koje se prenesu komunikacijskim kanalom u jednoj sekundi 400.

### Rješenje:

Kodirajmo zadane simbole:



Dobivamo:

$p_i$	Kodna riječ	$l_i$
0,42	0	1
0,24	10	2
0,12	110	3
0,10	1110	4
0,10	1111	5
0,02	11110	5

Srednja duljina kodne riječi  $L = 2,26$  bit/simbol.

Dakle, prosječan broj bitova koji se prenesu komunikacijskim kanalom u jednoj sekundi je:

$$\bar{v} = 400 \text{ simbol/s} = 400 \text{ simbol/s} \cdot 2,26 \text{ bit/simbol} = 904 \text{ bit/s}$$

Te je trajanje binarnih simbola „0“ i „1“ jednako:

$$T = \frac{1}{v} = 1,1 \text{ ms}$$

Napomena: Da smo simbole kodirali Shannon-Fanoovom metodom, rješenje bi izgledalo ovako:

$x_i$	$p(x_i)$	$l_i$
$x_2$	0,42 <u>0</u>	1
$x_1$	0,24 1 <u>0</u>	2
$x_4$	0,12 1 1 0 <u>0</u>	4
$x_3$	0,10 1 1 <u>0</u> 1	4
$x_5$	0,10 1 1 1 <u>0</u>	4
$x_6$	0,02 1 1 1 1	4

Uočite da se srednja duljina kodne riječi  $L$  nije promjenila, te time ni ostale vrijednosti tražene u zadatku.

Zadatak-4: Mirna digitalizirana slika s bojama A, B, C,..., M opisana je tablicom:

$(x_i)$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
$(f_i)$	8000	1700	1400	1800	7000	4500	4500	5000	8000	2500	3000	3200	3800

$x_i$  - boja,  $f_i$  – frekvencija pojavljivanja pojedine boje

a) Odredite optimalni binarni kôd za danu sliku (Huffman!).

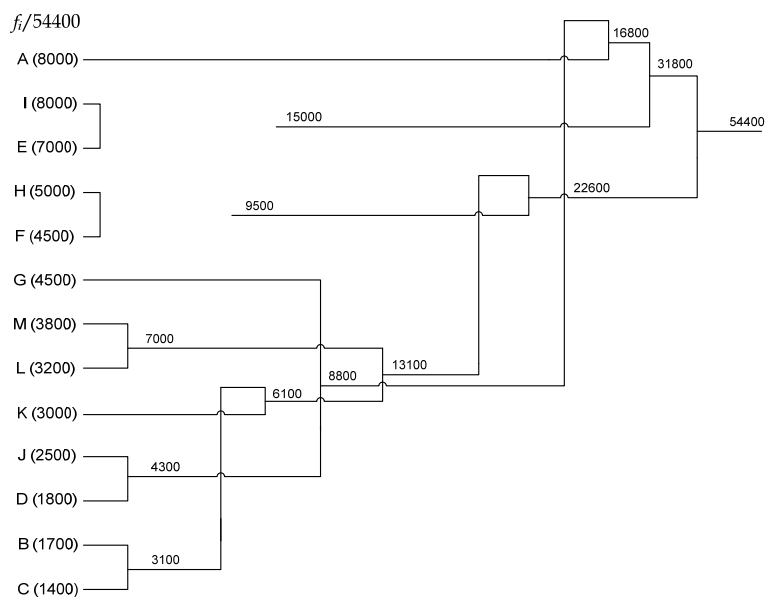
b) Odredite vrijeme potrebno za prijenos optimalno kodirane slike između dva računala koja su povezana modemsom vezom 33600 bit/s.

### Rješenje:

Zbrajanjem frekvencija pojavljivanja boja možemo dobiti ukupnu frekvenciju pojavljivanja boja (54400), a zatim i vjerojatnosti pojavljivanja pojedine boje, tj.

$p(A) = 8000/54400 = 0,1474$	$p(H) = 0,0919$
$p(B) = 0,0313$	$p(I) = 0,1471$
$p(C) = 0,0257$	$p(J) = 0,0460$
$p(D) = 0,0331$	$p(K) = 0,0551$
$p(E) = 0,1287$	$p(L) = 0,0588$
$p(F) = 0,0827$	$p(M) = 0,0699$
$p(G) = 0,1287$	

a) Huffmanov kôd:



Dobivamo:

simbol	kodna riječ	$l_i$
A	110	3
I	101	3
E	100	3
H	001	3
F	000	3
G	1111	4
M	0111	4
L	0110	4
K	0100	4
J	11101	5
D	11100	5
B	01011	5
C	01010	5

Ukupan broj bitova optimalno kodirane slike je jednak:

$$I(x) = 8000 \cdot 3 + 8000 \cdot 3 + 7000 \cdot 3 \dots = 192500 \text{ bita}$$

b) Vrijeme potreno za prijenos optimalno kodirane slike modemsom vezom iznosi:

$$t = \frac{I(x)}{C} = \frac{192500 \text{ bit}}{33600 \frac{\text{bit}}{\text{s}}} \approx 5,7292 \text{ s}$$

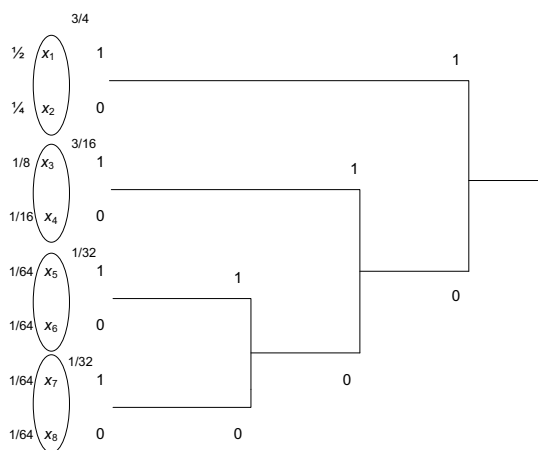
**Zadatak-5:** Mirna digitalizirana slika zadana je histogramom:

boja ( $x_i$ )	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
frekvencija pojavljivanja	4096	2048	1024	512	128	128	128	128

Optimalno kodiranje slike (Huffman, binarni kôd) provedeno je tako da je srednja duljina kodne riječi minimalna i niti jedna kodna kompleksija nije dulja od četiri bita. Odredite vrijeme potrebno za prijenos optimalno kodirane slike između dva računala koja su povezana modemsom vezom (56000 bit/s).

### Rješenje:

Da bi zadovoljili uvjete zadatka (niti jedan kodna iječ nije dulja od četiri bita) potrebno je više simbola tretirati kao grupu čija je vjerojatnost pojavljivanja jednaka sumi vjerojatnosti pojavljivanja simbola. Na ovaj način smanjujemo broj simbola koje treba kodirati, a time i duljinu kodnih riječi. Nadalje, grupe kodiramo optimalno, a simbole unutar grupe ravnomjerno.



$x_i$	kodna riječ	$l_i$
$x_1$	11	2
$x_2$	10	2
$x_3$	011	3
$x_4$	010	3
$x_5$	0011	4
$x_6$	0010	4
$x_7$	0001	4
$x_8$	0000	4

Broj bitova slike jednak je:

$$I(x) = 4096 \cdot 2 + 2048 \cdot 2 + \dots + 128 \cdot 4 = 18944 \text{ bita}$$

Vrijeme potrebno za prijenos slike iznosi:

$$t = \frac{18944}{56000} \approx 0,3382 \text{ s}$$

**Zadatak-6:** Neka je dano diskretno bezmemorijsko izvorište koje generira simbole  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Nad danim skupom simbola provedeno je optimalno kodiranje kako je to predloženo u tablici (Tablica 5.1). Generirana su četiri različita koda.

- Provjerite je li zadovoljena Kraftova nejednakost za svaki kôd?
- Koje se od navedenih kodnih kompleksija mogu jednoznačno dekodirati, a koje ne i zašto?

**Tablica 5.1**

$x_i$	kôd A	kôd B	kôd C	kôd D
$x_1$	00	0	0	0
$x_2$	01	10	11	100
$x_3$	10	11	100	110
$x_4$	11	110	110	111

### Rješenje:

a)

$$\text{Kôd A: } K = \sum_{i=1}^4 2^{-n_i} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$\text{Kôd B: } K = \sum_{i=1}^4 2^{-n_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} > 1$$

$$\text{Kôd C: } K = \sum_{i=1}^4 2^{-n_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

$$\text{Kôd D: } K = \sum_{i=1}^4 2^{-n_i} = \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{8} < 1$$

- b) Kodovi A i D su „čisti“ prefiksni kodovi i mogu se jednoznačno dekodirati. Kôd B ne može se jednoznačno dekodirati. Na primjer, kodna riječ 11 je prefiks od kodne riječi 110. Kôd C ne može se jednoznačno dekodirati. Na primjer, binarni slijed 0110110 može se dekodirati kao  $x_1 x_2 x_1 x_4$  ili  $x_1 x_4 x_4$ .

**Napomena:** Kraftova nejednakost određuje minimalne duljine kodnih poruka potrebnih da bi se konstruirao prefiksni kôd.

*Zadatak-7:* Neka je dana slučajna varijabla  $X$  s  $m$  jednako vjerojatnih ishoda. Odredite za koje vrijednosti varijable  $m$  je srednja duljina kodne riječi ( $L$ ) jednaka entropiji  $H(X)$ .

**Napomena:** Kodiranje je provedeno Huffmanovim kodom.

### Rješenje:

Iz uvjeta zadatka dobivamo:

$$\sum_{i=1}^m p_i \cdot l_i = - \sum_{i=1}^m p_i \cdot \log_2 p_i$$

Svi ishodi varijable  $X$  su jednako vjerovatni, tj.:

$$p_i = 1/m, i = 1, \dots, m \quad l_1 = l_2 = \dots = l_m = l$$

Dakle vrijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \cdot l_i &= - \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} \\ \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \cdot l_i &= - \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \cdot \log_2 m \\ m \cdot \frac{1}{m} \cdot l &= m \cdot \frac{1}{m} \cdot \log_2 m \end{aligned}$$

Te je  $m=2^l, l \in \mathbb{N}$  ili  $m=2^i, i \in \mathbb{N}$ .

*Zadatak-8:* Dan je skup simbola  $\mathbf{X} = \{s, w, i, m, \_ \}$  s vjerojatnostima pojavljivanja  $p_s = 0.1, p_m = 0.1, p_i = 0.2, p_w = 0.1, p_s = 0.5$ . Optimalno kodirajte poruku "swiss\_miss" koristeći aritmetičko kodiranje.

### Rješenje:

Simbol	Frekvencija pojavljivanja	Vjerojatnosti pojavljivanja	Kumulativni podskupovi, $[D_s, G_s)$
S	5	0.5	[0, 0.5)
W	1	0.1	[0.5, 0.6)
I	2	0.2	[0.6, 0.8)
M	1	0.1	[0.8, 0.9)
_	1	0.1	[0.9, 1)

Kodirajmo zadanu poruku:

$$D = 1; \quad G = 1$$

$$\begin{aligned} S: \quad D' &= D + (G-D) D_s = 0 + (1-0) 0 = 0 \\ G' &= D + (G-D) G_s = 0 + (1-0) 0.5 = 0.5 \\ D &= 0 \\ G &= 0.5 \\ W: \quad D' &= 0 + (0.5-0) 0.5 = 0.25 \\ G' &= 0 + (0.5-0) 0.6 = 0.3 \\ D &= 0.25 \\ G &= 0.3 \\ I: \quad D' &= 0.25 + (0.3-0.25) 0.6 = 0.28 \\ G' &= 0.25 + (0.3-0.25) 0.8 = 0.29 \\ D &= 0.28 \\ G &= 0.29 \\ S: \quad D' &= 0.28 + (0.29-0.28) 0 = 0.28 \\ G' &= 0.28 + (0.29-0.28) 0.5 = 0.285 \\ D &= 0.28 \\ G &= 0.285 \\ S: \quad D' &= 0.28 + (0.285-0.28) 0 = 0.28 \\ G' &= 0.28 + (0.285-0.28) 0.5 = 0.2825 \\ D &= 0.28 \\ G &= 0.2825 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-: \quad D' &= 0.28 + (0.2825 - 0.28) \cdot 0.9 = 0.28225 \\
G' &= 0.28 + (0.2825 - 0.28) \cdot 1 = 0.2825 \\
D &= 0.28225 \\
G &= 0.2825 \\
M: \quad D' &= 0.28225 + (0.2825 - 0.28225) \cdot 0.8 = 0.28245 \\
G' &= 0.28 + (0.2825 - 0.28225) \cdot 0.9 = 0.282475 \\
D &= 0.28245 \\
G &= 0.282475 \\
I: \quad D' &= 0.28245 + (0.282475 - 0.28245) \cdot 0.6 = 0.282465 \\
G' &= 0.28248 + (0.282475 - 0.28245) \cdot 0.8 = 0.28247 \\
D &= 0.282465 \\
G &= 0.28247 \\
S: \quad D' &= 0.282465 + (0.28247 - 0.282465) \cdot 0 = 0.282465 \\
G' &= 0.282465 + (0.28247 - 0.282465) \cdot 0.5 = 0.2824655 \\
D &= 0.282465 \\
G &= 0.2824655 \\
S: \quad D' &= 0.282465 + (0.2824655 - 0.282465) \cdot 0 = 0.282465 \\
G' &= 0.282465 + (0.2824655 - 0.282465) \cdot 0.5 = 0.28246525 \\
D &= 0.282465 \\
G &= 0.28246525
\end{aligned}$$

Dakle, rješenje je bilo koji broj iz intervala  $[0.282465, 0.28246525]$ .

*Zadatak-9:* Dan je skup simbola  $\mathbf{X} = \{1, 2, 3\}$  s vjerojatnostima pojavljivanja  $p_1 = 0.8$ ,  $p_2 = 0.02$  i  $p_3 = 0.18$ . Dekodirajte primljenu kodiranu poruku 0.772352 duljine 4 simbola koja je kodirana aritmetičkim kodom.

**Rješenje:**

Simbol	Vjerojatnosti pojavljivanja	Kumulativni podskupovi, $[D_s, G_s)$
1	0.8	$[0, 0.8)$
2	0.02	$[0.8, 0.82)$
3	0.18	$[0.82, 1)$

Dekodiranje poruke kodirane aritmetičkim kodom se provodi tako da se računaju pripadni intervali za svaki simbol i provjerava kojem intervalu kodirana poruka pripada.

Postupak se ponavlja onoliko puta koliko je poruka duga.

$L = 0.772352 \Rightarrow$  očito je da kodirana poruka pripada intervalu  $[0, 0.8)$ , te je prvi simbol poruke '1'.

$$D = 0; \quad G = 0.8$$

$$\begin{aligned}
1: \quad D' &= D + (G - D) \cdot D_s = 0 + (0.8 - 0) \cdot 0 = 0 \\
G' &= D + (G - D) \cdot G_s = 0 + (0.8 - 0) \cdot 0.8 = 0.64 \\
2: \quad D' &= 0 + (0.8 - 0) \cdot 0.8 = 0.64 \\
G' &= 0 + (0.8 - 0) \cdot 0.82 = 0.6560 \\
3: \quad D' &= 0 + (0.8 - 0) \cdot 0.82 = 0.6560 \\
G' &= 0 + (0.8 - 0) \cdot 1 = 0.8
\end{aligned}$$

Vidimo da kodirana poruka pripada podintervalu trećeg simbola, tj. drugi simbol poruke je '3'.

$$D = 0.6560; \quad G = 0.8$$

$$\begin{aligned}
1: \quad D' &= 0.6560 + (0.8 - 0.6560) \cdot 0 = 0.6560 \\
G' &= 0.6560 + (0.8 - 0.6560) \cdot 0.8 = 0.7712 \\
2: \quad D' &= 0.6560 + (0.8 - 0.6560) \cdot 0.8 = 0.7712 \\
G' &= 0.6560 + (0.8 - 0.6560) \cdot 0.82 = 0.7741
\end{aligned}$$

Treći simbol poruke je simbol '2'.

$$D = 0.7712; \quad G = 0.7741$$

$$\begin{aligned}
1: \quad D' &= 0.7712 + (0.7741 - 0.7712) \cdot 0 = 0.7712 \\
G' &= 0.7712 + (0.7741 - 0.7712) \cdot 0.8 = 0.7735
\end{aligned}$$

I četvrti simbol poruke je '1', tj. poruke  $L = 1321$ .

**Zadatak-10:** Na izvoru se pojavljuju četiri simbola {1, 2, 3, 4}. Odnos vjerojatnosti pojavljivanja simbola je  $p_1:p_2:p_3:p_4=1:2:3:4$ . Slijed od 5 simbola kodiran je aritmetičkim kodom i dobivena je kodirana poruka (binarni zapis!):

$$(0.0011101)_2$$

a) Odredite prva četiri simbola iz kodiranog slijeda.

b) Kodirajte aritmetičkim kodom slijed od 4 simbola 2134.

### Rješenje:

Izračunajmo vjerojatnosti pojavljivanja i komulativne podskupove za dane simbole:

Simbol	Vjerojatnosti pojavljivanja	Komulativni podskupovi, $[D_s, G_s)$
1	0.1	$[0, 0.1)$
2	0.2	$[0.1, 0.3)$
3	0.3	$[0.3, 0.6)$
4	0.4	$[0.6, 1)$

a) Kodirana poruka  $L$ , pretvorena u dekadski sustav, iznosi  $L = (0.2265625)_{10}$ .

Sada možemo dekodirati kodiranu poruku (zbog sličnosti s prethodnim zadatkom, postupak ćemo pisati skraćeno):

$L = 0.2265625 \Rightarrow [1, 0.3)$  – prvi simbol kodiranog slijeda je '2'.

$$\begin{array}{llll} 1: & D' = 0.1 & 2: & D' = 0.12 \\ & G' = 0.12 & & G' = 0.16 \end{array} \quad \begin{array}{llll} 3: & D' = 0.16 & 4: & D' = 0.22 \\ & G' = 0.22 & & G' = 0.3 \end{array}$$

$L = 0.2265625 \Rightarrow [0.22, 0.3)$  – drugi simbol kodiranog slijeda je '4'.

$$D = 0.22, G = 0.3$$

1:  $D' = 0.22, G = 0.228 \Rightarrow$  treći simbol kodiranog slijeda je '3'.

$$\begin{array}{llll} 1: & D' = 0.2200 & 2: & D' = 0.2208 \\ & G' = 0.2208 & & G' = 0.2224 \end{array} \quad \begin{array}{llll} 3: & D' = 0.2224 & 4: & D' = 0.2248 \\ & G' = 0.2248 & & G' = 0.2280 \end{array}$$

Četvrti simbol kodiranog slijeda je '4', tj. rješenje je 2414..

b) Kodirajmo slijed 2134:

$$D = 0; \quad G = 1$$

$$2: \quad D' = D + (G-D) D_s = 0 + (1-0) 0.1 = 0.1$$

$$G' = D + (G-D) G_s = 0 + (1-0) 0.3 = 0.3$$

$$D = 0.1$$

$$G = 0.3$$

$$1: \quad D' = 0.1 + (0.3-0.1) 0 = 0.10$$

$$G' = 0.1 + (0.3-0.1) 0.1 = 0.12$$

$$D = 0.10$$

$$G = 0.12$$

$$3: \quad D' = 0.10 + (0.12-0.10) 0.3 = 0.106$$

$$G' = 0.10 + (0.12-0.10) 0.6 = 0.112$$

$$D = 0.106$$

$$G = 0.112$$

$$4: \quad D' = 0.106 + (0.112-0.106) 0.6 = 0.1096$$

$$G' = 0.106 + (0.112-0.106) 1 = 0.1120$$

$$D = 0.1096$$

$$G = 0.1120$$

Rješenje je bilo koji broj iz intervala  $[0.1096, 0.1120)$ .

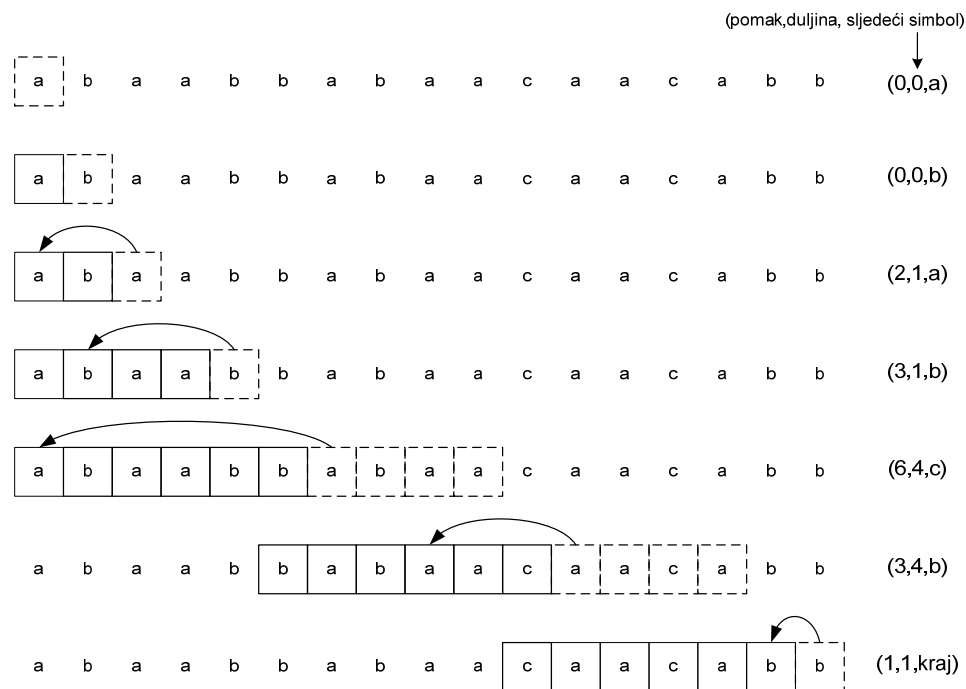
**Zadatak-11:** Koristeći algoritam LZ77 kodirajte poruku *abaabbabaacaacabb* uzimajući pri tome da je maksimalna duljina posmičnog prozora i prozora za kodiranje 6, odnosno 5 simbola.

### Rješenje:

Kodiranjem poruke *abaabbabaacaacabb* algoritmom LZ77 uz zadane parametre dobivamo:

(0,0,a), (0,0,b), (2,1,a), (3,1,b), (6,4,c), (3,4,b), (1,1,kraj).

Postupak kodiranja



### Legenda:

posmični prozor

prozor za kodiranje

**Zadatak-12:** Uzimajući polazni rječnik *D* gdje je  $D[0] = A$ ,  $D[1] = B$ ,  $D[2] = C$  i  $D[3] = D$  kodirajte poruku BABAAABAAA koristeći algoritam LZW.

### Rješenje:

Polazni rječnik:

$D[0] = A$   
 $D[1] = B$   
 $D[2] = C$   
 $D[3] = D$

Postupak kodiranja:

A1) Na početku radna riječ postaje prvi ulazni simbol  $\Rightarrow$  RadnaRiječ = "B"

A2) Zatim s ulaza uzimamo sljedeći simbol poruke  $\Rightarrow$  NoviSimbol = "A"

Radna riječ proširena s tim novim simbolom daje novu riječ:

RadnaRiječ + NoviSimbol = "BA"  $\Rightarrow$  nije u rječniku.

Ako nova riječ nije u rječniku, ona se dodaje u rječnik, a na izlaz kodera se šalje kôd za radnu riječ.  $D[4] =$  "BA" ("BA" dodan u rječnik), na izlaz se šalje 1 (kôd za simbol "B").

Simbol dobiven sa ulaza sada postaje radna riječ  $\Rightarrow$  RadnaRiječ = "A".

B1) RadnaRiječ = "A"

B2) NoviSimbol = "B"  $\Rightarrow$  RadnaRiječ + NoviSimbol = "AB"  $\Rightarrow$  nije u rječniku.

$D[5] =$  "AB", na izlaz se šalje 0 (kôd za simbol "A").

C1) RadnaRiječ = "B"

C2) NoviSimbol = "A"  $\Rightarrow$  RadnaRiječ + NoviSimbol = "BA"  $\Rightarrow$  postoji u rječniku.

Ako nova riječ postoji u rječniku, onda ona postaje radna riječ:

RadnaRiječ = "BA".

NoviSimbol = "A"  $\Rightarrow$  RadnaRiječ + NoviSimbol = "BAA"  $\Rightarrow$  nije u rječniku.

$D[6] =$  "BAA", na izlaz se šalje 4 (kôd za simbol "BA").

D1) RadnaRiječ = "A"

D2) NoviSimbol = "B"  $\Rightarrow$  RadnaRiječ = "AB"

NoviSimbol = "A"  $\Rightarrow$  RadnaRiječ + NoviSimbol = "ABA"  $\Rightarrow$  nije u rječniku.

$D[7] =$  "ABA", na izlaz se šalje 5 (kôd za simbol "AB").

E1) RadnaRiječ = "A"

E2) NoviSimbol = "A"  $\Rightarrow$  RadnaRiječ + NoviSimbol = "AA"  $\Rightarrow$  nije u rječniku.

$D[8] =$  "AA", na izlaz se šalje 0 (kôd za simbol "A").

D1) RadnaRiječ = "A"

D2) NoviSimbol = "A"  $\Rightarrow$  RadnaRiječ = "AA"

NoviSimbol = " ", na izlaz se šalje 8 (kôd za simbole "AA").

Kodna riječ je 1 0 4 5 0 8.

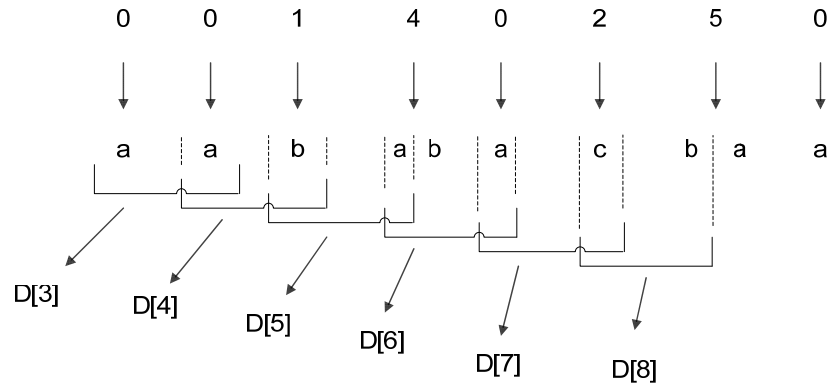


**Zadatak-13:** Uzimajući polazni rječnik  $D$  gdje je  $D[0] = a$ ,  $D[1] = b$  i  $D[2] = c$  dekodirajte kodiranu poruku 0 0 1 4 0 2 5 0 koristeći algoritam LZW.

### Rješenje:

Proces dekodiranja poruka kodiranih algoritmom LZW sastoji se od zamjenjivanja kodova pojedinih simbola samim simbolima i nadopunjavanju rječnika pri tome. Tako u zadanom primjeru prva dva simbola su nule. To znači ne sam da su prva dva simbola poruke „aa“, već i da je četvrti simbol rječnika „aa“, tj.  $D[3] = aa$ .

Dekodirajmo sada danu poruku:



Prošireni rječnik:

$D[3] = aa$	$D[6] = aba$
$D[4] = ab$	$D[7] = ac$
$D[5] = ba$	$D[8] = cb$

**Zadatak-14:** Uzimajući polazni rječnik  $D$  gdje je  $D[1] = r$ ,  $D[2] = a$ ,  $D[3] = b$ ,  $D[4] = o$  i  $D[5] = w$  dekodirajte kodiranu poruku 5 2 3 3 2 1 6 8 10 12 9 11 7 16 5 4 4 11 21 23 4 koristeći algoritam LZW.

### Rješenje:

Koristeći postupak opisan u prethodnom zadatku dobivamo rješenje: wabbarwabbarwabbarwaborwoorwoo.

Rječnik:

$D[6] = wa$
$D[7] = ab$
$D[8] = bb$
$D[9] = ba$
$D[10] = ar$
$D[11] = rw$
$D[12] = wab$
$D[13] = bba$
$D[14] = arw$
$D[15] = wabb$
$D[16] = bar$
$D[17] = rwa$
$D[18] = abb$
$D[19] = barw$
$D[20] = wo$
$D[21] = oo$
$D[22] = or$
$D[23] = rwo$
$D[24] = oor$
$D[25] = rwoo$

**Zadatak-15:** Uzimajući polazni rječnik  $D$  gdje je  $D[1] = a$  i  $D[2] = b$  kodirajte poruku ababababaaaab koristeći algoritam LZW. Dekodirajte kodiranu sekvencu koristeći isti polazni rječnik.

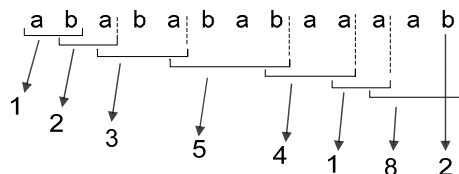
### Rješenje:

Polazni rječnik:

$$\begin{aligned} D[1] &= a \\ D[2] &= b \end{aligned}$$

Postupak kodiranja:

(Zbog velike sličnosti s prethodnim zadacima kodiranje nećemo detaljnije raspisivati.).



Prošireni rječnik:

$$\begin{aligned} D[3] &= ab & D[7] &= baa \\ D[4] &= ba & D[8] &= aa \\ D[5] &= aba & D[9] &= aab \\ D[6] &= abab \end{aligned}$$

Kodirana poruka glasi: 1 2 3 5 4 1 8 2.

## Dodatni zadaci

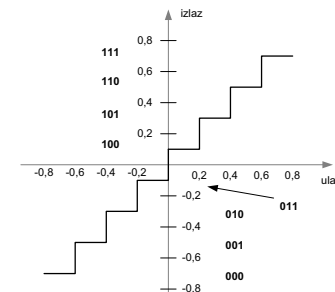
1. Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su sljedeće:  $p(x_1) = 0.4$ ,  $p(x_2) = 0.3$ ,  $p(x_3) = 0.2$  i  $p(x_4) = 0.1$ . Izračunajte količinu informacije koja se prenosi u poruci  $x_1x_2x_1x_3$ .

**Rješenje:**

$$p(x_1x_2x_1x_3) = 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.0096$$

$$I(x_1x_2x_1x_3) = -\log_2 0.0096 = 6.70 \text{ bit/poruka}$$

2. Signal  $u_m(t) = 0.8 \sin(2\pi 4000t + \frac{\pi}{4})$  [V] prigušen je za 5 dB. Odredite kodnu kompleksiju koja će izaći iz PCM (engl. *Pulse Code Modulation*) koda za uzorak signala uzet u trenutku  $t_0=0$  [s]. Amplitude uzoraka nalaze se u intervalu  $|u(t)| \leq 0.8$  [V] i kvantiziraju u kvantizatoru (jednoliko kvantiziranje) s osam kvantizacijskih nivoa (Slika 6.1). Koder izvodi kodiranje uzoraka binarnim kodom.



Slika 6.1

**Rješenje:**

$$u_m(t=0) = 0.5657 \text{ V}$$

Signal je prigušen, tj:

$$20 \log u_m - 20 \log u_m' = 5$$

$$20 \log \frac{u_m}{u_m'} = 5 \rightarrow u_m' = 0.3181 \text{ V}$$

Na izlazu iz PCM koda pojavljuje se sljed: 101

3. Analogni signal, širine prijenosnog pojasa od 10 kHz, uzorkuje se s minimalnom dozvoljenom frekvencijom uzorkovanja  $f_s$ , a potom kvantizira u kvantizatoru s  $L = 256$  razina. Odredite vrijeme trajanja ( $\tau$ ) jednog bita binarno-kodiranog signala na izlazu iz koda.

**Rješenje:**

$$B = 10 \text{ kHz}$$

$$f_s = 20 \text{ kHz} (\tau_s = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s})$$

$$L = 256$$

$$n = \text{broj bitova po uzorku}$$

$$n = \lceil \log_2 L \rceil = 8$$

$$n f_s \text{ binarnih simbola se odašilje u sekundi, tj. } R = n f_s$$

$$\tau = \frac{1}{R} = \frac{1}{n \cdot f_s} = \frac{\tau_s}{n} = \frac{5 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{8} = 6,25 \mu\text{s}.$$

4. Signal  $s(t) = \cos(200\pi t) + 2\cos(320\pi t)$  [V] idealno je uzorkovan s frekvencijom uzorkovanja  $f_s = 300$  Hz, a potom propušten kroz idealni nisko-propusni filter granične frekvencije  $f_g = 250$  Hz. Na kojim frekvencijama se nalaze komponente signala koje su "prošle" kroz filter?

**Rješenje:**

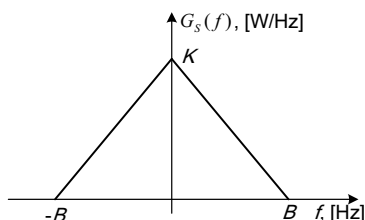
$$s(t) = \cos(2 \cdot 100 \cdot \pi \cdot t) + 2 \cdot \cos(2 \cdot 160 \cdot \pi \cdot t) [\text{V}]$$

$$f_s = 300 \text{ Hz}$$

$$\text{NP filter: } f_g = 250 \text{ Hz}$$

Komponente uzorkovanog signala koje su "prošle" kroz filter nalaze se na frekvencijama: 100-, 140-, 160-, i 200-Hz.

5. Na slici (Slika 6.2) predložena je spektralna gustoća snage signala  $s(t)$ . Odrediti srednju snagu signala.



Slika 6.2

**Rješenje:**

$$\begin{aligned} S &= \int_{-B}^B G_s(f) df = 2 \cdot \int_0^B \left( -\frac{k}{B} \cdot f + k \right) \cdot df = \\ &= 2 \cdot \left\{ -\frac{k}{B} \cdot \frac{f^2}{2} \Big|_0^B + k \cdot f \Big|_0^B \right\} = \\ &= 2 \cdot \left\{ -\frac{k}{B} \cdot B^2 + k \cdot B \right\} = -kB + 2kB = k \cdot B [\text{W}] \end{aligned}$$

6. Za zaštitu poruka u prijenosu uporabljen je Hammingov koder  $[n, k] = [7, 4]$ . Odredite sindrom,  $S(y')$ , za primljenu kodnu riječ  $y' = [1101110]$ .

**Rješenje:**

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y' = [1101110]$$

$$\text{Sindrom: } S(y') = y' \cdot \mathbf{H}^T = [1101110] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [001]$$

7. Dan je binarni kôd  $[n, k] = [6, 3]$  čije su kodne riječi oblika  $d_1 d_2 d_3 c_4 c_5 c_6$  i gdje su  $d_i$ -ovi i  $c_i$ -ovi bitovi poruke, odnosno, bitovi zaštite. Bitovi zaštite proračunavaju se na sljedeći način:

$$c_4 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3$$

$$c_5 = d_1 \oplus d_3$$

$$c_6 = d_2 \oplus d_3$$

Ako je primljena kodna riječ  $y' = [010111]$ . Odredite kodnu riječ koja je poslana.

**Rješenje:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y' = [010111]$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{A}^T | \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(y') = y' \cdot \mathbf{H}^T = [010] \rightarrow \text{pogreška na petom bitu. Poslana kodna riječ } y = [010101].$$

8. Slijed bita  $x = [1010101\dots]$  ulazi u Hammingov koder  $[n, k] = [7, 4]$  i nakon toga se prenosi prijenosnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita 0,004. Odredite za koliko se smanji vjerojatnost ispravnog dekodiranja slijeda  $x$  ako se umjesto Hammingovog koda kao zaštita uporabi paritet (parni!).

**Rješenje:**

$$p_1 = p_{\text{ISP}}(\text{HAMM}) = \binom{15}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{15} + \binom{15}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{14} = 9,9966 \cdot 10^{-1}$$

$$p_1 = p_{\text{ISP}}(\text{PARITET}) = \binom{12}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{12} = 9,8015 \cdot 10^{-1}$$

$$p_1 - p_2 = 0,01951$$

## Dodatni zadaci

**Zadatak-1:** (Kraftova nejednakost) Dan je skup simbola sa pripadnim vjerojatnostima:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$

Simboli su jednoznačno kodirani prefiksnim kodom. Ako je  $m = 6$  i ako su duljine kodnih riječi  $(l_1, l_2, \dots, l_6) = (1, 1, 2, 3, 2, 3)$ , odredite donju granicu za broj znakova abecede prefiksnog koda  $d$ .

**Izvor:** Thomas M. Cover, Joy A. Thomas: Elements Of Information Theory, Second Edition

**Rješenje:**

Za svaki prefiksni kod s abecedom od  $d$  simbola (baza koda) i duljinama kodnih riječi  $l_1, l_2, \dots, l_6, \dots, l_n$  vrijedi Kraftova nejednakost:

$$\sum_{i=1}^n d^{-l_i} \leq 1$$

Nakon uvrštavanja dobivamo:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{d^3} \leq \frac{1}{2}$$

Vidimo da je najmanji broj koji zadovoljava danu nejednakost 3, tj.  $d_{min} = 3$ .

\*\*\*

**Zadatak-2:** (Shannon-Fano) Prema danoj tablici koja opisuje izvorište, kodirajte simbole Shannon-Fanoovim kodom te dekodirajte niz '00011111011111000'.

**Izvor:** vlastiti primjer

Simbol	Frekvencija
a	15
b	7
c	6
d	6
e	5

**Rješenje:**

Prema sljedećem algoritmu:

1. Poredamo simbole prema padajućoj vjerojatnosti.
2. Podijelimo dobivenu listu simbola na dva dijela tako da razlika suma vjerojatnosti pojedinih dijelova bude minimalna.
3. Prvoj polovici liste pridijelimo binarnu znamenku 0, a drugoj 1.
4. Rekurzivno primjenjujemo korake 2 i 3 na obje polovice.

dobivamo:

a (15)	0	0	(15)
b (7)	0	1	(7)
c (6)	1	0	(6)
d (6)	1	1	0 (6)
e (5)	1	1	1 (5)

Sa slike očitavamo:

Simbol	$p_i$	Kodna riječ	$l_i$
a	15	00	2
b	7	01	2
c	6	10	2
d	6	110	3
e	5	111	3

Prosječna duljina kodne riječi je  $L = \sum_{i=1}^5 p_i l_i = 2.2821$ .

Shannon-Fanoov kod spada u skupinu prefiksnih kodova koji imaju sljedeće svojstvo:

*Niti jedna kraća kodna riječ ne pojavljuje se kao prefiks duže kodne riječi.*

Postupak dekodiranja je, dakle, jednoznačan:

'00011111011111000' → '00 01 111 10 111 110 00' → 'abeceda'

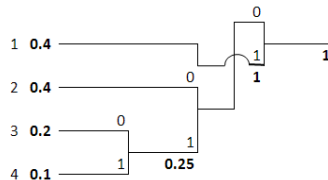
\*\*\*

**Zadatak-3: (Huffman)** Izvor šeste generira četiri različita simbola iz skupa simbola  $\{1, 2, 3, 4\}$  s vjerojatnostima pojavljivanja  $(0.4, 0.35, 0.2, 0.05)$  respektivno. Kodirajte optimalnim binarnim kodom koristeći Huffmanov postupak kodiranja!

Izvor: [http://en.wikipedia.org/wiki/Huffman\\_coding](http://en.wikipedia.org/wiki/Huffman_coding)

#### Rješenje:

Binarno stablo gradimo s lijeva na desno i to tako da simbole prvo poredamo prema vjerojatnosti pojavljivanja, a zatim odaberemo dva simbola sa najmanjom vjerojatnošću. Ta dva simbola spojimo tako da dobijemo jedan simbol sa vjerojatnošću pojavljivanja jednakoj sumi vjerojatnosti pojedinog simbola. Postupak se ponavlja sve dok ne preostane samo jedan simbol. Stablo tada čitamo unazad, tj. s desna na lijevo pridružujući granama stabla određeni bit.



Iz grafa sa slike čitamo:

Simbol	$p_i$	Kodna riječ	$l_i$
1	0.4	1	1
2	0.35	00	2
3	0.2	010	3
4	0.05	011	3

Obično se signal predstavljen sa četiri simbola kodira s 2 bita po simbolu. Entropija izvora ovdje je  $H(X) = \sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i = 1.7394 \text{ bit/symbol}$ . Ukoliko se za kodiranje koristi Huffman, prosječna duljina kodne riječi je  $L = \sum_{i=1}^4 p_i l_i = 1.85 \text{ bit/symbol}$  što se još uvijek razlikuje od teoretske granice ( $H(X) \leq L \leq H(X) + 1$ ) iz razloga što su vjerojatnosti simbola različite od negativnih potencija broja dva. Npr., ako bi vjerojatnosti pojavljivanja simbola bile  $\{0.5, 0.25, 0.125, 0.125\}$  respektivno, prosječna duljina kodne riječi izjednačava se s donjom granicom. Simbole kodiramo na sljedeći način:

Simbol	$p_i$	Kodna riječ	$l_i$
1	0.5	0	1
2	0.25	10	2
3	0.125	110	3
4	0.125	111	3

Entropija i prosječna duljina kodne riječi tada su jednake i iznose  $1.75 \text{ bit/symbol}$ .

\*\*\*

**Zadatak-4: (Huffman)** Izvor šeste generira osam različitih simbola iz skupa simbola  $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ . Generiran je niz 'cadgghedfebaabcbdaaafacdghgg'. Kodirajte optimalnim binarnim kodom koristeći Huffmanov postupak kodiranja te usporedite efikasnost kodiranja u odnosu na kodiranje ravnomjernim binarnim kodom!

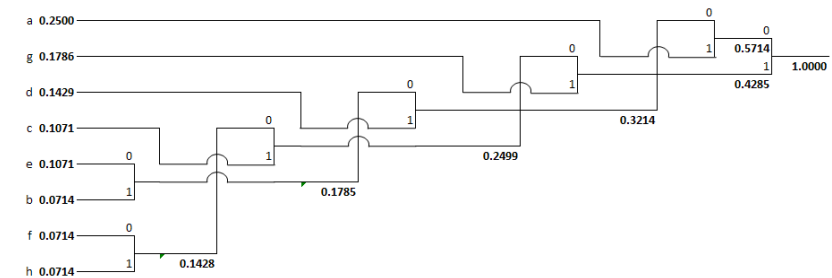
Izvor: [http://thalia.spec.gmu.edu/~pparis/classes/notes\\_101/node35.html](http://thalia.spec.gmu.edu/~pparis/classes/notes_101/node35.html) (modificiran)

#### Rješenje:

Računamo vjerojatnosti pojavljivanja simbola:

Simbol	$p_i$
a	$7/28 = 0.2500$
b	$2/28 = 0.0714$
c	$3/28 = 0.1071$
d	$4/28 = 0.1429$
e	$3/28 = 0.1071$
f	$2/28 = 0.0714$
g	$5/28 = 0.1786$
h	$2/28 = 0.0714$

Simbole kodiramo slično kao u prethodnom zadatku:



Iz grafa sa slike čitamo:

Simbol	$p_i$	Kodna riječ	$l_i$
a	0.2500	01	2
b	0.0714	0001	4
c	0.1071	101	3
d	0.1429	001	3
e	0.1071	0000	4
f	0.0714	1000	4
g	0.1786	11	2
h	0.0714	1001	4

Kodiramo li simbole ravnomjernim binarnim kodom dobivamo:

Simbol	$p_i$	Kodna riječ	$l_i$
a	0.2500	000	3
b	0.0714	001	3
c	0.1071	010	3

d	0.1429	011	3
e	0.1071	100	3
f	0.0714	101	3
g	0.1786	110	3
h	0.0714	111	3

Prosječna duljina Huffmanove kodne riječi je  $L = \sum_{i=1}^8 p_i l_i = 2.8929$ , dok ta ista veličina u drugom slučaju iznosi 3. Za ilustraciju, promatramo li niz od 100 simbola koji kodiramo ravnomjernim binarnim kodom (kod s fiksnom duljinom kodne riječi) bit će nam potrebno  $100 \times 3 = 300$  simbola. Kod Huffmanovog koda, za kodiranje zadanog niza od 100 simbola, potrebno nam je  $25 \times 2 + 7 \times 4 + 11 \times 3 + 14 \times 3 + 11 \times 4 + 7 \times 4 + 18 \times 2 + 7 \times 4 = 289$  simbola. Imamo, dakle uštedu od  $11/300 = 3.6\%$ . Ovisno o vrsti izvorišta i korištenom kodu, ušteda može biti znatno veća (za primjer vidjeti sljedeći zadatak). Nadalje, usporedimo li efikasnosti kodova  $\mathcal{E}_B = H(X)/L$ , za

Huffmanov dobivamo  $\mathcal{E}_B = 0.9856 = 98.56\%$ , a za ravnomjerni binarni kod  $\mathcal{E}_B = 0.9504 = 95.04\%$ .

\*\*\*

**Zadatak-5:** (Huffman) Izvorište generira simbole iz skupa od osam različitih simbola  $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  s vjerojatnostima pojavljivanja (3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1). Simboli se kodiraju Huffmanovim kodom. Tablica kodiranja nalazi se u nastavku. Odredite postotak uštede u odnosu na kodiranje istog skupa simbola s istim vjerojatnostima kodom fiksne duljine – ASCII 8-bitnim kodom.

**Izvor:** vlastiti primjer

Simbol	$p_i$	Kodna riječ	$l_i$
a	3	10	2
b	2	001	3
c	2	010	3
d	1	011	3
e	1	110	3
f	1	111	3
g	1	0000	4
h	1	0001	4

**Rješenje:**

Kodiramo li simbole navedenim Huffmanovim kodom, za proizvoljan niz od 12 simbola potrebno nam je  $3 \times 2 + 2 \times 2 \times 3 + 3 \times 1 \times 3 + 2 \times 1 \times 4 = 35$  bita. Za kodiranje tog istog niza znakova ASCII 8-bitnim kodom potrebno nam je  $12 \times 8 = 96$  bita. Upotrebom Huffmanovog koda postizemo uštedu od  $96 - 35/96 = 63.54\%$ .

\*\*\*

**Zadatak-6: (Lempel-Ziv-Welch)** Uz polazni rječnik naveden u nastavku kodirajte poruku 'TOBEORNOTTOBEORTOBEORNOT#' LZW algoritmom.

Izvor: <http://en.wikipedia.org/wiki/LZW>

D[0]=#  
D[1]=A  
D[2]=B  
D[3]=C  
...  
D[26]=Z

#### Rješenje:

Razlog učestalog ponavljanja slova i parova slova u ovom primjeru jest taj da bi ipak postigli određenu razinu kompresije na ovako kratkom nizu. Kada se LZW algoritam koristi za kodiranje i kompresiju pravih podataka, ponavljanje je rjeđe, tako da početni dijelovi poruke nemaju velik udio u komprimiranju. Međutim, daljnjim kodiranjem razina kompresije raste sa duljinom poruke.

\***Napomena:** T – radna riječ  
o – novi simbol

Ulaz	Izlaz	Proširenje rječnika
<u>T</u> OBEORNOTTOBEORTOBEORNOT#	20	D[27] = TO
O <u>B</u> EORNOTTOBEORTOBEORNOT#	15	D[28] = OB
BE <u>R</u> NOTTOBEORTOBEORNOT#	2	D[29] = BE
EO <u>R</u> NOTTOBEORTOBEORNOT#	5	D[30] = EO
OR <u>N</u> NOTTOBEORTOBEORNOT#	15	D[31] = OR
R <u>N</u> NOTTOBEORTOBEORNOT#	18	D[32] = RN
NO <u>T</u> TOBEORTOBEORNOT#	14	D[33] = NO
OT <u>T</u> OBEORTOBEORNOT#	15	D[34] = OT
T <u>T</u> OBEORTOBEORNOT#	20	D[35] = TT
TO <u>B</u> EORTOBEORNOT#	27	D[36] = TOB
BE <u>O</u> RTOBEORNOT#	29	D[37] = BEO
OR <u>T</u> OBEORNOT#	31	D[38] = ORT
TO <u>B</u> EORNOT#	36	D[39] = TOBE
EO <u>R</u> NOT#	30	D[40] = EOR
R <u>N</u> OT#	32	D[41] = RNO
OT <u>#</u>	34	D[42] = OT#
<u>#</u>	0	

Kodirana poruka glasi: 20 15 2 5 15 18 14 15 20 27 29 31 36 30 32 34 0.

\*\*\*

**Zadatak-7: (Lempel-Ziv-Welch)** Uz polazni rječnik naveden u nastavku dekodirajte kodiranu poruku '20 15 2 5 15 18 14 15 20 27 29 31 36 30 32 34 0' LZW algoritmom.

Izvor: <http://en.wikipedia.org/wiki/LZW>

D[0]=#  
D[1]=A  
D[2]=B  
D[3]=C  
...  
D[26]=Z

#### Rješenje:

Sve što nam je potrebno za dekodiranje je polazni rječnik, proširenja ionako rekonstruiramo sami prolazeći kroz postupak dekodiranja. Dekodiranje je kod LZW algoritma vrlo slično kodiranju.

Ulaz	Izlaz	Proširenje rječnika
<u>20</u> 15 2 5 15 18 14 15 20 27 29 31 36 30 32 34 0	T	
<u>15</u> 2 5 15 18 14 15 20 27 29 31 36 30 32 34 0	O	D[27] = TO
<u>2</u> 5 15 18 14 15 20 27 29 31 36 30 32 34 0	B	D[28] = OB
<u>5</u> 15 18 14 15 20 27 29 31 36 30 32 34 0	E	D[29] = BE
<u>15</u> 18 14 15 20 27 29 31 36 30 32 34 0	O	D[30] = EO
<u>18</u> 14 15 20 27 29 31 36 30 32 34 0	R	D[31] = OR
<u>14</u> 15 20 27 29 31 36 30 32 34 0	N	D[32] = RN
<u>15</u> 20 27 29 31 36 30 32 34 0	O	D[33] = NO
<u>20</u> 27 29 31 36 30 32 34 0	T	D[34] = OT
<u>27</u> 29 31 36 30 32 34 0	TO	D[35] = TT
<u>29</u> 31 36 30 32 34 0	BE	D[36] = TOB
<u>31</u> 36 30 32 34 0	OR	D[37] = BEO
<u>36</u> 30 32 34 0	TOB	D[38] = ORT
<u>30</u> 32 34 0	EO	D[39] = TOBE
<u>32</u> 34 0	RN	D[40] = EOR
<u>34</u> 0	OT	D[41] = RNO
<u>0</u>	#	

Poslana poruka je: 'TOBEORNOTTOBEORTOBEORNOT#'.

\*\*\*

**Zadatak-8:** (Lempel-Ziv '77) Koristeći algoritam LZ77 kodirajte poruku 'abrakadabradabrak'.  
Maksimalna duljina posmičnog prozora je 7, a prozora za kodiranje 6 simbola.  
Izvor: <http://www.binaryessence.com/dct/en000138.htm> (modificiran)

#### Rješenje:

Algoritam nosi ime LZ77 prema dvojici autora (Abraham Lempel i Jacob Ziv) te godini objavljivanja (1977.). LZ77 postiže kompresiju tako da za dio poruke koji je potrebno kodirati postavi pokazivač na podatke koji su već prošli kroz koder, odnosno dekodek uz uvjet da se ti podaci u određenoj mjeri poklapaju. U tu svrhu koriste se varijable *pomakUnazad*, *duljina* i *sljedeciSimbol*. *PomakUnazad* nam govori koliko se trebamo vratiti unazad da bismo pronašli niz koji se poklapa sa trenutnim nizom koji želimo kodirati, *duljina* koliko je taj niz dugačak, a *sljedeciSimbol* koji simbol dolazi nakon tog niza. Posmični prozor i prozor za kodiranje daju nam ograničenja koliko daleko unazad, odnosno unaprijed možemo gledati. Ako ne možemo pronaći podudaran niz, *pomakUnazad* i *duljinu* postavljamo na 0, a *sljedeciSimbol* postaje simbol na ulazu.

**\*Napomena:** (x, y, z)  
x – pomakUnazad  
y – duljina  
z – sljedeciSimbol

☐ posmični prozor  
☐ prozor za kodiranje

Ulaz	(x, y, z)
<input type="checkbox"/> a b r a k a d a b r a k a d a b r a k	(0, 0, a)
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b r a k a d a b r a k a d a b r a k	(0, 0, b)
<input type="checkbox"/> a b <input type="checkbox"/> r a k a d a b r a k a d a b r a k	(0, 0, r)
<input type="checkbox"/> a b r <input type="checkbox"/> a k a d a b r a k a d a b r a k	(3, 1, k)
<input type="checkbox"/> a b r a k <input type="checkbox"/> a d a b r a k a d a b r a k	(2, 1, d)
<input type="checkbox"/> a b r a k a d <input type="checkbox"/> a b r a k a d a b r a k	(7, 6, d)
a b r a k a d <input type="checkbox"/> a b r a k a d <input type="checkbox"/> a b r a k	(7, 5, kraj)

Kodiranjem poruke 'abrakadabradabrak' algoritmom LZ77 uz zadane parametre dobivamo:  
(0, 0, a) (0, 0, b) (0, 0, r) (3, 1, k) (2, 1, d) (7, 6, d) (7, 5, kraj).

\*\*\*

**Zadatak-9:** (Lempel-Ziv '77) Dekodirajte kodiranu poruku '(0, 0, a) (0, 0, b) (0, 0, r) (3, 1, k) (2, 1, d) (7, 6, d) (7, 5, kraj)' koristeći algoritam LZ77.  
Izvor: vlastiti primjer

#### Rješenje:

Značenje varijabli isto je kao u prethodnom zadatku i sve što trebamo učiniti je pravilno ih pročitati. Tako dobivamo:

Ulaz	Izlaz
<u>(0, 0, a)</u> (0, 0, b) (0, 0, r) (3, 1, k) (2, 1, d) (7, 6, d) (7, 5, kraj)	a
<u>(0, 0, b)</u> (0, 0, r) (3, 1, k) (2, 1, d) (7, 6, d) (7, 5, kraj)	ab
<u>(0, 0, r)</u> (3, 1, k) (2, 1, d) (7, 6, d) (7, 5, kraj)	abr
<u>(3, 1, k)</u> (2, 1, d) (7, 6, d) (7, 5, kraj)	abr ak
<u>(2, 1, d)</u> (7, 6, d) (7, 5, kraj)	abrak ad
<u>(7, 6, d)</u> (7, 5, kraj)	abrakad abrakad
<u>(7, 5, kraj)</u>	abrakadabrakad abrak abrakadabradabrak

Poslana poruka je 'abrakadabradabrak'.

\*\*\*



**Zadatak-10:** (Aritmetičko kodiranje) Dan je skup simbola  $X = \{a, e, i, o, u, !\}$  s vjerojatnostima pojavljivanja (0.2, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1) respektivno. Optimalno kodirajte poruku 'eaii!' koristeći aritmetičko kodiranje. Izvor: <http://www.stanford.edu/class/ee398a/handouts/papers/WittenACM87ArithmCoding.pdf>

**Rješenje:**

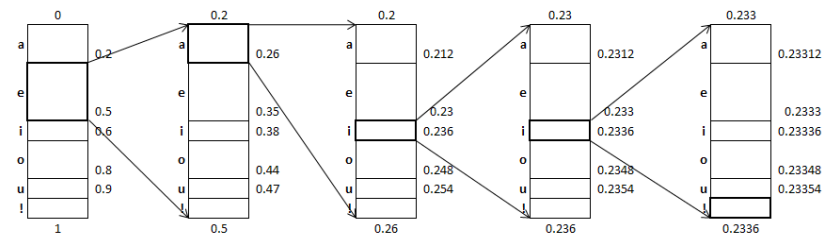
Simbol: $x_i$	$p(x_i)$	$[Ds, Gs)$
a	0.2	[0, 0.2)
e	0.3	[0.2, 0.5)
i	0.1	[0.5, 0.6)
o	0.2	[0.6, 0.8)
u	0.1	[0.8, 0.9)
!	0.1	[0.9, 1)

Inicijalno, interval kodera je [0, 1). Nakon prepoznavanja prvog simbola poruke (e) ograničavamo interval na [0.2, 0.5). Nadalje, nakon nailaska drugog simbola (a), novi interval sužujemo na njegovu prvu petinu, [0.2, 0.26), itd.. Formalno, intervale računamo na sljedeći način:

$$D' = D + (G - D)D_S$$

$$G' = D + (G - D)G_S$$

Primijenimo li gore navedeni postupak, dobivamo:



Dakle, rješenje je bilo koji broj iz intervala [0.23354, 0.2336).

\*\*\*

**Zadatak-11:** (Aritmetičko kodiranje) Dan je skup simbola  $X = \{a, e, i, o, u, !\}$  s vjerojatnostima pojavljivanja (0.2, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1) respektivno. Ako znate da simbol ! predstavlja kraj poruke, dekodirajte poruku kodiranu aritmetičkim kodom: '0.23354321'.

Izvor: vlastiti primjer

**Rješenje:**

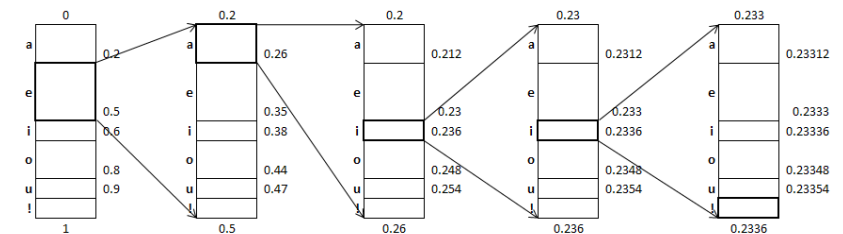
Simbol: $x_i$	$p(x_i)$	$[Ds, Gs)$
a	0.2	[0, 0.2)
e	0.3	[0.2, 0.5)
i	0.1	[0.5, 0.6)
o	0.2	[0.6, 0.8)
u	0.1	[0.8, 0.9)
!	0.1	[0.9, 1)

Pristupamo postupku dekodiranja koji se provodi tako da za svaki simbol računamo pripadni interval te provjeravamo kojem intervalu kodirana poruka pripada. S dekodiranjem stanemo kada nađemo na oznaku kraja poruke (!). Naime, da bi dekodeo mogao jednoznačno dekodirati poruku, uz bilo koji broj iz intervala koji je odredio koder, dekodeo mora unaprijed znati i duljinu originalne poruke ili pak oznaku kraja poruke. Pripadni intervali računaju se na sljedeći način:

$$D' = D + (G - D)D_S$$

$$G' = D + (G - D)G_S$$

Tako dobivamo:



Poslana poruka je 'eaii!'.

\*\*\*