Fundamentos del Método de Rigideces

Dr. Jorge H. Chávez Gómez

Enero 2013

0.1. Estructura Analizada.

La estructura analizada durante la clase del 21 de enero de 2013 se reproduce a continuación en la Figura1 la cual corresponde a una viga de tres apoyos sujeta a una carga uniformemente distribuida en su primer claro.

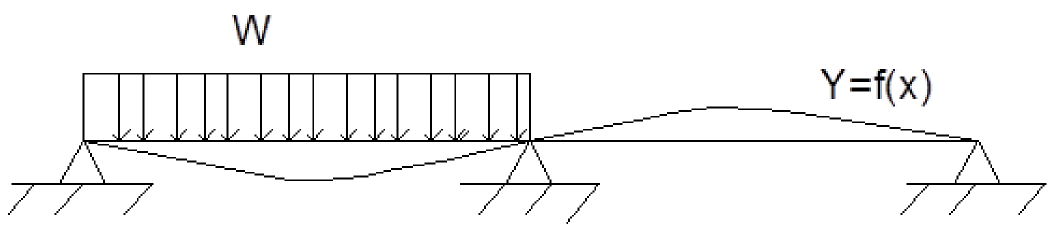

Figura 1: Estructura Hiperestática de Estudio.

La energia total del sistema será función de la energía interna y la energía externa como a continuación.

$$U = \frac{1}{2}\int_{L_t} M_X Y^{''} dx = \frac{1}{2}\int_{L_t} EI(Y^{''})^2 dx$$

$$W = \int_{L_t} W_X Y dx$$

$$\Pi = W - U = \int_{L_t} W_X (\sum Y_i \overline{Y_i}) dx - \frac{1}{2}\int_{L_t} EI(\sum Y_i^{''} \overline{Y_i})^2 dx \quad (1)$$

El proceso natural en el cual una estructura llega a la estabilidad tiende a mantener el mínimo de energía, es por esto que la expresión de Π deberá minimizarse a través de los valores extremos de su expresión; derivando.

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\overline{Y_i}} = \int_{L_t} W_X Y_i dx - \int_{L_t} EI(\sum Y_i''\overline{Y_i})(\sum Y_i'')dx$$

El segundo término de la expresión anterior se desarrolla a continuación:

$$(\sum Y_i'')(\sum Y_i''\overline{Y_1})$$

$$= (Y_1''\overline{Y_1} + Y_2''\overline{Y_2} + Y_3''\overline{Y_3})(Y_1'' + Y_2'' + Y_3'')$$

$$= Y_1''^2\overline{Y_1} + Y_1''\overline{Y_2''}\overline{Y_1}$$

$$+ Y_1''Y_3''\overline{Y_1} + Y_1''Y_2''\overline{Y_2} + Y_2''^2\overline{Y_2}$$

$$+ Y_2''Y_3''\overline{Y_2} + Y_3''Y_1''\overline{Y_3} + Y_3''Y_2''\overline{Y_3}$$

$$+ Y_3''^2\overline{Y_3} = \sum_i \sum_j (Y_i''Y_j''\overline{Y_i})$$

Por el desarrollo anterior se tendrá la expresión correspondiente al mínimo de Π :

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\overline{Y_i}} = \int_{L_t} W_X Y_i dx - \sum_j \int_{L_t} EIY_i''Y_j''\overline{Y_j}dx \tag{2}$$

De ésta manera desarrollando los subíndices de la expresión anterior tendremos para i:

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\overline{Y_1}} = \int_{L_t} W_X Y_1 dx - \sum_j \int_{L_t} EIY_1''Y_j''\overline{Y_j}dx$$

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\overline{Y_2}} = \int_{L_t} W_X Y_2 dx - \sum_j \int_{L_t} EIY_2''Y_j''\overline{Y_j}dx$$

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\overline{Y_3}} = \int_{L_t} W_X Y_3 dx - \sum_j \int_{L_t} EIY_3''Y_j''\overline{Y_j}dx$$

Desarrollando para satisfacer la condición de los extremos de una función y así encontrar el valor que minimice la energía tendremos:

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\overline{Y_i}} = 0$$

En consecuencia a través de un proceso de reducción:

$$\int_{L_t} W_x Y_1 dx = \int_{L_t} EIY_1^{''} Y_1^{''} \overline{Y_1} dx + \int_{L_t} EIY_1^{''} Y_2^{''} \overline{Y_2} dx + \int_{L_t} EIY_1^{''} Y_3^{''} \overline{Y_3} dx$$

$$\int_{L_t} W_x Y_2 dx = \int_{L_t} EIY_2^{''} Y_1^{''} \overline{Y_1} dx + \int_{L_t} EIY_2^{''} Y_2^{''} \overline{Y_2} dx + \int_{L_t} EIY_2^{''} Y_3^{''} \overline{Y_3} dx$$

$$\int_{L_t} W_x Y_3 dx = \int_{L_t} EIY_3^{''} Y_1^{''} \overline{Y_1} dx + \int_{L_t} EIY_3^{''} Y_2^{''} \overline{Y_2} dx + \int_{L_t} EIY_3^{''} Y_3^{''} \overline{Y_3} dx$$

Expresando lo anterior en forma matricial tendremos finalmente:

$$\begin{Bmatrix} \int W_x Y_1 dx \\ \int W_x Y_2 dx \\ \int W_x Y_3 dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{L_t} EIY_1^{''} Y_1^{''} \overline{Y_1} dx & \int_{L_t} EIY_1^{''} Y_2^{''} \overline{Y_2} dx & \int_{L_t} EIY_1^{''} Y_3^{''} \overline{Y_3} dx \\ \int_{L_t} EIY_2^{''} Y_1^{''} \overline{Y_1} dx & \int_{L_t} EIY_2^{''} Y_2^{''} \overline{Y_2} dx & \int_{L_t} EIY_2^{''} Y_3^{''} \overline{Y_3} dx \\ \int_{L_t} EIY_3^{''} Y_1^{''} \overline{Y_1} dx & \int_{L_t} EIY_3^{''} Y_2^{''} \overline{Y_2} dx & \int_{L_t} EIY_3^{''} Y_3^{''} \overline{Y_3} dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{Y_1} \\ \overline{Y_2} \\ \overline{Y_3} \end{Bmatrix}$$

La superposición de efectos se muestra en la Figura2 en la cual se muestra la correspondencia entre las funciones de forma de cada grado de libertad vinculado.

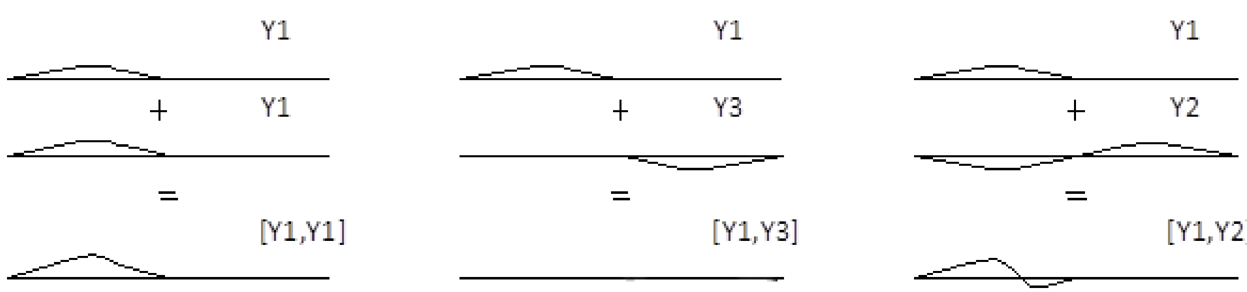

Figura 2: Funciones de Forma Resultantes.