

Формула (вспомогательного угла).

$$A \sin x \pm B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \pm \varphi),$$

где φ называется вспомогательным углом таким, что

$$\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}.$$

В частности, можно взять $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)$.

Обозначим за $I_L(t)$ силу тока на самоиндукции, за $I_C(t)$ – силу тока на конденсаторе. Поскольку самоиндукция и конденсатор подключены параллельно, $U_L(t) = U_C(t)$, но $I_{(L,C)}(t) = I_R(t) = I_L(t) + I_C(t)$, так как сопротивление и пара из самоиндукции и конденсатора подключены уже последовательно. При этом $I_R(t)$ – искомая сила тока на сопротивлении.

$U_L(t) = L \cdot I'_L(t)$, $U_C(t) = \frac{1}{C}q(t)$, где $q(t)$ – заряд конденсатора, производная которого в точности равна $I_C(t)$. Взяв производную, получим $LCI''_L(t) = I_C(t)$.

Вся цепь соединена так, что падения напряжений её элементов равняются $U_R(t) = RI_R(t) = R(I_L(t) + I_C(t))$ и $U_{(L,C)}(t) = U_L(t) = L \cdot I'_L(t)$. Отсюда имеем

$$RI_L(t) + RI_C(t) + L \cdot I'_L(t) = V \sin(\omega t).$$

Неоднородная система уравнений

$$\begin{cases} LCI''_L(t) - I_C(t) = 0 \\ RI_L(t) + RI_C(t) + L \cdot I'_L(t) = V \sin(\omega t) \end{cases}$$

хотя и не приведена к нормальному виду, проще всего может быть решена исключением $I_C(t)$ и нахождением функций по отдельности.

После подстановки имеем уравнение $RLCI''_L(t) + L \cdot I'_L(t) + RI_L(t) = V \sin(\omega t)$. Решение соответствующего однородного уравнения стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ с показательной скоростью из-за того, что оба корня характеристического уравнения имеют вещественные части, меньшие нуля. Следовательно, установившийся режим происходит из частного решения неоднородного уравнения.

Это решение будем искать в форме $I_L(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$. Подставив в уравнение, получаем

$$\begin{cases} (-RLC\omega^2 + R)a - L\omega b = V \\ L\omega a + (-RLC\omega^2 + R)b = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_0 = R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2 \quad a = \frac{VR(1 - LC\omega^2)}{\Delta_0} \quad b = \frac{-VL\omega}{\Delta_0}$$

$$I_L(t) = \frac{V}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2} \left(R(1 - LC\omega^2) \sin(\omega t) - L \cos(\omega t) \right)$$

$$\begin{aligned} I_R(t) = I_L(t) + LCI_L''(t) &= \frac{V(1 - LC\omega^2)}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2} \left(R \sin(\omega t) - \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} \cos(\omega t) \right) \\ &= \frac{V}{R^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} \right)^2} \left(R \sin(\omega t) - \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} \cos(\omega t) \right) \\ &= \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} \right)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \end{aligned}$$

где $\varphi = \arctg\left(\frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}\right)$. Амплитуда установившегося режима равняется $A(\omega) =$

$$= \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} \right)^2}} \text{ и она убывает с возрастанием выражения } \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} \right)^2.$$

Наибольшая амплитуда получается при $\omega = 0$ и при $\omega \rightarrow +\infty$ и равна $A_{\max} = \frac{V}{R}$.

Наименьшая будет при $\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и равна $A_{\min} = 0$.