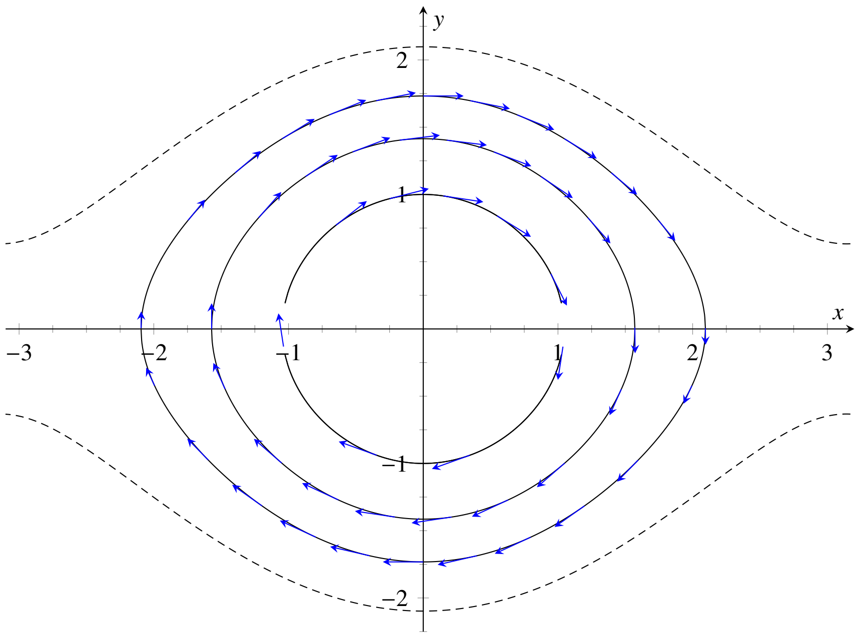
Искать общее решение данной системы уравнений бессмысленно с точки зрения исследования на устойчивость, так как система сводится к автономному уравнению $\ddot{x}(t) - \sin\big(x(t)\big) = 0$ и в результате его решения возникает интеграл

$$\int \frac{dt}{\sqrt{A - \cos(t)}},$$

который нельзя для всякого A выразить в элементарных функциях.

Найдём траектории системы. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{-\sin x}{y}$. $2y\dfrac{dy}{dx} = -2\sin x$. $y^2 = C + 2\cos x$. $y^2 = 2(\cos x + C - 1)$. При $C < 0$ траектории не определены; при $C \geqslant 2$ представляют собой неограниченные кривые, и одна из таковых показана на рисунке пунктирной линией. Оба случая не представляют интереса.

Итак, с этого момента при данных обозначениях будем рассматривать траектории $y = \pm\sqrt{2(\cos x + C - 1)}$ при $0 < C < 2$. Они суть замкнутые кривые. Направления траекторий показаны на рисунке. По ним видно, нулевое решение $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ задаёт особую точку $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ фазовой плоскости, являющуюся ”центром”.



Покажем, что нулевое решение устойчиво, используя следующий вспомогательный факт.

Для $x \in (0;2]$ выполняется неравенство $\arccos(1-x) < 3\sqrt{x}$.

Доказательство. Функция $f(x) = 3\sqrt{x} - \arccos(1-x)$ определена на $x \in [0;2]$ и имеет производную $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$. Приравняв её к нулю, находим единственную стационарную точку $x_0 = \dfrac{14}{9}$. Поскольку до неё производная положительная, а после неё – отрицательная, это – точка максимума. Следовательно, минимальное значение достигается в одном из концов отрезка. При этом $f(0) = 0$ и $f(2) = 3\sqrt{2} - \pi > 0$. Следовательно, $f(x) \geqslant \min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = f(0) = 0$, а равенство достигается только при $x = 0$. Неравенство доказано. □

На всякой кривой $y^2 = 2(\cos x + C - 1)$ точка $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ удалена от начала координат на расстояние $\rho(t) = \rho\big(x(t)\big) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + 2(\cos x + C - 1)}$. $\dfrac{d}{dx}\rho = 0$ только при $x = 0$, при $x > 0$ производная положительна, а сама функция $\rho(x)$ чётная. Следовательно, максимальное значение будет достигаться в границах $x = \pm\arccos(1-C)$ области определения функций $y = \pm\sqrt{2(\cos x + C - 1)}$; минимальное достигается при $x = 0$:

$$\rho_{\max} = \rho_{\max}(C) = \rho\big(\arccos(1-C)\big) = \arccos(1-C); \quad \rho_{\min} = \rho_{\min}(C) = \rho(0) = \sqrt{2C}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Чтобы начальная точка не попала на неограниченную кривую, необходимо потребовать, чтобы выполнялось $C < 2$. Поскольку $\rho_{\max}(C) \leqslant \pi$, положим $\delta = \min\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\varepsilon; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Имеем для всех $t \geqslant t_0 = 0$

$$\big|X(t) - \Phi(t)\big| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \qquad \big|X(t_0) - \Phi(t_0)\big| = \sqrt{x^2(0) + y^2(0)}.$$

Пусть $\sqrt{x^2(0)+y^2(0)} < \delta$. Тогда $\delta > \sqrt{x^2(0)+y^2(0)} \geqslant \rho_{\min}(C) = \sqrt{2C}$ и $C < \dfrac{\delta^2}{2}$.

Наконец, принимая во внимание обозначенный вспомогательный факт и то, что функция $g(x) = \arccos(1-x)$ строго возрастает, имеем для всех $t \geqslant t_0$

$$\sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \leqslant \rho_{\max}(C) = \arccos(1-C) < \arccos\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) < 3\sqrt{\frac{\delta^2}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\delta \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, по определению нулевое решение устойчиво, хотя и не асимптотически, так как кривые замкнуты и точки на них стремиться к центру координат фазовой плоскости не могут.