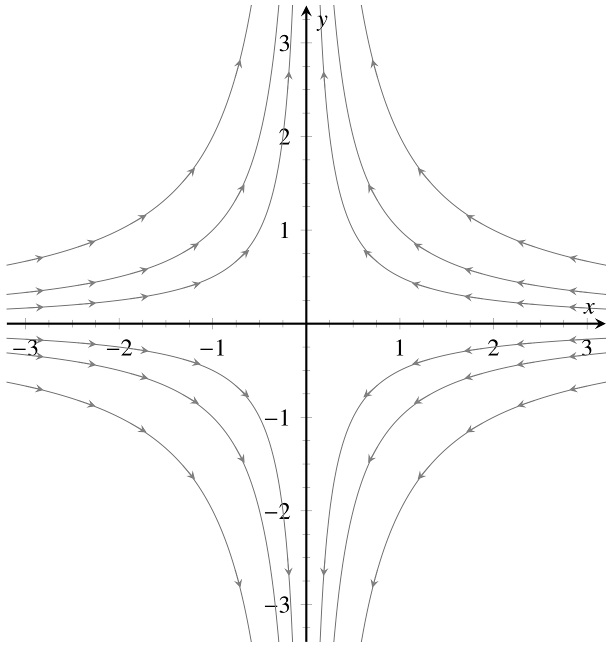
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\dfrac{y}{x}$. $xy'_x(x) + y = 0$. $xy = C$. $y = \dfrac{C}{x}$ и траектории системы представляют собой гиперболы, обе асимптоты которых суть оси фазовой плоскости.

На рисунке показаны траектории вместе с направляющими векторами, посчитанными в некоторых точках вдоль траекторий. Характер направлений указывает на то, что решения удаляются от начала координат, то есть от нулевого решения $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так что решение неустойчиво, а особая точка $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ относится к типу ”седло”.




Докажем по определению неустойчивость. Общее решение равно $X(t) = \begin{pmatrix} Ae^{-t} \\ Be^{t} \end{pmatrix}$. Для $t \geqslant t_0 = 0$

$$\big(X(t) - \Phi(t)\big)^2 = A^2e^{-2t} + B^2e^{2t} \qquad \big(X(t_0) - \Phi(t_0)\big)^2 = A^2 + B^2$$

Для $\varepsilon = 1$ и любого $\delta > 0$ потребуем, чтобы $A$ и $B$ были таковы, что $0 < A^2 + B^2 < \delta^2$. С другой стороны, при $t \geqslant \max\left(\ln\dfrac{1}{|B|}; 0\right)$ имеем $A^2e^{-2t} + B^2e^{2t} \geqslant B^2e^{2t} \geqslant 1 = \varepsilon^2$, поэтому решение неустойчиво.