Формула (вспомогательного угла)**.**

$$A\sin x \pm B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\sin\big(x\pm\varphi\big),$$

где φ называется вспомогательным углом таким, что

$$\sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}.$$

В частности, можно взять $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{B}{A}\right)$.

Уравнение силы тока $I = I(t)$ будет иметь вид

$$RI(t) + LI'(t) + \frac{1}{C}q(t) = V\sin(\omega t),$$

где $q(t)$ – заряд конденсатора.

Взяв производную, получим

$$LCI''(t) + RCI(t) + I(t) = VC\omega\cos(\omega t).$$

Характеристическое уравнение имеет вид $LC\lambda^2 + RC\lambda + \lambda = 0$. Вне зависимости от знака дискриминанта по теореме Виета $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 > 0$, но $\lambda_1 + \lambda_2 = -RC < 0$. Следовательно, корни этого уравнения таковы, что $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$. Последнее означает, что оба элемента фундаметнальной системы решений будут стремиться к нулю со скоростью, сопоставимой с $e^{-\frac{R}{2L}t}$ (в случае кратных корней $te^{-\frac{R}{2L}t}$).

Итак, установившийся режим не вытекает из решения однородного уравнения, значит он полностью совпадает с частным решением неоднородного, которое в соответствии с видом правой части имеет вид

$$I_1(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t),$$

где a, b – искомые коэффициенты.

$$I_1'(t) = a\omega\cos(\omega t) - b\omega\sin(\omega t) \qquad I_1''(t) = -a\omega^2\sin(\omega t) - b\omega^2\cos(\omega t).$$

$$\begin{cases} \Big(-LC\omega^2+1\Big)a - RC\omega b = 0 \\ RC\omega a + \Big(-LC\omega^2+1\Big)b = VC\omega \end{cases}$$

$$\Delta_0 = \Big(-LC\omega^2+1\Big)^2 + (RC\omega)^2 \qquad a = \frac{VRC^2\omega^2}{\Delta_0} \qquad b = \frac{\Big(1-LC\omega^2\Big)VC\omega}{\Delta_0}$$

Подставив, получаем

$$I(t) = \frac{1}{\Delta_0} VC\omega \left(CR\omega \sin(\omega t) + \left(1 - LC\omega^2\right) \cos(\omega t) \right).$$

Со вспомогательным углом $\varphi = \arctan\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{CR\omega}\right)$ имеем установившийся режим $I_1(t)$ в следующей форме:

$$I_1 = \frac{VC\omega}{\sqrt{\Delta_0}} \sin\left(\omega t - \varphi\right) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \varphi\right).$$

Амплитуда $A = A(\omega) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ силы тока тем больше, чем меньше $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$. Наибольшая амплитуда достигается при $\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}$ и равна $\frac{V}{R}$.