

Любая задача Коши вида
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + p(t)x(t) = 0 \\ x(t_0) = \alpha \\ \dot{x}(t_0) = \beta \end{cases}$$
 имеет единственное продолжаемое

на всю числовую прямую решение даже в точках $t_0 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ разрыва функции $p(t)$. Действительно, и в левой, и в правой полуокрестностях всякой такой точки t_0 задача Коши будет удовлетворять условиям теоремы Пикара и иметь там единственное решение. Если соединить полученные, вообще говоря, разные функции в левой и правой полуокрестностях, то получится итоговое непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши, вторая производная которого может быть разрывной там, где разрывна $p(t)$. Процесс также можно продолжить, то есть посчитать значения $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ в ближайшей точке разрыва $p(t)$ и составить из неё новую задачу Коши, решение которой также будет единственным и непрерывно дифференцируемым.

Перейдём к равносильной системе
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ \dot{u}(t) = -p(t)x(t) \end{cases},$$
 или в матричной форме $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$, где $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}$. Искать фундаментальную матрицу решений будем из $X(O_2) = E_2$. Искомая матрица монодромии $C = C_{2 \times 2}$ такова, что $X(t + 2\pi) = X(t)C$ для всех t . В частности, $X(\pi) = X(-\pi)C$ и $C = (X(-\pi))^{-1}X(\pi)$.

$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{pmatrix}$, $X(O_2) = \begin{pmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ u_1(0) & u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Условимся без ограничения общности, что $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Решив эти две задачи Коши на промежутке $t \in [-\pi; \pi]$, получаем

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \begin{cases} \cos(bt), & \text{если } t \in [-\pi; 0] \\ \cos(at), & \text{если } t \in (0; \pi] \end{cases} & x_2(t) &= \begin{cases} g_b(t), & \text{если } t \in [-\pi; 0] \\ g_a(t), & \text{если } t \in (0; \pi] \end{cases} \\ u_1(t) &= \begin{cases} -b \sin(bt), & \text{если } t \in [-\pi; 0] \\ -a \sin(at), & \text{если } t \in (0; \pi] \end{cases} & u_2(t) &= \begin{cases} \cos(bt), & \text{если } t \in [-\pi; 0] \\ \cos(at), & \text{если } t \in (0; \pi] \end{cases}, \end{aligned}$$

где $g_s(t) = \begin{cases} \frac{1}{s} \sin(st), & \text{если } s > 0 \\ t, & \text{если } s = 0 \end{cases}$ – нечётная функция, необходимая для покрытия случаев $a = 0$ и $b = 0$.

Пользуясь непрерывностью решений, будем находить значения этих четырёх функций в π и $-\pi$ как соответствующие пределы при $x \rightarrow -\pi + 0$ и $x \rightarrow \pi - 0$ соответственно.

$$X(-\pi) = \begin{pmatrix} \cos(b\pi) & -g_b(\pi) \\ b \sin(b\pi) & \cos(b\pi) \end{pmatrix} \quad X(\pi) = \begin{pmatrix} \cos(a\pi) & g_a(\pi) \\ -a \sin(a\pi) & \cos(a\pi) \end{pmatrix}$$

$$\det(X(-\pi)) = 1 \quad (X(-\pi))^{-1} = \text{adj}(X(-\pi)) = \begin{pmatrix} \cos(b\pi) & g_b(\pi) \\ -b \sin(b\pi) & \cos(b\pi) \end{pmatrix}$$

Итак, матрица монодромии равняется

$$C = \begin{pmatrix} \cos(a\pi) \cos(b\pi) - a \sin(a\pi) g_b(\pi) & g_a(\pi) \cos(b\pi) + \cos(a\pi) \cos(b\pi) \\ -b \cos(a\pi) \sin(b\pi) - a \sin(a\pi) \cos(b\pi) & -b g_a(\pi) \sin(b\pi) + \cos(a\pi) \cos(b\pi) \end{pmatrix}.$$

Для каждого из перечисленных далее случаев мультипликаторы ρ_1 и ρ_2 целесообразнее находить, если матрица монодромии предварительно упрощена. Факт устойчивости устанавливается по следующему критерию, формулировка которого взята из книги Ламберто Чезари «Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений», глава II, § 4, предложение 4.1.2.

Критерий (устойчивости по мультипликаторам).

Пусть дана линейная однородная система с периодическими коэффициентами.

- Для асимптотической устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы лежали внутри единичного круга $|\rho| < 1$.
- Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы

1. все мультипликаторы лежали в замкнутом единичном круге $|\rho| \leq 1$;
2. каждый мультипликатор ρ_k , лежащий на единичной окружности (т.е. $|\rho_k| = 1$), имел кратность как корень характеристического (векового) уравнения $\det(C - \rho E) = 0$, равную дефекту $\text{null}(C - \rho_k E)$.

а) $a = \frac{1}{2}, b = 0. C = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \det(C - \rho E) = \rho^2 + \frac{\pi}{2}\rho + 1. 2\rho^2 + \pi\rho + 2 = 0.$

$\rho_1 = -\frac{\pi}{4} - \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{16}} i. \rho_2 = -\frac{\pi}{4} + \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{16}} i. |\rho_1| = |\rho_2| = 1$, и нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

б) $a = \frac{1}{2}, b = 1. C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \det(C - \rho E) = \rho^2 + 1. \rho_1 = -i, \rho_2 = i. |\rho_1| = |\rho_2| = 1$, и

нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

в) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}. C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \det(C - \rho E) = \left(\rho - \frac{1}{3}\right)(\rho - 3). \rho_1 = \frac{1}{3}, \rho_2 = 3$, и нулевое решение неустойчиво.

г) $a = \frac{3}{4}, b = 0. C = \begin{pmatrix} \frac{-4 - 3\pi}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{3}{-4\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \det(C - \rho E) = \rho^2 + \left(\frac{3\pi + 8}{4\sqrt{2}}\right)\rho + \frac{3\pi + 5}{8}.$

$$\rho_1 = \frac{-8 - 3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 16}}{8\sqrt{2}}, \rho_2 = \frac{-8 - 3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 16}}{8\sqrt{2}}. \text{ Но } \rho_1 < \frac{-8 - 3 \cdot 3 - \sqrt{9 \cdot 3^2 - 16}}{8 \cdot 2}$$

$$= \frac{-17 - \sqrt{65}}{16} < \frac{-17 - 8}{16} = -\frac{25}{16} < -1, \text{ а нулевое решение неустойчиво.}$$

$$\text{д) } a = 1, b = 0. C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \det(C - \rho E) = (\rho + 1)^2. \rho_1 = \rho_2 = -1. |\rho_1| = |\rho_2| = 1.$$

$\text{null}(C - \rho_1 E) = \text{null}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$, а кратность корня равна 2. Из-за этого нулевое решение неустойчиво.

$$\text{е) } a = 1, b = \frac{3}{2}. C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}. \det(C - \rho E) = \rho^2. \rho_1 = \rho_2 = 0, \text{ и решение асимптотически устойчиво.}$$