Уравнение $y''(x) - 2(x-1)y'(x) + x^2 y = 0$ необходимо привести к каноническому виду прежде, чем применять преобразование Лиувилля (пример **737***). Это можно сделать, например, заменой

$$y(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)dx\right)z(x)$$

В нашем случае $p(x) = -2(x-1)$, $q(x) = x^2$ так что заменим

$$y(x) = \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)z(x)$$

Инвариант уравнения равен

$$Q_{z(x)}(x) = q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) = 2x$$

После замены имеем уравнение $z''(x) + 2xz(x) = 0$. Теперь преобразуем полученное уравнение по Лиувиллю. В обозначениях задачи **737*** $\psi(x) = (2x)^{-\frac{1}{4}}$,

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x \left(\psi(s)\right)^{-2} ds = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Соответственно, необходимо заменить переменные следующим образом:

$$\begin{cases} z = \psi(x)u = (2x)^{-\frac{1}{4}}u \\ t = \varphi(x) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Инвариант преобразованного в терминах $z(t)$ уравнения принимает вид

$$Q_{z(t)}(t) = 1 + \psi^3(x)\psi''(x) = 1 + \frac{5}{34}x^{-3} = 1 + O\left(x^{-3}\right) = 1 + O\left(t^{-2}\right)$$

Следовательно, для фундаментальной системы решений уравнения $z''(t) + Q_{z(t)}z(t) = 0$ получаем следующие оценки:

$$z_1(t) = \cos(t) + O\left(t^{-1}\right) \qquad z_2(t) = \sin(t) + O\left(t^{-1}\right)$$

Подставляя обратно, получаем

$$y_1(x) = \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)(2x)^{-\frac{1}{4}}z_1(t) = \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)(2x)^{-\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)\left((2x)^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + O\left(x^{-\frac{7}{4}}\right)\right)$$

Итак, оценка фундаментальной системы решений уравнения $y''(x) - 2(x-1)y'(x) + x^2 y = 0$ таковa:

$$y_1(x) = \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)\left((2x)^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + O\left(x^{-\frac{7}{4}}\right)\right)$$

$$y_2(x) = \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)\left((2x)^{-\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + O\left(x^{-\frac{7}{4}}\right)\right)$$