Формула (вспомогательного угла)**.**

$$A\sin x \pm B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\sin\bigl(x\pm\varphi\bigr),$$

где φ называется вспомогательным углом таким, что

$$\sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}.$$

В частности, можно взять $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{B}{A}\right)$.

Обозначим за $I_L(t)$ силу тока на самоиндукции, за $I_C(t)$ – силу тока на конденсаторе. Поскольку самоиндукция и конденсатор подключены параллельно, $U_L(t) = U_C(t)$, но $I_{(L,C)}(t) = I_R(t) = I_L(t) + I_C(t)$, так как сопротивление и пара из самоиндукции и конденсатора подключены уже последовательно. При этом $I_R(t)$ – искомая сила тока на сопротивлении.

$U_L(t) = L\cdot I_L'(t)$, $U_C(t) = \frac{1}{C}q(t)$, где $q(t)$ – заряд конденсатора, производная которого в точности равна $I_C(t)$. Взяв производную, получим $LCI_L''(t) = I_C(t)$.

Вся цепь соединена так, что падения напряжений её элементов равняются $U_R(t) = RI_R(t) = R\bigl(I_L(t)+I_C(t)\bigr)$ и $U_{(L,C)}(t) = U_L(t) = L\cdot I_L'(t)$. Отсюда имеем

$$RI_L(t) + RI_C(t) + L\cdot I_L'(t) = V\sin(\omega t).$$

Неоднородная система уравнений

$$\begin{cases} LCI_L''(t) - I_C(t) = 0 \\ RI_L(t) + RI_C(t) + L\cdot I_L'(t) = V\sin(\omega t) \end{cases}$$

хотя и не приведена к нормальному виду, проще всего может быть решена исключением $I_C(t)$ и нахождением функций по отдельности.

После подстановки имеем уравнение $RLCI_L''(t) + L\cdot I_L'(t) + RI_L(t) = V\sin(\omega t)$. Решение соответствующего однородного уравнения стремится к нулю при $t\to+\infty$ с показательной скоростью из-за того, что оба корня харакеристического уравнения имеют вещественные части, меньшие нуля. Следовательно, установившийся режим происходит из частного решения неоднородного уравнения.

Это решение будем искать в форме $I_L(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$. Подставив в уравнение, получаем

$$\begin{cases} \Bigl(-RLC\omega^2 + R\Bigr)a - L\omega b = V \\ L\omega a + \Bigl(-RLC\omega^2 + R\Bigr)b = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_0 = R^2\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + (L\omega)^2 \qquad a = \frac{VR\left(1 - LC\omega^2\right)}{\Delta_0} \qquad b = \frac{-VL\omega}{\Delta_0}$$

$$I_L(t) = \frac{V}{R^2\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + (L\omega)^2}\left(R\left(1 - LC\omega^2\right)\sin(\omega t) - L\cos(\omega t)\right)$$

$$\begin{aligned} I_R(t) = I_L(t) + LCI_L''(t) &= \frac{V\left(1 - LC\omega^2\right)}{R^2\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + (L\omega)^2}\left(R\sin(\omega t) - \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}\cos(\omega t)\right) \\ &= \frac{V}{R^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}\right)^2}\left(R\sin(\omega t) - \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}\cos(\omega t)\right) \\ &= \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}\right)^2}}\sin\left(\omega t - \varphi\right), \end{aligned}$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{L\omega}{R\left(1 - LC\omega^2\right)}\right)$. Амплитуда установившегося режима равняется $A(\omega) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}\right)^2}}$ и она убывает с возрастанием выражения $\left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}\right)^2$.

Наибольшая амплитуда получается при $\omega = 0$ и при $\omega \to +\infty$ и равна $A_{\max} = \frac{V}{R}$. Наименьшая будет при $\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}$ и равна $A_{\min} = 0$.