Свойство (точки перегиба)**.** Если в некоторой окрестности точки перегиба x_0 функция дважды дифференцируема, то $f''(x_0) = 0$.

Признак (точки перегиба)**.** Точка x_0 дважды дифференцируемой в окрестности x_0 функции $f(x)$ является точкой перегиба, если $f''(x_0) = 0$, а при переходе через x_0 функция $f''(x)$ меняет знак. В частности, если в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ трижды дифференцируема, то достаточно $f'''(x_0) \neq 0$.

Пользоваться будем тем фактом, что $y''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}y(x)\right) = \dfrac{d}{dx}\Big(f\big(x; y(x)\big)\Big)$.

а) $y' = y - x^2$. $y''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(y - x^2\right) = y' - 2x = y - x^2 - 2x$.

$y'''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(y - x^2 - 2x\right) = y' - 2x - 2 = y - x^2 - 2x - 2$.

Пусть $y''(x) = y - x^2 - 2x = 0$. Тогда $y = x^2 + 2x$. При этом $y'''(x) = y - x^2 - 2x - 2 = = -2 \neq 0$, а потому все точки этой кривой являются точками перегиба. Итак, точки перегиба данного уравнения лежат на и только на параболе $y = x^2 + 2x$.

б) $y' = x - e^y$. $y''(x) = 1 - y'e^y = 1 - (x - e^y)e^y = 1 - xe^y + e^{2y}$.

$y'''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(1 - xe^y + e^{2y}\right) = -e^y - xy'e^y + 2y'e^{2y} = -e^y - x(x - e^y)e^y + 2(x - e^y)e^{2y}$
$= -e^y - x^2e^y + 3xe^{2y} - 2e^{3y}$.

Пусть $y''(x) = 1 - xe^y + e^{2y} = 0$. Тогда $xe^y = 1 + e^{2y}$, $x = e^{-y} + e^y$, и $y'''(x) = -e^y - -(e^{-y} + e^y)^2e^y + 3(e^{-y} + e^y)e^{2y} - 2e^{3y} = -e^y < 0$.

Таким образом, всюду, где $y''(x) = 0$ имеем $y'''(x) \neq 0$, то есть точки перегиба лежат на кривой $x = e^{-y} + e^y$ (или $x = 2\operatorname{ch}(y)$) и только на ней.

в) $x^2 + y^2y' = 1$. $y' = y^{-2}\left(1 - x^2\right) = y^{-2} - x^2y^{-2}$.

$$y''(x) = -2y^{-3}y' + 2x^2y^{-3}y' - 2xy^{-2} = -2y^{-3}y'\left(1 - x^2\right) - 2xy^{-2} = -2y^{-5}\left(1 - x^2\right)^2 - 2xy^{-2}.$$

$$\begin{aligned} y'''(x) &= 10y^{-6}\left(1 - x^2\right)^2 y' + 8xy^{-5}\left(1 - x^2\right) - 2y^{-2} + 4xy^{-3}y' = \\ &= 10y^{-8}\left(1 - x^2\right)^3 + 8xy^{-5}\left(1 - x^2\right) - 2y^{-2} + 4xy^{-5}\left(1 - x^2\right) = \\ &= 10y^{-8}\left(1 - x^2\right)^3 + 12xy^{-5}\left(1 - x^2\right) - 2y^{-2}. \end{aligned}$$

Пусть $y''(x) = -2y^{-5}\left(1 - x^2\right)^2 - 2xy^{-2} = 0$, то есть $\left(1 - x^2\right)^2 = -xy^3$.

$$\begin{aligned} y'''(x) &= 10y^{-8}\left(1 - x^2\right) \cdot \left(-xy^3\right) + 12xy^{-5}\left(1 - x^2\right) - 2y^{-2} = 2xy^{-5}\left(1 - x^2\right) - 2y^{-2} = \\ &= -2y^{-8}\left(1 - x^2\right)^2 - 2y^{-2} = -2y^{-2}\left(y^{-6}\left(1 - x^2\right)^2 + 1\right) < 0. \end{aligned}$$

Итак, всякая точка кривой $xy^3 = -\left(1 - x^2\right)^2$ является точкой перегиба.

На прямой $y = 0$ первая производная не определена, а потому исследовать функцию $y(x)$ на наличие перегиба на этой прямой с помощью производной не получится.

г) $y'(x) = f\left(x; y\right)$. Обозначим $\xi = x$. Тогда по правилу произодной сложной функции $y''(x) = \dfrac{d}{dx} f\left(x; y(x)\right) = \dfrac{d}{d\xi} f\left(x(\xi); y(\xi)\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{d\xi} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{d\xi} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} f\left(x; y\right)$, ибо $\dfrac{dx}{d\xi} = 1$ и $\dfrac{dy}{d\xi} = \dfrac{dy}{dx} = f\left(x; y\right)$.

Итак, уравнение кривой точек перегиба имеет вид $f'_x + f \cdot f'_y = 0$. Это условие необходимое, но не достаточное, так что проверку на наличие перегиба при фиксированных x и y необходимо делать исследованием знака $y''(x)$.

Предположим теперь, что функция $f\left(x; y\right)$ имеет непрерывные вторые частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и найдём в этом предположении $y'''(x)$.

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}\left(y''(x)\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dy}{d\xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot f;$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi}\left(f \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{d}{d\xi} f \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + f \cdot \frac{d}{d\xi}\frac{\partial f}{\partial y} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f\right)\frac{\partial f}{\partial y} + f \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dy}{d\xi}\right) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot f + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2} \cdot f^2.
\end{aligned}$$

Итого, $y'''(x) = \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) + \dfrac{d}{d\xi}\left(f\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{xx} + f''_{xy} f + f'_x f'_y + \left(f'_y\right)^2 f + f''_{xy} f + f''_{yy} f^2$ $= f''_{xx} + 2f''_{xy} f + f''_{yy} f^2 + f'_y \cdot \left(f'_x + f \cdot f'_y\right)$.

Пусть теперь $f'_x + f \cdot f'_y = 0$. При таком условии $y'''(x) = f''_{xx} + 2f''_{xy} f + f''_{yy} f^2$.

Окончательно получаем достаточные условия наличия перегиба в точке:

$$\begin{cases} f'_x + f \cdot f'_y = 0 \\ f''_{xx} + 2f''_{xy} f + f''_{yy} f^2 \neq 0 \end{cases}.$$