Тот факт, что $x(t)y(t) = O\Big(x^2(t)+y^2(t)\Big) = O\Big(o\Big(\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\Big)\Big) = o\big(|X|\big)$ при $|X| \to 0$ был показан в решении задачи **899**. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o\big(|X|\big) \\ o\big(|X|\big) \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda E) = (\lambda-a)(\lambda-1)+2 = \lambda^2-(a+1)\lambda+a+2$. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2-(a+1)\lambda+a+2=0$. $D=(a+1)^2-4(a+2)=a^2-2a-7$.

$D \geqslant 0$ при $a \in \Big(-\infty; 1-\sqrt{8}\Big] \cup \Big[1+\sqrt{8};+\infty\Big)$. При таких a по теореме Виета $\lambda_1\cdot\lambda_2 = $ $= a+2$. Таким образом, если $a < 2 < 1-\sqrt{8}$, то собственные значения разных знаков и нулевое решение неустойчиво. Если $a=-2$, то собственные значения равны 0 и -1 и теорема Ляпунова не даёт ответ. Если $-2 < a \leqslant 1-\sqrt{8}$, то $\lambda_1+\lambda_2 = a+1 < 0$, оба корня отрицательны и нулевое решение устойчиво асимптотически. Наконец, в случае $a \geqslant 1+\sqrt{8}$ будет $\lambda_1+\lambda_2 = a+1 > 0$ и оба корня положительны, то есть нулевое решение неустойчиво.

$D < 0$ при $a \in \Big(1-\sqrt{8};1+\sqrt{8}\Big)$. $\mathrm{Re}(\lambda) = \dfrac{1}{2}(a+1)$, так что при $a \in \Big(1-\sqrt{8};-1\Big)$ решение асимптотически устойчиво, при $a \in \Big(-1;1+\sqrt{8}\Big)$ неустойчиво, а при $a=-1$ вещественные части обоих собственных значений равны 0 и ответ об устойчивости получить не удастся.

Случаи $a=-2$ и $a=-1$ необходимо рассмотреть отдельно. В обоих случаях будем находить траектории.

Случай 1. $a=-1$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+x+y}{x^2-x-2y}$. Это уравнение Дарбу и замена $y = x\cdot t(x)$ сведёт его к уравнению Бернулли. $t + x\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x^2t+x+xt}{x^2-x-2xt} = \dfrac{xt+1+t}{x-1-2t}$. $x\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x}{x'(t)} = \dfrac{xt+1+t}{x-1-2t} - t =$ $= \dfrac{1+2t+2t^2}{x-1-2t}$. $x'(t) + \dfrac{1+2t}{2t^2+2t+1}x(t) = \dfrac{1}{2t^2+2t+1}x^2(t)$. $x(t) = \dfrac{1}{C\sqrt{2t^2+2t+1}-2t-1}$ и общее решение (уравнение траекторий) можно записать по крайней мере в параметрической форме:

$$x(t) = \frac{1}{C\sqrt{2t^2+2t+1}-2t-1} \qquad\qquad y(t) = \frac{t}{C\sqrt{2t^2+2t+1}-2t-1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y(t) = \dfrac{1}{-2+\sqrt{2}C}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} y(t) = \dfrac{1}{-2-\sqrt{2}C}$, и ни один из этих пределов не равен нулю ни при каких C. Значит, нулевое решение этой системы, если даже и устойчиво, то устойчиво точно не асимптотически.

Случай 2. $a=-2$.

Поступим аналогично. Уравнение траекторий $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+x+y}{x^2-2x-2y}$ снова представляет собой уравнение Дарбу. $y(x) = x\cdot t(x)$.

$$\frac{x}{x'(t)} = \frac{x^2t + x + xt}{x^2 - 2x - 2xt} - t = \frac{xt + 1 + t}{x - 2 - 2t} - t = \frac{1 + 3t + 2t^2}{x - 2 - 2t}$$

$x'(t)\left(1 + 3t + 2t^2\right) = x(x - 2 - 2t)$. $x'(t) + \dfrac{2}{2t+1}x(t) = \dfrac{1}{(2t+1)(t+1)}x^2$. Итак, уравнение траекторий имеет параметрический вид:

$$x(t) = \frac{1}{(2t+1)\left(C + \ln\left|\frac{2t+1}{2t+2}\right|\right) + 1} \qquad y(t) = \frac{t}{(2t+1)\left(C + \ln\left|\frac{2t+1}{2t+2}\right|\right) + 1}$$

Однако, $\lim\limits_{t\to\infty} = \dfrac{1}{2C} \neq 0$, и асимптотическая устойчивость нулевого невозможна.

Итак, нулевое решение решение асимптотически устойчиво только при $a \in (-2; -1)$.