Предложение.

При $r(\xi;\varphi) = \sqrt{\xi^2+\varphi^2} \to 0$ имеем $\xi\varphi = O\left(r^2\right)$. В частности, $\dfrac{\xi\varphi}{r^{1+\varepsilon}} = \dfrac{\gamma(r)r^2}{r^{1+\varepsilon}} \to 0$ для всех $\varepsilon \in (0;1)$.

Действительно, $0 \leqslant \left(|\xi|-|\varphi|\right)^2$ и $|\xi\varphi| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\xi^2+\varphi^2\right) \leqslant \dfrac{1}{2}\left(r^2+r^2\right) = r^2$, что показывает $\xi\varphi = O\left(r^2\right)$.

$\begin{cases} P(x;y) = \sqrt{x^2-y+2}-2 \\ Q(x;y) = \operatorname{arctg}\left(x^2+xy\right) \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{x^2-y+2}-2=0 \\ \operatorname{arctg}\left(x^2+xy\right)=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = x^2-2 \\ x^2+xy=0 \end{cases}$; $x\left(x+x^2-2\right) = 0$.

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = 2 \end{cases}$, и особые точки – $A_1(0\ \ -2)$, $A_2(1;-1)$ и $A_3 = (-2;2)$.

Будем также пользоваться тем, что $\sqrt{1+u} = 1+\dfrac{1}{2}u+O\left(u^2\right)$ и $\operatorname{arctg}(u) = u+O\left(u^3\right)$ при $u \to 0$.

1) $y = \varphi - 2$.

$$\dot{x} = \sqrt{x^2+\varphi+4}-2 = 2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}-\frac{\varphi}{4}}-2 = 2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\varphi}{4}\right)+O\left(\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\varphi}{4}\right)^2\right)\right)-2 =$$

$$= -\frac{\varphi}{4}+O\left(r^2\right).\ \dot{\varphi} = \operatorname{arctg}\left(x^2+x\varphi-2x\right) = x^2+x\varphi-2x+O\left(\left(x^2+x\varphi-2x\right)^3\right) = -2x+O\left(r^2\right).$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. $\lambda^2 - \dfrac{1}{2} = 0$. $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а особая точка $A_1(0;-2)$ – «седло».

Найдём сепаратрисы. $A-\lambda_1 E \sim \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\varphi_1 = 2\sqrt{2}x$. Аналогично, $A-\lambda_2 E \sim \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = -2\sqrt{2}x$.

2) $\begin{cases} x = \xi+1 \\ y = \varphi-1 \end{cases}$. $\dot{\xi} = \sqrt{\xi^2+2\xi-\varphi+4}-2 = 2\sqrt{1+\dfrac{\xi^2}{4}+\dfrac{\xi}{2}-\dfrac{\varphi}{4}}-2 = 2\left(1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\xi^2}{4}+\dfrac{\xi}{2}-\right.\right.$

$\left.\left.-\dfrac{\varphi}{4}\right)+O\left(\left(\dfrac{\xi^2}{4}+\dfrac{\xi}{2}-\dfrac{\varphi}{4}\right)^2\right)\right)-2 = \dfrac{\xi}{2}-\dfrac{\varphi}{4}+O\left(r^2\right)$. $\dot{\varphi} = \operatorname{arctg}\left((\xi+1)(\xi+\varphi)\right) = \xi^2+\xi+\xi\varphi+$

$+\varphi+O\left(r^3\right) = \xi+\varphi+O\left(r^2\right)$. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_{1,2} = \dfrac{3\mp\sqrt{3}i}{4}$, и особая точка $A_2(1;-1)$ является «фокусом», причём неустойчивым, то есть траектории раскручиваются.

В $\begin{cases}\xi = -0{,}6\\ \varphi = 0{,}6\end{cases}$ для $\begin{cases}\dot{\xi} = \sqrt{\xi^2 + 2\xi - \varphi + 4} - 2\\ \dot{\varphi} = \operatorname{arctg}\Big((\xi + 1)(\xi + \varphi)\Big)\end{cases}$ имеем вектор $\begin{cases}\dot{\xi}(-0{,}6;0{,}6) = -0{,}4\\ \dot{\varphi}(-0{,}6;0{,}6) = 0\end{cases}$. Следовательно, направление раскручивания траекторий – против часовой.

3) $\begin{cases}x = \xi - 2\\ y = \varphi + 2\end{cases}$. $\dot{\xi} = \sqrt{\xi^2 - 4\xi - \varphi + 4} - 2 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{4} - \xi - \frac{\varphi}{4}\right) + O\left(r^2\right)\right) - 2 = -\xi - -\frac{\varphi}{4} + O\left(r^2\right)$. $\dot{\varphi} = \operatorname{arctg}\Big((\xi - 2)(\xi + \varphi)\Big) = \xi^2 - 2\xi + \xi\varphi - 2\varphi + O\left(r^3\right) = -2\xi - 2\varphi + O\left(r^2\right)$. $A = \begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{4}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. $\lambda_1 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$. $\lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, поэтому особая точка $A_3(-2;2)$ – «узел», при этом устойчивый. В полной аналогии с предыдущими случаями находим $v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 2 + 2\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\ 2 - 2\sqrt{3}\end{pmatrix}$; $\varphi_1 = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)\xi$ – трансверсаль, а $\varphi_2 = \left(2 - 2\sqrt{3}\right)\xi$ – касательная.