Лемма. Если у линейной однородной системы дифференциальных уравнений нулевое решение устойчиво, то и всякое решение устойчиво.

Доказательство. Предположим обратное, то есть то, что нулевое решение устойчиво, но какое-то другое $\Psi(t)$ неустойчиво. Это значит, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ существует другое ненулевое решение $X_\delta(t)$ и такое $t_1 = t_1(\delta) > t_0$, что $\left|\Psi(t_0) - X_\delta(t_0)\right| < \delta$, но $\left|\Psi(t_1) - X_\delta(t_1)\right| \geqslant \varepsilon$.

Система уравнений линейная, значит всякое её решение можно выразить в виде $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \ldots + C_n f_n(t)$, где $f_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ – это столбцы, составляющие фундаментальную систему решений. В ней любую функцию можно умножить на ненулевой скаляр и полученная ФСР всё равно останется корректной.

Подберём фундаментальную систему решений надлежащим образом. Возьмём любую ФСР и t_0 такое, чтобы векторы $f_1(t_0), \ldots, f_n(t_0)$ были линейно независимы (то есть матрица A, составленная из этих векторов-столбцов, имела $\det A \neq 0$). Далее подберём такое $\gamma > 0$, что для любого решения $X(t)$ из $\left|X(t_0)\right| < \gamma$ следует $\left|X(t)\right| < \dfrac{\varepsilon}{n}$ для всех $t \geqslant t_0$. Наконец, в выбранной ФСР умножим каждую функцию на такие ненулевые скаляры, чтобы выполнялись $\left|f_k(t_0)\right| < \gamma$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Из этого следуют неравенства $\left|f_k(t)\right| < \dfrac{\varepsilon}{n}$, а линейная независимость векторов $f_1(t_0), \ldots, f_n(t_0)$ не нарушается, так как умножение столбцов матрицы A приведёт к умножению её определителя на ненулевые числа. Полученный набор функций положим новой ФСР. Стоит обратить особое внимание на тот факт, что построение ФСР указанным образом никак не зависит ни от δ, ни от $t_1 = t_1(\delta)$.

В терминах подобранной выше ФСР распишем

$$\Psi(t) = A_1 f_1(t) + \ldots + A_n f_n(t) \qquad X_\delta(t) = B_1 f_1(t) + \ldots + B_n f_n(t)$$
$$\Psi(t) - X_\delta(t) = \Delta_1 f_1(t) + \ldots + \Delta_n f_n(t) \qquad \Delta_k = A_k - B_k$$

Разность $\Psi(t_0) - X_\delta(t_0)$ можно представить в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 f_{11}(t_0) + \ldots + \Delta_1 f_{1n}(t_0) \\ \ldots \\ \Delta_1 f_{n1}(t_0) + \ldots + \Delta_n f_{nn}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t_0) & \ldots & f_{1n}(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(t_0) & \ldots & f_{nn}(t_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \ldots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = F(t_0) \times \Delta,$$

где за $F_{n\times n}(t)$ обозначена матрица, составленная по столбцам из выбранной ФСР; $\Delta_{n\times 1}$ – столбец разностей произвольных постоянных. Матрица $F(t_0)$ фиксирована, при этом ещё и невырождена. Следовательно, справедливы представления

$$\Psi(t_0) - X_\delta(t_0) = F(t_0) \times \Delta \qquad \Delta = \big(F(t_0)\big)^{-1} \times \big(\Psi(t_0) - X_\delta(t_0)\big).$$

За норму квадратной матрицы далее обозначена норма Фробениуса $\|A\|_F$. По свойству согласованности этой нормы со спектральной нормой $\|x\|_2$

$$|\Delta| = \|\Delta\|_2 = \sqrt{\Delta_1^2 + \ldots + \Delta_n^2} = \left|\big(F(t_0)\big)^{-1} \times \big(\Psi(t_0) - X_\delta(t_0)\big)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\big(F(t_0)\big)^{-1}\right\|_F \cdot \left|\big(\Psi(t_0) - X_\delta(t_0)\big)\right| < \left\|\big(F(t_0)\big)^{-1}\right\|_F \cdot \delta.$$

Обозначим также $M_\delta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |\Delta_k| > 0$. Выше показано, что

$$M_\delta \leqslant \sqrt{\Delta_1^2 + \ldots + \Delta_n^2} < \left\| \big(F(t_0)\big)^{-1} \right\|_F \cdot \delta.$$

Например, если рассмотреть

$$\delta = \left(\left\| \big(F(t_0)\big)^{-1} \right\|_F \right)^{-1}, \text{ то получим } M_\delta < 1.$$

Из $\left|\Psi(t_1) - X_\delta(t_1)\right| \geqslant \varepsilon$ вытекает

$$\varepsilon \leqslant \left|\Psi(t_1) - X_\delta(t_1)\right| = \left|\Delta_1 f_1(t_1) + \ldots + \Delta_n f_n(t_n)\right| \leqslant \left|\Delta_1 f_1(t_1)\right| + \ldots + \left|\Delta_n f_n(t_n)\right|$$
$$\leqslant M_\delta\Big(\left|f_1(t_1)\right| + \ldots + \left|f_n(t_1)\right|\Big) < \left|f_1(t_1)\right| + \ldots + \left|f_n(t_1)\right|$$

С другой стороны, для всех $t \geqslant t_0$ имеем $\left|f_1(t)\right| + \ldots + \left|f_n(t)\right| < \dfrac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon$. В частности, подстановка в последнее неравенство $t = t_1$ даёт противоречие, которое доказывает лемму.

□

Доказательство основного утверждения. Пусть линейная система $X'(t) - AX(t) = G(t)$ имеет устойчивое решение $\Phi(t)$. Тогда замена переменных $U(t) = X(t) - \Phi(t)$ приводит к новой линейной системе $U'(t) - AU(t) = A\Phi(t) + G(t) - \Phi'(t)$, в которой уже нулевое решение будет устойчивым. Нулевое решение может быть решением только однородной системы, значит система имеет вид $U(t) - AU(t) = O$. По доказанной лемме все решения этой однородной системы устойчивы.

Пусть теперь $\Psi(t)$ – любое другое решение исходной системы. Оно устойчиво, если и только если устойчиво нулевое решение системы, полученной после замены $V(t) = X(t) - \Psi(t)$. Но эта замена приводит к системе $V(t) - AV(t) = O$, полностью совпадающей с системой выше. Следовательно, и её нулевое решение устойчиво. Теорема полностью доказана.