Любая задача Коши вида $\begin{cases} \ddot{x}(t) + p(t)x(t) = 0 \\ x(t_0) = \alpha \\ \dot{x}(t_0) = \beta \end{cases}$ имеет единственное продолжаемое на всю числовую прямую решение даже в точках $t_0 = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ разрыва функции $p(t)$. Действительно, и в левой, и в правой полуокрестностях всякой такой точки t_0 задача Коши будет удовлетворять условиям теоремы Пикара и иметь там единственное решение. Если соединить полученные, вообще говоря, разные функции в левой и правой полуокрестностях, то получится итоговое непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши, вторая производная которого может быть разрывной там, где разрывна $p(t)$. Процесс также можно продолжить, то есть посчитать значения $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ в ближайшей точке разрыва $p(t)$ и составить из неё новую задачу Коши, решение которой также будет единственным и непрерывно дифференцируемым.

Перейдём к равносильной системе $\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ \dot{u}(t) = -p(t)x(t) \end{cases}$, или в матричной форме $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$, где $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}$. Искать фундаментальную матрицу решений будем из $X(\mathrm{O}_2) = E_2$. Искомая матрица монодромии $C = C_{2\times 2}$ такова, что $X(t + 2\pi) = X(t)C$ для всех t. В частности, $X(\pi) = X(-\pi)C$ и $C = \big(X(-\pi)\big)^{-1}X(\pi)$.

$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{pmatrix}$, $X(\mathrm{O}_2) = \begin{pmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ u_1(0) & u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Условимся без ограничения общности, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Решив эти две задачи Коши на промежутке $t \in [-\pi; \pi]$, получаем

$$x_1(t) = \begin{cases} \cos(bt), \text{ если } t \in [-\pi; 0] \\ \cos(at), \text{ если } t \in (0; \pi] \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} g_b(t), \text{ если } t \in [-\pi; 0] \\ g_a(t), \text{ если } t \in (0; \pi] \end{cases}$$

$$u_1(t) = \begin{cases} -b\sin(bt), \text{ если } t \in [-\pi; 0] \\ -a\sin(at), \text{ если } t \in (0; \pi] \end{cases} \qquad u_2(t) = \begin{cases} \cos(bt), \text{ если } t \in [-\pi; 0] \\ \cos(at), \text{ если } t \in (0; \pi] \end{cases},$$

где $g_s(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{s}\sin(st), \text{ если } s > 0 \\ t, \text{ если } s = 0 \end{cases}$ – нечётная функция, необходимая для покрытия случаев $a = 0$ и $b = 0$.

Пользуясь непрерывностью решений, будем находить значения этих четырёх функций в π и $-\pi$ как соответствующие пределы при $t \to -\pi + 0$ и $t \to \pi - 0$ соответственно.

$$X(-\pi) = \begin{pmatrix} \cos(b\pi) & -g_b(\pi) \\ b\sin(b\pi) & \cos(b\pi) \end{pmatrix} \qquad X(\pi) = \begin{pmatrix} \cos(a\pi) & g_a(\pi) \\ -a\sin(a\pi) & \cos(a\pi) \end{pmatrix}$$

$$\det\big(X(-\pi)\big) = 1 \qquad \big(X(-\pi)\big)^{-1} = \operatorname{adj}\big(X(-\pi)\big) = \begin{pmatrix} \cos(b\pi) & g_b(\pi) \\ -b\sin(b\pi) & \cos(b\pi) \end{pmatrix}$$

Итак, матрица монодромии равняется

$$C = \begin{pmatrix} \cos(a\pi)\cos(b\pi) - a\sin(a\pi)g_b(\pi) & g_a(\pi)\cos(b\pi) + \cos(a\pi)\cos(b\pi) \\ -b\cos(a\pi)\sin(b\pi) - a\sin(a\pi)\cos(b\pi) & -bg_a(\pi)\sin(b\pi) + \cos(a\pi)\cos(b\pi) \end{pmatrix}.$$

Для каждого из перечисленных далее случаев мультипликаторы ρ_1 и ρ_2 целесообразнее находить, если матрица монодромии предварительно упрощена. Факт устойчивости устанавливается по следующему критерию, формулировка которого взята из книги Ламберто Чезари «Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений», глава II, § 4, предложение 4.1.2.

Критерий (устойчивости по мультипликаторам)**.**

Пусть дана линейная однородная система с периодическими коэффицентами.

- Для асимптотической устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы лежали внутри единичного круга $|\rho| < 1$.
- Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы
  1) все мультипликаторы лежали в замкнутом единичном круге $|\rho| \leqslant 1$;
  2) каждый мультипликатор ρ_k, лежащий на единичной окружности (т.е. $|\rho_k| = 1$), имел кратность как корень характеристического (векового) уравнения $\det(C - \rho E) = 0$, равную дефекту $\operatorname{null}(C - \rho_k E)$.

а) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 0$. $C = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. $\det(C - \rho E) = \rho^2 + \dfrac{\pi}{2}\rho + 1$. $2\rho^2 + \pi\rho + 2 = 0$. $\rho_1 = -\dfrac{\pi}{4} - \sqrt{1 - \dfrac{\pi^2}{16}}\, i$. $\rho_2 = -\dfrac{\pi}{4} + \sqrt{1 - \dfrac{\pi^2}{16}}\, i$. $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$, и нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

б) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$. $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. $\det(C - \rho E) = \rho^2 + 1$. $\rho_1 = -i$, $\rho_2 = i$. $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$, и нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

в) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$. $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. $\det(C - \rho E) = \left(\rho - \dfrac{1}{3}\right)(\rho - 3)$. $\rho_1 = \dfrac{1}{3}$, $\rho_2 = 3$, и нулевое решение неустойчиво.

г) $a = \dfrac{3}{4}$, $b = 0$. $C = \begin{pmatrix} \dfrac{-4 - 3\pi}{4\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\dfrac{3}{4\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. $\det(C - \rho E) = \rho^2 + \left(\dfrac{3\pi + 8}{4\sqrt{2}}\right)\rho + \dfrac{3\pi + 5}{8}$.

$\rho_1 = \dfrac{-8 - 3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 16}}{8\sqrt{2}}$, $\rho_2 = \dfrac{-8 - 3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 16}}{8\sqrt{2}}$. Но $\rho_1 < \dfrac{-8 - 3 \cdot 3 - \sqrt{9 \cdot 3^2 - 16}}{8 \cdot 2} = \dfrac{-17 - \sqrt{65}}{16} < \dfrac{-17 - 8}{16} = -\dfrac{25}{16} < -1$, а нулевое решение неустойчиво.

д) $a = 1$, $b = 0$. $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\det\left(C - \rho E\right) = \left(\rho + 1\right)^2$. $\rho_1 = \rho_2 = -1$. $\left|\rho_1\right| = \left|\rho_2\right| = 1$. $\operatorname{null}\left(C - \rho_1 E\right) = \operatorname{null}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2-1 = 1$, а кратность корня равна 2. Из-за этого нулевое решение неустойчиво.

е) $a = 1$, $b = \dfrac{3}{2}$. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$. $\det\left(C - \rho E\right) = \rho^2$. $\rho_1 = \rho_2 = 0$, и решение асимптотически устойчиво.