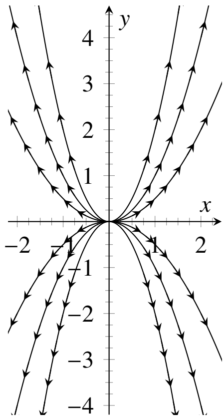
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot y}{\dot x} = \dfrac{2y}{x}$. $\dfrac{x^2 y'_x(x) - 2xy(x)}{x^4} = 0$. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y(x)}{x^2}\right) = 0$. $y = Cx^2$. Итак, траекториями системы являются параболы, проходящие через начало координат фазовой плоскости.

На рисунке показаны траектории вместе с направляющими векторами, посчитанными в некоторых точках вдоль траекторий. Характер направлений указывает на то, что решения удаляются от начала координат, то есть от нулевого решения $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так что решение неустойчиво, а особая точка $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ относится к типу "узел".



Докажем по определению неустойчивость. Общее решение имеет вид $X(t) = \begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^{2t} \end{pmatrix}$. Для $t \geqslant t_0 = 0$

$$\big(X(t) - \Phi(t)\big)^2 = A^2 e^{2t} + B^2 e^{4t} \qquad \big(X(t_0) - \Phi(t_0)\big)^2 = A^2 + B^2$$

Для $\varepsilon = 1$ и любого $\delta > 0$ потребуем, чтобы A и B были таковы, что $0 < A^2 + B^2 < \delta^2$. Обе функции e^{2t} и e^{4t} возрастают, то есть при $t \geqslant t_0 = 0$ будет $e^{4t} \geqslant e^{2t}$. Однако, при $t \geqslant \max\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{A^2 + B^2}\right); 0\right)$ имеем $A^2 e^{2t} + B^2 e^{4t} \geqslant e^{2t}\left(A^2 + B^2\right) \geqslant 1 = \varepsilon^2$, и поэтому решение неустойчиво.