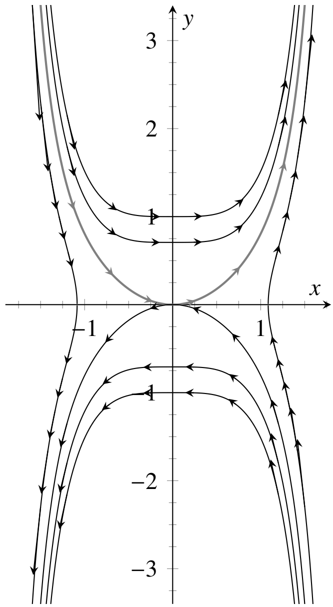
Найдём траектории этой системы. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{x^3\left(1+y^2\right)}{y}$. $\dfrac{2yy'_x(x)}{1+y^2} = 2x^3$. $\ln\left(1+y^2\right) = \dfrac{1}{2}x^4 + C$. $y^2 = Ce^{\frac{1}{2}x^4} - 1$. Эти траектории определены только при $C > 0$.

Направления траекторий изображены на графике. Характер траекторий показывает, что с ростом t точка $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ удаляется от начала координат, поэтому решение неустойчиво.



Для доказательство неустойчивости будем использовать только траекторию $y = \sqrt{e^{\frac{1}{2}x^4} - 1}$. Она представляет особый интерес, так как проходит через начало координат, то есть через нулевое решение $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Это значит, что для всякого $\delta > 0$ можно подобрать точку I-ой четверти на этой траектории, лежащую в окрестности $O\big((0;0);\delta\big)$ начала координат радиуса δ. Эта траектория изображена на фазовой плоскости серым цветом.

Для всякого решения $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, составляющего такую траекторию, имеем при $t \geqslant t_0 = 0$

$$\left|X(t) - \Phi(t)\right| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x^2(t) + e^{\frac{1}{2}x^4(t)} - 1}$$

$$\left|X(t_0) - \Phi(t_0)\right| = \sqrt{x^2(0) + e^{\frac{1}{2}x^4(0)} - 1}$$

Пусть $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ и $\delta > 0$. Приведём для них пример такого решения, для которого $\sqrt{x^2(0) + e^{\frac{1}{2}x^4(0)} - 1} < \delta$, но при некоторых t будет $\sqrt{x^2(t) + e^{\frac{1}{2}x^4(t)} - 1} \geqslant \varepsilon$.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^3\left(1+y^2\right) \end{pmatrix} \\ x(0) = \min(1;\gamma) \\ y(0) = \sqrt{e^{\frac{1}{2}x^4(0)} - 1} \end{cases}$$

где $\gamma = \sqrt{\ln\left(\dfrac{\delta^2}{2} + 1\right)}$. Она удовлетворяет условию единственности, причём поскольку начальная точка фазовой плоскости $A_0 = \big(x(0); y(0)\big)$ лежит в I-ой четверти, $\frac{dx}{dt}(0) > 0$

и $\frac{dy}{dt}(0) > 0$. Это означает, что в окрестности точки A_0 обе функции $x(t)$ и $y(t)$ возрастают. С другой стороны, при $t \geqslant t_0$ точка остаётся на траектории, а значит и в I-ой четверти, а значит обе производные остаются положительными, а функции неограниченно возрастают.

$0 < x(0) \leqslant 1$, значит $x^2(0) \geqslant x^4(0)$. Для всех положительных a выполняется неравенство $a < e^a - 1$, а значит

$$\sqrt{x^2(0) + e^{\frac{1}{2}x^4(0)} - 1} < \sqrt{e^{x^2(0)} - 1 + e^{\frac{1}{2}x^2(0)} - 1} < \sqrt{2\left(e^{x^2(0)} - 1\right)} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2\left(e^{\gamma^2} - 1\right)} = \delta$$

Найдём такое $t_1 > t_0$, что для $t \geqslant t_1$ будет выполняться $x(t) \geqslant 1$. Тогда для таких t верно, что $x^4(t) \geqslant x^2(t)$ и

$$\sqrt{x^2(t) + e^{\frac{1}{2}x^4(t)} - 1} \geqslant \sqrt{x^2(t) + e^{\frac{1}{2}x^2(t)} - 1} > \sqrt{x^2(t) + \frac{1}{2}x^2(t)} = \sqrt{\frac{3}{2}x^2(t)} \geqslant \sqrt{\frac{3}{2}} = \varepsilon,$$

в чём и требовалось убедиться.