Для каждого пункта сначала будем находить общее решение $x = x(t)$, затем решение задачи Коши $\varphi(t)$. Затем будем доказывать устойчивость или неустойчивость по Ляпунову.

а) $3(t-1)\dot{x}(t) = x(t)$. $\dfrac{dx}{dt}\sqrt[3]{t-1} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}x(t) = 0$. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{t-1}}\right) = 0$. Общее решение имеет вид $x(t) = C\sqrt[3]{t-1}$; решение задачи Коши – это функция: $\varphi(t) = 0$.

$$\text{При } t \geqslant t_0 = 1 \text{ имеем:} \qquad \left|x(t) - \varphi(t)\right| = |C|\sqrt[3]{t-1}, \qquad \left|x(t_0) - \varphi(t_0)\right| = |C|.$$

Условие устойчивости не выполняется, приведём пример. Пусть $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ и C такое, что $0 < |C| < \delta$. При $t \geqslant |C|^{-3} + 1$ получаем $|C|\sqrt[3]{t-1} \geqslant 1 = \varepsilon$.

Таким образом, решение неустойчиво.

б) $\dot{x}(t) + \left(t^2 - 4\right)x(t) = 0$. $\dot{x}(t)e^{\frac{1}{3}t^3 - 4t} + \left(t^2 - 4\right)e^{\frac{1}{3}t^3 - 4t} = 0$. $\dfrac{d}{dt}\left(x(t)e^{\frac{1}{3}t^3 - 4t}\right) = 0$. $x(t) = Ce^{4t - \frac{1}{3}t^3}$ – общее решение; $\varphi(t) = 0$ – решение задачи Коши.

$$\text{При } t \geqslant t_0 = 0 \text{ имеем:} \qquad \left|x(t) - \varphi(t)\right| = |C|e^{4t - \frac{1}{3}t^3}, \qquad \left|x(t_0) - \varphi(t_0)\right| = |C|.$$

Функция $f(t) = e^{4t - \frac{1}{3}t^3}$ возрастает при $t \in [0; 2]$, убывает при $t \in [2; +\infty)$. Значит $t = 2$ – точка максимума и $\max\limits_{t \in [0;+\infty)} f(t) = f(2) = e^{\frac{16}{3}}$.

Возьмём $\delta(\varepsilon) = e^{-\frac{16}{3}} \cdot \varepsilon$ для наперёд выбранного $\varepsilon > 0$. Если $|C| < \delta$, то $|C|e^{4t - \frac{1}{3}t^3} < \delta e^{\frac{16}{3}} = \varepsilon$, и показана устойчивость решения.

в) $\dot{x}(t) + x(t) = t$. $\dot{x}(t)e^t + x(t)e^t = te^t$. $xe^t = (t-1)e^t + C$. $x(t) = Ce^{-t} + t - 1$ – общее решение; $\varphi(t) = 2e^{-t} + t - 1$ – решение задачи Коши.

$$\text{При } t \geqslant t_0 = 0 \text{ имеем:} \qquad \left|x(t) - \varphi(t)\right| = |C-2|e^{-t}, \qquad \left|x(t_0) - \varphi(t_0)\right| = |C-2|.$$

Для таких t выполняется $e^{-t} \leqslant 1$, а потому при выборе $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ из $|C-2| < \delta$ следует $|C-2|e^{-t} < \varepsilon$. Итак, решение устойчиво.

г) Поделив на x^3, получаем $\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 2\dfrac{1}{x^3}tx'(t) - 1 = 0$. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{t}{x^2}\right) = 1$. $\dfrac{t}{x^2} = t + C$. Итак, общее решение равняется $x(t) = \pm\sqrt{\dfrac{t}{t+C}}$; кроме того, есть дополнительное (но не особое) решение $\varphi(t) = 0$, которое и является решением данной задачи Коши. В качестве переменного решения $x(t)$ будем рассматривать любое, кроме дополнительного.

$$\text{При } t \geqslant t_0 = 1 \text{ имеем:} \qquad \left|x(t) - \varphi(t)\right| = \sqrt{\frac{t}{t+C}}, \qquad \left|x(t_0) - \varphi(t_0)\right| = \sqrt{\frac{1}{1+C}}.$$

Кроме того, $C > 0$, так как, если $C < 0$, то решения непродолжаемы на $t \in [t_0; +\infty)$, а при $C = 0$ решение равняется ± 1 и интереса не представляет.

Покажем, что решение неустойчиво. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и любое $\delta > 0$. Пусть $x(t)$ такое решение, что $\sqrt{\dfrac{1}{1+C}} < \delta$, то есть $C > 1 + \dfrac{1}{\delta^2}$. Однако, всякая функция $f(t) = \sqrt{\dfrac{t}{t+C}}$ возрастает, значит при $t \geqslant \dfrac{1}{3}C > \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{\delta^2}\right)$ получаем $\sqrt{\dfrac{t}{t+C}} \geqslant \sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}C}{\frac{1}{3}C + C}} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$. Это означает неустойчивость решения.