

Если в полярных координатах $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ имеем производную $\frac{dr}{d\theta} = A(r; \theta)$, то соответствующая производная в декартовых координатах $\frac{dy}{dx} = B(r; \theta)$ связана с исходной $A(r; \theta)$ соотношениями

$$\frac{dy}{dx} = B(A; r; \theta) = \frac{A \sin \theta + r \cos \theta}{A \cos \theta - r \sin \theta}; \quad \frac{dr}{d\theta} = A(B; r; \theta) = r \cdot \frac{B \sin \theta + \cos \theta}{B \cos \theta - \sin \theta}.$$

Для угла $\phi = 90^\circ$ имеем $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha \pm \phi) = \operatorname{tg}(\alpha \pm 90^\circ) = -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. С учётом указанного выше для данного угла ϕ всякое семейство изогональных траекторий $z(x)$ и соответствующее семейство в полярной системе $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$ удовлетворяют соотношениям

$$A_z = \rho \cdot \frac{B_z \sin \theta + \cos \theta}{B_z \cos \theta - \sin \theta}; \quad B_z(\rho; \theta) = -\frac{1}{B_y(\rho; \theta)}; \quad B_y = \frac{A_y \sin \theta + r \cos \theta}{A_y \cos \theta - r \sin \theta},$$

где введены обозначения $A_y = \frac{dr}{d\theta}$, $B_y = \frac{dy}{dx}$, $A_z = \frac{d\rho}{d\theta}$, $B_z = \frac{dz}{dx}$.

Последовательно подставив и затем упростив, получим следующую формулу:

$$A_z(\rho; \theta) = -\frac{\rho^2}{A_y(\rho; \theta)}.$$

$r = a \cos^2 \theta$. $a = \frac{r}{\cos^2 \theta}$. $0 = \frac{r' \cos^2 \theta + 2r \sin \theta \cos \theta}{\cos^4 \theta}$. $r' = -2r \operatorname{tg} \theta = A_y$. Таким образом, уравнение изогональных (ортогональных) траекторий в обозначениях, указанных выше, принимает форму $\frac{d\rho}{d\theta} = A_z = -\frac{\rho^2}{A_y} = \frac{\rho^2}{2\rho \operatorname{tg} \theta}$. $\rho'(\theta) = \frac{1}{2}\rho(\theta) \operatorname{ctg} \theta$.

Замечание. Уравнение $\rho' = \frac{1}{2}\rho \operatorname{ctg} \theta$ имеет общее решение $\rho = C\sqrt{|\sin \theta|}$.