Для угла $\varphi = 45°$ имеем $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi) = \operatorname{tg}(\alpha \pm 45°) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm 1}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha}$.

$x^2 + y^2 = 2ax$. $2a = \dfrac{y^2 + x^2}{x}$. $0 = \dfrac{(2yy' + 2x)x - y^2 - x^2}{x^2}$. $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$. Имеем дифференциальное уравнение $y' = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$. $\operatorname{tg}\beta$ будет иметь, вообще говоря, два различных значения для заданного $\operatorname{tg}\alpha$. Оба случая рассмотрены ниже.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\dfrac{y^2 - x^2}{2xy} + 1}{1 - \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}} = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{-y^2 + 2xy + x^2} = g(x; y(x))$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\dfrac{y^2 - x^2}{2xy} - 1}{1 + \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2} = h(x; y(x))$$

Итак, имеем два уравнения изогональных траекторий вида $z'(x) = g(x; z(x))$ и $z'(x) = h(x; z(x))$. Более конкретно, $z' = \dfrac{z^2 + 2xz - x^2}{-z^2 + 2xz + x^2}$ и $z' = \dfrac{z^2 - 2xz - x^2}{z^2 + 2xz - x^2}$.

Замечание. Ниже приведены решения соответствующих уравнений в виде квадратичных форм, каждая из которых в плоскости Oxz задаёт окружности. Кроме того, уравнения обладают по одному дополнительному (особому) решению, каждое из которых задаёт прямую. Формально эти два решения также относятся к изогональным траекториям.

Уравнение	Квадратичная форма	Центр	Радиус	Прямая
$z' = \dfrac{z^2 + 2xz - x^2}{-z^2 + 2xz + x^2}$	$z^2 - 2Cz + x^2 + 2Cx = 0$	$(-C; C)$	$\sqrt{2}\lvert C\rvert$	$y = x$
$z' = \dfrac{z^2 - 2xz - x^2}{z^2 + 2xz - x^2}$	$z^2 - 2Cz + x^2 - 2Cx = 0$	$(C; C)$	$\sqrt{2}\lvert C\rvert$	$y = -x$