$x'(t) - a(x)x(t) = 0$. Обозначим за $A(t)$ интеграл $A(t) = \int\limits_0^t a(s)ds$, $\dfrac{dA}{dt} = a(t)$. $x'(t)e^{-A(t)} - e^{-A(t)}a(x)x(t) = 0$. $\dfrac{d}{dt}\left(xe^{-A(t)}\right) = 0$. $x(t) = Ce^{A(t)}$ – общее решение. Условие $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} A(t) < +\infty$ равносильно ограниченности сверху этой функции, то есть тому, что существует такое α, что $A(t) \leqslant \alpha$ при всех $t \geqslant t_0$.

Далее за $\varphi(t) = 0$ обозначено нулевое решение; $t_0 = 0$.

Необходимость. Пусть $A(t)$ сверху неограничена при $t \geqslant 0$. Покажем, что решение $\varphi(t)$ неустойчиво.

Пусть $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ – произвольное и $\left|x(0) - \varphi(0)\right| = |C| < \delta$, $|C| \neq 0$. $A(t)$ неограничена, значит найдётся такое $t_1 > 0$, что $A(t_1) \geqslant \ln\left(\dfrac{\varepsilon}{|C|}\right)$. В таком случае $\left|x(t_1) - \varphi(t_1)\right| = |C|e^{A(t_1)} \geqslant \varepsilon$. Последнее означает, что решение неустойчиво.

Достаточность. Пусть теперь $A(t)$ ограничена сверху числом α. Покажем устойчивость решения.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{e^{\alpha}}$. Потребуем, чтобы $\left|x(0) - \varphi(0)\right| = |C| < \delta$. Из этого следует, что для всех $t \geqslant 0$

$$\left|x(t) - \varphi(t)\right| = |C|e^{A(t)} < \delta e^{\alpha} = \varepsilon.$$

Таким образом, устойчивость решения установлена. Теорема полностью доказана.