

$$x^2(t) + y^2(t) = \left( \frac{C_1 - C_2 t}{1 + t^2} \right)^2 + \left( C_1 t^3 e^{-t} + C_2 e^{-t} \right)^2. \text{ Выберем } t_0 = 0 \text{ и тогда } x^2(t_0) + y^2(t_0) = C_1^2 + C_2^2.$$

Путём исследования функций с помощью производной несложно вычислить:

- $\max_{t \geq 0} (|t|^3 e^{-t}) = \left( \frac{3}{e} \right)^3$  достигается при  $t = 3$ ;
- $\max_{t \in \mathbb{R}} \frac{1 + |t|}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$  достигается при  $t = \pm(\sqrt{2} - 1)$ .

Каждый из указанных максимумов меньше 2.

Для наперёд заданного  $\varepsilon > 0$  положим  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{13}}$ . Потребуем, чтобы  $C_1^2 + C_2^2 < \delta^2$ .

Из этого немедленно следует  $|C_1| < \delta$  и  $|C_2| < \delta$ . Обозначим теперь  $m = \max(|C_1|; |C_2|)$ , и тогда  $m < \delta$ . Отсюда имеем

$$\left| \frac{C_1 - C_2 t}{1 + t^2} \right| \leq \frac{|C_1| + |C_2| |t|}{1 + t^2} \leq \frac{m(1 + |t|)}{1 + t^2} < 2m; \quad \left| C_1 t^3 e^{-t} + C_2 e^{-t} \right| < 2m + m = 3m.$$

Наконец,  $x^2(t) + y^2(t) < (2m)^2 + (3m)^2 = 13m^2 < 13\delta^2 = \varepsilon^2$ , а поэтому решение устойчиво. Кроме того, при всяких  $C_1$  и  $C_2$  (в том числе при таких, что  $C_1^2 + C_2^2 < \delta^2$ )

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_1 - C_2 t}{1 + t^2} = 0 \text{ и } \lim_{t \rightarrow +\infty} (C_1 t^3 e^{-t} + C_2 e^{-t}) = 0, \text{ что позволяет утверждать } \lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 0.$$

Вывод: решение асимптотически устойчиво.