

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - y^3 \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$
 . Возьмём функцию Ляпунова  $v(x; y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ .  $\frac{dv}{dt} = -x^2 + 2xy -$   
 $-xy^3 + 2xy - 4y^2 = -x^2 + 4xy - 4y^2 - xy^3 = -(x + 2y)^2 - xy^3$ .

Рассматривать точки  $(x; y)$  будем только в окрестности  $|X| = \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon_0 = 2$ .

В области  $xy \geq 0$  имеем  $xy^3 = xy \cdot y^2 \geq 0$ , и тогда  $\frac{dv}{dt} \leq 0$ , причём  $\frac{dv}{dt} = 0$  тогда и только тогда, когда одновременно  $x + 2y = 0$  и  $xy^3 = 0$ . Последнее возможно только в начале координат. Итак, в этой области можно утверждать  $\frac{dv}{dt} < 0$ .

С другой стороны, в области  $xy < 0$  получаем  $\frac{dv}{dt} = -x^2 - 4y^2 + xy(4 - y^2)$ . В описанной выше окрестности  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon_0 = 2$ , то есть  $y^2 < 4$  и  $4 - y^2 > 0$ . Следовательно,  $xy(4 - y^2) < 0$  и  $\frac{dv}{dt} < 0$ , причём равенство нулю невозможно.

Итак, при всех возможных  $(x; y)$  внутри окрестности радиуса  $\varepsilon_0$  получаем  $\frac{dv}{dt} < 0$ . Теорема Ляпунова гарантирует асимптотическую устойчивость нулевого решения.