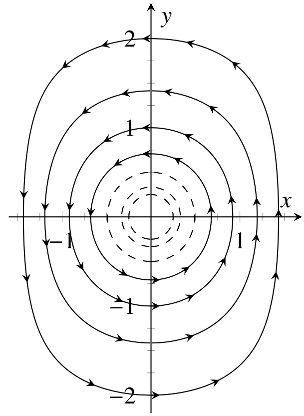
Траектории этой системы удовлетворяют уравнению $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot y}{\dot x} = -\dfrac{\sin x}{y\cos x}$. $2yy'_x(x) = -2\dfrac{\sin x}{\cos x}$. $y^2(x) = 2\ln|\cos x| + C$. Итак, траектории задаются $y(x) = \pm\sqrt{C + \ln\left(\cos^2 x\right)}$.

Они определены только при $C > 0$ и представляют собой замкнутые кривые при всех таких C. Эти траектории вместе с направляющими векторами показаны на графике. Оценив рисунок, можно утверждать, что замкнутую траекторию можно подобрать настолько, насколько необходимо, близкой к началу координат фазовой плоскости, то есть к нулевому решению $\Phi(t) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.



Вывод: решение устойчиво, хотя и не асимптотически.

Докажем это по определению. Для всякой начальной точки $A_0 = \big(x(t_0); y(t_0)\big)$ при условии $x(t_0) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\right)$ можно однозначно отыскать $C = y^2(t_0) - \ln\Big(\cos^2 x(t_0)\Big)$, и это означает, что через A_0 проходит единственная траектория. При $t \geqslant t_0$ точка будет оставаться на этой же траектории с неизменным C. Для удобства положим $t_0 = 0$.

Траектория $y^2(x) = 2\ln|\cos x| + C$ определена для $|x| \leqslant \arccos\left(e^{-\frac{C}{2}}\right) < \dfrac{\pi}{2}$. Обозначим за $\rho = \rho(t)$ расстояние от точки на траектории $X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ до начала координат.

$$\rho(t) = \rho\big(x(t)\big) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x^2(t) + \ln\big(\cos^2 x(t)\big) + C} = \sqrt{f\big(x(t)\big) + C},$$

где за $f(x)$ обозначено выражение $f(x) = x^2 + \ln\left(\cos^2 x\right)$. Эта функция чётная и убывает для $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$, потому что для таких x имеем $f'(x) = 2\big(x - \operatorname{tg} x\big) < 0$. Это значит, что $x^2 + \ln\left(\cos^2 x\right) = f(x) \leqslant f(0) = 0$.

Следовательно, в $x = 0$ расстояние наибольшее и равно $\rho_{\max}(C) = \sqrt{C}$; наименьшее достигается в концах отрезка $x = \pm\arccos\left(e^{-\frac{C}{2}}\right)$ и равно $\rho_{\min}(C) = \arccos\left(e^{-\frac{C}{2}}\right)$.

$$\big|X(t) - \Phi(t)\big| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \qquad \big|X(t_0) - \Phi(t_0)\big| = \sqrt{x^2(0) + y^2(0)}$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ – произвольное и $\delta(\varepsilon) = \operatorname{arctg}(\varepsilon)$. Потребуем также, чтобы для начальной точки A_0 выполнялось $\sqrt{x^2(0) + y^2(0)} < \delta$. Из этого следует

$$\delta > \sqrt{x^2(0) + y^2(0)} \geqslant \rho_{\min} = \arccos\left(e^{-\frac{C}{2}}\right).$$

Функция $g(s) = \arccos\left(e^{-\frac{s}{2}}\right)$ возрастает, что позволяет решить относительно C неравенство $\arccos\left(e^{-\frac{C}{2}}\right) < \delta$ и получить $C < \ln\left(\dfrac{1}{\cos^2\delta}\right)$.

Наконец, учитывая неравенство $\ln a \leqslant a - 1$ для всех a, основное тригонометрическое тождество и решение неравенства сверху, получаем при $t \geqslant t_0 = 0$

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \leqslant \rho_{\max}(C) = \sqrt{C} < \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos^2\delta}\right)} \leqslant \sqrt{\frac{1}{\cos^2\delta} - 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\delta} = \varepsilon.$$

Устойчивость доказана.