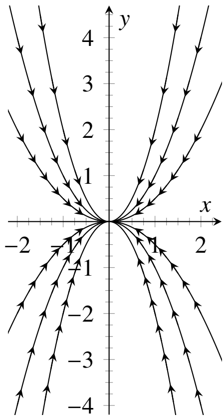
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{2y}{x}$. $\dfrac{x^2 y'_x(x) - 2xy(x)}{x^4} = 0$. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y(x)}{x^2}\right) = 0$. $y = Cx^2$. Итак, траекториями системы являются параболы, проходящие через начало координат фазовой плоскости.



На рисунке показаны траектории вместе с направляющими векторами, посчитанными в некоторых точках вдоль траекторий. По рисунку видно, что решения стремятся к началу координат, по сути к нулевому решению $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так что решение асимптотически устойчиво, а особая точка $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ относится к типу "узел".

Докажем по определению устойчивость. Общее решение имеет вид $X(t) = \begin{pmatrix} Ae^{-t} \\ Be^{-2t} \end{pmatrix}$. Для $t \geqslant t_0 = 0$

$$\big(X(t) - \Phi(t)\big)^2 = A^2 e^{-2t} + B^2 e^{-4t}$$

$$\big(X(t_0) - \Phi(t_0)\big)^2 = A^2 + B^2$$

Для $\varepsilon > 0$ положим $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ и потребуем, чтобы A и B были таковы, что $A^2 + B^2 < \delta^2$. Поскольку обе функции e^{-2t} и e^{-4t} убывают, $A^2 e^{-2t} + B^2 e^{-4t} \leqslant A^2 + B^2 < \delta^2 = \varepsilon^2$, и устойчивость показана.

Асимптотическая устойчивость вытекает из того факта, что

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-2t} = \lim_{t \to +\infty} e^{-4t} = 0.$$