

Параболы с осью, параллельной оси ординат, и касающиеся оси абсцисс задаются $y = a(x - b)^2$, $a \neq 0$. Парабола касается прямой $y = x$, если уравнение $a(x - b)^2 = x$ имеет единственное решение. $ax^2 - (2ab + 1)x + ab^2 = 0$. $D = 4a^2b^2 + 4ab + 1 - 4a^2b^2 = 4ab + 1$. $D = 0$, если $a = -\frac{1}{4b}$. Получаем $y = -\frac{1}{4b}(x - b)^2$. $(x - b)^2 + 4by = 0$. Взяв производную, получим $2(x - b) + 4by' = 0$. $4by' - 2b = -2x$. $b = -\frac{2x}{4y' - 2}$. Итак,

$$\left(x + \frac{2x}{4y' - 2}\right)^2 - \frac{2x \cdot 4y}{4y' - 2} = 0.$$

$$\left(\frac{4xy'}{4y' - 2}\right)^2 - \frac{8xy}{4y' - 2} = 0.$$

$$16x^2(y')^2 - 8xy(4y' - 2) = 0.$$

$$x(y')^2 - 2yy' + y = 0.$$