

$x'(t) - a(x)x(t) = 0$. Обозначим за $A(t)$ интеграл $A(t) = \int_0^t a(s)ds$, $\frac{dA}{dt} = a(t)$.

$x'(t)e^{-A(t)} - e^{-A(t)}a(x)x(t) = 0$. $\frac{d}{dt}(xe^{-A(t)}) = 0$. $x(t) = Ce^{A(t)}$ – общее решение.

Условие $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} A(t) < +\infty$ равносильно ограниченности сверху этой функции, то есть тому, что существует такое α , что $A(t) \leq \alpha$ при всех $t \geq t_0$.

Далее за $\varphi(t) = 0$ обозначено нулевое решение; $t_0 = 0$.

Необходимость. Пусть $A(t)$ сверху неограничена при $t \geq 0$. Покажем, что решение $\varphi(t)$ неустойчиво.

Пусть $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ – произвольное и $|x(0) - \varphi(0)| = |C| < \delta$, $|C| \neq 0$. $A(t)$ неограничена, значит найдётся такое $t_1 > 0$, что $A(t_1) \geq \ln\left(\frac{\varepsilon}{|C|}\right)$. В таком случае $|x(t_1) - \varphi(t_1)| = |C|e^{A(t_1)} \geq \varepsilon$. Последнее означает, что решение неустойчиво.

Достаточность. Пусть теперь $A(t)$ ограничена сверху числом α . Покажем устойчивость решения.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{e^\alpha}$. Потребуем, чтобы $|x(0) - \varphi(0)| = |C| < \delta$. Из этого следует, что для всех $t \geq 0$

$$|x(t) - \varphi(t)| = |C|e^{A(t)} < \delta e^\alpha = \varepsilon.$$

Таким образом, устойчивость решения установлена. Теорема полностью доказана.