Предложение.

При $r(\xi;\varphi) = \sqrt{\xi^2+\varphi^2} \to 0$ имеем $\xi\varphi = O\left(r^2\right)$. В частности, $\dfrac{\xi\varphi}{r^{1+\varepsilon}} = \dfrac{\gamma(r)r^2}{r^{1+\varepsilon}} \to 0$ для всех $\varepsilon \in (0;1)$.

Действительно, $0 \leqslant \left(|\xi|-|\varphi|\right)^2$ и $|\xi\varphi| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\xi^2+\varphi^2\right) \leqslant \dfrac{1}{2}\left(r^2+r^2\right) = r^2$, что показывает $\xi\varphi = O\left(r^2\right)$.

$\begin{cases} P(x;y) = \ln\left(1-y+y^2\right) \\ Q(x;y) = 3-\sqrt{x^2+8y} \end{cases}$; $\begin{cases} y^2-y=0 \\ x^2 = 9-8y \end{cases}$. Итак, получаем 4 особые точки: $A_1(-3;0)$, $A_2(-1;1)$, $A_3(1;1)$, $A_4(3;0)$.

Для оптимизации процесса разложим каждую функцию заранее. Далее будут применены замены вида $\begin{cases} x = \xi_i + x_i \\ y = \varphi_i + y_i \end{cases}$, где $A_i(x_i;y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. Предположим, что $\xi_i \to 0$ и $\varphi_i \to 0$. Тогда $y^2-y \to 0$ и $x^2+8y \to 9$, $O\left((x-x_i)^k\right) = O\left(\xi_i^k\right) = O\left((O(r_i))^k\right) = O\left(r_i^k\right)$ для натуральных k, и аналогично для $y-y_i$ и φ_i.

- $\ln\left(1-y+y^2\right) = -y+y^2+O\left(\left(-y+y^2\right)^2\right) = -y+y^2+O\left(r_i^2\right) = -\varphi_i-y_i+\varphi_i^2+2\varphi_i y_i + {}$ $+y_i^2+O\left(r_i^2\right) = \left(y_i^2-y_i\right)+(2y_i-1)\varphi_i+O\left(r_i^2\right) = (2y_i-1)\varphi_i+O\left(r_i^2\right)$, так как $y_i^2-y_i=0$;
- $3-\sqrt{x^2+8y} = 3-3\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{9}(x^2+8y)-1\right)} = -3\left(1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9}\left(x^2+8y\right)-1\right)+O\left(r_i^2\right)\right)$ $+3 = -\dfrac{1}{6}\left(x^2+8y\right)+\dfrac{3}{2}+O\left(r_i^2\right) = -\dfrac{1}{6}\left(x_i^2+2\xi_i x_i+\xi_i^2+8\varphi_i+8y_i\right)+\dfrac{3}{2}+O\left(r_i^2\right)$ $= -\dfrac{1}{6}\left(\left(x_i^2+8y_i\right)+2\xi_i x_i+8\varphi_i\right)+\dfrac{3}{2}+O\left(r_i^2\right) = -\dfrac{1}{3}x_i\xi_i-\dfrac{4}{3}\varphi_i+O\left(r_i^2\right)$, поскольку $x_i^2+8y_i = 9$.

Итак, после всякой замены $\begin{cases} x = \xi_i + x_i \\ y = \varphi_i + y_i \end{cases}$ имеем $\begin{cases} \dot{\xi}(t) = (2y_i-1)\varphi_i + O\left(r_i^2\right) \\ \dot{\varphi}(t) = -\dfrac{1}{3}x_i\xi_i - \dfrac{4}{3}\varphi_i + O\left(r_i^2\right) \end{cases}$.

1) $\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \xi - 3 \\ y = \varphi \end{cases}$. $\begin{cases} \dot{\xi} = -\varphi + O\left(r^2\right) \\ \dot{\varphi} = \xi - \dfrac{4}{3}\varphi + O\left(r^2\right) \end{cases}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$. $\lambda^2 - \dfrac{4}{3}\lambda + 1 = 0$. $\lambda_{1,2} = {}$ $= \dfrac{-2 \mp \sqrt{5}i}{3}$, особая точка $A_1(-3;0)$ – «фокус», причём устойчивый.

Система до линеаризации выглядит, как $\begin{cases} \dot{\xi} = \ln\left(1 + \varphi^2 - \varphi\right) \\ \dot{\varphi} = 3 - \sqrt{\xi^2 - 6\xi + 8\varphi + 9} \end{cases}$ и $\begin{cases} \dot{\xi}\left(\frac{1}{4}; 0\right) = 0 \\ \dot{\varphi}\left(\frac{1}{4}; 0\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$, то есть направления закручивания – против часовой.

2) $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \xi - 1 \\ y = \varphi + 1 \end{cases}$. $\begin{cases} \dot{\xi} = \varphi + O\left(r^2\right) \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{3}\xi - \frac{4}{3}\varphi + O\left(r^2\right) \end{cases}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$. $\lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda - \frac{1}{3} = 0$. $\lambda_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{7}}{3}$, особая точка $A_2(-1; 1)$ – «седло». $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 + \sqrt{7} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 - \sqrt{7} \end{pmatrix}$, а $\varphi = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}\xi$ и $\varphi = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}\xi$ – сепаратрисы.

3) $\begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \xi + 1 \\ y = \varphi + 1 \end{cases}$. $\begin{cases} \dot{\xi} = \varphi + O\left(r^2\right) \\ \dot{\varphi} = -\frac{1}{3}\xi - \frac{4}{3}\varphi + O\left(r^2\right) \end{cases}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$. $\lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0$. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$, особая точка $A_3(1; 1)$ – «узел», притом устойчивый.

$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$. $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\varphi = -\xi$ – трансверсаль, $\varphi = -\frac{1}{3}\xi$ – касательная.

4) $\begin{cases} x_4 = 3 \\ y_4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \xi + 3 \\ y = \varphi \end{cases}$. $\begin{cases} \dot{\xi} = -\varphi + O\left(r^2\right) \\ \dot{\varphi} = -\xi - \frac{4}{3}\varphi + O\left(r^2\right) \end{cases}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$. $\lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda - 1 = 0$. $\lambda_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{13}}{3}$, особая точка $A_4(3; 0)$ – «седло». $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 + \sqrt{13} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 - \sqrt{13} \end{pmatrix}$.

$\varphi = \frac{\sqrt{13} + 2}{3}\xi$, $\varphi = \frac{\sqrt{13} - 2}{3}\xi$ – сепаратрисы.