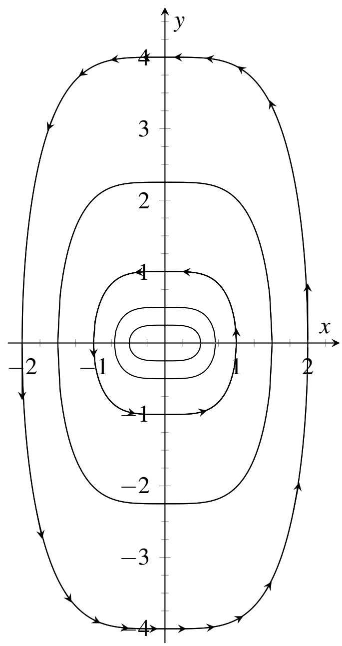
Исследовать решения этой системы на устойчивость путём нахождения общего решения будет затруднительно, так как общее решение, хотя и может быть выражено в квадратурах, будет включать в себя эллиптический интеграл

$$\int \frac{dt}{\sqrt{C^4 - t^4}}.$$

Сначала найдём траектории, задаваемые решением этой системы. $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{-2x^3}{y}$. $2yy'_x + 4x^3 = 0$. $y^2 + x^4 = C^4$ (в правой части взят C^4, потому что левая часть не даёт отрицательных значений). Для удобства также будем считать $C \geqslant 0$. Функция $y(x) = \sqrt{C^4 - x^4}$ задаёт выпуклый вверх график, а в точках $x = \pm C$ значение равно нулю, так что уравнение $y^2 + x^4 = C^4$ задаёт замкнутую выпуклую кривую.

Направляющие векторы, посчитанные для некоторых точек, указаны на рисунке. Из рисунка видно, что нулевое решение $\Phi_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ соответствует особой точке (началу координат) и эта точка относится к типу "центр". Решения, по всей видимости, являются периодическими функциями.



Найдём наибольшее расстояние $\rho_{\max} = \rho_{\max}(C)$ от точки на этой кривой до начала координат. Для всякого $x \in [-C; C]$ расстояние равняется $\rho = \rho(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{C^4 + x^2 - x^4}$.

Наибольшее расстояние достигается в точках $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, если она входит в область определения; в противном случае на $x \in [0; C]$ расстояние возрастает и наибольшее достигается при $x = C$.

Итак, точное наибольшее расстояние равно

$$\rho_{\max}(C) = \begin{cases} \sqrt{C^4 + \frac{1}{4}}, \text{ если } C > \frac{1}{2} \\ C, \text{ если } C \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Докажем теперь устойчивость нулевого решения. Имеем для всякого решения $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ и начального параметра $t_0 = 0$

$$\left| X(t) - \Phi(t) \right| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \qquad \left| X(t_0) - \Phi(t_0) \right| = \sqrt{x^2(0) + y^2(0)}$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и для удобства ограничим $\delta \leqslant \frac{1}{4}$. Положим таким образом $\delta = \min\left(\varepsilon^2; \frac{1}{4}\right)$. Заметим, что для всякой начальной точки $A_0 = \big(x(0); y(0)\big)$, отличной от начала координат, можно однозначно вычислить $C > 0$. Это значит, что через всякую начальную точку A_0 проходит некоторая траектория $y^2 + x^4 = C^4$, при этом единственная.

Итак, пусть $\sqrt{x^2(0) + y^2(0)} < \delta$. При таких условиях имеем $\big|x(0)\big| < \delta \leqslant \frac{1}{4}$ и $\big|y(0)\big| < \delta \leqslant \frac{1}{4}$. Следовательно, $C = \sqrt[4]{x^4(0) + y^2(0)} < \sqrt[4]{x^2(0) + y^2(0)} < \sqrt{\delta} \leqslant \frac{1}{2}$.

Для всякого $t \geqslant t_0 = 0$ расстояние $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ от точки $X(t)$ на траектории до начала координат таково, что

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \leqslant \rho_{\max} = C < \sqrt{\delta} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Таким образом, решение устойчиво, но не асимптотически, поскольку найденные траектории являются замкнутыми и к центру координат фазовой плоскости стремиться не могут.