Если в полярных координатах $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ имеем производную $\dfrac{dr}{d\theta} = A(r;\theta)$, то соответствующая производная в декартовых координатах $\dfrac{dy}{dx} = B(r;\theta)$ связана с исходной $A(r;\theta)$ соотношениями

$$\frac{dy}{dx} = B(A;r;\theta) = \frac{A\sin\theta + r\cos\theta}{A\cos\theta - r\sin\theta}; \qquad \frac{dr}{d\theta} = A(B;r;\theta) = r\cdot\frac{B\sin\theta + \cos\theta}{B\cos\theta - \sin\theta}.$$

Для угла $\varphi = 45^\circ$ имеем $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi) = \operatorname{tg}(\alpha \pm 45^\circ) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm 1}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha}$.

С учётом указанного выше для данного угла φ всякое семейство изогональных траекторий $z(x)$ и соответствующее семейство в полярной системе $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$ удовлетворяют соотношениям

$$A_z(\rho;\theta) = \rho\cdot\frac{B_z(\rho;\theta)\sin\theta + \cos\theta}{B_z(\rho;\theta)\cos\theta - \sin\theta}; \qquad B_z(\rho;\theta) = \frac{B_y(\rho;\theta) \pm 1}{1 \mp B_y(\rho;\theta)};$$

$$B_y(r;\theta) = \frac{A_y(r;\theta)\sin\theta + r\cos\theta}{A_y(r;\theta)\cos\theta - r\sin\theta},$$

где введены обозначения $A_y = \dfrac{dr}{d\theta}$, $B_y = \dfrac{dy}{dx}$, $A_z = \dfrac{d\rho}{d\theta}$, $B_z = \dfrac{dz}{dx}$.

Последовательно подставив и затем упростив, получим следующие формулы двух семейств изогональных траекторий:

$$A_z(\rho;\theta) = \rho\cdot\frac{A_y(\rho;\theta) - \rho}{A_y(\rho;\theta) + \rho} \qquad A_z(\rho;\theta) = -\rho\cdot\frac{A_y(\rho;\theta) + \rho}{A_y(\rho;\theta) - \rho}$$

$r = a\sin\theta$. $a = \dfrac{r}{\sin\theta}$. $0 = \dfrac{r'\sin\theta - r\cos\theta}{\sin^2\theta}$. $r'(\theta) = r\operatorname{ctg}\theta = A_y$.

Таким образом, два уравнения изогональных траекторий в обозначениях, указанных выше, принимают вид $\dfrac{d\rho}{d\theta} = A_z = \rho\cdot\dfrac{A_y - \rho}{A_y + \rho} = \rho\cdot\dfrac{\rho\operatorname{ctg}\theta - \rho}{\rho\operatorname{ctg}\theta + \rho} = \rho\operatorname{ctg}(\theta + 45^\circ)$, и по аналогии $\dfrac{d\rho}{d\theta} = A_z = -\rho\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\theta + 1}{\operatorname{ctg}\theta + 1} = \rho\operatorname{ctg}(\theta - 45^\circ)$.

$\rho'(\theta) = \rho\operatorname{ctg}(\theta \pm 45^\circ)$;

Замечание. Уравнения $\rho = \rho\operatorname{ctg}(\theta \pm 45^\circ)$ имеют общие решения $\rho = C\sin(\theta \pm 45^\circ)$.