

$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2y}{x} \cdot \frac{x^2 y'_x(x) - 2xy(x)}{x^4} = 0$ .  $\frac{d}{dx} \left( \frac{y(x)}{x^2} \right) = 0$ .  $y = Cx^2$ . Итак, траекториями системы являются параболы, проходящие через начало координат фазовой плоскости.

На рисунке показаны траектории вместе с направляющими векторами, посчитанными в некоторых точках вдоль траекторий. По рисунку видно, что решения стремятся к началу координат, по сути к нулевому решению  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , так что решение асимптотически устойчиво, а особая точка  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  относится к типу "узел".

Докажем по определению устойчивость. Общее решение имеет вид  $X(t) = \begin{pmatrix} Ae^{-t} \\ Be^{-2t} \end{pmatrix}$ . Для  $t \geq t_0 = 0$

$$(X(t) - \Phi(t))^2 = A^2 e^{-2t} + B^2 e^{-4t}$$

$$(X(t_0) - \Phi(t_0))^2 = A^2 + B^2$$

Для  $\varepsilon > 0$  положим  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$  и потребуем, чтобы  $A$  и  $B$  были таковы, что  $A^2 + B^2 < \delta^2$ . Поскольку обе функции  $e^{-2t}$  и  $e^{-4t}$  убывают,  $A^2 e^{-2t} + B^2 e^{-4t} \leq A^2 + B^2 < \delta^2 = \varepsilon^2$ , и устойчивость показана.

Асимптотическая устойчивость вытекает из того факта, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-4t} = 0.$$

