

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - x^3 \\ \dot{y} = 6x - 2y \end{cases}. \text{ Будем искать функцию Ляпунова в виде } v(x; y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{k}{2}y^2.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot f_x = -3x^2 + xy - x^4. \quad \frac{\partial v}{\partial y} \cdot f_y = 6kxy - 2ky^2. \quad \left. \frac{dv}{dt} \right| = -3x^2 + (1 + 6k)xy - 2ky^2 - x^4.$$

Однородный квадратный трёхчлен  $-3x^2 + (1 + 6k)xy - 2ky^2$  отрицательно определён, если  $D = (1 + 6k)^2 - 24k \leq 0$ . Последнее неравенство имеет единственное решение  $k = \frac{1}{6}$ .

Отсюда получаем искомую квадратичную форму  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}y^2$ . Рассмотрим пропорциональную ей  $v(x; y) = 3x^2 + \frac{1}{2}y^2$ .  $\left. \frac{dv}{dt} \right| = -18x^2 + 12xy - 2y^2 - 6x^4 = -2(3x + y)^2 - 6x^4$ .

Не считая начала координат, имеем  $\left. \frac{dv}{dt} \right| \leq 0$ , при этом  $\left. \frac{dv}{dt} \right| = 0$ , если и только если  $x = 0$  и  $3x + y = 0$ , то есть только в начале координат.

Итак,  $\left. \frac{dv}{dt} \right| < 0$  и  $\left. \frac{dv}{dt} \right|$  непрерывна, то есть можно взять в точности  $w(x; y) = \left. \frac{dv}{dt} \right|$ , а потому по теореме Ляпунова нулевое решение асимптотически устойчиво.