Для касания окружности оси абсцисс необходимо и достаточно, чтобы её радиус равнялся модулю ординаты центра. Таким образом, вид уравнения такой окружности таков: $(x-a)^2+\left(y-b\right)^2=b^2$. $(x-a)^2+y^2-2by=0$. $(x-a)+yy'-by'=0$. Снова дифференцируем: $1+\left(y'\right)^2+yy''-by''=0$. Наконец, подставляем в исходное уравнение $\begin{cases} b=\dfrac{1+\left(y'\right)^2+yy''}{y''} \\ x-a=by'-yy' \end{cases}$, откуда $x-a=\dfrac{1+\left(y'\right)^2+yy''}{y''}y'-yy'=\dfrac{y'+\left(y'\right)^3}{y''}$.

$$\left(\frac{y'+\left(y'\right)^3}{y''}\right)^2+y^2-2y\frac{1+\left(y'\right)^2+yy''}{y''}=0.$$

$$\left(y'+\left(y'\right)^3\right)^2-y^2\left(y''\right)^2-2yy''-2y\left(y'\right)^2y''=0.$$

$$\left(y'\right)^2+2\left(y'\right)^4+\left(y'\right)^6-y^2\left(y''\right)^2-2yy''-2y\left(y'\right)^2y''=0.$$

$$\left(\left(y'\right)^6+3\left(y'\right)^4+3\left(y'\right)^2+1\right)-\left(\left(y'\right)^4+y^2\left(y''\right)^2+1+2\left(y'\right)^2+2yy''+2y\left(y'\right)^2y''\right)=0.$$

$$\left(\left(y'\right)^2+1\right)^3-\left(\left(y'\right)^2+yy''+1\right)^2=0.$$