Если в полярных координатах $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ имеем производную $\dfrac{dr}{d\theta} = A(r;\theta)$, то соответствующая производная в декартовых координатах $\dfrac{dy}{dx} = B(r;\theta)$ связана с исходной $A(r;\theta)$ соотношениями

$$\frac{dy}{dx} = B(A;r;\theta) = \frac{A\sin\theta + r\cos\theta}{A\cos\theta - r\sin\theta}; \qquad \frac{dr}{d\theta} = A(B;r;\theta) = r\cdot\frac{B\sin\theta + \cos\theta}{B\cos\theta - \sin\theta}.$$

Для угла $\varphi = 90^\circ$ имеем $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi) = \operatorname{tg}(\alpha \pm 90^\circ) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

С учётом указанного выше, для данного угла φ всякое семейство изогональных траекторий $z(x)$ и соответствующее семейство в полярной системе $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$ удовлетворяют соотношениям

$$A_z = \rho\cdot\frac{B_z\sin\theta + \cos\theta}{B_z\cos\theta - \sin\theta}; \qquad B_z(\rho;\theta) = -\frac{1}{B_y(r;\theta)}; \qquad B_y = \frac{A_y\sin\theta + r\cos\theta}{A_y\cos\theta - r\sin\theta},$$

где введены обозначения $A_y = \dfrac{dr}{d\theta}$, $B_y = \dfrac{dy}{dx}$, $A_z = \dfrac{d\rho}{d\theta}$, $B_z = \dfrac{dz}{dx}$.

Последовательно подставив и затем упростив, получим следующую формулу:

$$A_z(\rho;\theta) = -\frac{\rho^2}{A_y(r;\theta)}.$$

$r = a + \cos\theta$. $A_y = r'(\theta) = -\sin\theta$. Таким образом, уравнение изогональных (ортогональных) траекторий в обозначениях, указанных выше, принимает форму $\dfrac{d\rho}{d\theta} = A_z = -\dfrac{\rho^2}{A_y} = \dfrac{\rho^2}{\sin\theta}$. $\sin\theta\,\rho'(\theta) = \rho^2(\theta)$.

Замечание. Уравнение $\rho' = \dfrac{\rho^2}{\sin\theta}$ имеет общее решение

$$\rho = \frac{1}{C - \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right)}.$$