

$$\begin{cases} Q(x; y) = y + \sqrt{1 + 2x^2}; \\ P(x; y) = x + y + 1 \end{cases} ; \begin{cases} \sqrt{1 + 2x^2} = -y; \\ x = -y - 1 \end{cases} ; y^2 = 1 + 2y^2 + 4y + 2; y^2 + 4y + 3 = 0;$$

$y_1 = -1$, $y_2 = -3$, и оба являются корнями.

Особыми точками будут $A_1(0; -1)$ и $A_2(2; -3)$.

$$1) \quad y = \varphi - 1. \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi - 1 + \sqrt{1 - 2x^2}}{x + \varphi}; \quad \psi_\varphi(x; \varphi) = \sqrt{1 - 2x^2} - 1 = 1 + \frac{1}{2}(-2x^2) + o(x^2) - 1 = O(x^2) = O(r^2), \text{ так что, например, } \frac{\psi_\varphi(x; \varphi)}{r^{1+0,5}} \rightarrow 0 \text{ при } r(x; \varphi) \rightarrow 0.$$

Таким образом, уравнение с выделенными линейными частями имеет вид $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi}{x + \varphi}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)^2$. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и особая точка $A_1(0; -1)$ – «вырожденный узел».

$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Единственная сепаратриса $\varphi_1 = 0$ будет касательной для траекторий.

$$2) \quad \begin{cases} x = \xi + 2 \\ y = \varphi - 3 \end{cases} \cdot \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\varphi + \sqrt{9 + 2\xi^2 + 8\xi} - 3}{\xi + \varphi} \cdot \sqrt{9 + 2\xi^2 + 8\xi} - 3 = 3\sqrt{1 + \frac{2}{9}\xi^2 + \frac{8}{9}\xi} - 3 = 3\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\xi^2 + \frac{8}{9}\xi\right) + O\left(\left(\frac{2}{9}\xi^2 + \frac{8}{9}\xi\right)^2\right)\right) - 3 = \frac{4}{3}\xi + O(\xi^2) = \frac{4}{3}\xi + O(r^2) \text{ при } r \rightarrow 0.$$

Без нелинейностей получаем $\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\frac{4}{3}\xi + \varphi}{\xi + \varphi}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

$\det(A - \lambda E) = \frac{1}{3}(3\lambda^2 - 6\lambda - 1)$. $\lambda_1 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$, $\lambda_2 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$, и особая точка $A_2(2; -3)$ – «седло».

Для $\lambda_1 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$ имеем собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$, сепаратрису $\varphi_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\xi$, а для $\lambda_2 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$ имеем собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$, сепаратрису $\varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\xi$.