

Уравнение  $y''(x) - 2(x-1)y'(x) + x^2y = 0$  необходимо привести к каноническому виду прежде, чем применять преобразование Лиувилля (пример 737\*). Это можно сделать, например, заменой

$$y(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int p(x) dx\right) z(x)$$

В нашем случае  $p(x) = -2(x-1)$ ,  $q(x) = x^2$  так что заменим

$$y(x) = \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right) z(x)$$

Инвариант уравнения равен

$$Q_{z(x)}(x) = q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) = 2x$$

После замены имеем уравнение  $z''(x) + 2xz(x) = 0$ . Теперь преобразуем полученное уравнение по Лиувиллю. В обозначениях задачи 737\*  $\psi(x) = (2x)^{-\frac{1}{4}}$ ,

$$\varphi(x) = \int_0^x (\psi(s))^{-2} ds = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

Соответственно, необходимо заменить переменные следующим образом:

$$\begin{cases} z = \psi(x)u = (2x)^{-\frac{1}{4}}u \\ t = \varphi(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Инвариант преобразованного в терминах  $z(t)$  уравнения принимает вид

$$Q_{z(t)}(t) = 1 + \psi^3(x)\psi''(x) = 1 + \frac{5}{34}x^{-3} = 1 + O(x^{-3}) = 1 + O(t^{-2})$$

Следовательно, для фундаментальной системы решений уравнения  $z''(t) + Q_{z(t)}z(t) = 0$  получаем следующие оценки:

$$z_1(t) = \cos(t) + O(t^{-1}) \quad z_2(t) = \sin(t) + O(t^{-1})$$

Подставляя обратно, получаем

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right) (2x)^{-\frac{1}{4}} z_1(t) = \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right) (2x)^{-\frac{1}{4}} \left( \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \right) \\ &= \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right) \left( (2x)^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + O\left(x^{-\frac{7}{4}}\right) \right) \end{aligned}$$

Итак, оценка фундаментальной системы решений уравнения  $y''(x) - 2(x-1)y'(x) + x^2y = 0$  такова:

$$y_1(x) = \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right) \left( (2x)^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + O\left(x^{-\frac{7}{4}}\right) \right)$$

$$y_2(x) = \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right) \left( (2x)^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + O\left(x^{-\frac{7}{4}}\right) \right)$$