

Лемма. Если у линейной однородной системы дифференциальных уравнений нулевое решение устойчиво, то и всякое решение устойчиво.

Доказательство. Предположим обратное, то есть то, что нулевое решение устойчиво, но какое-то другое $\Psi(t)$ неустойчиво. Это значит, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ существует другое ненулевое решение $X_\delta(t)$ и такое $t_1 = t_1(\delta) > t_0$, что $|\Psi(t_0) - X_\delta(t_0)| < \delta$, но $|\Psi(t_1) - X_\delta(t_1)| \geq \varepsilon$.

Система уравнений линейная, значит всякое её решение можно выразить в виде $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + C_n f_n(t)$, где $f_i(t)$, $1 \leq i \leq n$ — это столбцы, составляющие фундаментальную систему решений. В ней любую функцию можно умножить на ненулевой скаляр и полученная ФСР всё равно останется корректной.

Подберём фундаментальную систему решений надлежащим образом. Возьмём любую ФСР и t_0 такое, чтобы векторы $f_1(t_0), \dots, f_n(t_0)$ были линейно независимы (то есть матрица A , составленная из этих векторов-столбцов, имела $\det A \neq 0$). Далее подберём такое $\gamma > 0$, что для любого решения $X(t)$ из $|X(t_0)| < \gamma$ следует $|X(t)| < \frac{\varepsilon}{n}$ для всех $t \geq t_0$. Наконец, в выбранной ФСР умножим каждую функцию на такие ненулевые скаляры, чтобы выполнялись $|f_k(t_0)| < \gamma$, $1 \leq k \leq n$. Из этого следуют неравенства $|f_k(t)| < \frac{\varepsilon}{n}$, а линейная независимость векторов $f_1(t_0), \dots, f_n(t_0)$ не нарушается, так как умножение столбцов матрицы A приведёт к умножению её определителя на ненулевые числа. Полученный набор функций положим новой ФСР. Стоит обратить особое внимание на тот факт, что построение ФСР указанным образом никак не зависит ни от δ , ни от $t_1 = t_1(\delta)$.

В терминах подобранной выше ФСР распишем

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= A_1 f_1(t) + \dots + A_n f_n(t) & X_\delta(t) &= B_1 f_1(t) + \dots + B_n f_n(t) \\ \Psi(t) - X_\delta(t) &= \Delta_1 f_1(t) + \dots + \Delta_n f_n(t) & \Delta_k &= A_k - B_k \end{aligned}$$

Разность $\Psi(t_0) - X_\delta(t_0)$ можно представить в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 f_{11}(t_0) + \dots + \Delta_1 f_{1n}(t_0) \\ \dots \\ \Delta_1 f_{n1}(t_0) + \dots + \Delta_n f_{nn}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t_0) & \dots & f_{1n}(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t_0) & \dots & f_{nn}(t_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \dots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = F(t_0) \times \Delta,$$

где за $F_{n \times n}(t)$ обозначена матрица, составленная по столбцам из выбранной ФСР; $\Delta_{n \times 1}$ — столбец разностей произвольных постоянных. Матрица $F(t_0)$ фиксирована, при этом ещё и невырождена. Следовательно, справедливы представления

$$\Psi(t_0) - X_\delta(t_0) = F(t_0) \times \Delta \quad \Delta = (F(t_0))^{-1} \times (\Psi(t_0) - X_\delta(t_0)).$$

За норму квадратной матрицы далее обозначена норма Фробениуса $\|A\|_F$. По свойству согласованности этой нормы со спектральной нормой $\|x\|_2$

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \|\Delta\|_2 = \sqrt{\Delta_1^2 + \dots + \Delta_n^2} = \left| (F(t_0))^{-1} \times (\Psi(t_0) - X_\delta(t_0)) \right| \leq \\ &\leq \left\| (F(t_0))^{-1} \right\|_F \cdot |(\Psi(t_0) - X_\delta(t_0))| < \left\| (F(t_0))^{-1} \right\|_F \cdot \delta. \end{aligned}$$

Обозначим также $M_\delta = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta_k| > 0$. Выше показано, что

$$M_\delta \leq \sqrt{\Delta_1^2 + \dots + \Delta_n^2} < \left\| (F(t_0))^{-1} \right\|_F \cdot \delta.$$

Например, если рассмотреть

$$\delta = \left(\left\| (F(t_0))^{-1} \right\|_F \right)^{-1}, \text{ то получим } M_\delta < 1.$$

Из $|\Psi(t_1) - X_\delta(t_1)| \geq \varepsilon$ вытекает

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |\Psi(t_1) - X_\delta(t_1)| = |\Delta_1 f_1(t_1) + \dots + \Delta_n f_n(t_n)| \leq |\Delta_1 f_1(t_1)| + \dots + |\Delta_n f_n(t_n)| \\ &\leq M_\delta (|f_1(t_1)| + \dots + |f_n(t_1)|) < |f_1(t_1)| + \dots + |f_n(t_1)| \end{aligned}$$

С другой стороны, для всех $t \geq t_0$ имеем $|f_1(t)| + \dots + |f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon$. В частности, подстановка в последнее неравенство $t = t_1$ даёт противоречие, которое доказывает лемму.

□

Доказательство основного утверждения. Пусть линейная система $X'(t) - AX(t) = G(t)$ имеет устойчивое решение $\Phi(t)$. Тогда замена переменных $U(t) = X(t) - \Phi(t)$ приводит к новой линейной системе $U'(t) - AU(t) = A\Phi(t) + G(t) - \Phi'(t)$, в которой уже нулевое решение будет устойчивым. Нулевое решение может быть решением только однородной системы, значит система имеет вид $U(t) - AU(t) = 0$. По доказанной лемме все решения этой однородной системы устойчивы.

Пусть теперь $\Psi(t)$ – любое другое решение исходной системы. Оно устойчиво если, и только если устойчиво нулевое решение системы, полученной после замены $V(t) = X(t) - \Psi(t)$. Но эта замена приводит к системе $V(t) - AV(t) = 0$, полностью совпадающей с системой выше. Следовательно, и её нулевое решение устойчиво. Теорема полностью доказана.