

Для угла $\varphi = 45^\circ$ имеем $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi) = \operatorname{tg}(\alpha \pm 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm 1}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha}$.

$x^2 + y^2 = a^2$. $2x + 2yy' = 0$. Имеем дифференциальное уравнение: $y' = -\frac{x}{y}$. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{x}{y}$. $\operatorname{tg} \beta$ будет иметь, вообще говоря, два различных значения для заданного $\operatorname{tg} \alpha$.

В случае со знаком «плюс» $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-\frac{x}{y} + 1}{1 + \frac{x}{y}} = \frac{y - x}{x + y} = g(x; y(x))$, а в случае со знаком «минус» $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-\frac{x}{y} - 1}{1 + \frac{x}{y}} = \frac{-y - x}{y - x} = h(x; y(x))$. Таким образом, имеем два уравнения изогональных траекторий вида $z'(x) = g(x; z(x))$ и $z'(x) = h(x; z(x))$. Более конкретно, $z' = \frac{z - x}{z + x}$ и $z' = -\frac{z + x}{z - x}$.

Замечание. Ниже приведены решения соответствующих уравнений в параметрической форме $\begin{cases} x(t) = Cf(t) \\ z(t) = Ct f(t) \end{cases}$ и в полярной форме $\begin{cases} x(\theta) = Cr(\theta) \cos \theta \\ z(\theta) = Cr(\theta) \sin \theta \end{cases}$.

Уравнение	Функция $f = f(t)$	Функция $r = r(\theta)$
$z' = \frac{z - x}{z + x}$	$f(t) = \frac{e^{-\operatorname{arctg} t}}{\sqrt{t^2 + 1}}$	$r(\theta) = e^{-\theta}$
$z' = -\frac{z + x}{z - x}$	$f(t) = \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{\sqrt{t^2 + 1}}$	$r(\theta) = e^\theta$