В окрестности точки $t = 0$ найдём фундаментальную матрицу решений $X(t)$ такую, что $X(O_2) = E_2$.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = 1 \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \in [-1;0] \\ at, \text{ если } t \in (0;1] \end{cases}$$

$$y_1(t) = \begin{cases} bt, \text{ если } t \in [-1;0] \\ 0, \text{ если } t \in (0;1] \end{cases} \qquad y_2(t) = 1$$

Матрица монодромии C такова, что для всех $X(t+2) = X(t)C$. В частности, $X(1) = X(-1)C$ и $C = \big(X(-1)\big)^{-1}X(1)$.

$$X(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}; \quad \big(X(-1)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}; \quad X(1) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & ab+1 \end{pmatrix}.$$

Вековое уравнение имеет вид

$$\det\big(C - \rho E\big) = \big(\rho - 1\big)\big(\rho - ab - 1\big) - ab = \rho^2 - (ab+2)\rho + 1 = 0.$$

Критерий (устойчивости по мультипликаторам)**.**

Пусть дана линейная однородная система с периодическими коэффициентами

- Для асимптотической устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы лежали внутри единичного круга $|\rho| < 1$.
- Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы
  1. все мультипликаторы лежали в замкнутом единичном круге $|\rho| \leqslant 1$;
  2. каждый мультипликатор ρ_k, лежащий на единичной окружности (т.е. $|\rho_k| = 1$), имел кратность как корень характеристического (векового) уравнения $\det\big(C - \rho E\big) = 0$, равную дефекту $\operatorname{null}\big(C - \rho_k E\big)$.

Уравнение и факт устойчивости эффективно зависит только от ab, так что для удобства переобозначим $ab = \gamma$. Исследовать будем уравнение $f\big(\rho\big) = \rho^2 - \big(\gamma+2\big)\rho + 1 = 0$.

1) Случай $D = \gamma\big(\gamma+4\big) > 0$. $\gamma \in (-\infty;-4) \cup (0;+\infty)$. Оба корня вещественны. Условия $\rho_1 \in [-1;1]$ и $\rho_2 \in [-1;1]$ равносильны выполнению: $f(-1) \geqslant 0$, $f(1) \geqslant 0$ и $\gamma_0 = \dfrac{\gamma+2}{2} \in [-1;1]$. При этом одновременное выполнение $f(1) = -\gamma > 0$ и $f(-1) = 4 + \gamma > 0$ означает, что $\gamma \in [-4;0]$. Последнее несовместимо с предыдущим, так что при всех $\gamma \in (-\infty;-4) \cup (0;+\infty)$ нулевое решение неустойчиво.

2) Случай $D = \gamma(\gamma+4) < 0$. $\gamma \in (-4;0)$.

$\rho_1 = \dfrac{\gamma+2+\sqrt{-\gamma(\gamma+4)}i}{2}$. $\rho_2 = \dfrac{\gamma+2-\sqrt{-\gamma(\gamma+4)}i}{2}$. $|\rho_1| = |\rho_2| = \dfrac{(\gamma+2)^2-\gamma(\gamma+4)}{4} = 1$. Поскольку в этом случае $\gamma = ab \neq 0$, обе матрицы $C-\rho_1E$ и $C-\rho_2E$ ненулевые, а потому их дефекты равняются 1. Таким образом, в этом случае нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

3) Случай $\gamma = ab = -4$. $b = -\dfrac{4}{a}$. $\rho_1 = \rho_2 = -1$. $C-\rho_1E = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & ab+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -\dfrac{4}{a} & -2 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rank}(C-\rho_1E) = 1$, $\operatorname{null}(C-\rho_1E) = 2-1 = 1$. Итак, нулевое решение неустойчиво.

4) Случай $\gamma = ab = 0$. $\rho_1 = \rho_2 = 1$. $C-\rho_1E = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

- Если $a^2+b^2 > 0$, то $\operatorname{rank}(C-\rho_1E) = 1$, $\operatorname{null}(C-\rho_1E) = 2-1 = 1$, и нулевое решение неустойчиво.
- Если $a = 0$ и $b = 0$, то $\operatorname{rank}(C-\rho_1E) = \operatorname{rank} O_2 = 0$, $\operatorname{null}(C-\rho_1E) = 2$, и нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

Окончательно получаем, что при $ab \in (-4;0)$, а также, если $a = 0$, $b = 0$, нулевое решение устойчиво, но не асимптотически; во всех остальных случаях нулевое решение неустойчиво.