

Предложение.

При $r(\xi; \varphi) = \sqrt{\xi^2 + \varphi^2} \rightarrow 0$ имеем $\xi\varphi = O(r^2)$. В частности, $\frac{\xi\varphi}{r^{1+\varepsilon}} = \frac{\gamma(r)r^2}{r^{1+\varepsilon}} \rightarrow 0$ для всех $\varepsilon \in (0; 1)$.

Действительно, $0 \leq (|\xi| - |\varphi|)^2$ и $|\xi\varphi| \leq \frac{1}{2}(\xi^2 + \varphi^2) \leq \frac{1}{2}(r^2 + r^2) = r^2$, что показывает $\xi\varphi = O(r^2)$.

$$\begin{cases} P(x; y) = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2 \\ Q(x; y) = \arctg(x^2 + xy) \end{cases}; \begin{cases} \sqrt{x^2 - y + 2} - 2 = 0 \\ \arctg(x^2 + xy) = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = x^2 - 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}; x(x + x^2 - 2) = 0.$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = 2 \end{cases}, \text{ и особые точки } - A_1(0; -2), A_2(1; -1) \text{ и } A_3(-2; 2).$$

Будем также пользоваться тем, что $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + O(u^2)$ и $\arctg(u) = u + O(u^3)$ при $u \rightarrow 0$.

1) $y = \varphi - 2$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{x^2 + \varphi + 4} - 2 = 2\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} - \frac{\varphi}{4}} - 2 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) + O\left(\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\varphi}{4}\right)^2\right)\right) - 2 = \\ &= -\frac{\varphi}{4} + O(r^2). \dot{\varphi} = \arctg(x^2 + x\varphi - 2x) = x^2 + x\varphi - 2x + O\left((x^2 + x\varphi - 2x)^3\right) = -2x + O(r^2). \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0. \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ а особая точка } A_1(0; -2) - \text{«седло»}. \end{aligned}$$

Найдём сепаратрисы. $A - \lambda_1 E \sim \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\varphi_1 = 2\sqrt{2}x$. Аналогично,

$$A - \lambda_2 E \sim \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \varphi_2 = -2\sqrt{2}x.$$

$$\begin{aligned} 2) \begin{cases} x = \xi + 1 \\ y = \varphi - 1 \end{cases}. \dot{\xi} &= \sqrt{\xi^2 + 2\xi - \varphi + 4} - 2 = 2\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi}{2} - \frac{\varphi}{4}} - 2 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi}{2} - \frac{\varphi}{4}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{\varphi}{4} + O\left(\left(\frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi}{2} - \frac{\varphi}{4}\right)^2\right)\right) - 2 = \frac{\xi}{2} - \frac{\varphi}{4} + O(r^2). \dot{\varphi} = \arctg((\xi + 1)(\xi + \varphi)) = \xi^2 + \xi + \xi\varphi + \\ &+ \varphi + O(r^3) = \xi + \varphi + O(r^2). A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \lambda_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{3}i}{4}, \text{ и особая точка } A_2(1; -1) \end{aligned}$$

является «фокусом», причём неустойчивым, то есть траектории раскручиваются.

$$\text{В } \begin{cases} \xi = -0,6 \\ \varphi = 0,6 \end{cases} \text{ для } \begin{cases} \dot{\xi} = \sqrt{\xi^2 + 2\xi - \varphi + 4} - 2 \\ \dot{\varphi} = \arctg((\xi + 1)(\xi + \varphi)) \end{cases} \text{ имеем вектор } \begin{cases} \dot{\xi}(-0,6; 0,6) = -0,4 \\ \dot{\varphi}(-0,6; 0,6) = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, направление раскручивания траекторий – против часовой.

$$3) \begin{cases} x = \xi - 2 \\ y = \varphi + 2 \end{cases}. \dot{\xi} = \sqrt{\xi^2 - 4\xi - \varphi + 4} - 2 = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2}{4} - \xi - \frac{\varphi}{4} \right) + O(r^2) \right) - 2 = -\xi - \frac{\varphi}{4} + O(r^2). \dot{\varphi} = \arctg((\xi - 2)(\xi + \varphi)) = \xi^2 - 2\xi + \xi\varphi - 2\varphi + O(r^3) = -2\xi - 2\varphi + O(r^2).$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \lambda_1 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}. \lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}. \lambda_1 < \lambda_2 < 0, \text{ поэтому особая точка}$$

$A_3(-2; 2)$ – «узел», при этом устойчивый. В полной аналогии с предыдущими случаями находим $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}; \varphi_1 = (2 + 2\sqrt{3})\xi$ – трансверсаль, а

$\varphi_2 = (2 - 2\sqrt{3})\xi$ – касательная.