

Для каждого пункта сначала будем находить общее решение $x = x(t)$, затем решение задачи Коши $\varphi(t)$. Затем будем доказывать устойчивость или неустойчивость по Ляпунову.

$$\text{а) } 3(t-1)\dot{x}(t) = x(t) \cdot \frac{dx}{dt} \sqrt[3]{t-1} - \frac{1}{3\sqrt[3]{(t-1)^2}} x(t) = 0. \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{t-1}} \right) = 0. \text{ Общее решение}$$

имеет вид $x(t) = C\sqrt[3]{t-1}$; решение задачи Коши – это функция: $\varphi(t) = 0$.

$$\text{При } t \geq t_0 = 1 \text{ имеем:} \quad |x(t) - \varphi(t)| = |C|\sqrt[3]{t-1}, \quad |x(t_0) - \varphi(t_0)| = |C|.$$

Условие устойчивости не выполняется, приведём пример. Пусть $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ и C такое, что $0 < |C| < \delta$. При $t \geq |C|^{-3} + 1$ получаем $|C|\sqrt[3]{t-1} \geq 1 = \varepsilon$.

Таким образом, решение неустойчиво.

$$\text{б) } \dot{x}(t) + (t^2 - 4)x(t) = 0. \quad \dot{x}(t)e^{\frac{1}{3}t^3 - 4t} + (t^2 - 4)e^{\frac{1}{3}t^3 - 4t}x(t) = 0. \quad \frac{d}{dt} \left(x(t)e^{\frac{1}{3}t^3 - 4t} \right) = 0.$$

$x(t) = Ce^{4t - \frac{1}{3}t^3}$ – общее решение; $\varphi(t) = 0$ – решение задачи Коши.

$$\text{При } t \geq t_0 = 0 \text{ имеем:} \quad |x(t) - \varphi(t)| = |C|e^{4t - \frac{1}{3}t^3}, \quad |x(t_0) - \varphi(t_0)| = |C|.$$

Функция $f(t) = e^{4t - \frac{1}{3}t^3}$ возрастает при $t \in [0; 2]$, убывает при $t \in [2; +\infty)$. Значит $t = 2$ – точка максимума и $\max_{t \in [0; +\infty)} f(t) = f(2) = e^{\frac{16}{3}}$.

Возьмём $\delta(\varepsilon) = e^{-\frac{16}{3}} \cdot \varepsilon$ для наперёд выбранного $\varepsilon > 0$. Если $|C| < \delta$, то $|C|e^{4t - \frac{1}{3}t^3} < \delta e^{\frac{16}{3}} = \varepsilon$, и показана устойчивость решения.

в) $\dot{x}(t) + x(t) = t \cdot \dot{x}(t)e^t + x(t)e^t = te^t \cdot xe^t = (t-1)e^t + C$. $x(t) = Ce^{-t} + t - 1$ – общее решение; $\varphi(t) = 2e^{-t} + t - 1$ – решение задачи Коши.

$$\text{При } t \geq t_0 = 0 \text{ имеем:} \quad |x(t) - \varphi(t)| = |C - 2|e^{-t}, \quad |x(t_0) - \varphi(t_0)| = |C - 2|.$$

Для таких t выполняется $e^{-t} \leq 1$, а потому при выборе $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ из $|C - 2| < \delta$ следует $|C - 2|e^{-t} < \varepsilon$. Итак, решение устойчиво.

$$\text{г) Поделив на } x^3, \text{ получаем } \left(\frac{1}{x^2} \right)' - 2 \frac{1}{x^3} tx'(t) - 1 = 0. \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{x^2} \right) = 1. \quad \frac{t}{x^2} = t + C. \text{ Итак,}$$

общее решение равняется $x(t) = \pm \sqrt{\frac{t}{t+C}}$; кроме того, есть дополнительное (но не особое) решение $\varphi(t) = 0$, которое и является решением данной задачи Коши. В качестве переменного решения $x(t)$ будем рассматривать любое, кроме дополнительного.

$$\text{При } t \geq t_0 = 1 \text{ имеем:} \quad |x(t) - \varphi(t)| = \sqrt{\frac{t}{t+C}}, \quad |x(t_0) - \varphi(t_0)| = \sqrt{\frac{1}{1+C}}.$$

Кроме того, $C > 0$, так как, если $C < 0$, то решения непродолжаемы на $t \in [t_0; +\infty)$, а при $C = 0$ решение равняется ± 1 и интереса не представляет.

Покажем, что решение неустойчиво. Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и любое $\delta > 0$. Пусть $x(t)$ такое решение, что $\sqrt{\frac{1}{1+C}} < \delta$, то есть $C > 1 + \frac{1}{\delta^2}$. Однако, всякая функция $f(t) = \sqrt{\frac{t}{t+C}}$ возрастает, значит при $t \geq \frac{1}{3}C > \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)$ получаем $\sqrt{\frac{t}{t+C}} \geq \sqrt{\frac{\frac{1}{3}C}{\frac{1}{3}C + C}} = \frac{1}{2} = \varepsilon$. Это означает неустойчивость решения.