

אלגוריתמים – מבחן מסכם.

שאלה	ניקוד
1	/10
2	/20
3	/20
4	/20
5	/12
6	/20
ס"ה	/102

פרופ' תמי תמיר

12.3.2012 – מועד ב'

ת.ז.:

מספר מחברת:

- משך המבחן: 3 שעות.
- מותר דף עזר אחד.
- מותר להשתמש בדפי טיוטא אך יש לענות רק על דפי הבחינה, במקום המוקצב לכך בכל שאלה.
- בכל שאלה או סעיף שמופיע לידם סימן ♣, ניתן לכתוב 'לא יודע' ולקבל רבע מהניקוד (ערך תחתון).
ב ה צ ל ח ה !

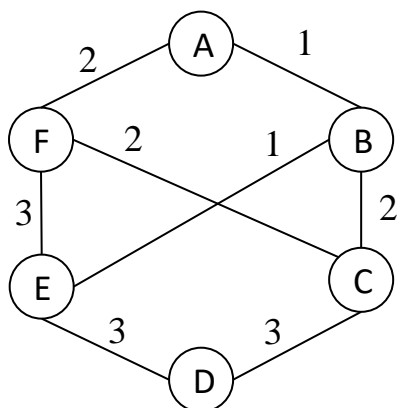
♣ שאלה 1 (10 נק')

נתון גרף קשיר, פשוט, לא מכוון $G=(V,E)$. מריצים BFS על הגרף $|V|$ פעמים, בכל פעם צומת אחר הוא השורש.

נתון שעבור קשת מסוימת, $e \in E$, $e=(a,b)$, מתקיים ש- e נמצאת בכל אחד מ- $|V|$ העצים הפורשים המתקבלים בריצות השונות.
הוכיחו או הפריכו: בכל מעגל שכולל את e יש מספר זוגי של קשתות.

♣ שאלה 2 (20 נק')

באיור נתון גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ עם משקלים חיוביים על הקשתות. בסעיפים 1-5 אין צורך לנמק את תשובותיכם.



1. (3 נק') מהו משקל עץ פורש מינימום של G .

2. (3 נק') כמה עפ"מים שונים יש ל- G ?

3. (3 נק') מהן קבוצות ה-union-find בהרצה של אלג' Kruskal אחרי שנבחנו 3 קשתות (במידה ויש מספר תשובות אפשריות, מספיק לכתוב אחת מהן).

4. (2 נק') מהי הקשת השניה שנכנסת לעפ"מ בהרצה של אלג' Prim המתחילה בצומת A?

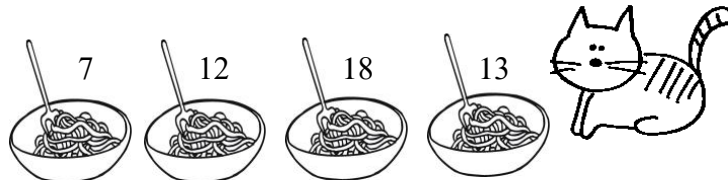
5. (3 נק') רישמו את כל הקשתות עבורן מתקיימת התכונה הבאה: "אם המשקל של קשת זו (בלבד) יגדל ב-1 אז משקל העפ"מ יגדל ב-1"

6. (6 נק') סמנו את התשובה הנכונה ביותר ונמקו: נתון גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ עם משקלים חיוביים על הקשתות. אם עבור קשת e , מתקיים $w(e) > 2$, ושהקטנת המשקל של e ב-2 גורמת להקטנת משקל העפ"מ ב-1 אז בגרף המקורי:
- e שייכת למעגל שיש בו קשת במשקל $w(e)-1$.
 - e נמצאת בכל העפ"מים של G (לפני השינוי).
 - בכל מעגל ש- e שייכת אליו, יש קשת במשקל $w(e)-1$.

נימוק:

♣ שאלה 3 (20 נק')

חתול רעב מגיע לרחבת הקפיטריה ומוצא שם שורה של n קערות פסטה. לכל $n \leq 1$, בקערה ה- i יש פסטה במשקל $w_i > 0$. החתול מעוניין לאכול פסטה במשקל כולל מקסימלי, אז אסור לו לאכול פסטה משתי קערות סמוכות. כלומר, אם הוא אוכל את הפסטה שבקערה מסוימת, אז אסור לו לאכול מהקערות שלפניה ואחריה בשורה (עבור הקערות $n, 1$ האיסור הוא לגבי קערה סמוכה אחת בלבד). למשל, בדוגמא, החתול יכול לאכול $13+12$ או $18+7$ או $13+7$. בשאלה זו נעזור לחתול למצוא, בעזרת תכנות דינאמי, מהו המשקל המקסימלי של מנות הפסטה שהוא יכול לאכול.



שימו לב: באפשרותכם לענות על שאלה א' (הקלה יותר, אך מאפשרת לצבור 11 נק' בלבד) או על שאלה ב' (בעמוד הבא).



סמנו X בריבוע אם בחרתם לענות על שאלה א'.

א. לכל $n \leq 1$, נסמן ב- $P(i)$ את המשקל המקסימלי של פסטה שניתן לאכול מתוך i הקערות הראשונות.

1. (1 נק') מהו הביטוי אותו מעוניינים להביא לערך מקסימלי?
2. (7 נק') כתבו נוסחת תכנות דינאמי לחישוב $P(i)$. הפרידו בין הבסיס למקרה הכללי.
3. (3 נק') מהי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

יש להסביר ולנמק את התשובות!

ב. החתול בעל מודעות גבוהה לבריאותו. לכל $1 \leq i \leq n$, החתול מברר ומוצא מהי כמות הכולסטרול c_i שיש במנה ה- i . מכיוון שבמנות רטבים שונים, אין תלות בין משקל המנה לכמות הכולסטרול שהיא מכילה, ובפרט, יתכן שעבור שתי מנות שונות j, k , מתקיים $w_j > w_k$ אך $c_j < c_k$. החתול מעוניין לאכול פסטה במשקל כולל מקסימלי, אך אסור לו לאכול פסטה משתי קערות סמוכות ואסור לו שהכמות הכוללת של כולסטרול בכל המנות שאכל תהיה גבוהה מ- B , עבור $B < \sum c_i$ נתון. לכל $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq B$, נסמן ב- $P(i, k)$ את המשקל המקסימלי של פסטה שניתן לאכול מתוך i הקערות הראשונות, כך שכמות הכולסטרול הכוללת במנות שנבחרו היא לכל היותר k .

- א. (2 נק') מהו הביטוי אותו מעוניינים להביא לערך מקסימלי?
- ב. (12 נק') כתבו נוסחת תכנות דינאמי לחישוב $P(i, k)$. הפרידו בין הבסיס למקרה הכללי.
- ג. (6 נק') תארו במילים מהי הטבלה אותה ימלא אלגוריתם התכנות הדינאמי, מהו סדר מילוי הערכים בטבלה, ומהי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

יש להסביר ולנמק את התשובות!

♣ שאלה 4 (20 נק')

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, עם מחירים חיוביים על הקשתות. בהנתן מסלול $p=e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k$, נגדיר את מחיר המבצע של המסלול p להיות $w(e_1)+w(e_2)+\dots+w(e_{k-1})+w(e_k) - \max(w(e_1), w(e_2), \dots, w(e_{k-1}), w(e_k))$. כלומר מחיר המבצע של מסלול הוא מחיר המסלול ללא מחיר הקשת היקרה ביותר. הבהבה: למסלול ריק ולמסלול בעל קשת אחת מחיר המבצע הוא 0.

נתון צומת $s \in V$. הציעו אלגוריתם יעיל למציאת מחיר המבצע הנמוך ביותר של מסלול מהצומת s לכל אחד מהצמתים בגרף. תארו את האלגוריתם, הסבירו במספר שורות את נכונותו, ציינו ונמקו את סיבוכיות הזמן.

♣ שאלה 5 (12 נק')

בחנות 'שפע-רמי' יש מבצע מיוחד לסטודנטים הניגשים למועד ב': בקניית שלושה מוצרים, הזול מביניהם הוא בחינם. אם למשל תרכשו מוצרים שמחיריהם 12, 18, 16 ₪ תידרשו לשלם רק 34 ₪.

עליכם לקנות $n=3k$ מוצרים בשפע-רמי. לכל $1 \leq i \leq n$, נתון c_i - המחיר של המוצר ה- i . בהגיעכם לקופה, עליכם לסדר את המוצרים בשלשות כך שהתשלום הכולל עליהם בעקבות המבצע יהיה מינימלי.

אם לדוגמא תרכשו שישה מוצרים שמחיריהם 10, 10, 10, 20, 20, 20 ותניחו אותם בקופה בשלשות (20, 10, 10), (20, 20, 10) תידרשו לשלם 60 ₪. אם תניחו אותם בשלשות (20, 10, 10), (20, 20, 10) תידרשו לשלם 70 ₪. הסידור הראשון הוא אופטימלי עבור קניה זו.

1. (8 נק') הציעו אלגוריתם גרידי אופטימלי לפתרון הבעיה. תארו את האלגוריתם וכיתבו מהי תכונת ה- greedy choice הנדרשת להוכחת האלגוריתם (אין צורך להוכיח אלא רק לציין מהי).

2. (4 נק') בעקבות חרם צרכנים נקלעה החנות להפסדים. כדי לשדר עסקים כרגיל הוחלט להמשיך במבצע, אך עתה הקופאים הם אלו שמסדרים את המוצרים בשלשות כך שהתשלום הכולל של הלקוחות יהיה מקסימלי.

לקופה מגיע לקוח שרכש $n=3k$ מוצרים שמחירם $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$. כיתבו ביטוי מתמטי המתאר כמה ישלם הלקוח עבור המוצרים (בהנחה שהקופאי מבצע באופן אופטימלי את המשימה שהוטלה עליו).
אין צורך לתאר את האלגוריתם של הקופאי או להסביר את הביטוי.

♣ שאלה 6 (20 נקודות)

נתונה רשת זרימה, כל הקיבולים הם מספרים שלמים. מריצים אלגוריתם למציאת זרימת מקסימום ומתקבל שערך זרימת המקסימום הוא 20. מקטינים ב-3 את הקיבול של קשת מסויימת $e=(a,b)$. זרימת המקסימום ברשת החדשה היא x .

1. (10 נק') הציעו דרך יעילה למצוא את x בהנתן פונקציית הזרימה האופטימלית ברשת המקורית. הסבירו בקצרה את נכונות הפתרון ואת סיבוכיות הזמן שלו.

2. ($10=5*2$ נק') הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות (בנפרד)

- א. אם $x=20$ אז בזרימה הראשונה הקשת e אינה רוויה (non saturated).
- ב. אם לפני הקטנת הקיבול e נמצאת על איזשהו חתך מינימום של הגרף אז $x=17$.