Calcolo differenziale ed integrale 2 – Prova scritta
14 GENNAIO 2021

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti serie

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(n^4)}{n^2+1}$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{3^n}{4^n+n^2}$

dire se:

- sono a valori positivi,
- convergono semplicemente,
- convergono assolutamente.

Stabilire inoltre se la ridotta s_9 della serie (2) approssima il valore della serie a meno di 0, 1.

(3) Determinare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$.

Esercizio 2. Determinare il polinomio di Taylor di ordine 4 di $f(x) = \log(\cos x)$.

Soluzione: Sappiamo che lo sviluppo di Taylor centrato in 0 del logaritmo è è dato da

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x),$$

e quello del $\cos x$ è dato da

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$$

per cui

$$f(x) = \ln(1 + (\cos x - 1)) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)\right)^2 + R_4(x)$$

. Facendo i conti e troncando all'ordine 4 troviamo $T_4 f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$.

Esercizio 3. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 4 definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{-2} \le x < 1 \\ -1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

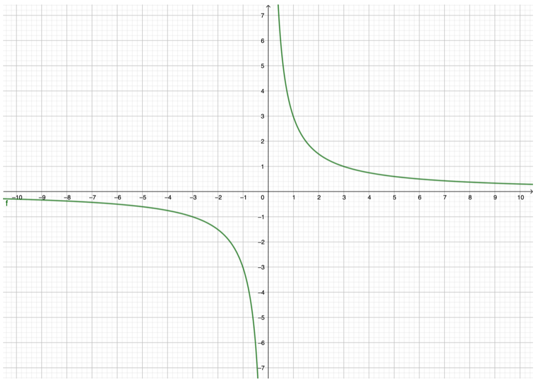
determinare i suoi coefficienti di Fourier $\hat{f}_{2n+1}$ per $n \in \mathbb{Z}$.
Determinare poi il valore della serie di Fourier di f in $x = 0$ e $x = 1$.

Esercizio 4. Data la funzione $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{3 - xy}$$

a) Trovare il dominio di f e specificarne le caratteristiche: dire se è aperto, limitato, connesso
b) Stabilire se f è differenziabile su D e in tal caso calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 0, f(0, 0))$.
c) Determinare i punti critici di f.
d) Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluti sull'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$ e in caso affermativo determinarli.

Soluzione:
a) $\mathrm{dom} f = D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3 - xy \neq 0\}$ (ed e' tutto il piano tranne l'iperbole in verde in figura)



Il dominio è dunque aperto, non limitato, non connesso.
b) f è differenziabile su D in quanto frazione di due polinomi, ed esiste quindi il piano tangente al grafico di f nel punto $(0,0,1/3)$, che ha equazione

$$z = \frac{1}{3} + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y,$$

e quindi, dal momento che $\nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{3-xy}, \frac{x}{3-xy}\right)$, si ha $\nabla f(0,0) = (0,0)$, deriviamo

$$z = \frac{1}{3}.$$

c) I punti critici sono quelli per cui $\nabla f(0,0) = (0,0)$, e quindi soltanto $(0,0)$.
d) Definendo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, g(x,y) = 0\} = g^{-1}(\{0\})$. Tale insieme è è chiuso (g è continua e $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$) e limitato ($g(x,y) = 0$ è l'equazione che definisce una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$), e pertanto, per il teorema di Weierstrass, f ammette max e min assoluti su C, essendo f continua. Per trovarli usiamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange.
Visto che $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$, non ci sono punti critici sul vincolo. I candidati massimi e minimi soddisfano

$$\begin{cases} \det \begin{bmatrix} \frac{y}{3-xy} & \frac{x}{3-xy} \\ 2x & 2y \end{bmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \frac{2y^2}{3-xy} - \frac{2x^2}{3-xy} \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

Pertanto, i possibili massimi e minimi assoluti di f su C verificano

$$\begin{cases} x = \pm y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm y \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

da cui otteniamo i punti $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (1,-1)$, $P_3 = (-1,1)$ e $P_4 = (-1,-1)$. Dal momento che

$$f(P_1) = 1/2 = f(P_4); \qquad f(P_2) = 1/4 = f(P_3),$$

si ha che P_1 e P_4 sono punti di massimo, e P_2, P_3 punti di minimo.