Calculus 2 – Prova scritta
27 Luglio 2022

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti serie sono a termini positivi e convergono semplicemente e/o assolutamente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{5}-1)$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^2 - n^2\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Data la serie di potenze
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n-1)!}\,x^{n-1},$$
determinarne l'insieme di convergenza puntuale I e il valore della somma.

Esercizio 2. Sia $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + e^y + 2xy - 1$.

a) Provare che esiste un'unica soluzione $y = g(x)$ dell'equazione $f(x,y) = 0$, definita in un intorno di 0.

b) Determinare il polinomio di Mac Laurin di g di ordine 2.

Esercizio 3. Sia f la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione
$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ -2 & x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

(1) Scrivere l'espressione di f su tutto $\mathbb{R}$ e disegnarne il grafico.
(2) Calcolare i coefficienti di Fourier $\hat{f}_k$ per $k \in \mathbb{Z}$.
(3) Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Esercizio 4. Sia $f(x,y) = x^2 + 5y^2 - x/2$.

(1) Dire se f è differenziabile sul suo dominio.
(2) Calcolare la derivata direzionale di f in $P_0 = (3, 1/2)$ lungo $v = (-1, 2)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(3, 1/2, f(3, 1/2))$.
(3) Determinare gli estremi relativi di f sul suo dominio.
(4) Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto di f sull'ellisse $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 = 4\}$.