Es 1 :

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$\operatorname{sen}\frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^3} \quad \Rightarrow \sqrt{n}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{n^3} \quad \Rightarrow$ serie conv. assolut.

(2) $\sum_n (-1)^n \lg\left(1+\frac{100}{n}\right)$

Conv. semplice : serie a segni alterni $\Rightarrow$ uso Leibnitz.

Sia $a_n := \lg\left(1+\frac{100}{n}\right) \sim \frac{}{n} \to 0$ di ordine 1 $\Rightarrow$ la serie non conv. assolut.

$a_n > 0$ perché $1+\frac{100}{n} > 1$

$(a_n)_n$ é decresc. perché composta di una funz. decrescente $\left(n \mapsto \frac{100}{n}\right)$ e di una crescente (il log.)

$\Rightarrow$ per Leibnitz la serie converge semplicemente.

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^n$

Per det. il raggio di convergenza della serie di potenze uso il criterio del rapporto:

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

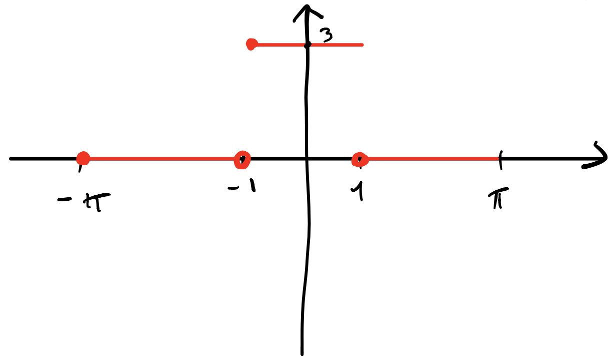
$\Rightarrow \rho = \frac{1}{2}$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subseteq I \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Controllo se c'é converg. in $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

- $x = -\frac{1}{2}$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ che non converge.
- $x = \frac{1}{2}$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$

$\Rightarrow I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ES2: f periodica di periodo 2π def su $[-\pi, \pi)$



(a) $\hat{f}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-\frac{2\pi}{T}kx}\, dx = \frac{a_k}{2}$, visto che la funz. è pari e quindi $b_k = 0$.

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} 3\cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot 3\, \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{k\pi}\left(\operatorname{sen} k - \operatorname{sen}(-k)\right) =$$

$$= \frac{3}{k\pi}\, 2\operatorname{sen} k = \frac{6}{k\pi}\operatorname{sen} k. \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \hat{f}_k = \frac{3}{k\pi}\operatorname{sen} k.$ $\qquad \hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} 3\, dx = \frac{3}{\pi}.$

(b) f è regolare a tratti su $(-\pi, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \pi)$ essendo costante su quei pezzo. Inoltre $f(-\pi) = f(\pi) \Rightarrow f$ è cont. in $\pm\pi$.

(c) $$\mathfrak{F}f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [-\pi, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \pi] \\ \frac{3}{2} & x = \pm 1 \end{cases}$$

(d) $g(x) = x \operatorname{arctg}(f(x)x^2) - 2, \quad x \in (-1,1)$

Visto che $x \in (-1,1)$, $f(x) = 3$

$\Rightarrow g(x) = x \operatorname{arctg}(3x^2) - 2$

Ma $\operatorname{arctg} t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + R_5(t)$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}(3x^2) = 3x^2 - \frac{(3x^2)^3}{3} + R_4(x)$, da cui

$g(x) = x\left(3x^2 - 9\frac{x^6}{3}\right) - 2 + R(x)$

$\Rightarrow T_7 f(x) = -2 + 3x^3 - 3x^7$