Calculus 1 **2021/22**

Lezione 1: 03/03/22

☡. Queste note devono servire come guida per lo studio: non sono un libro di testo (ve ne sono di ottimi da consultare in biblioteca), non sono una trascrizione di quanto detto a lezione (gli appunti sono essenziali), mancano i commenti ed i disegni (indispensabili per la comprensione), vi sono alcuni argomenti che non sono stati trattati a lezione (ma che possono servire di approfondimento).
Il simbolo ☡ indica punti che richiedono particolare attenzione.

Il template LaTeX è stato adattato da un modello della UC Berkeley EECS Department.

Notazione.

$\varnothing$	insieme vuoto
$\mathbb{N}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri relativi
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mid$ o $:$	tale che
$\Rightarrow$	implica che
$\Longleftrightarrow$	se e solo se, equivale
$\forall$	per ogni
$\exists$	esiste
$\nexists$	non esiste

Intervalli. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leqslant b$,

intervallo limitato aperto	$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
intervallo limitato chiuso	$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
intervallo limitato	$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
intervallo limitato	$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
intervallo illimitato aperto	$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
intervallo illimitato chiuso	$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$
intervallo illimitato aperto	$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
intervallo illimitato chiuso	$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$
intervallo illimitato	$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

Il punto a (o $-\infty$) è detto estremo sinistro e b (o $+\infty$) è detto estremo sinistro dell'intervallo.

☡. Se $a = b$, $[a,b] = \{a\}$ e $(a,b) = (a,b] = [a,b) = \varnothing$.

Relazioni tra insiemi. Dati due insiemi A e B

- inclusione: $A \subseteq B$ oppure $B \supseteq A$, se
$$\text{per ogni } x \in A \text{ allora } x \in B$$
(si dice che A è un sottoinsieme di B o, equivalentemente, che A è contenuto in B oppure che B contiene A)
- inclusione propria: $A \subsetneq B$ oppure $B \supsetneq A$, se
$$\begin{cases} \text{per ogni } x \in A \text{ allora } x \in B \\ \text{esiste } x \in B \text{ tale che } x \notin A \end{cases}$$
(si dice che A è un sottoinsieme proprio di B)

Operazioni tra insiemi. Dati due sotto-insiemi $A, B \subseteq X$

- unione
$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$
- intersezione
$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ e } x \in B\};$$
- complementare
$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$$
- differenza insiemistica
$$A \backslash B = \{x \in X \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$
- prodotto cartesiano
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$
dove (x, y) denota la coppia ordinata.

☡. Se $x, y \in \mathbb{R}$, la stessa notazione (x, y) è usata per indicare sia la coppia ordinata sia l'intervallo aperto di estremi x e y.

Numeri reali. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, sono definite le operazioni di

- somma $x + y$
- prodotto xy
- relazione d'ordine $x < y$

che soddisfano le seguenti proprietà

(a) associatività: per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z \qquad (xy)z = x(yz) = xyz$$
(b) commutatività: per ogni $x, y \in \mathbb{R}$
$$x + y = y + x \qquad xy = yx$$
(c) proprietà distributiva: per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$(x + y)z = xz + yz.$$
(d) esistenza elemento neutro: per ogni $x \in \mathbb{R}$
$$x + 0 = 0 + x = x \qquad x1 = 1x = x$$
(e) esistenza inverso:

   i) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un unico elemento $-x \in \mathbb{R}$, detto opposto, tale che $x + (-x) = 0$
   ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ esiste un unico elemento $1/x \in \mathbb{R}$, detto reciproco, tale che $x(1/x) = 1$

(f) relazione d'ordine totale: per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ una ed una sola delle seguenti relazioni è vera

$$\begin{cases} x < y \\ x = y \\ y < x \end{cases}$$

(g) proprietà transitiva: dati $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{se } x < y \text{ e } y < z \text{ allora } x < z$$

(h) compatibilità con la somma, dati $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{se } x < y \text{ allora } x + z < y + z$$

(i) compatibilità con il prodotto, dati $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{se } x < y \text{ e } z > 0 \text{ allora } xz < yz$$

Funzioni. Una funzione (reale di variabile reale) $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ è una legge che assegna ad ogni elemento $x \in A$ un unico valore $y = f(x) \in \mathbb{R}$. L'insieme A è detto dominio di f e denotato anche con $\operatorname{dom} f$.

Grafico. Si chiama grafico della funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ il sottoinsieme del piano cartesiano

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in A\}$$

Immagine. Si chiama immagine della funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ l'insieme di valori effettivamente presi dalla funzione e si denota con $\operatorname{Im} f$ o $f(A)$

$$\operatorname{Im} f = f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$$

Nota. Le rette parallele all'asse delle ascisse (asse x) hanno equazione $y = y_0$, mentre quelle parallele all'asse delle ordinate (asse y) hanno equazione $x = x_0$.

Osservazione. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione.

a) Il grafico di f è una *curva* nel piano caratterizzata dal fatto che, dato $x_0 \in A$, la retta $x = x_0$, parallela all'asse delle ordinate, interseca il grafico di f in un solo punto P_0 le cui coordinate sono $P_0 = (x_0, f(x_0))$.
b) Un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sta sul grafico di f se e solo se $x_0 \in A$ e $y_0 = f(x_0)$.
c) Il dominio A della funzione è un sottoinsieme dell'asse delle ascisse ed è la proiezione del grafico della funzione su tale asse.
d) L'immagine $\operatorname{Im} f$ è un sottoinsieme dell'asse delle ordinate, costituito da tutti i valori $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui la retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in **almeno** un punto, cioé $\operatorname{Im} f$ è la proiezione del grafico della funzione sull'asse delle ordinate.
e) Dato $y_0 \in \mathbb{R}$, l'equazione $y_0 = f(x)$ equivale a trovare le intersezioni tra il grafico $y = f(x)$ e la retta $y = y_0$ parallela all'asse delle ascisse

$$y_0 = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y = f(x) \\ y = y_0 \end{cases} .$$

☡. Vi sono curve del piano che non sono il grafico di alcuna funzione.

Funzioni iniettive, surgettive e bigettive. Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è detta

a) iniettiva se per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette al più una soluzione;
b) surgettiva se per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette almeno una soluzione;
c) bigettiva se per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette una ed una sola soluzione.

Osservazione. Data una funzione $f: A \to \mathbb{R}$,

a) f è iniettiva se ogni retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in al più un punto;
b) f è surgettiva se ogni retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in almeno un punto;
c) f è bigettiva se ogni retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in esattamente un punto.

Proposizione 1.1. *Data una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$,*

a) f è iniettiva se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$ si ha $x_1 = x_2$;
b) f è iniettiva se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$;
c) f è surgettiva se e solo se l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$, cioè $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$;
d) f è bigettiva se e solo se f è sia iniettiva sia surgettiva.

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 2: 04/03/22

Funzioni monotone. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è detta

a) crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, allora
$$f(x_1) < f(x_2);$$
b) decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, allora
$$f(x_1) > f(x_2);$$
c) debolmente crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \leqslant x_2$, allora
$$f(x_1) \leqslant f(x_2);$$
d) debolmente decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \leqslant x_2$, allora
$$f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Una funzione crescente o decrescente è detta monotona.

Operazioni tra funzioni.
Date due funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$

a) la somma/differenza $f \pm g$ è definita da
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad x \in \operatorname{dom}(f \pm g) = A \cap B$$
b) il prodotto fg è definito da
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad x \in \operatorname{dom}(fg) = A \cap B =$$
c) il rapporto f/g è definito da
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in \operatorname{dom}\frac{f}{g} = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

La funzione
$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad x \in \operatorname{dom}\frac{1}{f} = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$$
è detta reciproco di f ed è anche denotata con $f(x)^{-1}$.

Funzione composta.
Date due funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$ la funzione
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad x \in A,$$
con dominio
$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ e } f(x) \in B\}$$
si chiama funzione *composta* di g e f.

Il risultato della composizione di due funzioni dipende dall'ordine, per cui in generale $g(f(x)) \neq f(g(x))$. Ad esempio, se

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = 1 + x$$

allora

$$g(f(x)) = 1 + x^2 \qquad f(g(x)) = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

dove entrambe le funzioni composte sono definite su $\mathbb{R}$.

Se

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \operatorname{dom} f = [0, +\infty) \qquad g(x) = 1 + x \quad \operatorname{dom} g = \mathbb{R}$$

allora

$$g(f(x)) = 1 + \sqrt{x} \qquad f(g(x)) = \sqrt{1 + x}$$

dove

$$\operatorname{dom} g \circ f = [0, +\infty) \qquad \operatorname{dom} f \circ g = [-1, +\infty)$$

Funzione inversa.
Data una funzione iniettiva $f\colon A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, la legge che assegna ad ogni $y \in \operatorname{Im} f$ l'unica soluzione $x \in A$ dell'equazione

$$f(x) = y$$

si chiama funzione inversa e si denota con

$$f^{-1} : B \to \mathbb{R} \qquad x = f^{-1}(y) \qquad B = \operatorname{Im} f$$

Valgono le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f \\
&\operatorname{Im} f^{-1} = \operatorname{dom} f \\
&f^{-1}(f(x)) = x && x \in \operatorname{dom} f \\
&f(f^{-1}(y)) = y && y \in \operatorname{dom} f^{-1}
\end{aligned}$$

Inoltre, la funzione f^{-1} è iniettiva e $(f^{-1})^{-1} = f$.

Nel definire la funzione inversa è utile usare la lettera y per indicare la variabile indipendente, $x = f^{-1}(y)$, tuttavia quando si vuole disegnare il grafico di f^{-1} occorre *scambiare* la x con la y (per convenzione la variabile indipendente corrisponde ai punti dell'asse delle ascisse). Ne segue che il grafico della funzione inversa f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta $y = x$, la bisettrice del primo e terzo quadrante, vedi Fig. 2.1.

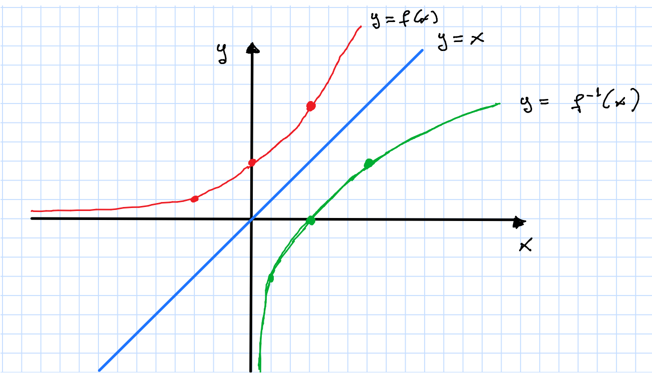


FIGURA 2.1. Grafico di $y = f(x)$ (rosso) e della sua inversa $y = f^{-1}(x)$ (verde) .

☡. La condizione che la funzione f sia iniettiva è necessaria per assicurare che, dato $y \in \operatorname{Im} f$, l'equazione $y = f(x)$ ammetta un'unica soluzione $x \in \operatorname{dom} f$. Se $y \notin \operatorname{Im} f$ l'equazione $y = f(x)$ non ha soluzione.

☡. Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$

$$f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

denota il reciproco purché $x \in A$ e $f(x) \neq 0$, mentre

$$f^{-1}(x)$$

denota il valore della funzione inversa purché f sia iniettiva e $x \in \operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f$. Inoltre

$$f(x)f(x)^{-1} = 1 \qquad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 3: 10/03/22

2 ore

Traslazioni, dilatazioni e riflessioni.
Data una funzione $y = f(x)$,

a) dato $x_0 > 0$ il grafico della funzione $y = f(x + x_0)$ si ottiene traslando a sinistra di x_0 ed il grafico della funzione $y = f(x - x_0)$ si ottiene traslando a destra di x_0

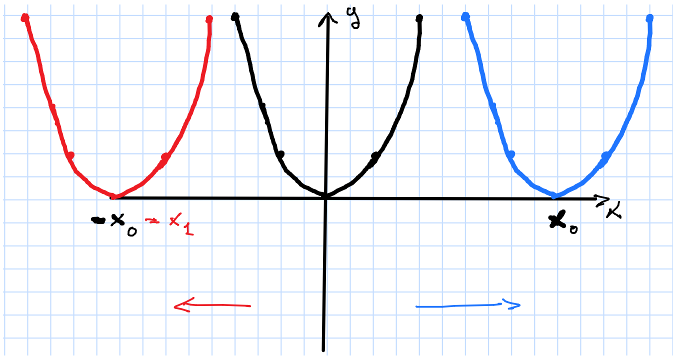


FIGURA 3.1. Grafico di $y = f(x-x_0)$ (blu) e di $y = f(x+x_0) = f(x-x_1)$ (rosso)

b) dato il grafico $y_0 > 0$ della funzione $y = f(x) + y_0$ si ottiene traslando in alto di y_0 ed il grafico della funzione $y = f(x) - y_0$ si ottiene traslando in basso di $y_0 > 0$

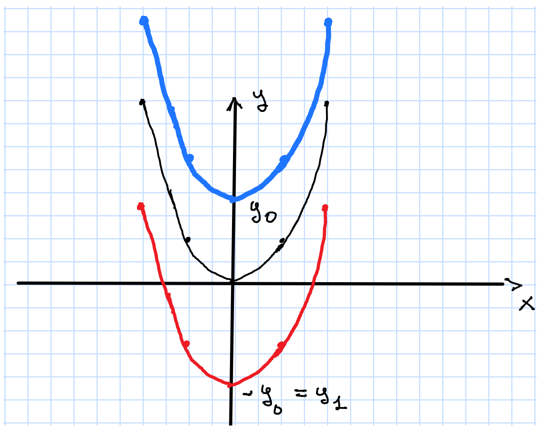


FIGURA 3.2. Grafico di $y = f(x)+y_0$ (blu) e di $y = f(x)-y_0 = f(x)+y_1$ (rosso)

c) dato $a > 1$, il grafico della funzione $y = f(x/a)$ si ottiene dilatando di a lungo l'asse x ed il grafico della funzione $y = f(ax)$ si ottiene contraendo di a lungo l'asse x

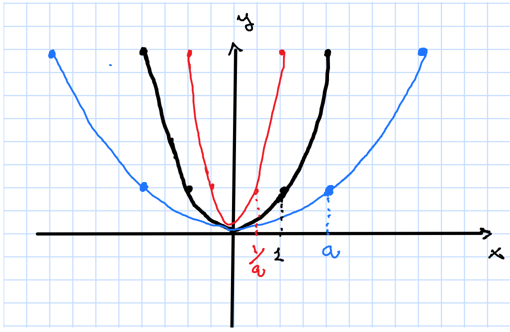


FIGURA 3.3. Grafico di $y = f(x/a)$ (blu) e di $y = f(ax) = f(x/a^{-1})$ (rosso)

d) dato $a > 1$, il grafico della funzione $y = af(x)$ si ottiene dilatando di a lungo l'asse y ed il grafico della funzione $y = f(x)/a$ si ottiene contraendo di a lungo l'asse y

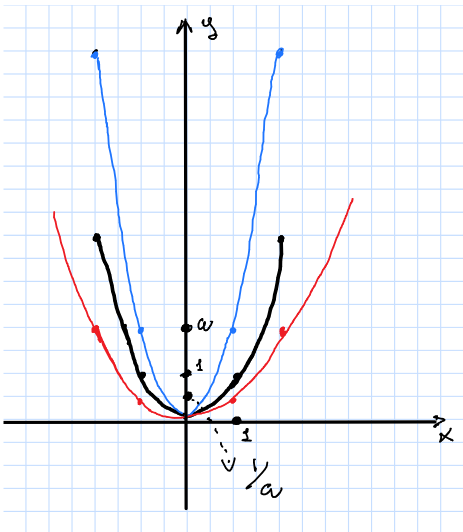


FIGURA 3.4. Grafico di $y = af(x)$ (blu) e di $y = f(x)/a = a^{-1}f(x)$ (rosso)

e) il grafico della funzioni $y = f(-x)$, $y = -f(x)$ $y = -f(-x)$ si ottengono riflettendo il grafico di f rispetto all'asse delle ordinate, all'asse delle ascisse o all'origine, rispettivamente.

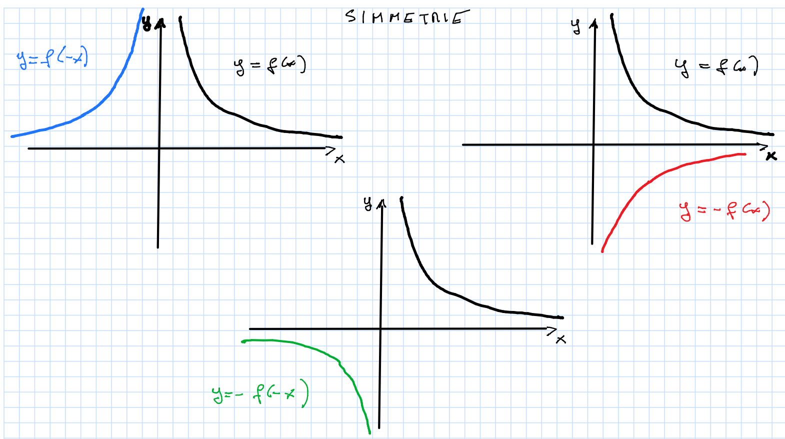


FIGURA 3.5. Grafico di $y = f(-x)$ (blu), di $y = -f(x)$ (rosso) e di $y = -f(-x)$ (verde)

Simmetrie. Una funzione $f \colon A \to \mathbb{R}$ è detta

a) pari se per ogni $x \in A$, allora $-x \in A$ e $f(-x) = f(x)$;
b) dispari se per ogni $x \in A$, allora $-x \in A$ e $f(-x) = -f(x)$.

Una funzione è pari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, mentre una funzione è dispari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 4: 11/03/22

2 ore

Potenze con esponente intero.

- dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ la funzione potenza n-esima è definta da

$$f(x) = x^n = \underbrace{x\,x\ldots x}_{n\text{-volte}} \qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \qquad \operatorname{Im} f = \begin{cases} [0,+\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R} & n \text{ dipari} \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.1.

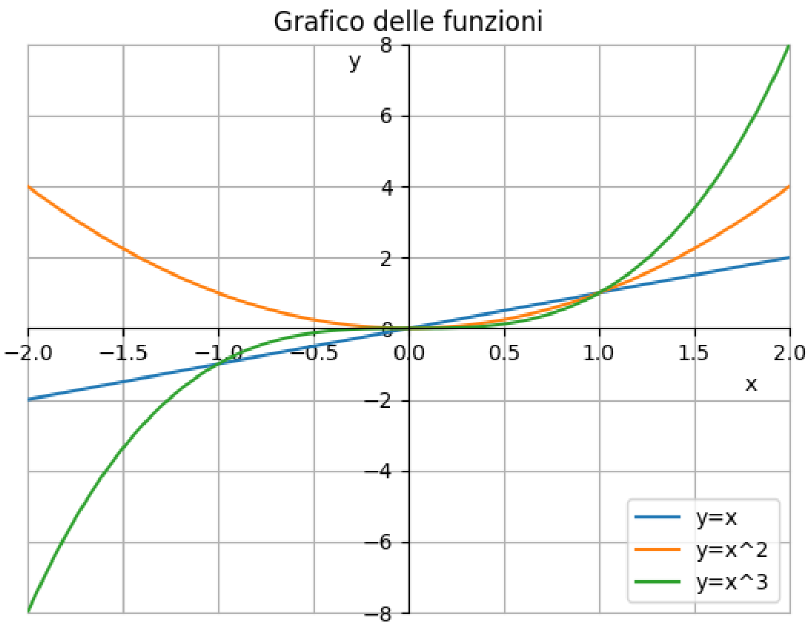


FIGURA 4.1. Grafico di $y = x^n$ per $n = 1, 2, 3$.

- se $a = 0$ si definisce

$$f(x) = x^0 = 1 \qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \qquad \operatorname{Im} f = \{1\}$$

. Con la convenzione che $x^0 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale l'uguaglianza $0^0 = 0$. Questa convenzione non è adottata in tutti i libri di analisi.

Polinomi.
Una funzione del tipo

$$f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k \qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R},$$

dove i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$, è detto polinomio o funzione polinomiale di grado n.

Potenze con esponente reale.
Fissato un esponente $a \in \mathbb{R}$ la funzione potenza è

$$f(x) = x^a,$$

la cui definizione e dominio dipendono dal valore dell'esponente a. Il caso $a = n \in \mathbb{N}$ è stato discusso nella precedente paragrafo, vediamo gli altri casi.

Esponente negativo $a = -n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad \mathrm{Im}\, f = \begin{cases} (0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R}\backslash\{0\} & n \text{ dipari} \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.2.

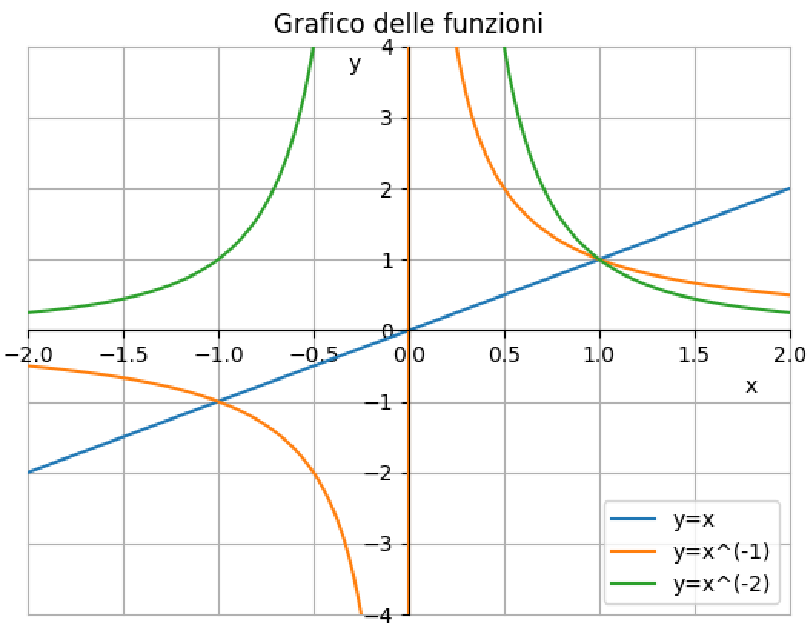


FIGURA 4.2. Grafico di $y = x^n$ per $n = -1, -2$.

Esponente reciproco di un naturale $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad \mathrm{dom}\, f = \begin{cases} [0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R} & n \text{ dipari} \end{cases} \qquad \mathrm{Im}\, f = \begin{cases} [0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R} & n \text{ dipari} \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.3.

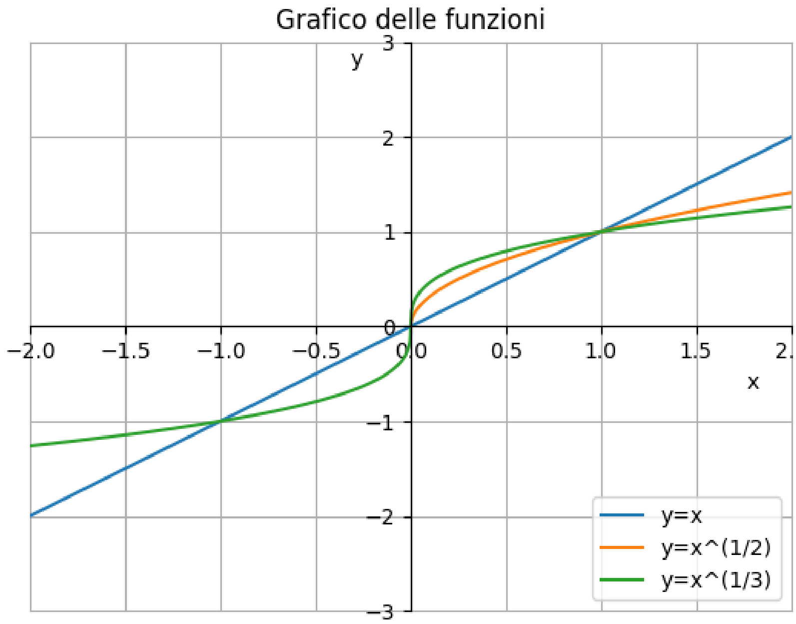


FIGURA 4.3. Grafico di $y = x^a$ per $n = 1/2, 1/3$.

Esponente razionale $a = m/n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $m \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad \operatorname{dom} f = (0, +\infty) \qquad \operatorname{Im} f = (0, +\infty)$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.4.

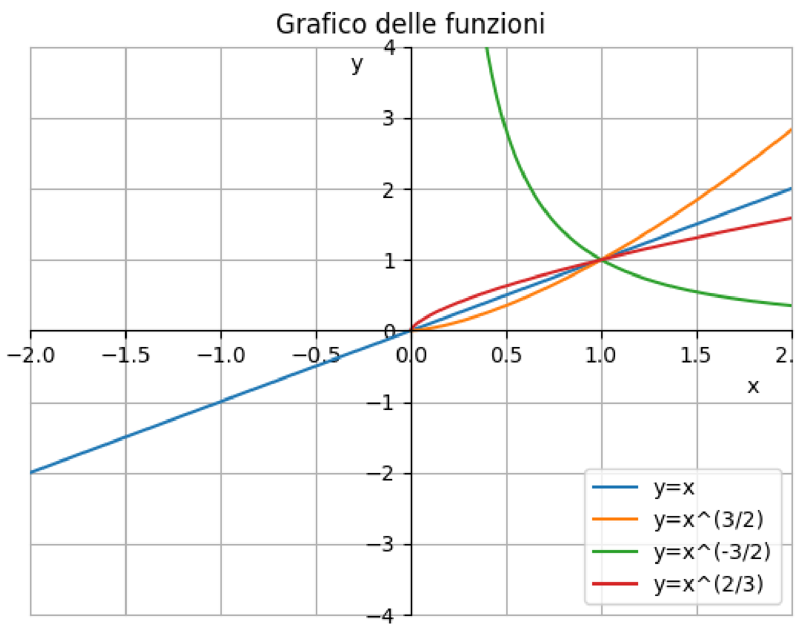


FIGURA 4.4. Grafico di $y = x^q$ per $q = 3/2, 2/3, -3/2$.

Esponente reale $a \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^a = \begin{cases} \sup\{x^q \mid q \in \mathbb{Q},\, q \leqslant a\} & x \geqslant 1 \\ \inf\{x^q \mid q \in \mathbb{Q},\, q \leqslant a\} & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \mathrm{dom}\, f = (0, +\infty) \qquad \mathrm{Im}\, f = (0, +\infty)$$

. La definizione di estremo superiore sup e di estremo inferiore inf verrà data più avanti. In modo intuitivo, si tratta di definire x^a per approssimazioni successive. Ad esempio, se $x = 2$ e $a = \pi = 3.141\ldots$, possiamo definire 2^π per approssimazioni successive

$$2^3 = 8 < 2^{\frac{31}{10}} \simeq 8.574 < 2^{\frac{314}{100}} \simeq 8.815 < 2^{\frac{3141}{1000}} \simeq 8.822 < \ldots 2^\pi \simeq 8.825$$

Il grafico della funzione è riportato in Fig. 4.5.

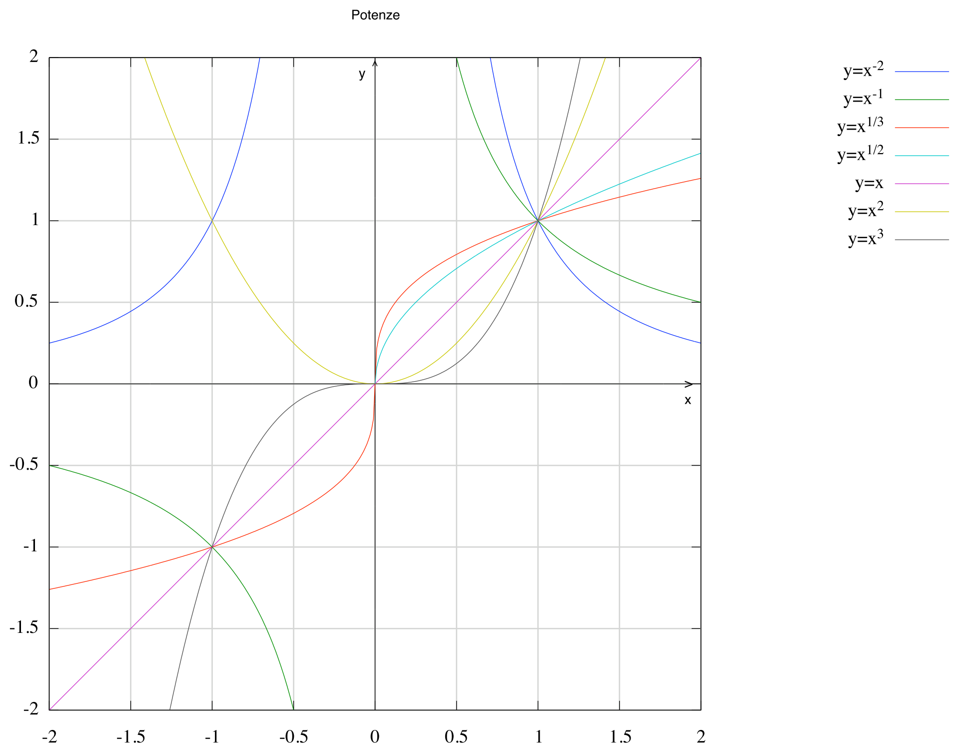


FIGURA 4.5. Grafici di $y = x^a$ con $a = 1, 2, 3, -1, -2, 1/2$ ed $1/3$.

Valgono le seguenti proprietà

a) se $a > 0$, f è crescente su $(0, +\infty)$
b) se $a < 0$, f è decrescente su $(0, +\infty)$
c) se $a < b$

$$\begin{cases} x^a < x^b & \text{se } x > 1 \\ x^a > x^b & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

d) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$1^q = 1$$
$$x^{a+b} = x^a x^b$$
$$x^{ab} = (x^a)^b$$

Esponenziale.
Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione esponenziale è

$$f(x) = a^x \qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \qquad \operatorname{Im} f = (0, +\infty).$$

Se si sceglie come base il numero di Nepero $e = 2.71828\ldots > 1$, la funzione esponenziale si denota

$$f(x) = e^x = \exp x$$

Il grafico delle funzioni esponenziali è riportato in Fig. 4.6

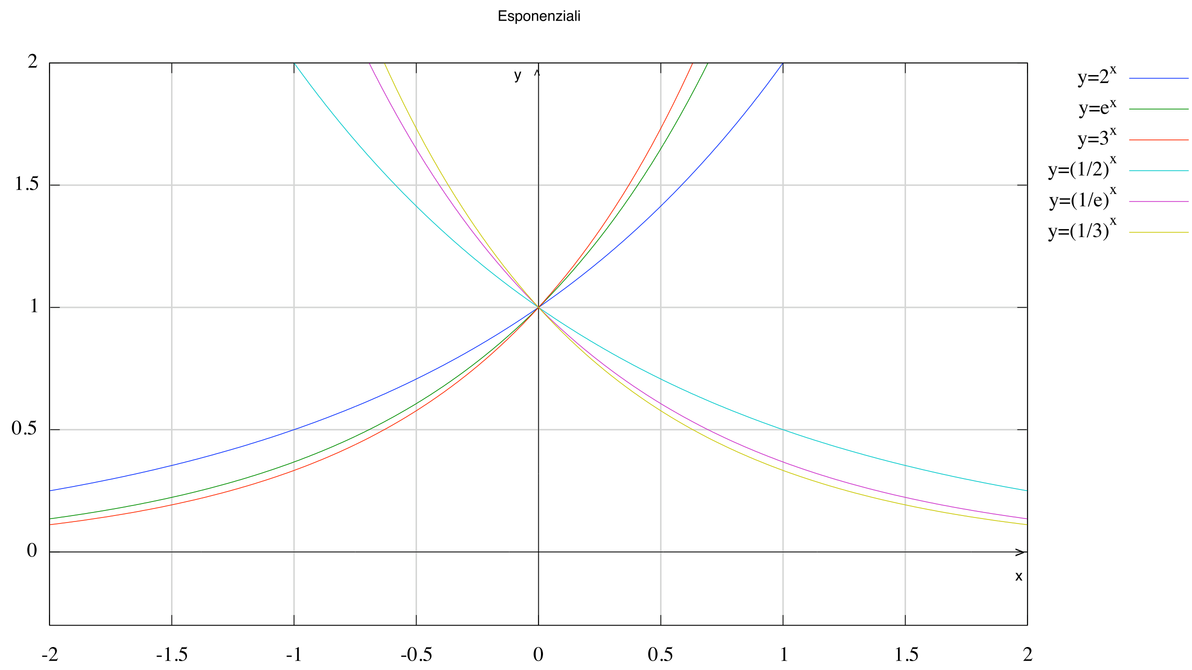


FIGURA 4.6. Grafici di $y = a^x$ con $a = 2, e, 3, 1/2, 1/e$ ed $1/3$.

Valgono le seguenti proprietà

a) se $a > 1$, allora la funzione a^x è crescente
b) se $0 < a < 1$, allora la funzione a^x è decrescente
c) se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} a^x < b^x & \text{se } x > 0 \\ a^x > b^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{aligned} &a^0 = 1 \\ &a^1 = a \\ &a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2} && x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ &a^{-x} = \left(\tfrac{1}{a}\right)^x && x \in \mathbb{R} \\ &(a^x)^b = a^{bx} && x, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Funzione logaritmo.
Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x \qquad \text{dom}\, f = (0, +\infty) \qquad \text{Im}\, f = \mathbb{R}$$

è definita come la funzione inversa della funzione esponenziale a^x, vedi Fig. 4.7.

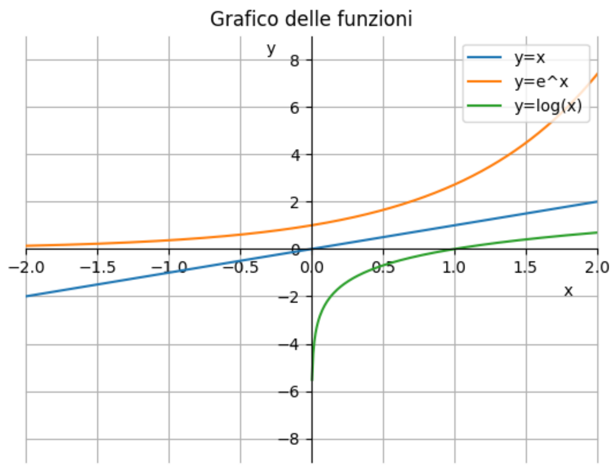


FIGURA 4.7. Grafico di $y = e^x$ e della sua inverse $y = \ln x$.

Se si sceglie come base il numero di Nepero e, il logaritmo si denota

$$f(x) = \log_e = \log x = \ln x.$$

Il grafico delle funzioni logaritmo è riportato in Fig. 4.8.

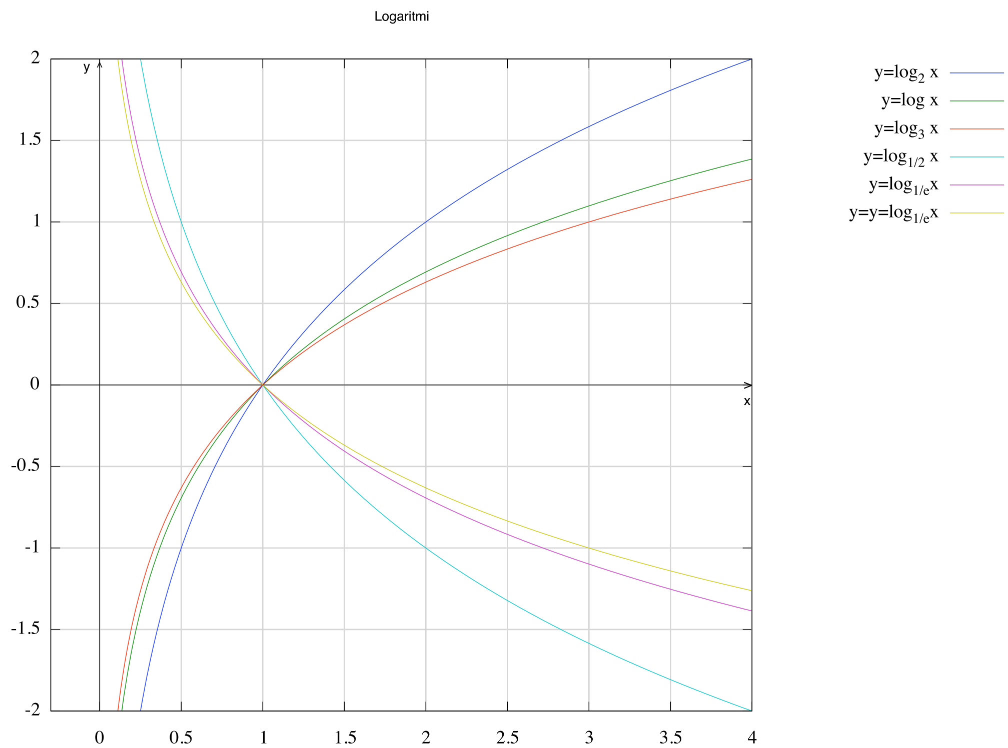


FIGURA 4.8. Grafici di $y = \log_a x$ con $a = 2, e, 3, 1/2, 1/e$ ed $1/3$.

Valgono le seguenti proprietà

a) se $a > 1$, allora la funzione $\log_a x$ è crescente
b) se $0 < a < 1$, allora la funzione $\log_a x$ è decrescente
c) se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} \log_a x > \log_b x & \text{se } x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

d) *fatto nella lezione 5* valgono le seguenti proprietà

$$\begin{array}{ll} \log_a a^x = x & x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} = x & x > 0 \\ \log_a 1 = 0 & \\ \log_a a = 1 & \\ \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 & x_1, x_2 > 0 \\ \log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2 & x_1, x_2 > 0 \\ \log_a x^b = b \log_a x & x > 0,\ b \in \mathbb{R} \\ \log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} = \dfrac{\ln x}{\ln a} & x > 0 \text{ e } b > 0\ b \neq 1 \\ a^x = e^{(\ln a)x} & x \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0\ a \neq 1 \end{array}$$

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 5: 17/03/22

2 ore

Radianti. Si chiama circonferenza goniometrica la circonferenza di centro l'origine O e raggio 1. Denotiamo con P_0 l'intersezione della circonferenza con la semiretta delle ascisse positive. Data una semiretta con origine in O, questa individua un angolo θ con la semiretta delle ascisse positive, ed un punto P sulla circonferenza goniometrica. La lunghezza dell'arco di circonferenza di estremi P_0 e P è la misura in radianti dell'angolo con la convenzione che θ è positivo se la semi-retta passante per P è ottenuta ruotando in senso anti-orario e θ è negativo se la semi-retta è ottenuta ruotando in senso orario: per un angolo proprio $\theta \in [0, 2\pi]$ (senso anti-orario) o $\theta \in [-2\pi, 0]$ (senso orario) e l'angolo giro corrispondente a 2π o -2π, vedi Fig 5.1.

Angoli impropri corrispondono a rotazioni multiple in modo tale che due angoli θ e θ' tali che $\theta' - \theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ individuano lo stesso punto P sulla circonferenza goniometrica. La relazione tra radianti e gradi è data da

$$\frac{\theta_{\text{radianti}}}{2\pi} = \frac{\theta_{\text{gradi}}}{360}$$

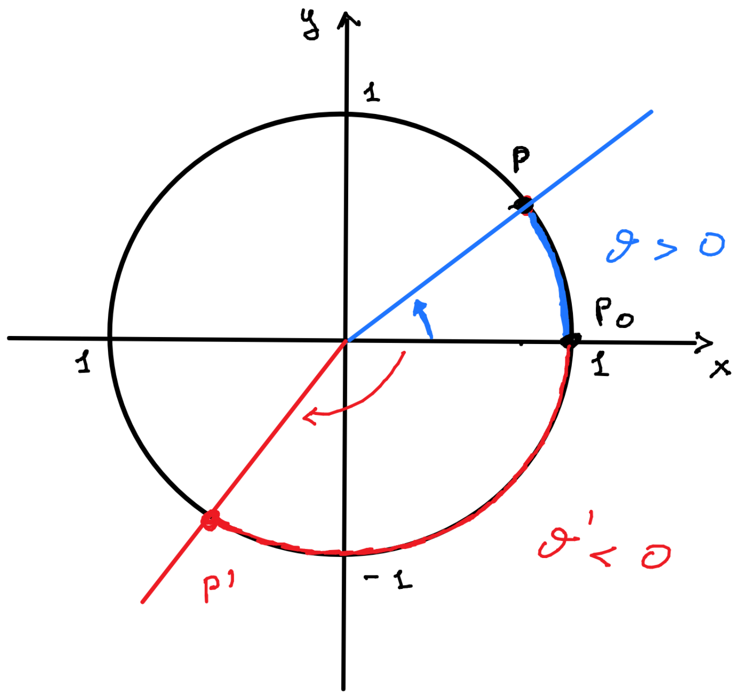


FIGURA 5.1. Circonferenza goniometrica.

Funzioni trigonometriche.
Dato un angolo $x \in \mathbb{R}$, sia P il punto sulla circonferenza goniometrica tale che la semiretta di centro O e passante per P formi un angolo x con la semiretta delle ascisse positive (in senso antiorario se x è positivo, in senso orario se x è negativo). Si definiscono $\cos x$ e $\sin x$ come l'ascissa e l'ordinata di P, rispettivamente, cioè

$$P = (\cos x, \sin x).$$

Se la retta OP non coincide con l'asse delle ordinate, sia Q l'intersezione della retta OP con la retta verticale passante per il punto $P_0 = (1, 0)$, intersezione della circonferenza goniometrica con l'asse delle ascisse. La tangente è definita come l'ordinata del punto Q, cioè

$$Q = (1, \tan x).$$

Vedi Fig. 5.2 e 5.3.

☡. L'argomento delle funzioni trigonometriche è l'angolo espresso in radianti.

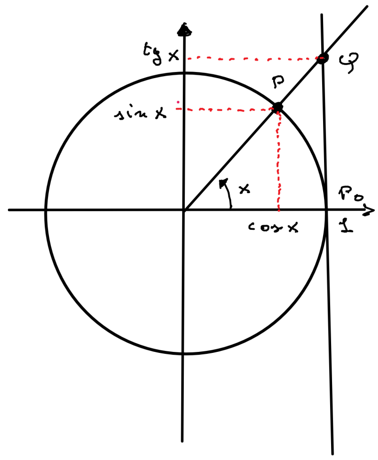


FIGURA 5.2. Definizione funzioni trigonometriche

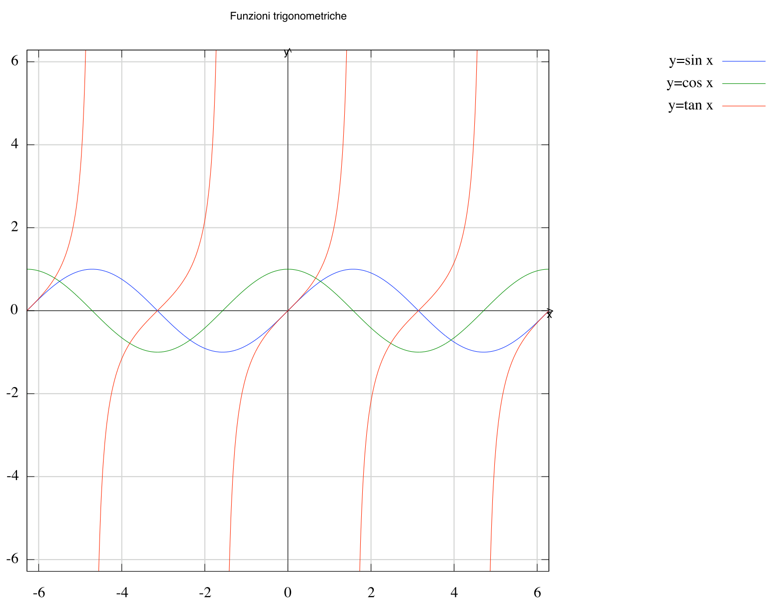


FIGURA 5.3. Grafici delle funzioni trigonometriche.

Valgono le seguenti proprietà.

a) dominio e immagine

$$\operatorname{dom}\sin x = \mathbb{R} \qquad \operatorname{dom}\cos x = \mathbb{R} \qquad \operatorname{dom}\tan x = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\operatorname{Im}\sin x = [-1,1] \qquad \operatorname{Im}\cos x = [-1,1] \qquad \operatorname{Im}\tan x = \mathbb{R}$$

b) periodicità: per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \tan(x + k\pi) = \tan x$$

c) parità

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

d) zeri: per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\sin x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = 0 + 2k\pi \quad x = \pi + 2k\pi \\
\cos x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
\tan x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = 0 + k\pi
\end{aligned}$$

e) intervalli di monotonia: per ogni $k \in \mathbb{Z}$

i) la funzione $\sin x$ è crescente su $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$
ii) la funzione $\sin x$ è decrescente su $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$
iii) la funzione $\cos x$ è crescente su $[-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi]$
iv) la funzione $\cos x$ è decrescente su $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$
v) la funzione$\tan x$ è crescente su $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$

f) teorema di Pitagora

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

g) trigonometria

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}.$$

h) traslazione

$$\begin{aligned}
\sin x &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \qquad & \cos x &= \sin(\frac{\pi}{2} - x) \\
\sin x &= \cos(x - \frac{\pi}{2}) \qquad & \cos x &= \sin(x + \frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

i) somma

$$\begin{aligned}
\sin(x_1 + x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 \\
\sin(x_1 - x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2 \\
\cos(x_1 + x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 \\
\cos(x_1 - x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2
\end{aligned}$$

j) duplicazione

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}$$

k) riduzione potenza

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\
\cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2}
\end{aligned}$$

l) bisezione

$$\begin{aligned} \sin\frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} && 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \\ \cos\frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} && -\pi \leqslant x \leqslant \pi \end{aligned}$$

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 06: 18/03/22

2 ore

Funzioni trigonometriche inverse.
Le funzioni trigonometriche inverse sono definite come

$$\begin{aligned} \arcsin x &= f^{-1}(x) \qquad f(x) = \sin x \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arccos x &= f^{-1}(x) \qquad f(x) = \cos x \quad x \in [0, \pi] \\ \arctan x &= f^{-1}(x) \qquad f(x) = \tan x \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

-

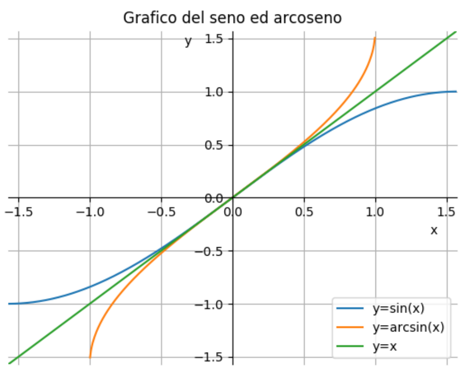


FIGURA 6.1. Grafici dell'arcoseno

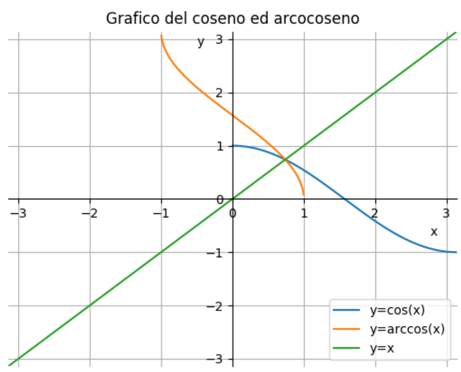


FIGURA 6.2. Grafici dell' arcocoseno

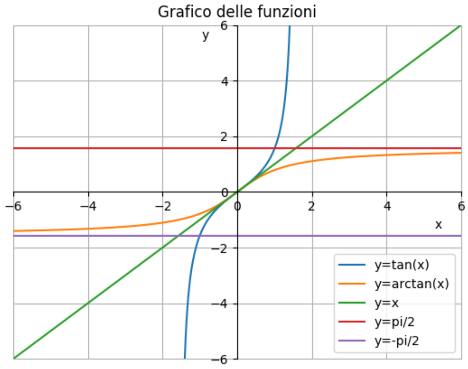


Figura 6.3. Grafico dell'arcotangente.

Principali proprietà delle funzioni trigonometriche inverse

a) dominio e immagine

$$\operatorname{dom}\arcsin x = [-1,1] \qquad \operatorname{dom}\arccos x = [-1,1] \qquad \operatorname{dom}\arctan x = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}\arcsin x = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \qquad \operatorname{Im}\arccos x = [0,\pi] \qquad \operatorname{Im}\arctan x = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

b) parità

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \qquad \arctan(-x) = -\arctan x$$

c) valori

$$\begin{array}{lll}
\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2} & \arcsin 0 = 0 & \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2} \\
\arccos(-1) = \pi & \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2} & \arccos 1 = 0 \\
\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} & \arctan 0 = 0 & \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}
\end{array}$$

d) zeri:

$$\begin{aligned}
\arcsin x = 0 &\iff x = 0 \\
\arccos x = 0 &\iff x = 1 \\
\arctan x = 0 &\iff x = 0
\end{aligned}$$

e) intervalli di monotonia:
   a) la funzione $\arcsin x$ è crescente
   b) la funzione $\arccos x$ è decrescente
   c) la funzione $\arctan x$ è crescente

f) relazioni

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Calculus 1	**2021/22**

Lezione 07 : 25/03/22

2 ore

Funzioni continue. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione

a) dato un punto $x_0 \in A$, la funzione f è detta continua in x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \qquad \text{per ogni } x \in A \text{ e } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \tag{7.1}$$

b) La funzione è detta continua se è continua in x_0 per ogni $x_0 \in A$.

Il significato geometrico di continuità è illustrato nella Fig. 7.1

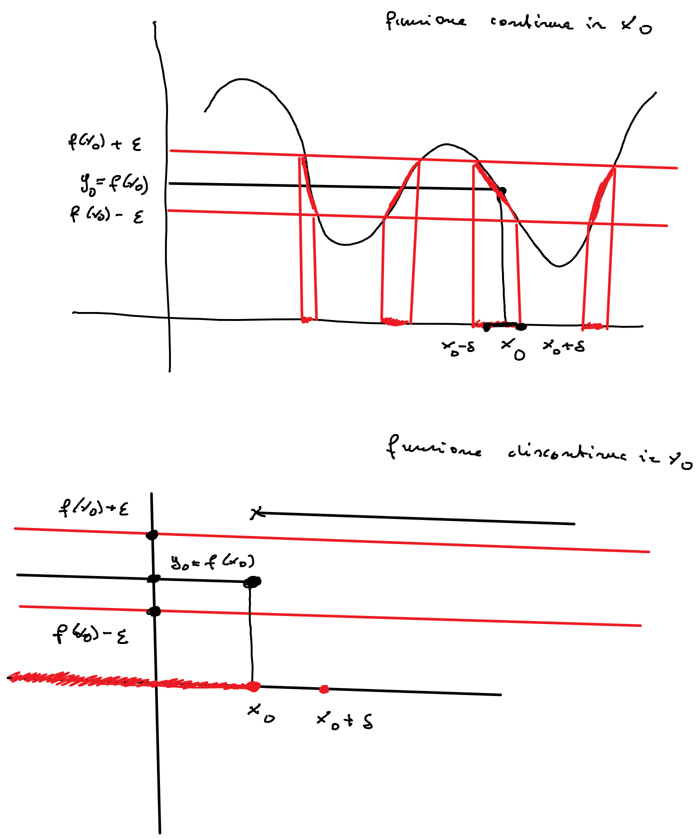


FIGURA 7.1. Funzione continua in x_0 (alto), funzione discontinua in x_0 (basso)

☡. Nella definizione di funzione continua è necessario assumere che x_0 appartenga al dominio di f per poter calcolare $f(x_0)$. La condizione (7.1) equivale al fatto che $f(x)$ è arbitrariamente vicino a $f(x_0)$ se x è sufficientemente vicino a x_0.

Teorema 7.1 (Continuità funzioni elementari)**.**
Le funzioni

i) potenza $f(x) = x^a$ *con* $a \in \mathbb{R}$
ii) esponenziale $f(x) = a^x$ *con* $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$

iii) logaritmo $f(x) = \log_a x$ *con* $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$

iv) trigonometriche $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$

v) trigonometriche inverse $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \arctan x$

sono continue.

Teorema 7.2. *Date due funzioni continue* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *e* $g : B \to \mathbb{R}$ *allora*

a) fissati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *la combinazione lineare* $\alpha f + \beta g$ *è una funzione continua;*

b) il prodotto fg *è una funzione continua;*

c) il rapporto f/g *è una funzione continua*

d) il reciproco $1/f$ *è una funzione continua*

Teorema 7.3. *Date due funzioni continue* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *e* $g : B \to \mathbb{R}$ *allora la funzione composta*

$$g \circ f : \{x \in A \mid f(x) \in B\} \to \mathbb{R} \qquad y = g(f(x))$$

è continua.

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 08: 26/03/22

Punto di accumulazione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$

a) un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \qquad \text{e} \qquad x \neq x_0;$$

b) $+\infty$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $R > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x > R$

c) $-\infty$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $R > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x < -R$

Limite. Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, un punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ per A ed $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

a) caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \qquad \text{per ogni } x \in A,\ x \neq x_0 \text{ e } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

b) caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = \pm\infty$: se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{cases} f(x) > M & \text{se } \ell = +\infty \\ f(x) < -M & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \qquad \text{per ogni } x \in A, \quad x \neq x_0 \text{ e } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

c) caso $x_0 = \pm\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \qquad \text{per ogni } x \in A \text{ e } \begin{cases} x > R & \text{se } x_0 = +\infty \\ x < -R & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

d) caso $x_0 = \pm\infty$ e e $\ell = \pm\infty$: se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\begin{cases} f(x) > M & \text{se } \ell = +\infty \\ f(x) < -M & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \qquad \text{per ogni } x \in A \text{ e } \begin{cases} x > R & \text{se } x_0 = +\infty \\ x < -R & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

In tal caso, si dice che esiste il limite di f per x che tende a x_0 e vale ℓ oppure che $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende a x_0.

Proposizione 8.1. *Data $f\colon A \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in A$ punto di accumulazione per A, f è continua in x_0 se e solo se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Limite destro e sinistro.
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per A tale che per ogni $\delta > 0$

$$A \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq \varnothing \qquad \text{e} \qquad A \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq \varnothing,$$

si scrive

a) **limite destro**

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \qquad \text{per ogni } x \in A, \quad x_0 < x < x_0 + \delta,$$

b) **limite sinistro**

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \qquad \text{per ogni } x \in A, \quad x_0 - \delta < x < x_0,$$

Analoghe definizioni valgono se $\ell = \pm\infty$.

Proposizione 8.2.
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\delta > 0$

$$A \cap (-\delta, x_0) \neq \varnothing \qquad e \qquad A \cap (x_0, \delta) \neq \varnothing,$$

allora x_0 è un punto di accumulazione per A e

$$\text{esiste } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{esistono } \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \end{cases}.$$

Teorema 8.3 (Algebra dei limiti)**.**
Date due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A, se esistono

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

allora

a) somma

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) =$$

	$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*f.i.*
$\ell_1 = -\infty$	$-\infty$	*f.i.*	$-\infty$

dove f.i=forma indeterminata $+\infty - \infty$.

b) prodotto

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) =$$

	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 < 0$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_1 = 0$	0	0	0	*f.i.*	*f.i.*
$\ell_1 > 0$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = +\infty$	$-\infty$	*f.i.*	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = -\infty$	$+\infty$	*f.i.*	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

dove f.i=forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

c) rapporto

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$

	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0^\pm$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 < 0$	ℓ_1/ℓ_2	$\mp\infty$	ℓ_1/ℓ_2	0	0
$\ell_1 = 0$	0	*f.i.*	0	0	0
$\ell_1 > 0$	ℓ_1/ℓ_2	$\pm\infty$	ℓ_1/ℓ_2	0	0
$\ell_1 = +\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	*f.i.*	*f.i.*
$\ell_1 = -\infty$	$+\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$	*f.i.*	*f.i.*

dove f.i=forma indeterminata $0/0$ *o* ∞/∞ *e la notazione* $\ell_2 = 0^\pm$ *significa che*

i) esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

ii) esiste $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$

$$\begin{cases} g(x) > 0 & \textit{se } \ell_2 = 0^+ \\ g(x) < 0 & \textit{se } \ell_2 = 0^- \end{cases}$$

se $x_0 \in \mathbb{R}$ *(analoga definizione se* $x_0 = \pm\infty$*).*

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 09: 31/03/22

Limiti agli estremi del dominio di definizione delle funzioni elementari.

- potenze con esponente intero $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \\ &\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty && n \text{ pari} \\ &\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty && n \text{ dispari} \end{aligned}$$

- potenze con esponente intero negativo $b = -n$ $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\pm\infty} x^{-n} = 0 && n > 0 \\ &\lim_{x\to 0} x^{-n} = +\infty && n \text{ pari} \\ &\lim_{x\to 0^\pm} x^{-n} = \pm\infty && n \text{ dispari} \end{aligned}$$

- radici n-esime $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{n}} = +\infty \\ &\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{n}} = 0 && n \text{ pari} \\ &\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{n}} = -\infty && n \text{ dispari} \end{aligned}$$

- potenze con esponente reale $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty && b > 0 \\ &\lim_{x\to+\infty} x^b = 0 && b < 0 \\ &\lim_{x\to 0} x^b = 0 && b > 0 \\ &\lim_{x\to 0} x^b = +\infty && b < 0 \end{aligned}$$

- esponenziale e logaritmo in base natuarle

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty && \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ &\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty && \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \end{aligned}$$

- esponenziali e logaritmi

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty && a>1\\
&\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 && 0<a<1\\
&\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 && a>1\\
&\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty && 0<a<1\\
&\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty && a>1\\
&\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty && 0<a<1\\
&\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty && a>1\\
&\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty && 0<a<1
\end{aligned}$$

- funzioni trigonometriche ed inverse

$$\begin{aligned}
&\text{non esiste } \lim_{x\to\pm\infty} \sin x\\
&\text{non esiste } \lim_{x\to\pm\infty} \cos x\\
&\text{non esiste } \lim_{x\to\pm\infty} \tan x\\
&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}} \tan x = \mp\infty\\
&\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^{\pm}} \tan x = \mp\infty\\
&\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}\\
&\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Forme indeterminate del tipo ∞/∞ o $0\cdot\infty$; ordini di infinto.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty && n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}\\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty && n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}\\
&\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 && n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}\\
&\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0 && n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty && a>1,\ b>0\\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = +\infty && a>1,\ b>0\\
&\lim_{x\to-\infty} |x|^b a^x = 0 && a>1,\ b>0\\
&\lim_{x\to 0} x^b \log_a x = 0 && a,b>0,\ a\neq 1.
\end{aligned}$$

Teorema 9.1 (Limite funzione composta)**.**
Date due funzioni $f\colon A\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$, e $g: B\to\mathbb{R}$, $z=g(y)$, tali che

a) per ogni $x\in A$, allora $f(x)\in B$, *b) il punto x_0 è di accumulazione per A ed esiste*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

c) il punto y_0 è di accumulazione per B ed esiste

$$\lim_{y \to y_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell.$$

. Le condizioni del teorema non sono sufficiente per assicurare l'esistenza del limite $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$. Occorre aggiungere delle ipotesi tecniche, che però sono sempre verificate negli esercizi. Ad esempio, è sufficiente richiedere che una delle seguenti tre condizioni sia soddisfatta

c1): il punto y_0 non appartiene a $\operatorname{dom} g$
c2): la funzione g è continua in y_0
c3): esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in A$, $x \neq x_0$ e $x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$.

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 10: 01/04/22

2 ore

Forme indeterminate del tipo 0/0: limiti fondamentali, figli e nipoti.

genitori: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

figli: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad a > 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad a > 0,\ a \neq 1$

nipoti: $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Definizione di e: da inserire

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 11: 07/04/22

Teorema 11.1 (Teorema del confronto).
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ *e un punto* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *di accumulazione per* A, *se*

a) esistono due funzioni $g, h : A \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \qquad \text{per ogni } x \in A\ x \neq x_0,$$

b) esistono i limiti

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell,$$

dove $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, *allora esiste*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Intorno. Dato $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un intorno I di x_0 è un insieme tale che

a) **Caso** $x_0 \in \mathbb{R}$: esiste $\delta > 0$

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$$

b) **Caso** $x_0 = +\infty$: esiste $a \in \mathbb{R}$

$$(a, +\infty) \subseteq I$$

c) **Caso** $x_0 = -\infty$: esiste $b \in \mathbb{R}$

$$(-\infty, b) \subseteq I$$

Teorema 11.2 (Teorema della permanenza del segno).
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ *ed un punto* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *di accumulazione per* A *tale che esista*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

a) se $\ell > 0$ *oppure* $\ell + \infty$, *allora esiste un intorno* I *di* x_0 *tale che*

$$f(x) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in A \cap I,\ x \neq x_0$$

b) se esiste un intorno I *di* x_0 *tale che*

$$f(x) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in A \cap I,\ x \neq x_0,$$

allora

$$\ell \geqslant 0 \qquad \text{oppure} \qquad \ell = +\infty.$$

Un analogo risultato vale se $\ell < 0$ o $\ell = -\infty$ o la funzione è negativa in un intorno di x_0.

Limiti di successioni.
Una successione è una famiglia di numeri reali

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

indicizzata dai numeri naturali e si denota con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Poiché una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisce una funzione con dominio $\mathbb{N}$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad f(n) = a_n \quad n \in \mathbb{N},$$

ed $x_0 = +\infty$ è un punto di accumulazione per $\mathbb{N}$, si può considerare il limite per n che tende a $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Valgono tutti i teoremi visti per i limiti di funzioni.

Teorema 11.3 (Caratterizzazione per successioni)**.**
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per A sono fatti equivalenti

a) *esiste*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\};$$

b) *per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che*

$$x_n \in A \qquad x_n \neq x_0 \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 12: 08/04/22

2 ore

Estremo superiore, inferiore, massimo e minimo assoluto.
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$,

- f è detta superiormente limitata se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale
$$f(x) \leqslant M \text{ per ogni } x \in A$$
- $x_M \in A$ è detto punto di massimo assoluto se
$$f(x) \leqslant f(x_M) \text{ per ogni } x \in A$$
e $f(x_M) = \max_{x\in A} f(x)$ è detto massimo assoluto di f
- un elemento $M \in \mathbb{R}$ è detto estremo superiore di f se
$$\begin{cases} f(x) \leqslant M \text{ per ogni } x \in A \\ \text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } x \in A \text{ tale che } f(x) > M - \epsilon \end{cases}$$
e si scrive $M = \sup_{x\in A} f(x)$. Se esiste, f è superiormente limitata
- se f non è superiormente limitata, si pone
$$\sup_{x\in A} f(x) = +\infty$$
- f è detta inferiormente limitata se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale
$$f(x) \geqslant m \text{ per ogni } x \in A$$
- un elemento $x_m \in A$ è detto punto di minimo assoluto di f se
$$f(x) \geqslant f(x_m) \text{ per ogni } x \in A$$
e $f(x_m) = \min_{x\in A} f(x)$ è detto minimo assoluto di f
- un elemento $m \in \mathbb{R}$ è detto estremo inferiore se
$$\begin{cases} f(x) \geqslant m \text{ per ogni } x \in A \\ \text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } x \in A \text{ tale che } f(x) < m + \epsilon. \end{cases}$$
e si scrive $m = \inf_{x\in A} f(x)$. Se esiste, allora f è inferiormente limitata.
- se f non è inferiormente limitata, si pone
$$\inf_{x\in A} f(x) = -\infty$$
- f è detta limitata se è inferiormente e superiormente limitata, cioè se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che
$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

Osservazione. Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$,

i) se $x_m \in A$ è un punto di minimo assoluto, allora
$$\min_{x\in A} f(x) = \inf_{x\in A} f(x) = f(x_m)$$
ii) se $x_M \in A$ è un punto di massimo assoluto, allora
$$\max_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} f(x) = f(x_M)$$

iii) se f è limitata, allora
$$\operatorname{Im} f \subseteq [\inf_{x\in A} f(x), \sup_{x\in A} f(x)]$$

Teorema 12.1 (Completezza di $\mathbb{R}$)**.** *Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$,*

- *se f è superiormente limitata, allora ammette un unico estremo superiore finito* $\sup_{x\in A} f(x) = M \in \mathbb{R}$
- *se f è inferiormente limitata, allora ammette un unico estremo inferiore finito* $\inf_{x\in A} f(x) = m \in \mathbb{R}$

Rette nel piano.
Dato un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ le rette passanti per P_0 hanno equazione
$$y = m(x - x_0) + y_0 \qquad \text{oppure} \qquad x = x_0 \quad \text{(retta verticale)},$$
dove $m = \tan\theta$ è il coefficiente angolare e $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ è l'angolo che la retta forma con la retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse.

Dati due punti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, la retta passante per P_0 e P_1 ha equazione
$$\begin{cases} y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 & \text{se } x_0 \neq x_1 \\ x = x_0 & \text{se } x_0 = x_1 \end{cases}$$
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su intervallo I ed $x_0 \neq x_1 \in I$, l'equazione della retta secante il grafico di f nei punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ è
$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$
In particolare, la retta secante non è parallela all'asse delle ordinate ed il suo coefficiente angolare è
$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Derivata e retta tangente.
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I

a) fissato $x_0 \in I$, si dice che f è derivabile in x_0 se esiste finito
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0),$$
il valore del limite $f'(x_0)$ si chiama derivata della funzione f nel punto x_0

b) la funzione f si dice derivabile se è derivabile in x_0 per ogni $x_0 \in I$ e la funzione
$$f' : I \to \mathbb{R} \qquad y = f'(x)$$
è detta derivata prima

☡. La definizione di funzione derivabile si estende al caso di funzioni definite su un unione di intervalli disgiunti.

Osservazione. Se si pone $h = x - x_0$ la definizione di derivata diventa
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
dove è inteso che il limite esiste finito. La quantità
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

è detta *rapporto incrementale* della funzione ed è il coefficiente angolare della retta secante il grafico di $f(x)$ nei punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_h = (x_0+h, f(x_0+h))$. Facendo tendere h a zero, il punto P_h tende a P_0 e la corrispondente retta secante converge alla retta tangente, se f è derivabile (vedi Fig. 12.1). Ne segue che l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ è

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(y_0)$$

In particolare la derivata $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente.

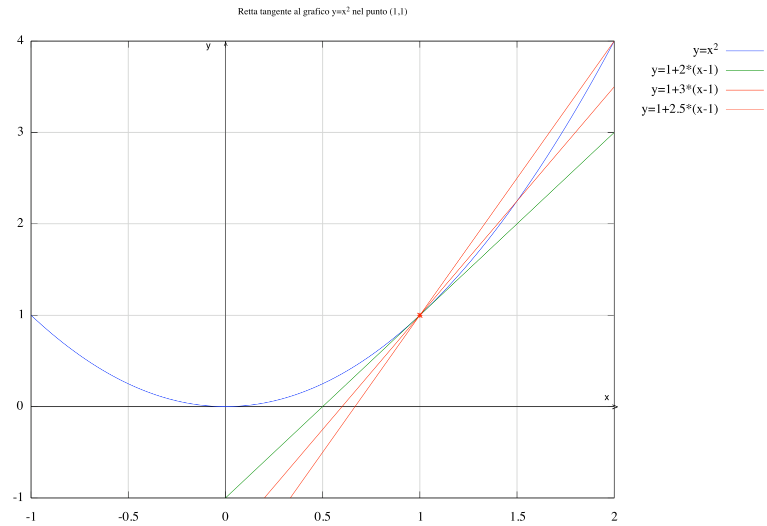


FIGURA 12.1. Retta tangente (verde) e rette secanti (rosso) al grafico di $y = x^2$ nel punto $(1, 1)$.

Osservazione. Dalle definizione di derivata segue che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} = 0 \tag{12.1}$$

Si osservi che $y = f(x)$ e $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ sono i grafici di f e della sua retta tangente nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ è la distanza (con segno) tra l'ordinata del punto $P = (x, f(x))$ sul grafico di f e l'ordinata del punto $Q = (x, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ sulla retta tangente. Allora la (12.1) implica che tale distanza tende a zero più velocemente di quanto $x - x_0$ tenda a zero, vedi Fig. 12.2.

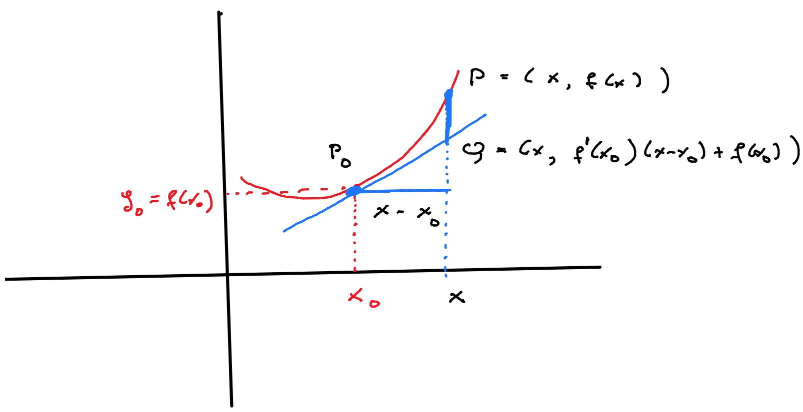


FIGURA 12.2

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 13: 22/04/22

2 ore

Nella Tabella 13.1 sono elencate le derivate delle funzioni elementari.

$f(x)$		$f'(x)$	I
1		0	$\mathbb{R}$
x^n	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$	n pari $(0, +\infty)$, n dispari $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
x^b	$b \in \mathbb{R}$	bx^{b-1}	$(0, +\infty)$
e^x		e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$a > 0$	$\log a \ a^x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$		$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\log_a x$	$a > 0, \ a \neq 1$	$\frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$		$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arctan x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

TABELLA 13.1. Derivate di alcune funzioni elementari.

Proprietà delle funzioni derivabili.

Proposizione 13.1 (Continuità funzioni derivabili)**.**
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I. Se $f(x)$ è derivabile in $x_0 \in I$, allora $f(x)$ è continua in x_0.

. Esistono funzioni continue che non sono derivabili. Ad esempio, la funzione

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

è continua sul suo dominio, ma non è derivabile in $x_0 = 0$, dove abbiamo visto essere presente una tangente *verticale*.

Teorema 13.2 (Algebra delle funzioni derivabili I).
Date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo I e derivabili, allora

a) dati $a, b \in \mathbb{R}$ la combinazione linerare $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è derivabile e vale

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$$

in particolare,

$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x) \qquad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$$

b) il prodotto $f(x)g(x)$ è derivabile e vale

$$(f(x)g(x))' = \underbrace{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}_{\text{regola di Leibniz}};$$

c) se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, allora il rapporto $f(x)/g(x)$ è derivabile e vale

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2},$$

in particolare

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

purché $f(x) \neq 0$

Dimostrazione. Dimostriamo la derivata del rapporto. Fissato $x_0 \in I$, poichè

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\
&= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\
&= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{g(x)g(x_0)}
\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) \frac{1}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\
&= (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)) \frac{1}{g(x_0)^2} \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2},
\end{aligned}$$

essendo g continua e, quindi, $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. □

Algebra delle funzioni derivabili II.

Teorema 13.3 (Derivata funzione composta).
Date due funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ dove I e J sono due intervalli, tali che

a) per ogni $x \in I$ allora $f(x) \in J$

b) le funzioni f e g sono derivabili

allora la funzione composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$, $z = g(f(x))$, è derivabile e

$$g(f(x))' = g'(f(x))\, f'(x) \qquad \textit{regola di derivazione in catena.}$$

☡. Notazioni alternative per la derivata prima f' sono

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{dy}{dx}(x) = Df(x)$$

Usando la seconda notazione la regola di derivazione in catena diventa

$$\frac{dz}{dx}(x) = \frac{dz}{dy}(y)\,\frac{dy}{dx}(x)$$

dove $z = g(y)$ e $y = f(x)$.

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 14: 03/05/22

2 ore

Teorema 14.1 (di De l'Hôpital)**.**
Date due funzioni $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo ed $x_0 \in I$ tali che

a) f e g sono derivabili e

$$g'(x) \neq 0 \qquad \text{per ogni } x \in I, x \neq x_0$$

b) vale una delle due seguenti condizioni

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \\ &\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{aligned} \tag{14.1a}$$

oppure

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \\ &\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \end{aligned} \tag{14.1b}$$

c) esiste

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

allora esiste

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

. Il teorema si applica solo se sono soddisfatte le condizioni (14.1a)–(14.1b), cioè alle forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

ma

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = 0 \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to \pi} \frac{\cos x}{1} = \cos \pi = -1.$$

Teorema 14.2.
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, tale che

a) il dominio I è un intervallo
b) f è iniettiva
c) f è continua

allora, posto $J = \operatorname{Im} f$, la funzione inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ è continua.
Se inoltre

d) f è derivabile
e) per ogni $x \in I$, $f'(x) \neq 0$

allora f^{-1} è derivabile e

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad x \in J$$

. Se il dominio di f non è un intervallo, l'inversa di una funzione continua può avere delle discontinuità. Ad esempio, data la funzione

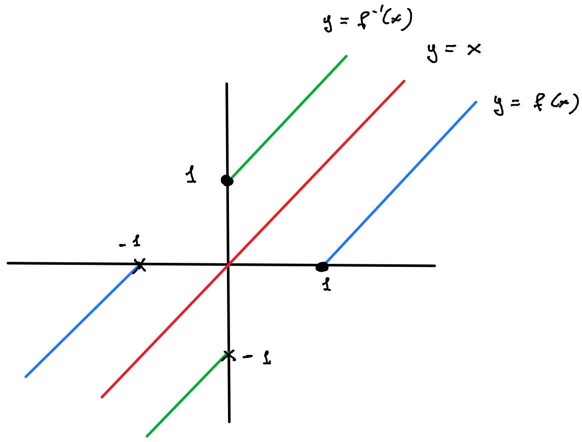
$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & x < -1 \\ f(x) = x - 1 & x \geqslant 1 \end{cases},$$

definita su $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$, allora si verifica immediatamente che f è iniettiva, continua, l'immagine è l'intervallo $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, ma l'inversa

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = x - 1 & x < 0 \\ f^{-1}(x) = x + 1 & x \geqslant 0, \end{cases}$$

non è continua in 0 poiché

$$\lim_{x \to 0^-} f^{-1}(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f^{-1}(x) = 1.$$



Inoltre, se f è derivabile, ma la derivata prima di f is annulla, l'inversa non è derivabile. Ad esempio $f(x) = x^3 + 1$ è derivabile su $\mathbb{R}$ con derivata $f'(x) = 3x^2$, tuttavia l'inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ non è derivabile in $1 = f(0)$ poiché $f'(0) = 0$.

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 15: 04/05/22

2 ore

Derivata destra e sinistra. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I di estremo sinistro $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ed estremo destro $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ed un punto $x_0 \in I$, $x_0 \neq a$, se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_-(x_0)$$

il valore $f'_-(x_0)$ si chiama derivata sinistra. Se $x_0 \neq b$ se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_+(x_0)$$

Osservazione. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I di estremo sinistro $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ed estremo destro $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ed un punto $x_0 \in I$, $x_0 \neq a$ e $x_0 \neq b$, allora sono fatti equivalenti

a) la funzione f è derivabille in x_0
b) la funzione f ammette derivata sinistra e destra in x_0 e sono uguali tra di loro.

In tal caso

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Esempio 15.1. Sia $f(x) = |x|$ la funzione modulo. La funzione non è derivabile in $x_0 = 0$. Infatti

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{\pm x}{x} = \pm 1.$$

Ne segue che f ammette derivata destra e sinistra in x_0, ma sono diverse tra di loro

$$f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1.$$

Teorema 15.2 (Teorema di Weierstrass).
Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ allora f ammette massimo e minimo assoluti, cioè esistono $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che

$$\min f = f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = \max f \qquad \forall x \in [a, b]$$

. Affinché il teorema di Weierstrass possa essere applicato, il dominio deve essere un intervallo della forma $I = [a, b]$ e la funzione deve essere continua. Ad esempio, la funzione $f(x) = \arctan x$ dove $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ non ammette né massimo né minimo assoluti.
La funzione $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ dove $\operatorname{dom} f = (-1, 1)$, allora $\min f = f(0) = 1$ e $x_0 = 0$ è il punto di minimo assoluto, ma non ammette massimo e $\sup f = +\infty$.

Teorema 15.3 (Teorema dei valori intermedi).
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se

a) il dominio I è un intervallo
b) la funzione f è continua

allora l'immagine di f è un intervallo di estremo sinistro $\inf f$ *ed estremo destro* $\sup f$*, cioè* *i) se f ammette minimo e massimo assoluti, allora*

$$\operatorname{Im} f = [\min f, \max f]$$

ii) se f ammette massimo assoluto, ma non il minimo assoluto, allora

$$\operatorname{Im} f = (\inf f, \max f]$$

iii) se f ammette minimo assoluto, ma non il massimo assoluto, allora

$$\operatorname{Im} f = [\min f, \sup f)$$

iv) se f non ammette né minimo né massimo assoluto, allora

$$\operatorname{Im} f = (\inf f, \sup f).$$

Osservazione. Dalla definizione di estremo superiore ed inferiore, per ogni valore $y_0 < \inf f$ oppure $y_0 > \sup f$, l'equazione $f(x) = y_0$ non ha soluzioni. Il teorema del valori intermedi assicura che per ogni $y_0 \in (\inf f, \sup f)$ l'equazione $f(x) = y_0$ ammette almeno una soluzione. Se $y_0 = \inf f$, l'equazione $f(x) = y_0$ ha soluzione solo se f ammette minimo assoluto e le soluzioni sono i punti di minimo assoluti. Analogo risultato vale per l'equazione $f(x) = y_0$ dove $y_0 = \sup f$.

Teorema 15.4 (Teorema degli zeri)**.**
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ tale che

a) il dominio I è un intervallo
b) la funzione f è continua
c) esistono $x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$, tali che

$$f(x_0)f(x_1) < 0,$$

allora esiste $x^* \in I$ tale che

$$f(x^*) = 0 \qquad e \qquad x_0 < x^* < x_1.$$

Esempio 15.5.

a) Data la funzione

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x^3 + \sqrt{1 - x^2}$$

poiché $f(-1) = -2 < 0$ e $f(1) = 2$, esiste $x^* \in (-1, 1)$ tale che $f(x^*) = 0$. Osservando che

$$\begin{array}{lcl} f(0) = 1 > 0 & \Longrightarrow & x^* \in (-1, 0) \\ f(-0.5) \simeq 0.62 > 0 & \Longrightarrow & x^* \in (-1, -0.5) \\ f(-0.75) \simeq -0.18 < 0 & \Longrightarrow & x^* \in (-0.75, -0.5) \end{array}$$

Si prova che la soluzione esatta è $x^* = -1/\sqrt{2} \simeq -0.70711$

b) Data la funzione

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x + \ln x$$

poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ allora esiste $x^* \in (0, +\infty)$ tale che $f(x^*) = 0$. Essendo f crescente la soluzione è unica. Poiché $f(1) = 1$, allora tale che $x^* \in (0, 1)$. Poiché $f(1/e) = 1/e - 1$, allora tale che $x^* \in (1/e, 1)$ dove $1/e \sim 0.368$ (soluzione approssimata $x^* = 0.567143$, $f(x^*) = -8 \cdot 10^{-7}$).

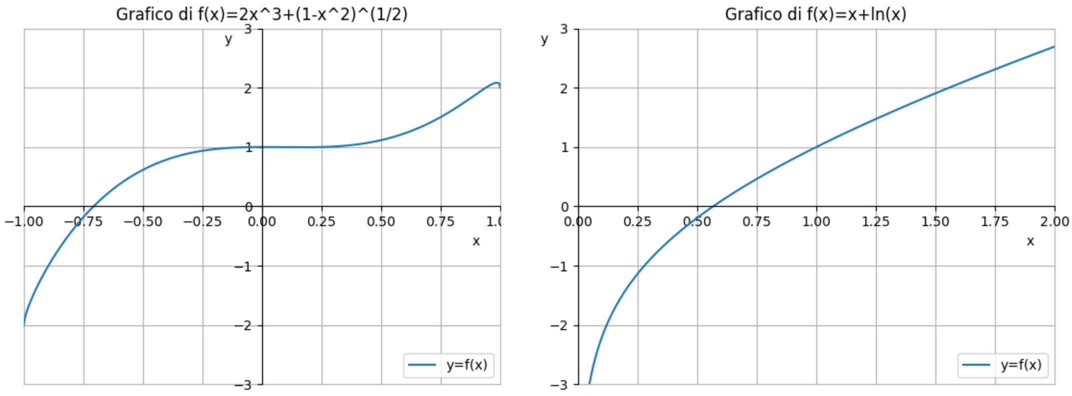


Figura 15.1. Grafico delle funzioni degli esempi a) e b)

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 16: 05/05/22

2 ore

Teorema 16.1 (Teorema di Lagrange)**.**
Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *tale che*

i) f *è continua in* x *per ogni* $x \in [a,b]$
ii) f *è derivabile in* x *per ogni* $x \in (a,b)$

allora esiste $x_0 \in (a,b)$ *tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a) \tag{16.1}$$

Osservazione. Dal punto di vista grafico, la (16.1) significa che esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ è parallela alla retta secante passante per i punti $P_1 = (a, f(a))$ e $P_2 = (b, f(b))$.

Osservazione. Se esistono $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$m_1 \leqslant f'(x) \leqslant m_2 \qquad \text{per ogni } x \in [a,b]$$

applicando la (16.1) con $b = x$, allora

$$m_1(x-a) \leqslant f(x) - f(a) = f'(x_0)(x-a) \leqslant m_2(x-a) \qquad x \in [a,b],$$

cioè il grafico $y = f(x)$ è compreso tra le due rette

$$y = m_1(x-a) + f(a) \qquad \text{e} \qquad y = m_2(x-a) + f(a)$$

entrambe passanti per il punto del grafico $P_1 = (a, f(a))$.

☡. Nel caso in cui $f(a) = f(b)$ il teorema di Lagrange implica che esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ (tale risultato è noto come teorema di Rolle).

Estremi relativi.
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ è detto *punto di estremo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

- minimo relativo

$$f(x) \geqslant f(x_0) \qquad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

- massimo relativo

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$

Il valore $f(x_0)$ è detto estremo (minimo/massimo) relativo.

☡. I punti di minimo e massimo assoluti, sono anche punti di minimo e massimo relativo, ma non è vero il contrario (in Fig. 16.1 $x_0 = -2$ è il punto di massimo assoluto e $x_0 = \pm 1$ sono i punti di minimo assoluto, mentre $x_0 = 0$ e $x_0 = 1,5$ sono estremi relativi, ma non assoluti).

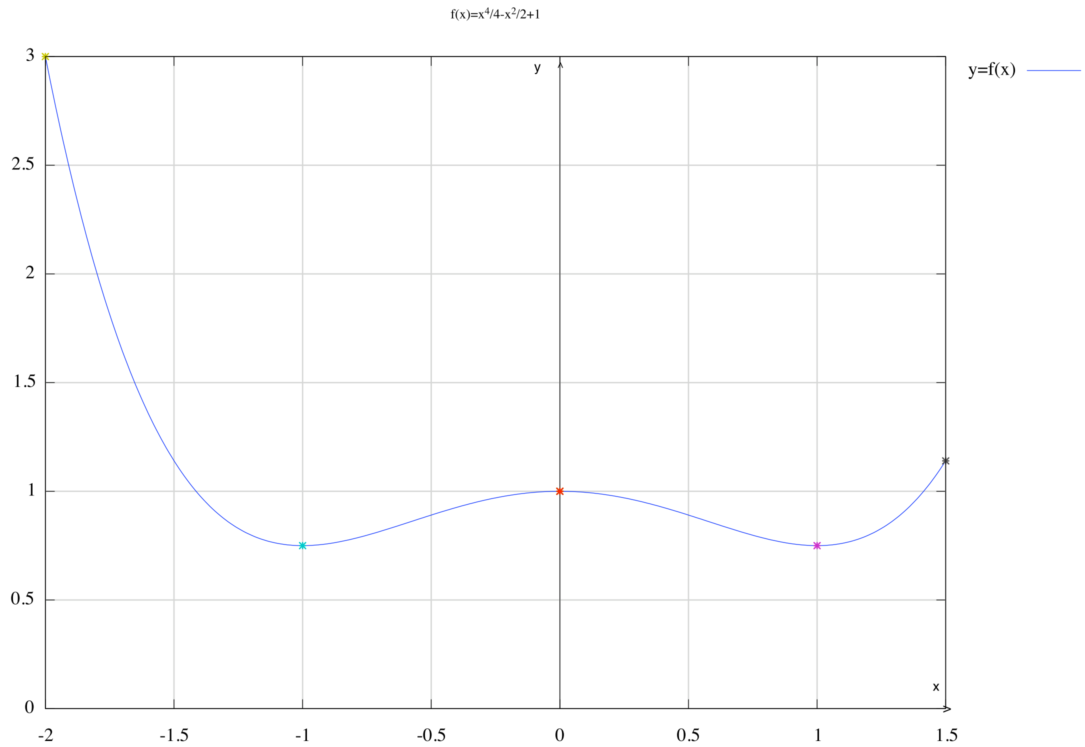


FIGURA 16.1. Estremi relativi di $f(x) = x^4/4 - x^2/2 + 1$ nell'intervallo $[-2, 3/2]$. Punti di minimo relativo: $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$, punti di massimo relativo: $x_0 = -2$, $x_0 = 0$ e $x_0 = 3/2$.

Teorema 16.2 (Condizione necessaria del I ordine)**.**
Data $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I di estremo sinistro $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ed estremo destro $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ed un punto $x_0 \in I$ tali che

i) la funzione f è derivabile in x_0
ii) x_0 è un punto di estremo relativo per f
iii) $x_0 \neq a$ e $x_0 \neq b$

allora $f'(x_0) = 0$.

Osservazione. Il teorema assicura che la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ è parallela all'asse delle ascisse purché

i) f sia derivabile in x_0 e quindi ammette retta tangente
ii) il punto x_0 sia di minimo o massimo relativo relativo;
iii) x_0 non coincida con gli estremi a e b, cioè $x_0 \in (a, b)$.

. La condizione che $x_0 \in (a, b)$ non si può togliere. Ad esempio in Fig. 16.1 $x_0 = -2$ è un punto di massimo assoluto (e quindi relativo), ma la retta tangente al grafico di $y = x^4/4 - x/2 + 1$ nel punto $(-2, 3)$ non è orizzontale.

. I punti $x_0 \in I$ in cui f è derivabile ed $f'(x_0) = 0$ sono detti punti critici. Per tali valori, la retta tangente al grafico di f in $(x_o, f(x_0))$ è parallela all'asse delle ascisse, tuttavia in generale x_0 non è un punto di estremo relativo. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ ha derivata $f'(x) = 3x^2$, che si annulla in $x_0 = 0$. Tuttavia, $x_0 = 0$ non è un punto di estremo relativo poiché

$$\begin{cases} f(x) < f(0) = 0 & x < 0 \\ f(x) > f(0) = 0 & x > 0. \end{cases}$$

Teorema 16.3 (Caratterizzazione monotonia).
Data $f : I \to \mathbb{R}$ *definita su un intervallo* I *di estremo sinistro* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *ed estremo destro* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tale che*

i) f *è continua in* x_0 *per ogni* $x_0 \in I$
ii) f *è derivabile in* x_0 *per ogni* $x_0 \in (a, b)$

allora

$$\begin{aligned}
&f'(x) \geqslant 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) &&\Longleftrightarrow &&f(x) \text{ è debolmente crescente su } I\\
&f'(x) \leqslant 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) &&\Longleftrightarrow &&f(x) \text{ è debolmente decrescente su } I\\
&f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) &&\Longleftrightarrow &&f(x) \text{ è costante su } I
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
&f'(x) > 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) &&\Longrightarrow &&f(x) \text{ è crescente su } I\\
&f'(x) < 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) &&\Longrightarrow &&f(x) \text{ è decrescente su } I
\end{aligned}$$

Dimostrazione. (Facoltativa)
Dimostriamo la prima affermazione. Le altre si provano in modo simile.
Caso 1 $f'(x) \geqslant 0 \Longrightarrow f$ è debolmente crescente.
Dati $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, la funzione f ristretta all'intervallo $[x_1, x_2] \subset I$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange, Teo. 16.1, per cui esiste $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) \geqslant 0$$

poiché $f'(x_0) \geqslant 0$ e $x_2 - x_1 > 0$. Ne segue che $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.
Caso 2 f è debolmente crescente $\Longrightarrow f'(x) \geqslant 0$.
Fissato $x_0 \in (a, b)$, poiché f è debolmente crescente, se $x > x_0$ allora $f(x) \geqslant f(x_0)$, da cui segue che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \qquad x > x_0.$$

Analogamente, se $x < x_0$ allora $f(x) \leqslant f(x_0)$, da cui segue che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \qquad x < x_0.$$

Dal teorema della permanenza del segno, Teo 11.2, segue che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

□

. Se il dominio nella funzione f non è un intervallo, il segno della derivata prima non permette di caratterizzare la monotonia della funzione. Infatti, se $f(x) = \frac{1}{x}$ con dominio$\mathbb{R} \backslash \{0\}$, la sua derivata $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ per ogni $x \neq 0$. Il grafico di $f(x)$ è l'iperbole equilatera $yx = 1$, per cui la funzione è decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ così come nell'intervallo $(0, +\infty)$. Tuttavia non è decrescente su l'unione dei due intervalli $\mathbb{R} \backslash \{0\}$: infatti

$$f(x_1) < 0 < f(x_2) \qquad \text{se } x_1 < 0 < x_2.$$

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 17: 12/05/22

2 ore

Derivate di ordine successivo.
Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ su un intervallo I si dice derivabile due volte se

a) la funzione f è derivabile
b) la derivata prima f' è derivabile

e la funzione

$$f'' : I \to \mathbb{R} \qquad f''(x) = (f'(x))'$$

si chiama derivata seconda. In modo analogo si definiscono le derivate di ordine successivo

$$f''' = (f'')', \quad f^{(4)} = (f''')', \qquad , f^{(k+1)} = (f^{(k)})',$$

dove l'indice $k \in \mathbb{N}$ è detto ordine di derivazione.

. Se $k = 0$ si pone $f^{(0)} = f$.

Notazioni alternative per le derivate sono

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x) = \frac{d^k y}{dx^k}(x) = D^k f(x)$$

Funzioni convesse e concave.
Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I è detta

- convessa se per ogni $x_1, x_2 \in I$ e per ogni $t \in [0, 1]$
$$f((1-t)x_1 + tx_2)) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{17.1a}$$
- concava se per ogni $x_1, x_2 \in I$ e per ogni $t \in [0, 1]$
$$f((1-t)x_1 + tx_2)) \geqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{17.1b}$$

Dal punto di vista geometrico la condizione (17.1a) (risp. (17.1b)) afferma che, dati due punti $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ sul grafico di f, il segmento di estremi P_1 e P_2 sta sopra (risp. sotto) il grafico di f. Infatti, al variare di $t \in [0, 1]$,

- al variare di $t \in [0, 1]$
$$x_t = (1-t)x_1 + tx_2 = x_1 + t(x_2 - x_1)$$
descrive i punti sull'asse delle ascisse compresi tra x_1 e x_2
- al variare di $t \in [0, 1]$
$$((1-t)x_1 + tx_2), f((1-t)x_1 + tx_2)) = (x_t, f(x_t))$$
parametrizza i punti sul grafico di f compresi tra P_1 e P_2
- al variare di $t \in [0, 1]$
$$((1-t)x_1 + tx_2), (1-t)f(x_1) + tf(x_2))$$
parametrizza i punti del piano che stanno sul segmento di estremi P_1 e P_2. Infatti, la retta secante passante per P_1 e P_2 ha equazione
$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \underset{(x=x_t)}{=} (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Teorema 17.1 (Caratterizzazione convessità).
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile due volte. Sono fatti equivalenti

a) la funzione f è convessa

b) fissato $x_0 \in I$

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \textit{per ogni } x \in I \tag{17.2}$$

c) per ogni $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

d) per ogni $x, y \in I$ si ha $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f(\frac{x+y}{2})$.

Dal punto di vista geometrico la condizione (17.2) afferma che, dato un punto qualunque $P_0 = (x_0, f(x_0))$ sul grafico di f, la retta tangente al grafico di f in P_0 sta sotto il grafico di f. Un'analoga caratterizzazione vale per le funzione concave (basta cambiare il verso delle disequazioni). L'ultima condizione dice che per controllare la convessità basta che il punto medio di ogni segmento congiungente due punti del grafico di f rimanga sopra quest'ultimo.

Studio di funzioni. Lo schema seguente indicata i passi principali da fare per lo studio di funzioni. Ogni volta che si è risolto un punto occorre rappresentare l'informazione sul grafico e verificare che sia in accordo con quanto dedotto precedentemente.

1) Determinare il dominio della funzione f e scriverlo come unione di intervalli

$$\operatorname{dom} f = I_1 \cup I_2 \cup \ldots$$

2) Stabilire se la funzione è continua, quante volte è derivabile e calcolare f' ed f''.
3) Determinare le simmetrie (pari/dispari) e periodicità. Studiare il segno della funzione e calcolare le intersezioni con gli assi cartesiani: $f(0)$ se $0 \in \operatorname{dom} f$ e risolvere l'equazione $f(x) = 0$.
4) Calcolare i limiti di f agli estremi di ciascun intervallo I_1, I_2, ...
5) Studiare il segno della derivata prima f' calcolando i punti critici, e dedurne gli intervalli di monotonia della funzione (Teorema 16.3).
6) Determinare i punti di massimo e minimo relativi, ricordando che il Teorema 16.2 dà solo una condizione necessaria affinché un punto sia un estremo relativo.
   a) I punti critici x_0 (non coincidenti con gli estremi degli intervalli $I_1, I_2, \ldots$) in cui la derivata *cambia segno* sono punti di estremi relativo. Infatti, se

   $$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

   allora x_0 è un punto di minimo relativo. Analogamente, se

   $$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) < 0 & \text{se } x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

   allora x_0 è un punto di massimo relativo. Per tali valori, calcolare il corrispondente estremo relativo $f(x_0)$.
   b) Verificare se gli estremi degli intervalli I_1, I_2, ..., purché appartenenti al dominio, siano punti di estremi relativi (in tali punti in generale la derivata prima non si annulla). Ad esempio se $I_1 = [a, b)$ e

   $$f'(x) > 0 \quad a < x < a + \delta$$

allora $x_0 = a$ è un punto di minimo relativo, mentre $b \notin \operatorname{dom} f$ per cui non ha senso chiedersi se sia un punto di estremo relativo.

c) Verificare se i punti di non derivabilità di f, qualora esistenti, siano estremi relativi.

7) Studiare il segno della derivata seconda f'' e dedurne gli intervalli di convessità/concavità della funzione (Teorema 17.1). In particolare i punti in cui f'' *cambia segno*, sono detti punti di flesso e, in tali punti, può essere utile calcolare la derivata e tracciare la retta tangente).
8) Disegnare il grafico di f in modo coerente con i risultati dei punti precedenti
9) Determinare $\inf f$ e $\sup f$, stabilendo se sono o meno minimo e massimo assoluti.
10) Determinare l'immagine di f utilizzando il teorema dei valori intermedi (Teo. 15.3).

. In molti casi non si riescono a svolgere esplicitamente i calcoli per tutti i punti e si dovrà dedurre l'andamento del grafico solo attraverso i punti svolti.

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 18: 13/05/22

2 ore

Integrali indefiniti. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I, si chiama primitiva di f una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

L'insieme di tutte le primitive di f è detto integrale indefinito di f e si denota con

$$\int f(x)\,dx = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \text{ derivabile e } F'(x) = f(x) \text{per ogni } x \in I\}.$$

Osservazione. Se F è una primitiva di f, F è continua, poiché è derivabile. Inoltre, anche $F + c$ è una primitiva di f. Viceversa, se G è un altra primitiva di f, allora

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad x \in I.$$

Poiché I è un intervallo, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in I$. Ne segue che

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \text{costante}, \tag{18.1}$$

dove con lieve abuso di notazione $F(x) + \text{costante}$ denota l'insieme

$$\{G : I \to \mathbb{R} \mid G(x) = F(x) + c \text{ dove } c \in \mathbb{R}\}.$$

Inoltre, per definizione di primitiva

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \qquad \text{e} \qquad \int f'(x)\,dx = f(x) + c, \tag{18.2}$$

☡. La definizione di primitiva si può estendere a funzioni definite su unione di intervalli. Tuttavia in tal caso non è più vero che due primitive della stessa funzione differiscono per una costante. Ad esempio, se $f(x) = x^{-1}$ con $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ allora l'integrale generale è

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \ln(x) + c_1 & x > 0 \\ \ln(-x) + c_2 & x < 0 \end{cases}$$

☡. Esistono funzioni f che non ammettono primitive. Ad esempio la funzione

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Infatti, se F fosse una primitiva, allora

$$F(x) = \begin{cases} c_1 & x < 0 \\ x + c_2 & x > 0 \end{cases}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La continuità di F in $x_0 = 0$ implica che $F(0) = c_1 = c_2 = c$. Tuttavia, per qualunque scelta di $c \in \mathbb{R}$, F non è derivabile in $x_0 = 0$.
Il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che, se f è continua, allora ammette sempre una primitiva.

Teorema 18.1 (Linearità)**.** *Date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue definite su un intervallo I, allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\int \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big) dx = \Big(\alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx\Big).$$

Dimostrazione. (Facoltativa)
Segue dalla linearità dell'operazione di derivata. Infatti, se $F, G : I \to \mathbb{R}$ sono primitive rispettivamente di f e g, cioè

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x) \quad x \in I \tag{18.3}$$

$$\int g(x)\, dx = G(x) + c \iff G'(x) = g(x) \quad x \in I \tag{18.4}$$

allora la funzione

$$H : I \to \mathbb{R} \qquad H(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$$

è derivabile con derivata

$$H'(x) = (\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \quad x \in I$$

dove si è usato (18.3) e (18.4). Allora H è una primitiva di $\alpha f(x) + \beta g(x)$, cioè

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) = H(x) + c = \Big(\alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx\Big).$$

□

Teorema 18.2 (Formula di integrazione per parti)**.** *Date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo I, derivabili con derivate f' e g' continue, allora*

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx. \tag{18.5}$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di $f'g$, per definizione

$$F'(x) = f'(x)g(x) \qquad x \in I.$$

Posto

$$G : I \to \mathbb{R} \qquad G(x) = f(x)g(x) - F(x)$$

G è derivabile poiché f, g ed F sono derivabili e, per regola di derivazione del prodotto

$$G'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f'(x)g(x).$$

Allora

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - (F(x) + c) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx.$$

□

Come conseguenza della definizione di primitiva, nella Tabella 18.1 sono riportati alcuni integrali elementari. Nella Tabella 18.2 sono elencati alcuni integrali notevoli.

$$
\begin{aligned}
\int x^a \, dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c && \text{con } a \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} \, dx &= \ln|x| + c \\
\int e^x \, dx &= e^x + c \\
\int \sin x \, dx &= -\cos x + c \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + c \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x + c \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\frac{\cos x}{\sin x} + c \\
\int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \arctan x + c \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \arcsin x + c = -\arccos x + c
\end{aligned}
$$

Tabella 18.1. Integrali elementari.

$$
\begin{array}{lcll}
\displaystyle\int \ln x \, dx & = & x(\log x - 1) + c & \\[2ex]
\displaystyle\int \tan x \, dx & = & -\log|\cos x| + c & \\[2ex]
\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a} \, dx & = & \displaystyle\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + c & a > 0 \\[2ex]
\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a} \, dx & = & \displaystyle\frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{|x-\sqrt{a}|}{|x+\sqrt{a}|} + c & a > 0 \\[2ex]
\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a} \, dx & = & \displaystyle\frac{1}{2} \log|x^2+a| + c & a \in \mathbb{R} \\[2ex]
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} \, dx & = & \displaystyle\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + c & a > 0 \\[2ex]
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx & = & \displaystyle\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) + c & a \neq 0 \\[2ex]
\displaystyle\int \sqrt{a-x^2} \, dx & = & \displaystyle\frac{a}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{a-x^2}\right) + c & a > 0 \\[2ex]
\displaystyle\int \sqrt{x^2+a} \, dx & = & \displaystyle\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right) + c & a \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Tabella 18.2. Integrali notevoli.

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 19: 17/05/22

2 ore

Teorema 19.1 (Formula di integrazione per sostituzione)**.** *Date due funzioni* $f : I \to \mathbb{R}$ *e* $g : J \to \mathbb{R}$ *tali che*

a) i domini I *e* J *sono intervalli e* $g(x) \in I$ *per ogni* $x \in J$*;*

b) la funzione f *è continua;*

c) la funzione g *è derivabile e la derivata* g' *è continua,*

allora

$$\left(\int f(t)\ dt\right)_{|t=g(x)} = \int f(\underbrace{g(x)}_{t=g(x)})\underbrace{g'(x)\ dx}_{dt=g'(x)dx}. \tag{19.1}$$

Dimostrazione. (Facoltativa)
Sia $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Per ipotesi $g(x) \in I$ per ogni $x \in J$, allora la funzione composta

$$G : J \to \mathbb{R} \qquad G(x) = F(g(x))$$

è definita su J e, per il teorema di derivazione di funzione composte, G è derivabile, poiché F e g lo sono, con derivata

$$G'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) \qquad x \in J,$$

cioé $G(x)$ è una primitiva di $f(g(x))g'(x)$. Quindi

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x)) + c = (F(t) + c)_{|t=g(x)} = \left(\int f(t)\ dt\right)_{|t=g(x)}.$$

□

Calculus 1 **2021/22**

Lezione 20: 19/05/22

2 ore

Integrali funzioni razionali.
In questa lezione si accenna all'integrazione di alcune funzioni razionali, cioé della forma $\frac{N(x)}{D(x)}$ dove sia il numeratore $N(x)$ sia il denominatore $D(x)$ sono polinomi.
Abbassamento di grado.
Se il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, il primo passo è quello di abbassare il grado del numeratore. Posto $n = \text{grado}\,N(x)$ e $d = \text{grado}\,D(x)$, si determinano due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \tag{20.1}$$

dove $Q(x)$ ha grado $n - d \geqslant 0$ e $R(x)$ ha grado minore o uguale a $d - 1$. I coefficienti di $Q(x)$ e $R(x)$ si calcolano applicando il principio di identità dei polinomi all'uguaglianza

$$N(x) = Q(x)D(x) + R(x).$$

Esempio 20.1. Se

$$N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \qquad D(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

allora, $n = 3$, $d = 2$ e

$$Q(x) = A + Bx \qquad R(x) = C + Dx.$$

Le costanti A, B, C, D si calcolano imponendo che

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = (A + Bx)\left(b_0 + b_1x + b_2x^2\right) + (C + Dx),$$

da cui

$$\begin{cases} a_0 = Ab_0 + C \\ a_1 = Ab_1 + Bb_0 + D \\ a_2 = Ab_2 + Bb_1 \\ a_3 = Bb_2 \end{cases}.$$

Dalla (20.1), per la linearità dell'integrale segue che

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx.$$

Poiché $Q(x)$ è un polinomio, il primo integrale è elementare. Consideriamo il secondo. Trattiamo solo due casi: il denominatore $D(x)$ è un polinomio di primo grado (ed $R(x)$ è una constante) oppure $D(x)$ è di secondo grado (ed $R(x) = mx + q$).
Denominatore di grado 1.
Se il grado del denominatore è 1, allora

$$D(x) = ax + b \qquad R(x) = c \qquad a \neq 0.$$

Con il cambio di variabile $t = ax + b$

$$\int \frac{c}{ax+b}\,dx = \frac{c}{a}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{c}{a}\log|ax+b| + \text{constante}.$$

Denominatore di grado 2.
Se il grado di $Q(x)$ è 2, allora

$$R(x) = mx + q \qquad D(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0.$$

Si calcola il discriminante dell'equazione $D(x) = ax^2 + bx + c = 0$. In base al segno di Δ ci sono tre casi distinti.

a) $\Delta > 0$. Denotiamo con x_1 ed x_2 le due soluzioni reali distinte dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, per cui

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Poiché

$$\frac{mx + q}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}\right), \tag{20.2}$$

dove le costanti A e B si determinato imponendo che

$$mx + q = A(x - x_2) + B(x - x_1),$$

allora, dalla (20.2),

$$\begin{aligned}\int \frac{mx + q}{ax^2 + bx + c}\, dx &= \frac{1}{a}\left(A\int \frac{1}{x - x_1}\, dx + B\int \frac{1}{x - x_2}\, dx\right)\\ &= \frac{A}{a}\ln|x - x_1| + \frac{B}{a}\ln|x - x_2| + \text{costante}.\end{aligned}$$

b) $\Delta = 0$. Denotiamo con $x^* = x_1 = x_2$ le due soluzioni reali coincidenti dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, per cui

$$ax^2 + bx + c = a(x - x^*)^2.$$

Poiché

$$\frac{mx + q}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{a(x - x^*)} + \frac{B}{a(x - x^*)^2}, \tag{20.3}$$

dove le costanti A e B si determinato imponendo che

$$mx + q = A(x - x^*) + B,$$

allora dalla (20.3)

$$\begin{aligned}\int \frac{mx + q}{ax^2 + bx + c}\, dx &= \left(\frac{A}{a}\int \frac{1}{(x - x^*)}\, dx + \frac{B}{a}\int \frac{1}{(x - x^*)^2}\, dx\right)\\ &= \frac{A}{a}\ln|x - x^*| - \frac{B}{a}\frac{1}{x - x^*} + \text{costante},\end{aligned}$$

c) $\Delta < 0$. Senza perdita di generalità supponiamo che $a > 0$. Poiché

$$ax^2 + bx + c = \beta^2 + (\alpha x + \gamma)^2,$$

dove le costanti α, β e γ si determinato imponendo che

$$ax^2 + bx + c = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\gamma x + (\beta^2 + \gamma^2).$$

Inoltre, analogamente a sopra,

$$\frac{mx + q}{ax^2 + bx + c} = A\frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + B\frac{1}{ax^2 + bx + c}, \tag{20.4}$$

dove le costanti A e B si determinato imponendo che

$$mx + q = A(2ax + b) + B,$$

allora, dalla (20.4),

$$\begin{aligned}
\int \frac{mx+q}{ax^2+bx+c}\,dx &= \left(A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + B\int \frac{1}{\beta^2+(\alpha x+\gamma)^2}\,dx\right)\\
&= \left(A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \frac{B}{\beta^2}\int \frac{1}{1+(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta})^2}\,dx\right)\\
&= A\ln(ax^2+bx+c) + \frac{B}{\alpha\beta}\arctan\big(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta}\big) + \text{costante},
\end{aligned}$$

dove nel primo integrale si è fatto il cambio di variabili $t = ax^2+bx+c$ e $dt = 2ax+b$ e nel secondo il cambio di variabili $t = (\alpha x+\gamma)/\beta$ e $dt = (\alpha/\beta)dx$. Esplicitando α, β, γ in reazione ad a, b, c, possiamo anche scrivere quest'ultimo termine in funzione direttamente di a, b e $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\Big(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\Big) + \text{costante}$$