

3

INTRODUZIONE AI FENOMENI QUANTISTICI

I – DUE ESPERIMENTI

La meccanica quantistica è nata dall'impossibilità di spiegare alcuni fenomeni fisici. Noi discuteremo due esperimenti "prototipo" che evidenziano l'incompletezza della meccanica classica.

3.1.1 Esperimento doppia fenditura

Esperimento con palline

Secondo il Richard Feynmann [**FeynmanLecturesVol3**], l'esperimento della doppia fenditura racchiude tutta la meccanica quantistica.

Consideriamo inizialmente un cannone che spara delle palline in gomma ¹¹ verso un muro con due aperture (fenditure). La direzione è molto imprecisa quindi le palline possono passare sia attraverso la fenditura 1 che la 2 e, nel passare attraverso le fenditure (piccole), possono essere deviate come mostrato in figura 11.

Le palline che passano attraverso le fenditure vanno a finire su uno schermo distante dove rimangono attaccate (oppure possiamo pensare che lascino un'impronta). Ci chiediamo qual'è la distribuzione delle palline sullo schermo ovvero con che probabilità le palline colpiscono un certo punto sullo schermo ¹. Sperimentalmente si vede che la distribuzione è quella mostrata in fig. 11 c).

A questo punto chiudiamo la fenditura 2 in modo tale che le palline possano passare solo attraverso la 1. La distribuzione è P_1 mostrata in 11 c). Come ci si aspetterebbe la distribuzione è spostata lateralmente. In maniera analoga, chiudiamo la fenditura 2, la distribuzione cambia e viene spostata in senso opposto.

Questo capitolo è basato sulle note di Alessandro Verri.

¹ La distribuzione sarà proporzionale al numero di palline in una regione o all'intensità del colore lasciato sullo schermo dopo l'impatto

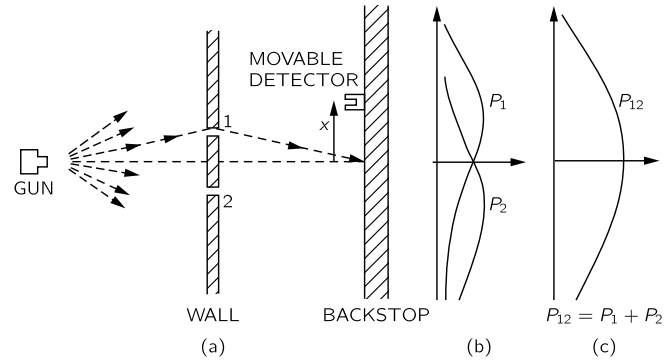


Figure 11: Esperimento con le palline.

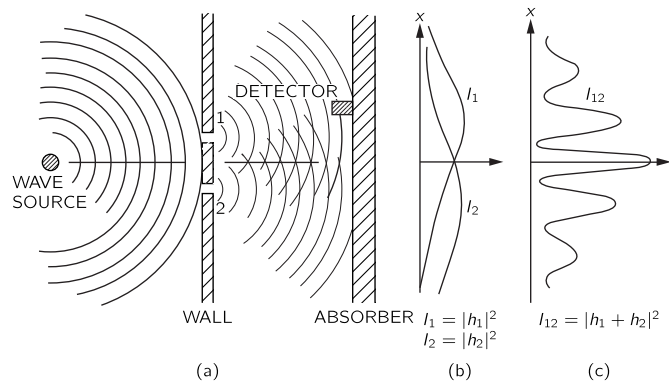


Figure 12: Esperimento con le onde.

Esperimento con onde

Consideriamo ora un esperimento simile con delle onde d'acqua (Fig. 12). Le onde sono emesse da una sorgente e incidono su un muro con due fenditure. Le onde continuano a propagarsi fino ad arrivare ad un secondo muro dove un dispositivo ne misura l'ampiezza.

Il risultato di questo semplice esperimento è mostrato in figura (Fig. 12) c)

Esperimento con elettroni

Consideriamo per finire il caso in cui siano degli elettroni ad incidere sulla parete con le due fenditure. Come prima gli elettroni potranno passare attraverso la prima o la seconda fenditura e arrivano su uno schermo distante dove vengono misurati da un dispositivo apposito. Il dispositivo emette un "click" ogni volta che misura la presenza di un elettrone.

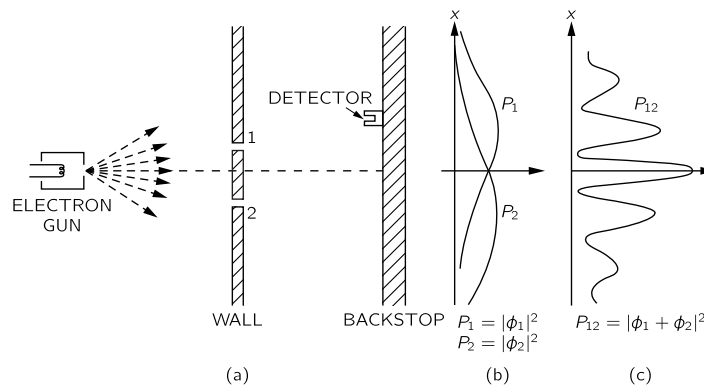


Figure 13: Esperimento con elettroni.

Quindi possiamo immaginare di ridurre il numero di elettroni emessi fino a poterli separare. Questo è il limite in cui la macchina emette un solo elettrone alla volta. Visto che gli elettroni sono emessi uno alla volta il misuratore emetterà dei "click" separati nel tempo. Gli elettroni sono particelle elementari quindi questi "click" separati non ci stupiscono.

Ma se gli elettroni sono particelle elementari, dovrebbero avere un comportamento simile alle palline e passare attraverso la fenditura 1 o attraverso la fenditura 2. Come per le palline queste situazioni sono esclusive. Con questa analogia, ci aspetteremo che con un numero sufficiente di misure la distribuzione di probabilità dell'arrivo degli elettroni sia simile a quella delle palline mostrata in Fig. 11 c).

Sorprendentemente, la distribuzione di arrivo degli elettroni (Fig. 13 c)) mostra fenomeni di interferenza ed è simile a quella delle onde (Fig. 12 c)). Siamo arrivati ad una conclusione paradossale, sebbene gli elettroni siano particelle (dato che arrivano separati) hanno una distribuzione tipica delle onde. Questo è la base del cosiddetto dualismo onda-particella nella meccanica quantistica: *gli elettroni (e le altre particelle) si comportano sia come corpuscoli che come onde.*

C'è un'altra importante osservazione. Le onde in Fig. 12 sono oggetti non-locali. Non si può dire se passano attraverso la fenditura 1 o la fenditura 2 perché passano contemporaneamente in entrambe. Per quanto possa sembrare sorprendente, questo è anche quello che succede agli elettroni: *gli elettroni passano contemporaneamente attraverso entrambe le fenditure.* Questo è uno dei risultati sorprendenti della meccanica quantistica.

3.1.2 Luce attraverso tre polarizzatori

Esiste un altro esperimento concettualmente semplice che però manifesta macroscopicamente gli effetti della meccanica quantistica.

La luce è composta da particelle dette fotoni. Un fascio di luce è in genere composto da molti fotoni; la presenza di molti fotoni fa sì che la luce ad alta

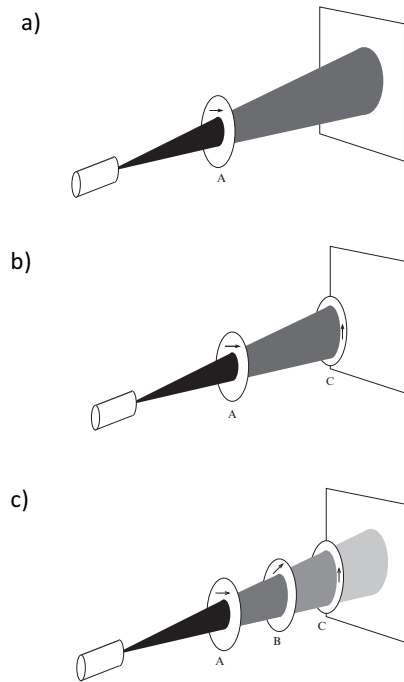


Figure 14: Esperimento dei polarizzatori. Una sorgente emette singoli fotoni che vanno ad incidere su uno schermo. a) Un polarizzatore A riduce l'intensità del fascio selezionando solo i fotoni con polarizzazione orizzontale. b) Un secondo polarizzatore verticale C blocca completamente il fascio; nessun fotone arriva sullo schermo. c) L'inserimento di un polarizzatore a 45° B fra A e C fa in modo che i fotoni arrivino nuovamente sullo schermo.

intensità che si comporti come un mezzo continuo. Possiamo quindi osservare interferenza fra fasci di luce esattamente come le onde in acqua (Fig. 12). Se però diminuiamo l'intensità del fascio è possibile contare i fotoni, emetterli e manipolarli singolarmente.

Ogni fotone è caratterizzato dalla sua polarizzazione ². La polarizzazione del fotone può essere misurata in laboratorio. Esistono ad esempio dei filtri polarizzanti che lasciano passare la luce che è polarizzata solo lungo una direzione precisa.

Supponiamo ora di avere un dispositivo che emette singoli fotoni con una polarizzazione che non conosciamo. Questi fotoni vengono assorbiti su uno schermo (Fig. 16). Inizialmente tutti i fotoni emessi arriveranno sullo schermo e noi osserveremo un'immagine la cui intensità è proporzionale al numero di fotoni emessi.

A questo punto, inseriamo fra la sorgente di fotoni e lo schermo un filtro polarizzatore nella direzione \rightarrow [Fig. 16 a)]. Vedremo che il numero di fotoni che arrivano allo schermo diminuisce (ovvero, l'intensità del fascio incidente sullo schermo diminuisce). Questo è spiegabile perché il filtro lascia passare solo i fo-

² I fisici sono soliti dire che la polarizzazione è un ulteriore grado di libertà del fotone.

toni polarizzati \rightarrow . Quelli polarizzati \uparrow vengono bloccati quindi non arrivano allo schermo.

Inseriamo un altro polarizzatore verticale \uparrow dopo il polarizzatore orizzontale come in Fig. 16 a)]. In questa configurazione, sullo schermo non arriva nessun fotone. Anche questo fatto è spiegabile con la fisica classica. Il primo polarizzatore lascia passare i fotoni con polarizzazione orizzontale ma blocca quelli con polarizzazione verticale. Quindi nel fascio che arriva al secondo polarizzatore verticale arrivano solo fotoni orizzontali che vengono assorbiti. È quindi naturale che nessun fotone arrivi sullo schermo.

L'ultimo passaggio è quello di mettere un terzo polarizzatore con polarizzazione a 45° fra i due precedenti [punto B in Fig. 16 c)]. L'intuizione ci direbbe che, secondo l'interpretazione appena discussa un polarizzatore intermedio non dovrebbe cambiare niente visto che i fotoni verrebbero comunque assorbiti dal polarizzatore orizzontale e verticale. La realtà è diversa. Sperimentalmente, si vede che se si inserisce un polarizzatore intermedio a 45° , alcuni fotoni riescono ad arrivare sullo schermo.[Fig. 16 c)].

Questo fatto controintuitivo, è spiegabile solo con la meccanica quantistica e necessita del concetto di misura quantistica che sarà introdotto nella sezione 3.3.

II – IL SINGOLO QUBIT

Il comportamento di un sistema quantistico obbedisce a principi che non sono quelli della fisica classica. Discutiamo i concetti di stato di un sistema e di misura partendo dall'interpretazione di un esperimento di ottica che coinvolge un qubit, il componente fondamentale dell'informazione quantistica. L'esperimento rivela l'inadeguatezza della fisica classica nel trattare sistemi fisici su scala atomica.

3.2.1 Stati quantistici

Sistemi grandi e piccoli

Per la fisica classica l'evoluzione nel tempo di un sistema - quale per esempio un pianeta, un circuito elettrico o un liquido contenuto in un recipiente - è deterministica. Ottenuto lo stato iniziale da una serie di misure opportune sul sistema, compito della fisica classica è predire lo stato del sistema nei tempi successivi, ovvero il risultato di nuove misure sul sistema stesso. Questa visione, che ha consentito di ottenere descrizioni accurate nel caso di sistemi macroscopici, non è in accordo con gli esperimenti nel caso di sistemi piccoli. A partire dalla scala atomica, infatti, la natura appare intrinsecamente non deterministica. La meccanica quantistica, la teoria fisica che ha superato le contraddizioni della fisica classica ed è in accordo con tutti gli esperimenti osservati a oggi, può solo predire la probabilità con la quale una data misura produca un particolare risultato. Al crescere delle dimensioni del sistema l'indeterminazione propria della meccanica quantistica diventa rapidamente trascurabile e la vecchia fisica classica fornisce modelli in ottimo accordo con i fenomeni osservati.

Principio di sovrapposizione degli stati e qubit

Sia per l'informazione sia per la computazione quantistica è sufficiente limitarsi al caso di sistemi fisici a due stati quali la polarizzazione verticale e orizzontale di un fotone, lo stato fondamentale e uno stato eccitato di un elettrone in un atomo, o lo spin *up* e *down* di un elettrone lungo un asse fissato nello spazio.

Un sistema fisico a due stati è descritto da uno stato quantistico $|\mathbf{a}\rangle = \alpha_0 |\mathbf{v}_0\rangle + \alpha_1 |\mathbf{v}_1\rangle$, ovvero da una combinazione lineare di due stati, $|\mathbf{v}_0\rangle$ e $|\mathbf{v}_1\rangle$, che costituiscono una base ortonormale di uno spazio vettoriale complesso V . Le ampiezze α_0 e α_1 soddisfano il vincolo $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$, per cui il vettore che rappresenta uno stato ha norma unitaria. Lo spazio V è detto spazio degli stati. Il fatto che uno stato quantistico sia una combinazione lineare a coefficienti complessi di stati è un postulato della meccanica quantistica noto come *principio di sovrapposizione degli stati*. Un sistema quantistico con due stati può essere pensato e utilizzato come un *quantum bit* o *qubit*. La dizione sistemi fisici a due stati non deve trarre in inganno: gli stati possibili in cui si può trovare un sistema fisico a due stati, infatti, sono infiniti!

III – MISURA

La misura di uno stato quantistico, il suo effetto e la sua interpretazione sono tutt'oggi argomenti di discussione e ricerca fra i fisici. Evitando di entrare nei dettagli, noi ci limiteremo all'interpretazione dominante da libro di testo detta "interpretazione di Copenhagen". Sebbene sembri chiaro che questa versione (o interpretazione) della meccanica quantistica sia incompleta, si è dimostrata estremamente efficace come strumento predittivo.

Se il nostro sistema quantistico è descritto dallo stato $|\mathbf{a}\rangle = \alpha_0 |\mathbf{v}_0\rangle + \alpha_1 |\mathbf{v}_1\rangle$ nella base $\{|\mathbf{v}_0\rangle, |\mathbf{v}_1\rangle\}$ e con $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$, il postulato della misura ci dice che una misura detta *proiettiva* darà come risultato il valore associato allo stato $|\mathbf{v}_0\rangle$ con probabilità $|\alpha_0|^2$ e il valore associato allo stato $|\mathbf{v}_1\rangle$ con probabilità $|\alpha_1|^2$.

Ad esempio, supponiamo che i due stati del sistema siano il grado di polarizzazione (ad esempio, del fotone), $|\mathbf{v}_0\rangle \equiv |\uparrow\rangle$ e $|\mathbf{v}_1\rangle \equiv |\rightarrow\rangle$, e lo stato del sistema è descritto da $|\mathbf{a}\rangle = \sqrt{0.75} |\uparrow\rangle + \sqrt{0.25} |\rightarrow\rangle$. Una misura della polarizzazione ci darà polarizzazione verticale con probabilità 75% e polarizzazione orizzontale con probabilità del 25%.

È importante notare che questo implica che, per un sistema a due stati, ci sono solo due risultati possibili al contrario di quanti non accade nella fisica classica. Inoltre, la misura proiettiva *distrugge la sovrapposizione* degli stati.

Il secondo punto del postulato della misura dice che dopo la misura il sistema collassa nello stato associato al valore ottenuto. Riferendoci all'esempio precedente, se dalla prima misura abbiamo ottenuto il valore della polarizzazione verticale (che capita il 75% delle volte), istantaneamente il sistema sarà proiettato nello stato $|\uparrow\rangle$. Viceversa, se abbiamo ottenuto polarizzazione orizzontale, il sistema verrà proiettato e si troverà nello stato $|\rightarrow\rangle$. A questo punto possiamo fare un'interessante e importante osservazione. Se dopo la prima misura il sis-

tema è collassato nello stato $|\uparrow\rangle$, una qualsiasi misura successiva *nella stessa base* darà sempre lo stesso risultato. Infatti, il nuovo stato dopo la misura sarà $|\mathbf{v}_0\rangle = |\uparrow\rangle$ e una misura successiva darà il valore "polarizzazione verticale" con il 100% di probabilità e il sistema collasserà nuovamente nello stato $|\uparrow\rangle$.

Ciò che abbiamo discusso fino ad ora può essere reso più preciso e formale. In particolare, la base in cui si fa la misura gioca un ruolo determinante. Per chiarire questo ruolo, è necessario discutere il significato degli autovalori di un operatore Hermitiano (sez. 2.4).

Un osservabile fisico (ad esempio, la polarizzazione) può essere associato ad un operatore Hermitiano. Come visto nella sezione 2.4, gli operatori Hermitiano possono essere diagonalizzati e possiamo ottenere i loro autovalori e autovettori. Se vogliamo misurare l'osservabile A , il postulato della misura ci dice che *i risultati della misura possono essere solo gli autovalori e il sistema collasserà nell'autostato di dell'operatore A .*

Possiamo rifrasare e spiegare questa frase con l'esempio della misura della polarizzazione. L'operatore polarizzazione P può essere diagonalizzato. I suoi autostati saranno $|\uparrow\rangle$ associato, ad esempio, all'autovalore $+1$ e $|\rightarrow\rangle$ associato all'autovalore -1 . Se il sistema è in uno stato $|\mathbf{v}_0\rangle$ per sapere quali possono essere i risultati della misura di polarizzazione dobbiamo *scrivere lo stato come combinazione lineare degli autostati di P* $\{|\uparrow\rangle, |\rightarrow\rangle\}$.

Nell'esempio precedente $|\mathbf{a}\rangle = \sqrt{0.75}|\uparrow\rangle + \sqrt{0.25}|\rightarrow\rangle$. Una misura di P ci darà il valore $+1$ (autovalore di P) con probabilità 75% e il sistema collasserà nello stato $|\uparrow\rangle$. Nel rimanente 25% dei casi il risultato sarà -1 (autovalore di P) e il sistema collasserà nello stato $|\rightarrow\rangle$.

Il punto fondamentale di questa discussione è che la base, gli autovalori e il risultato della misura dipende dall'osservabile che vogliamo misurare. Ad esempio, sempre partendo dallo stato $|\mathbf{a}\rangle$ se decidessimo di misurare una polarizzazione diversa (ad esempio, 45°), i risultati sarebbero completamente diversi. Questa osservazione sarà di fondamentale importanza quanto affronteremo i protocolli dell'informazione quantistica.

Riassumendo le regole dal postulato delle misura sono

1. Se vogliamo misurare un osservabile Φ , dobbiamo conoscerne i suoi autovalori $\{\phi_i\}$ e autovettori $\{|\phi_i\rangle\}$; cioè gli stati tali che $\Phi|\phi_i\rangle = \phi_i|\phi_i\rangle$. Gli autovettori saranno la base su cui decomporre lo stato del nostro sistema. Ovvero dobbiamo scrivere $|\mathbf{a}\rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle$ con $a_i = \langle\phi_i|\mathbf{a}\rangle$.
2. La misura avrà come risultato l'autovalore ϕ_i con probabilità $|a_i|^2$.
3. Successivamente alla misura, il sistema si troverà nello stato $|\phi_i\rangle$ associato all'autovalore misurato.

IV – INTERPRETAZIONE QUANTISTICA DELL'ESPERIMENTO CON LA LUCE POLARIZZATA

Con le informazioni acquisite riguardo alla meccanica quantistica ora siamo in grado di spiegare l'esperimento con la luce polarizzata discusso nella sezione 3.1.2.

In meccanica quantistica, ogni polarizzatore misura lo stato di polarizzazione di un fotone lungo una di due direzioni ortogonali. Lo stato quantistico di un fotone che incontra il polarizzatore orizzontale è la sovrapposizione di uno stato di polarizzazione orizzontale $|\rightarrow\rangle$ e di uno verticale $|\uparrow\rangle$, ovvero

$$|\mathbf{a}\rangle = a_0 |\rightarrow\rangle + a_1 |\uparrow\rangle,$$

dove $|\rightarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$ costituiscono la base associata alla misura di polarizzazione orizzontale (o verticale) e a_0 e a_1 le rispettive ampiezze. Un fotone, quindi, attraversa il polarizzatore orizzontale e, *al termine* della misura, si trova nello stato $|\rightarrow\rangle$ con probabilità $p = |a_0|^2$. Nel caso di una comune lampadina, ovvero di un fascio non polarizzato, solo una frazione di fotoni attraversa il polarizzatore orizzontale e l'intensità del fascio conseguentemente si riduce. Supponiamo ad esempio che $a_0 = a_1 = 1/\sqrt{2}$ e quindi che $|a_0|^2 = |a_1|^2 = 1/2$. Avremmo che la probabilità di avere un fotone polarizzato \rightarrow che può passare il polarizzatore è 50%. Intuitivamente l'intensità del fascio sarà proporzionale al numero di fotoni, quindi dopo il polarizzatore in A dovremmo avere un fascio con intensità dimezzata. La meccanica quantistica, pertanto, è in grado di spiegare il risultato osservato sia nel caso di fascio costituito da un singolo fotone (il fotone non cede energia se attraversa un polarizzatore) sia in quello di grandi quantità di fotoni.

Se aggiungiamo un polarizzatore verticale e ripetiamo l'esperimento, osserviamo che il fascio è completamente assorbito. L'interpretazione quantistica non riserva sorprese. Il secondo polarizzatore, infatti, misura lo stato di polarizzazione nella direzione verticale. Anche questa volta, $|\mathbf{b}\rangle$, lo stato quantistico di un fotone *prima* della seconda misura è una sovrapposizione degli stati di polarizzazione orizzontale e verticale,

$$|\mathbf{b}\rangle = b_0 |\rightarrow\rangle + b_1 |\uparrow\rangle,$$

dove b_0 e b_1 sono le nuove ampiezze. Poiché un fotone che incontra il polarizzatore verticale in questo apparato ha attraversato il polarizzatore orizzontale, sappiamo però che, *prima* della seconda misura, il fotone si trova nello stato $|\rightarrow\rangle$ e che, quindi, l'ampiezza b_1 è nulla. Conseguentemente, il fotone è *certamente* assorbito dal polarizzatore verticale.

Le profonde implicazioni del principio di sovrapposizione degli stati emergono con forza quando si aggiunge un polarizzatore nella direzione di 45° (indicato con \nearrow). Lo stato quantistico generico $|\mathbf{c}\rangle$ di un fotone, in questo caso, si scrive come la sovrapposizione di uno stato di polarizzazione a 135° ,

$$|\nwarrow\rangle = \frac{|\uparrow\rangle - |\rightarrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.4.1)$$

e di uno a 45° ,

$$|\nearrow\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\rightarrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (3.4.2)$$

dove $|\nwarrow\rangle$ e $|\nearrow\rangle$ sono la base associata ai due stati obliqui e

$$|c\rangle = c_+ |\nwarrow\rangle + c_- |\nearrow\rangle.$$

Un fotone che incontra il polarizzatore obliquo, poiché ha attraversato il polarizzatore orizzontale, si trova nello stato $|\rightarrow\rangle$. Siccome

$$|\rightarrow\rangle = \frac{|\nwarrow\rangle - |\nearrow\rangle}{\sqrt{2}},$$

abbiamo che $p_{\nearrow} = |\langle\rightarrow|\nearrow\rangle|^2 = p_{\nwarrow} = |\langle\rightarrow|\nwarrow\rangle|^2 = 1/2$. Solo le misure che danno come risultato \nearrow sono associate a fotoni che passano il polarizzatore B; di conseguenza otteniamo che solo il 50% dei fotoni emerge dal polarizzatore B con polarizzazione \nearrow . Rispetto all'intensità del fascio iniziale avremo un fascio con intensità di $0.5 \times 0.5 = 0.25$.

Questo ragionamento si ripete per i fotoni che (con polarizzazione \nearrow) arrivano sul polarizzatore C. Dall'equazione (3.4.2) sappiamo come lo stato $|\nearrow\rangle$ si decompone nella base $\{|\rightarrow\rangle, |\uparrow\rangle\}$. Quindi, per il fotone che arriva in C c'è una probabilità $p = |\langle\nearrow|\uparrow\rangle|^2 = 1/2$ che la misura dia il risultato \uparrow . Di conseguenza, il 50% dei fotoni che arrivano in C passa l'ultimo polarizzatore e arriva allo schermo. L'intensità finale del fascio (rispetto a quello iniziale) è del 12.5%. Il punto importante di questa discussione è che la meccanica quantistica permette di prevedere che, con l'inserimento del polarizzatore intermedio in B, i fotoni arrivino sullo schermo.

Concludiamo con un'importante osservazione. Quando diciamo che un fotone è in uno stato quantistico $|w\rangle$ dato dalla sovrapposizione di due stati $|\rightarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$, con $|w\rangle = \alpha|\rightarrow\rangle + \beta|\uparrow\rangle$, per esempio, non intendiamo che il fotone è nello stato $|\rightarrow\rangle$ con probabilità $|\alpha|^2$ e nello stato $|\uparrow\rangle$ con probabilità $|\beta|^2$. Secondo la meccanica quantistica il fotone è in uno stato che è in una delle infinite possibili combinazioni lineari di $|\rightarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$. Non ha senso chiedersi in che stato sia il fotone se non effettuando una misura, il risultato della quale sarà sempre e solo uno di due possibili. Questo fatto non ha corrispettivi classici ed è difficile sia da comprendere sia da accettare. Se non ci riusciamo siamo in buona compagnia. La lista degli scienziati che hanno sollevato dubbi sui fondamenti della meccanica quantistica comprende Albert Einstein, che pure ha ricevuto il premio Nobel per aver spiegato l'effetto fotoelettrico basandosi proprio sulla natura quantistica della luce. A oggi la meccanica quantistica si è mostrata in grado di prevedere i risultati sperimentali con un'accuratezza sbalorditiva e ha resistito a tutti i tentativi di metterne in discussione i fondamenti.

3.4.1 Fase globale e relativa

In precedenza abbiamo parlato indifferentemente di stati quantistici e di vettori di stato. Gli stati quantistici e i vettori di stato, tuttavia, non sono in corrispondenza

biunivoca. Consideriamo i vettori $|\mathbf{u}\rangle$ e $e^{i\phi}|\mathbf{u}\rangle$ che hanno lo stesso modulo ma differiscono per una fase globale ϕ . Il calcolo delle probabilità dei risultati di una qualunque misura fornisce sempre gli stessi valori.

Per semplificare la discussione, consideriamo un sistema a due livelli. Supponiamo che lo stato del sistema sia $|\mathbf{u}\rangle = \sum_{i=1,2} \alpha_i |\phi_i\rangle$ dove $\{|\phi_i\rangle\}$ formano una base ortonormale dello spazio vettoriale. Lo stato con una fase globale si scriverà $e^{i\phi}|\mathbf{u}\rangle = \sum_{i=1,2} e^{i\phi} \alpha_i |\phi_i\rangle$.

Supponiamo di voler misurare un osservabile O_1 che sia diagonale nella base $\{|\phi_i\rangle\}$ con relativi autovalori $\{\lambda_i\}$. Dato che $|e^{i\phi} \alpha_i|^2 = |\alpha_i|^2$, la teoria della misura ci dice che dalla misura otterremo l'autovalore λ_i con probabilità $|\alpha_i|^2$ indipendentemente dalla fase globale.

Questo risultato è generale. Supponiamo infatti di voler misurare un osservabile O_2 che è diagonale nella base $\{|\psi_i\rangle\}$ con relativi autovalori $\{\Lambda_i\}$. In questo caso dovremmo scrivere lo stato nella nuova base $|\mathbf{u}\rangle = \sum_{i=1,2} \beta_i |\psi_i\rangle$ con diversi coefficienti ma con struttura identica. Lo stato con una fase globale si scriverà $e^{i\phi}|\mathbf{u}\rangle = \sum_{i=1,2} e^{i\phi} \beta_i |\psi_i\rangle$. Anche in questo caso la misura darà l'autovalore Λ_i con probabilità $|\beta_i|^2$ indipendentemente dalla fase globale.

È importante evidenziare però che le differenze di fase fra stati sono osservabili e misurabili. Consideriamo, ad esempio, lo stato $|\mathbf{u}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta e^{i\phi}|1\rangle$ dove fra gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ c'è una differenza di fase $e^{i\phi}$. In questo caso, è possibile trovare degli osservabili e delle misure che distinguano fra lo stato $|\mathbf{u}\rangle$ e lo stato $|\mathbf{v}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

Come esempio possiamo prendere il caso in cui $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$, $e^{i\phi} = -1$ e, quindi, $|\mathbf{u}\rangle = |-\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ e $|\mathbf{v}\rangle = |+\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Questi stati sono autostati dell'operatore $X = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$ (si veda l'esercizio 1 capitolo 2). Una misura di $|\mathbf{u}\rangle = |-\rangle$ darà con certezza il risultato -1 e una misura di $|\mathbf{v}\rangle = |+\rangle$ darà con certezza il risultato 1 . Gli stati sono quindi distinguibili tramite una misura dell'operatore X .

Questa dimostrazione può essere estesa al caso più generale ma tralasciamo questa ulteriore complicazione.

V – STATI A MOLTI QUBIT

Siamo ora in grado di capire come descrivere un sistema di n qubit. Per ogni qubit usiamo uno spazio a due dimensioni e utilizziamo per semplicità la base canonica. Quindi il qubit i -esimo sarà associato allo spazio vettoriale V_i con base $\{|0\rangle_i, |1\rangle_i\}$. Lo spazio vettoriale di n qubit sarà dato dal *prodotto tensore* $V_0 \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_{n-1}$ (si noti che abbiamo numerato i qubit da 0 a $n-1$) che avrà dimensione 2^n .

Come discusso nella sezione 2.2, la base del prodotto tensore sarà composta dagli stati $\{|\alpha_i\rangle_0 \oplus |\beta_j\rangle_1 \oplus \dots \oplus |\gamma_k\rangle_{n-1}\} \equiv |\alpha_i\beta_j\dots\gamma_k\rangle$ dove α_i, β_j e γ_k possono assumere valore 0 o 1. Esplicitamente possiamo scriverli come

$$|0\rangle_0 \oplus |0\rangle_1 \oplus \dots \oplus |0\rangle_{n-1} = |00\dots 0\rangle \quad (3.5.1)$$

$$|1\rangle_0 \oplus |0\rangle_1 \oplus \dots \oplus |0\rangle_{n-1} = |10\dots 0\rangle$$

$$|0\rangle_0 \oplus |1\rangle_1 \oplus \dots \oplus |0\rangle_{n-1} = |01\dots 0\rangle$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$(3.5.2)$$

$$|1\rangle_0 \oplus |1\rangle_1 \oplus \dots \oplus |0\rangle_{n-1} = |11\dots 0\rangle$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$(3.5.3)$$

$$|1\rangle_0 \oplus |1\rangle_1 \oplus \dots \oplus |1\rangle_{n-1} = |11\dots 1\rangle$$

Come si può vedere gli stati che compongono la base del sistema a n qubit rappresentano una base logica delle stringhe a n bit.

I ket della base canonica saranno scritti come vettori a 2^n componenti in cui tutti gli elementi sono nulli tranne uno. Ad esempio,

$$|00\dots 0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, |10\dots 0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, |11\dots 1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

VI – STATI A DUE QUBIT E ENTANGLEMENT

L'informazione quantistica è legata allo studio dell'*entanglement*, fenomeno squisitamente quantistico che emerge nell'analisi dello stato e delle misure effettuate su qubit multipli. Lo spazio degli stati, in questo caso, è dato dal prodotto tensoriale degli spazi di ogni qubit.

3.6.1 Stati a due qubit separabili

Consideriamo un sistema a due qubit che è descritto dal prodotto tensore di due spazi vettoriali $V \otimes W$. I generici stati dei spazi vettoriali distinti sono $|\mathbf{v}\rangle_V = \alpha|\mathbf{0}\rangle_V + \beta|\mathbf{1}\rangle_V \in V$ e $|\mathbf{w}\rangle_W = \gamma|\mathbf{0}\rangle_W + \delta|\mathbf{1}\rangle_W \in W$. Lo stato congiunto sarà

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}\rangle_V \otimes |\mathbf{w}\rangle_W &= (\alpha|\mathbf{0}\rangle_V + \beta|\mathbf{1}\rangle_V) \otimes (\gamma|\mathbf{0}\rangle_W + \delta|\mathbf{1}\rangle_W) \\ &= \alpha\gamma|\mathbf{00}\rangle + \alpha\delta|\mathbf{01}\rangle + \beta\gamma|\mathbf{10}\rangle + \beta\delta|\mathbf{11}\rangle \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tralasciato di scrivere l'indice dello spazio vettoriale sottointendendo che nel ket $|ij\rangle$ il primo valore i si riferisca allo stato V e il secondo j allo spazio W .

Gli stati che si possono scrivere come il prodotto tensore $|\mathbf{v}\rangle_V \otimes |\mathbf{w}\rangle_W$ vengono detti *fattorizzabili*. In termini un pò imprecisi, si potrebbe dire che gli stati del sistema V e W sono "separabili" o e non si influenzano a vicenda durante un processo di misura.

Andiamo a vedere cosa succede quando facciamo una misura sul primo qubit. Per questo è conveniente scrivere lo stato come

$$|\mathbf{v}\rangle_V \otimes |\mathbf{w}\rangle_W = \alpha|\mathbf{0}\rangle_V \otimes (\gamma|\mathbf{0}\rangle_W + \delta|\mathbf{1}\rangle_W) + \beta|\mathbf{1}\rangle_V \otimes (\gamma|\mathbf{0}\rangle_W + \delta|\mathbf{1}\rangle_W) \quad (3.6.2)$$

Usando le regole della misura potremmo dire che dalla misura del primo qubit darà l'autovalore λ_0 con probabilità $|\alpha|^2$ e l'autovalore λ_1 con probabilità $|\beta|^2$. Successivamente, lo stato del qubit V si troverà nello stato $|\mathbf{0}\rangle_V$ o $|\mathbf{1}\rangle_V$, rispettivamente. È interessante vedere cosa succede allo stato del sistema W a causa della misura in V . Osservando lo stato composto come scritto in Eq. (3.6.2), se il sistema V collassa nello stato $|\mathbf{0}\rangle_V$ lo stato di W si troverà in $\gamma|\mathbf{0}\rangle_W + \delta|\mathbf{1}\rangle_W$. Se il sistema V collassa nello stato $|\mathbf{1}\rangle_V$ lo stato di W si troverà in $\gamma|\mathbf{0}\rangle_W + \delta|\mathbf{1}\rangle_W$. Ne consegue che la misura su V non influenza lo stato del sistema W perchè lo stato di W sarà lo stesso indipendentemente dal risultato della misura in V .

3.6.2 Stati *entangled* (fortemente correlati)

Esaminiamo ora le profonde conseguenze legate al fatto che in meccanica quantistica lo stato di un sistema che consiste di n qubit è descritto dal prodotto tensoriale di spazi vettoriali.

Gli elementi dello spazio vettoriale $V \otimes W$ non sono tutti ottenibili come prodotto tensoriale di due elementi $|\mathbf{v}\rangle \in V$ e $|\mathbf{w}\rangle \in W$. Per capirne il motivo, fissata la base

$|0\rangle$ e $|1\rangle$, cerchiamo due vettori $|\mathbf{v}\rangle = \alpha|0\rangle_V + \beta|1\rangle_V \in V$ e $|\mathbf{w}\rangle = \gamma|0\rangle_W + \delta|1\rangle_W \in W$, tali che $|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle \in V \otimes W$ si scriva come

$$|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} |0\rangle_V \otimes |1\rangle_W + \frac{\sqrt{2}}{2} |1\rangle_V \otimes |0\rangle_W. \quad (3.6.3)$$

Il punto di domanda sopra il simbolo di uguale in questa equazione vuol dire che stiamo cercando di scrivere il membro di destra come prodotto tensore di due stati fattorizzabili $|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle$. Come vedremo questo non è possibile.

L'equazione (3.6.3) è da confrontare con la generica espressione che si otterrebbe combinando con il prodotto tensore $|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle$ che qui riscriviamo [rispetto all'Eq. (3.6.1)] esplicitando la dipendenza rispetto a V e W

$$|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle = \alpha\gamma|0\rangle_V \otimes |0\rangle_W + \alpha\delta|0\rangle_V \otimes |1\rangle_W + \beta\gamma|1\rangle_V \otimes |0\rangle_W + \beta\delta|1\rangle_V \otimes |1\rangle_W. \quad (3.6.4)$$

Dall'uguaglianza delle due espressioni ricaviamo i vincoli

$$\alpha\gamma = \beta\delta = 0, \quad \alpha\delta = \beta\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

che sono chiaramente inconsistenti. Uno stato quantistico di un sistema di 2 qubit come questo si dice *entangled*.

Una delle proprietà più importanti dei sistemi entangled è come si comportano quando li si misura. Contrariamente al caso di stati fattorizzabili, in questo caso, la misura sul sistema V influenza anche il sistema W . Per vederlo nel dettaglio, partendo dallo stato (3.6.3) pensiamo di misurare il sistema V . In questo caso, la probabilità di misurare λ_0 e λ_1 è uguale e vale 0.5. Con le stesse probabilità il sistema crollerà negli stati $|0\rangle_V$ e $|1\rangle_V$. Ma questa volta lo stato $|0\rangle_V$ è correlato (o associato) allo stato $|1\rangle_W$ visto che sono combinati nel ket $|0\rangle_V \otimes |1\rangle_W$. Di conseguenza, se il sistema V crolla nello stato $|0\rangle_V$ indurrà un crollo del sistema W nello stato $|1\rangle_W$ e lo stato del sistema globale dopo il crollo sarà $|0\rangle_V \otimes |1\rangle_W$. Allo stesso modo, un crollo del sistema V nello stato $|1\rangle_V$ indurrà un crollo del sistema W nello stato $|0\rangle_W$. Le misure su V e W sono quindi fortemente correlate: una misura in uno dei due sistemi influenza e vincola lo stato dell'altro. Questo fatto è ancora più sorprendente se si pensa che gli stati V e W possono essere separati spazialmente anche di chilometri quindi si può escludere una qualsiasi interazione o influenza diretta di V su W .

Gli stati *entangled* hanno un ruolo privilegiato nell'informazione quantistica dato che sono alla base di alcune delle più importanti applicazioni come il teletrasporto quantistico, il *dense coding* e la crittografia quantistica. Fra gli stati *entangled* alcuni sono particolarmente noti e utilizzati. Vengono detti stati di Bell dal nome di John

Bell che ne studiò a fondo le proprietà e il loro significato. Lo stato in Eq. (3.6.3) fa parte della cosiddetta *base di Bell* che è costituita da quattro stato ortogonali

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_V \otimes |0\rangle_W + |1\rangle_V \otimes |1\rangle_W) \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_V \otimes |0\rangle_W - |1\rangle_V \otimes |1\rangle_W) \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_V \otimes |1\rangle_W + |1\rangle_V \otimes |0\rangle_W) \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_V \otimes |1\rangle_W - |1\rangle_V \otimes |0\rangle_W). \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Per le applicazioni in quantum information è importante notare che gli stati di Bell costituiscono una base ortonormale dello spazio a due qubit. Per descrivere lo stato di un sistema a due qubit possiamo alternativamente usare la base canonica $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ o la base di Bell $\{|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle\}$.

L'ortogonalità della base di Bell ci dice inoltre che è possibile distinguerli tramite una misura. In termini più precisi è possibile costruire un osservabile

$$A = \lambda_0 |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \lambda_1 |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| + \lambda_2 |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + \lambda_4 |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| \quad (3.6.6)$$

che sia diagonale nella base di Bell. Quindi se il sistema si trova in uno stato di Bell, una misura dell'operatore A darà con certezza l'autovalore corrispondente.

VII – TRASFORMAZIONI UNITARIE

L'elaborazione dell'informazione quantistica consiste di una sequenza opportuna di trasformazioni dello stato quantistico di un sistema di n qubit. In meccanica quantistica le sole trasformazioni ammissibili sono unitarie. Sia $|\mathbf{a}\rangle = \alpha_0 |\mathbf{x}_0\rangle + \alpha_1 |\mathbf{x}_1\rangle$ uno stato quantistico, con $\{|\mathbf{x}_0\rangle, |\mathbf{x}_1\rangle\}$ una qualunque base e $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$. Una trasformazione *unitaria* U è

- lineare, ovvero, $U|\mathbf{a}\rangle = U(\alpha_0 |\mathbf{x}_0\rangle + \alpha_1 |\mathbf{x}_1\rangle) = \alpha_0 U|\mathbf{x}_0\rangle + \alpha_1 U|\mathbf{x}_1\rangle$ e
- invertibile con l'inversa uguale alla trasposta coniugata, ovvero $U^{-1}|\mathbf{a}\rangle = U^\dagger |\mathbf{a}\rangle$.

Quest'ultima proprietà garantisce che le trasformazioni unitarie lasciano invariati i prodotti scalari, e quindi anche la norma dei vettori su cui agiscono e le probabilità associate alle misure. Infatti, prendiamo due stati $|\mathbf{a}\rangle$ and $|\mathbf{b}\rangle$ con prodotto scalare $\langle\mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle$. Se questi evolvono secondo un operatore unitario U avremo $|\mathbf{a}'\rangle = U|\mathbf{a}\rangle$ and $|\mathbf{b}'\rangle = U|\mathbf{b}\rangle$, il prodotto scalare degli stati evoluti sarà $\langle\mathbf{b}'|\mathbf{a}'\rangle = \langle\mathbf{b}|U^\dagger U|\mathbf{a}\rangle = \langle\mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle$. Quindi, come ci aspettavamo, il prodotto scalare è preservato.

La composizione di trasformazioni unitarie è una trasformazione unitaria. Identificato un insieme di trasformazioni unitarie di base, questa proprietà di gruppo apre alla possibilità di combinare le trasformazioni di base per l'implementazione

di algoritmi, alla stregua di quanto avviene con le porte logiche nei circuiti combinatori. Un'importante differenza tra il caso classico e quello quantistico è legato all'invertibilità del calcolo. Le elaborazioni *classiche* sono *dissipative*: dall'uscita di un *AND*, per esempio, non è possibile risalire ai valori all'ingresso della porta. Le elaborazioni *quantistiche*, invece, sono *reversibili*: l'effetto di una trasformazione unitaria può essere annullato applicando la trasformazione inversa, per cui a partire da uno stato quantistico trasformato è sempre possibile ricostruire lo stato originale.

3.7.1 Porte quantistiche

Trasformazioni di Pauli

Con l'espressione porte quantistiche non si intendono dispositivi ma trasformazioni unitarie che possono essere implementate nella pratica. Partiamo con quattro trasformazioni unitarie che agiscono sul singolo qubit. Trattandosi di trasformazioni lineari è sufficiente definire la loro azioni su una base. Nel nostro caso scegliamo la base canonica $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e definiamo, oltre all'*identità* *Id*, le tre *trasformazioni di Pauli* (detti anche operatori di Pauli) *X*, *Y* e *Z* :

$$\begin{aligned} \text{Id } |0\rangle &:= |0\rangle, & \text{Id } |1\rangle &:= |1\rangle; \\ X |0\rangle &:= |1\rangle, & X |1\rangle &:= |0\rangle; \\ Y |0\rangle &:= -i |1\rangle, & Y |1\rangle &:= i |0\rangle; \\ Z |0\rangle &:= -|0\rangle, & Z |1\rangle &:= |1\rangle. \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

Analizzando l'effetto degli operatori, si nota che nella base canonica, *X* corrisponde al *NOT* tra bit classici. Infatti, la sua azione è $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$. L'operatore *Z* genera un cambio della fase relativo dato che $|0\rangle \leftrightarrow |0\rangle$ e $|1\rangle \leftrightarrow |1\rangle$. Infine, l'operatore *Y* può essere visto come una combinazione dei due precedenti dato che $Y = -iXZ$.

È interessante scrivere gli operatori di Pauli in forma matriciale nella base canonica. Per fare questo, ricordiamo che l'elemento matriciale di un operatore *U* in posizione $i - j$ è ottenuto dal prodotto scalare $U_{i,j} = \langle i|U|j\rangle$. Ad esempio, l'elemento $X_{0,1} = \langle 0|U|1\rangle$. Usando queste definizioni e l'eq. (3.7.1), si ottiene (nella base $\{|1\rangle, |0\rangle\}$)

$$\begin{aligned} \text{Id} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ X &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ Y &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ Z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Un generico operatore unitario U agente su un singolo qubit può essere scritto sempre come combinazioni di X , Y e Z . Si può dimostrare ³ che U si può scrivere come

$$U = \cos \frac{\alpha}{2} \text{Id} + i \sin \frac{\alpha}{2} (n_x X + n_y Y + n_z Z) \quad (3.7.3)$$

dove α e gli n_i ($i = x, y, z$) sono i parametri che caratterizzano l'operatore.

Trasformazione di Hadamard

Utilizzando sempre la base canonica, la trasformazione di Hadamard H , che opera sempre su un singolo qubit, corrisponde al cambio di base che abbiamo incontrato in occasione dell'esperimento dei tre polarizzatori:

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= |+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \text{ e} \\ H|1\rangle &= |-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Nel prossimo esempio sarà chiaro che l'espressione di una trasformazione in una base, anche nel caso della base canonica, è sufficiente a definire la trasformazione senza ambiguità ma può essere fuorviante.

In forma matriciale (nella base canonica $\{|1\rangle, |0\rangle\}$) l'operatore di Hadamard di scrive come

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7.5)$$

Controlled-NOT

Consideriamo ora, il *controlled-NOT*, *CNOT*, una trasformazione che agisce su 2 qubit, A e B . Nella base canonica l'azione del *CNOT* è:

$$\begin{aligned} \text{CNOT } |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B &:= |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \\ \text{CNOT } |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B &:= |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \\ \text{CNOT } |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B &:= |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \\ \text{CNOT } |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B &:= |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B \end{aligned}$$

Se pensiamo $|0\rangle$ e $|1\rangle$ come bit classici il *CNOT* nega il bit B se il bit A vale 1, altrimenti non fa nulla. Osserviamo che questa interpretazione del *CNOT* dipende

³ Non faremo una dimostrazione formale ma daremo un'idea del fatto che sia così parlando di rotazioni sulla sfera di Bloch nella sezione 3.8.

dalla scelta della base. Nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ è il primo qubit che passa da $|+\rangle$ a $|-\rangle$ se il secondo è $|-\rangle$, infatti:

$$\begin{aligned} \text{CNOT}|+\rangle_A \otimes |+\rangle_B &= \frac{1}{2} \text{CNOT}(|\mathbf{0}\rangle_A + |\mathbf{1}\rangle_A) \otimes (|\mathbf{0}\rangle_B + |\mathbf{1}\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{0}\rangle_A \otimes |\mathbf{0}\rangle_B + |\mathbf{1}\rangle_A \otimes |\mathbf{1}\rangle_B + |\mathbf{0}\rangle_A \otimes |\mathbf{1}\rangle_B + |\mathbf{1}\rangle_A \otimes |\mathbf{0}\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{0}\rangle_A + |\mathbf{1}\rangle_A) \otimes (|\mathbf{0}\rangle_B + |\mathbf{1}\rangle_B) \\ &= |+\rangle_A \otimes |+\rangle_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CNOT}|+\rangle_A \otimes |-\rangle_B &= \frac{1}{2} \text{CNOT}(|\mathbf{0}\rangle_A + |\mathbf{1}\rangle_A) \otimes (|\mathbf{0}\rangle_B - |\mathbf{1}\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{0}\rangle_A \otimes |\mathbf{0}\rangle_B + |\mathbf{1}\rangle_A \otimes |\mathbf{1}\rangle_B - |\mathbf{0}\rangle_A \otimes |\mathbf{1}\rangle_B - |\mathbf{1}\rangle_A \otimes |\mathbf{0}\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{0}\rangle_A - |\mathbf{1}\rangle_A) \otimes (|\mathbf{0}\rangle_B - |\mathbf{1}\rangle_B) \\ &= |-\rangle_A \otimes |-\rangle_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CNOT}|-\rangle_A \otimes |+\rangle_B &= \frac{1}{2} \text{CNOT}(|\mathbf{0}\rangle_A - |\mathbf{1}\rangle_A) \otimes (|\mathbf{0}\rangle_B + |\mathbf{1}\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{0}\rangle_A \otimes |\mathbf{0}\rangle_B - |\mathbf{1}\rangle_A \otimes |\mathbf{1}\rangle_B + |\mathbf{0}\rangle_A \otimes |\mathbf{1}\rangle_B - |\mathbf{1}\rangle_A \otimes |\mathbf{0}\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{0}\rangle_A - |\mathbf{1}\rangle_A) \otimes (|\mathbf{0}\rangle_B + |\mathbf{1}\rangle_B) \\ &= |-\rangle_A \otimes |+\rangle_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CNOT}|-\rangle_A \otimes |-\rangle_B &= \frac{1}{2} \text{CNOT}(|\mathbf{0}\rangle_A - |\mathbf{1}\rangle_A) \otimes (|\mathbf{0}\rangle_B - |\mathbf{1}\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{0}\rangle_A \otimes |\mathbf{0}\rangle_B - |\mathbf{1}\rangle_A \otimes |\mathbf{1}\rangle_B - |\mathbf{0}\rangle_A \otimes |\mathbf{1}\rangle_B + |\mathbf{1}\rangle_A \otimes |\mathbf{0}\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{0}\rangle_A + |\mathbf{1}\rangle_A) \otimes (|\mathbf{0}\rangle_B - |\mathbf{1}\rangle_B) \\ &= |+\rangle_A \otimes |-\rangle_B \end{aligned}$$

L'importanza dell'operatore CNOT risiede nel fatto che può generare entanglement fra due qubit. Prendiamo, per esempio, due qubit nello stato

$$|v\rangle_V \otimes |w\rangle_W = \frac{|0\rangle_V + |1\rangle_V}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle_W = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |10\rangle) \quad (3.7.6)$$

Secondo la definizione data in Sezione 3.6.1 questo stato è separabile visto che si può pensare come la composizione di uno stato $|v\rangle_V = \frac{|0\rangle_V + |1\rangle_V}{\sqrt{2}}$ e di uno stato $|w\rangle_W = |0\rangle_W$. Appliciamo ora l'operatore CNOT allo stato e otteniamo

$$|v\rangle_V \otimes |w\rangle_W \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = |\Phi^+\rangle. \quad (3.7.7)$$

Lo stato fattorizzabile è stato trasformato in uno stato entangled di Bell. La porta CNOT che quindi generato l'entanglement fra i sistemi V e W . Questo è possibile perchè la porta CNOT agisce sempre sullo stato composto $V \otimes W$ (usa il primo qubit come controllo e agisce sul secondo).

È possibile dimostrare [nielsen-chuang_book] che la porta CNOT è sufficiente a generare tutti gli stati entangled anche in un sistema a n qubit. È quindi un operatore o porta logica fondamentale.

VIII – RAPPRESENTAZIONE DI UN QUBIT: SFERA DI BLOCH

Esiste un modo semplice e intuitivo di rappresentare lo stato di un qubit. Come detto un generico stato quantistico a due livelli o qubit è scritto come $|\mathbf{v}\rangle = a_0 |\mathbf{0}\rangle + a_1 |\mathbf{1}\rangle$ con il vincolo ulteriore di normalizzazione dello stato: $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. Le funzioni trigonometriche $\cos \theta$ e $\sin \theta$ naturalmente soddisfano la condizione di normalizzazione. Quindi in generale possiamo scrivere $|a_0|^2 = \cos^2 \theta$ e $|a_1|^2 = \sin^2 \theta$ per un opportuno θ .

Dobbiamo ricordare però che i coefficienti a_0 e a_1 sono complessi. Dato che solo la fase relativa fra gli stati è osservabile, possiamo assumere, ad esempio, che $a_0 = \cos \theta$ sia reale mentre $a_1 = \sin \theta e^{-i\phi}$ (dove $e^{-i\phi}$ rappresenta la fase relativa fra i due stati). In questo modo, lo stato del qubit è univocamente determinato dai due angoli $\{\theta, \phi\}$.

C'è un modo geometrico per rappresentare gli stati dei qubit. Consideriamo lo stato generico

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\mathbf{1}\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |\mathbf{0}\rangle \quad (3.8.1)$$

e il relativo stato *bra*

$$\langle\psi| = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle\mathbf{1}| + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi} \langle\mathbf{0}| \quad (3.8.2)$$

(si noti che il termine di fase è stato coniugato: $e^{-i\phi} \leftrightarrow e^{i\phi}$).

Calcoliamo i valori medi degli operatori di Pauli X, Y e Z con lo stato $|\psi\rangle$. Abbiamo

$$\begin{aligned} x &= \langle\psi|X|\psi\rangle = \cos \phi \sin \theta \\ y &= \langle\psi|Y|\psi\rangle = \sin \phi \sin \theta \\ z &= \langle\psi|Z|\psi\rangle = \cos \theta \end{aligned}$$

Queste non sono altro che le coordinate in uno spazio tridimensionale di un punto che si muove su una sfera (si veda la figura 15). Se consideriamo il vettore che congiunge l'origine degli assi con il punto di coordinate $\{x, y, z\}$, l'angolo θ è quello formato dal vettore e dall'asse z mentre l'angolo ϕ è quello formato dal vettore sul piano $y - z$ (si veda la figura 15).

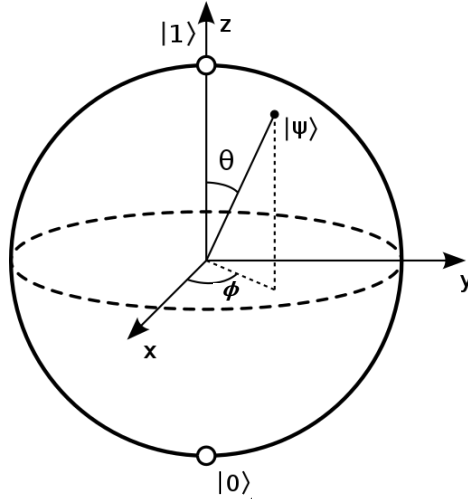


Figure 15: La sfera di Bloch per rappresentare lo stato $|\psi\rangle$ di un qubit.

Possiamo aggiungere un'importante osservazione. Gli operatori unitari permettono di manipolare e trasformare gli stati dei qubit. Per una qualsiasi trasformazione unitaria possiamo scrivere che $|\psi_f\rangle = U|\psi\rangle$; ovvero che lo stato iniziale $|\psi\rangle$ viene trasformato nello stato finale $|\psi_f\rangle$. Ma anche lo stato finale potrà essere rappresentato sulla sfera di Bloch e associato a nuovi angoli $\{\theta_f, \phi_f\}$. A livello matematico e geometrico, due stati su una sfera sono trasformabili l'uno nell'altro mediante una rotazione. Concludiamo che ogni operatore unitario può essere visto come una rotazione sulla sfera di Bloch.

Facciamo un esempio e consideriamo l'operatore X di Pauli (che è anche un operatore unitario). Dalla tabella 3.7.1 sappiamo che $X|0\rangle = |1\rangle$ (e $X|1\rangle = |0\rangle$). Se lo stato iniziale è $|\psi\rangle = |1\rangle$, dall'Eq. (3.8.3) abbiamo che $\{x, y, z\} = \{0, 0, 1\}$. Dopo l'applicazione di X lo stato finale sarà $|\psi_f\rangle = |0\rangle$ e quindi avremo $\{x_f, y_f, z_f\} = \{0, 0, -1\}$.

Più in generale possiamo scrivere l'operatore U in Eq. (3.7.3) con $n_x = n_z = 0$ e $\alpha \rightarrow -\alpha$ come

$$U = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{Id} - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) Y. \quad (3.8.3)$$

Se applichiamo U allo stato iniziale $|\psi\rangle = |1\rangle$ otteniamo

$$|\psi_f\rangle = U|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |1\rangle + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) |0\rangle. \quad (3.8.4)$$

Passando alla rappresentazione sulla sfera di Bloch lo stato iniziale sarà $\{x, y, z\} = \{0, 0, 1\}$ mentre, usando le definizioni in Eq. (3.8.3), lo stato finale sarà $\{x_f, y_f, z_f\} = \{\sin \alpha, 0, \cos \alpha\}$. Quindi, geometricamente lo stato finale può essere visto come la rotazione dello stato iniziale di un angolo α attorno all'asse Y (si veda la Figura 15 con $\phi = 0$ e $\theta = \alpha$). Osservazioni e conti analoghi possono essere fatti per gli operatori X e Z che sono legati, rispettivamente, alle rotazioni attorno agli assi X e Z .

Per finire, usando la rappresentazione sulla sfera di Bloch si può intuire che solo due operatori della base di Pauli sono sufficienti per ottenere tutte le trasformazioni unitarie su un sistema a due livelli. Una trasformazione unitaria deve permettere di trasformare un qualsiasi stato iniziale in un qualsiasi stato finale. Se ad esempio partiamo dallo stato iniziale $\{x, y, z\} = \{0, 0, 1\}$ possiamo fare una rotazione intorno all'asse X di un angolo θ mediante l'operatore X seguita da una rotazione intorno all'asse Z di un angolo ϕ mediante l'operatore Z. con l'aiuto della figura 15, è possibile convincersi che in questo modo possiamo trasformare lo stato $\{x, y, z\} = \{0, 0, 1\}$ in uno stato generico $\{x_f, y_f, z_f\} = \{\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta\}$. Lo stato iniziale $\{x, y, z\} = \{0, 0, 1\}$ non ha niente di particolare quindi scegliendo opportunamente θ e ϕ è possibile trasformare un qualsiasi stato iniziale in un qualsiasi stato finale.

IX – INIZIALIZZAZIONE DI UN SISTEMA A SINGOLO QUBIT

Per l'informazione quantistica è di fondamentale importanza la possibilità di inizializzare un sistema quantistico a due livelli in un generico stato $|\psi\rangle = \cos \alpha |0\rangle + e^{i\gamma} \sin \alpha |1\rangle$ con α , β e γ arbitrari.

Per fare questo abbiamo bisogno della porta logica di Hadamard H e di una nuova porta $U_{ph}(\gamma)$ detta *phase gate* che agisce nel seguente modo: $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ e $|1\rangle \rightarrow e^{i\gamma} |1\rangle$. La *phase gate* non cambia lo stato logico del qubit ma lo stato $|1\rangle$ acquista un fattore di fase $e^{i\gamma}$ (da cui il nome). Questa porta logica è talmente usata che spesso viene considerata come fondamentale ⁴.

Partiamo dallo stato $|0\rangle$ e applichiamo una porta di Hadamard per ottenere $|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$. A questo punto, applichiamo la *phase gate* $U_{ph}(-2\alpha)$ che genera uno sfasamento di -2α e una nuova porta H

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{-i2\alpha} |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + e^{-i2\alpha} |-\rangle). \quad (3.9.1)$$

Esplicitiamo gli stati $|\pm\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ e raccogliamo i termini che moltiplicano $|0\rangle$ e $|1\rangle$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + e^{-i2\alpha} |-\rangle) &= \frac{1}{2} [(1 + e^{-i2\alpha}) |0\rangle + (1 - e^{-i2\alpha}) |1\rangle] \\ &= \frac{e^{-i\alpha}}{2} [(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) |0\rangle + (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) |1\rangle] \\ &= \frac{e^{-i\alpha}}{2} [2 \cos \alpha |0\rangle + 2i \sin \alpha |1\rangle] \\ &= e^{-i\alpha} (\cos \alpha |0\rangle + i \sin \alpha |1\rangle). \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

Negli ultimi passaggi abbiamo semplicemente raccolto il fattore esponenziale $e^{-i\alpha}$ e usato le relazioni $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$.

⁴ Ricordiamo che bastano due porte logiche quantistiche ad un qubit per formare un set universale. La scelta delle porte che formano l'insieme è comunque una certa arbitrarietà.

Applichiamo la porta $U_{ph}(-\pi/2)$. Il suo unico effetto è di aggiungere un fattore di fase $e^{-i\pi/2} = -i$ al ket $|1\rangle$. Infine, applichiamo l'operatore $U_{ph}(\gamma)$

$$e^{-i\alpha} (\cos \alpha |0\rangle + i \sin \alpha |1\rangle) \rightarrow \cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle \rightarrow \cos \alpha |0\rangle + e^{i\gamma} \sin \alpha |1\rangle \quad (3.9.3)$$

dove negli ultimi passaggi abbiamo trascurato il fattore di fase globale $e^{-i\alpha}$ che non è osservabile (si veda la sezione 3.4.1).

Ricapitolando, partendo dallo stato iniziale $|0\rangle$, basta applicare in sequenza gli operatori H , $U_{ph}(-2\alpha)$, H , $U_{ph}(-\pi/2)$ e $U_{ph}(\gamma)$ per ottenere lo stato $\cos \alpha |0\rangle + e^{i\gamma} \sin \alpha |1\rangle$. Quindi, scegliendo opportunamente i parametri α e γ , è possibile costruire uno stato quantistico arbitrario.

X – ESERCIZI

3.10.1 Esercizio 1

1. Un sistema quantistico si trova nello stato $|0\rangle$. Si misura l'osservabile (operatore) $Z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|$. Quali sono i risultati della misura, le corrispondenti probabilità e lo stato del sistema dopo la misura?
2. Si consideri la stessa misura su un sistema nello stato $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.
3. Si consideri la misura dell'operatore $X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$ sugli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

3.10.2 Esercizio 2: Misure sequenziali

1. Si consideri un sistema quantistico nello stato $|0\rangle$. Si misurano in sequenza gli osservabili $X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$ e $Z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|$. Quali sono i risultati delle misure con le rispettive probabilità?
2. Cosa succede se nell'esercizio precedente lo stato iniziale $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$?