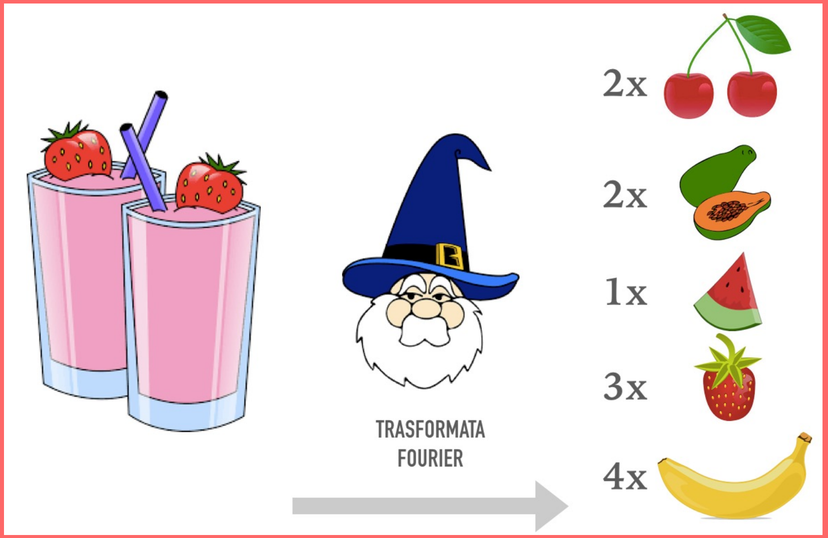
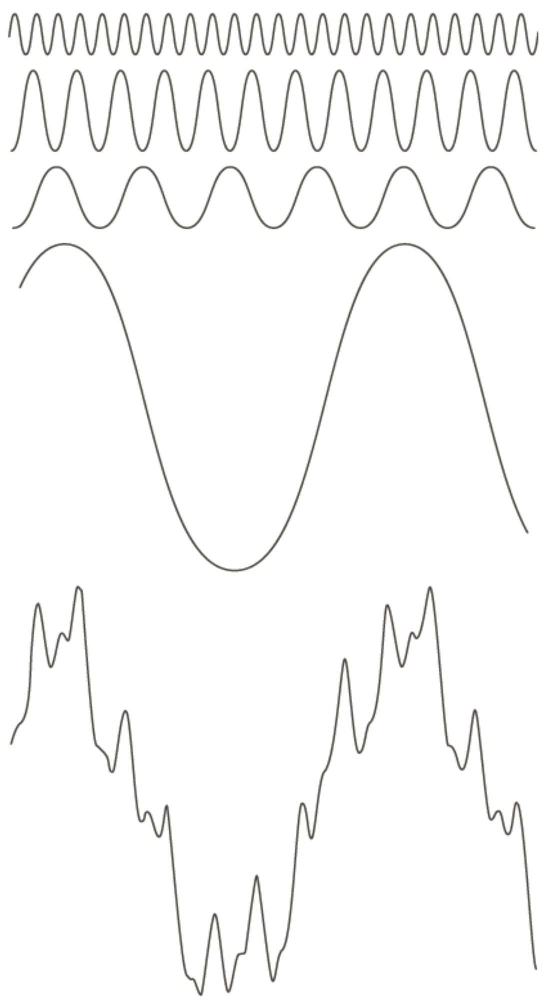


Trasformata di Fourier

Fondamenti Elaborazione dei Segnali e Immagini (FESI)

Francesca Odone francesca.odone@unige.it

Funzioni continue e periodiche possono essere rappresentate come somme pesate di seni e coseni



Fourier

Una **funzione continua e periodica** può essere descritta come una serie di sinusoidi (Serie di Fourier)

SEGNALE → F → FREQUENZE DEI SINUSOIDI CHE LO COMPONGONO

Le **funzioni non periodiche**, sotto alcune ipotesi, possono essere rappresentate in modo analogo (Trasformata di Fourier)

Fourier

I processi sono invertibili

$$
\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[r, bend left, "\textit{trasformata}"] & F(\omega) \arrow[l, bend left, "\textit{Trasformata inversa}"]
\end{tikzcd}
$$

Tempo (secondi)

Frequenza (cicli / secondo o Hz)

Questo ci permette di lavorare nel “dominio di Fourier”

Serie di Fourier

Consideriamo una funzione f(t) continua e periodica di periodo T

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

Coefficienti

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}} dt$$

Trasformata di Fourier

Consideriamo una funzione continua f(t)

In molti casi pratici f(t) è a valori reali, ma F è *solitamente* complessa

Trasformata di Fourier di f(t):

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\omega t} dt = F(\omega)$$

Inversa:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

FT: esempi

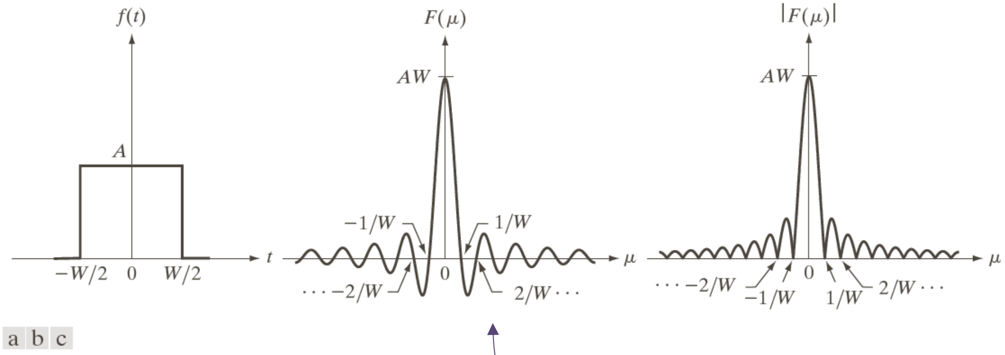


FIGURE 4.4 (a) A simple function; (b) its Fourier transform; and (c) the spectrum. All functions extend to infinity in both directions.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi j \omega t} dt = \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-2\pi j \omega t} dt =$$

$$\frac{-A}{j2\pi\omega}[e^{-\pi j \omega W} - e^{\pi j \omega W}] =$$

$$AW \frac{sin(\pi \omega W)}{\pi \omega W}$$

Funzione SINC

FT: esempi

FT di un impulso

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-2\pi j\omega t} dt = e^{-2\pi j\omega 0} = 1$$

FT di un impulso centrato in t_0

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-2\pi j\omega t} dt = e^{-2\pi j\omega t_0} = cos(-2\pi j\omega t_0) - jsin(-2\pi j\omega t_0)$$

Convoluzione

Consideriamo due funzioni continue f(t) e h(t)

La convoluzione tra le due funzioni viene definita come

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Teorema di convoluzione

$$\mathcal{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\right] e^{-j2\pi\omega t}dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi\omega t}dt\right] d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)H(\omega)e^{-j2\pi\omega\tau}d\tau =$$

$$H(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi\omega t}d\tau =$$

$$H(\omega)F(\omega)$$

Proprietà della FT

$$\mathcal{F}\{h(t-\tau)\} = H(\omega)e^{-j2\pi\omega t}$$

Teorema di convoluzione

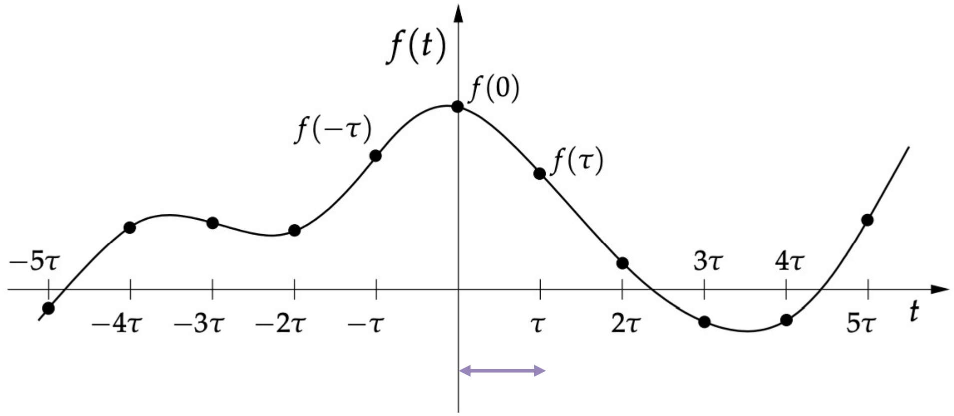
$$f(t) * h(t) \iff H(\omega)F(\omega)$$
$$f(t)h(t) \iff H(\omega) * F(\omega)$$

Campionamento

Proprietà della delta

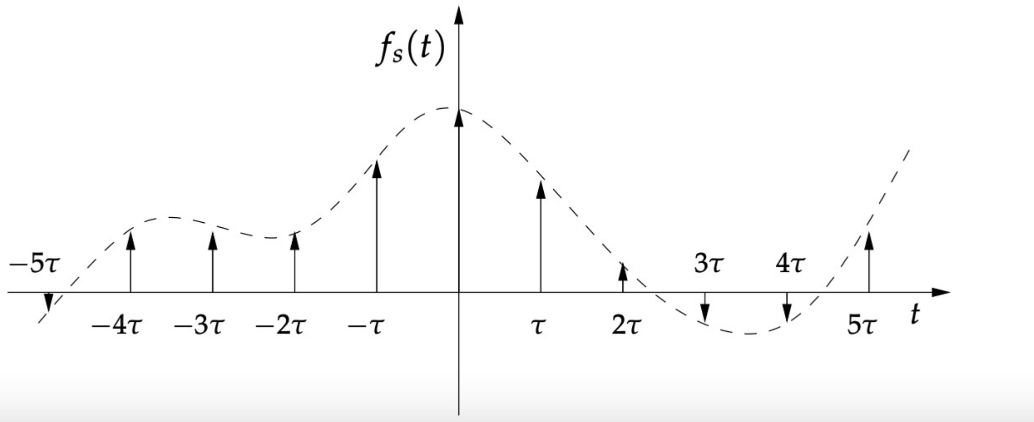
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau)$$



Treno di impulsi equispaziati

$$\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau).$$



Campionamento

$$f_s(t) = f(t)\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau)\delta(t-n\tau)$$

Campionamento:
FT della funzione campionata

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}(f_s(t)) = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - \frac{n}{\tau})$$

E' una sequenza infinita e periodica di copie di F(w) con ampiezza del periodo $\frac{1}{\tau}$

Infatti:

Teorema di convoluzione

$$\mathcal{F}\{f_s(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\delta_\tau(t)\} = F(t) * \mathcal{F}\{\delta_\tau(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{\delta_\tau(t)\} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\tau}t} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{n}{\tau})$$

FT dell'impulso e Dualità tempo / frequenze

Campionamento:
FT della funzione campionata

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}(f_s(t)) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - \frac{n}{\tau})$$

E' una sequenza infinita e periodica di copie di F(w) con ampiezza del periodo $\frac{1}{\tau}$

NB: L'ampiezza del periodo nelle frequenze è duale all'ampiezza del periodo nel tempo

Teorema del campionamento

Stabiliamo le condizioni sotto cui una funzione continua possa essere ricostruita a partire da un insieme di campioni

Funzioni a banda limitata

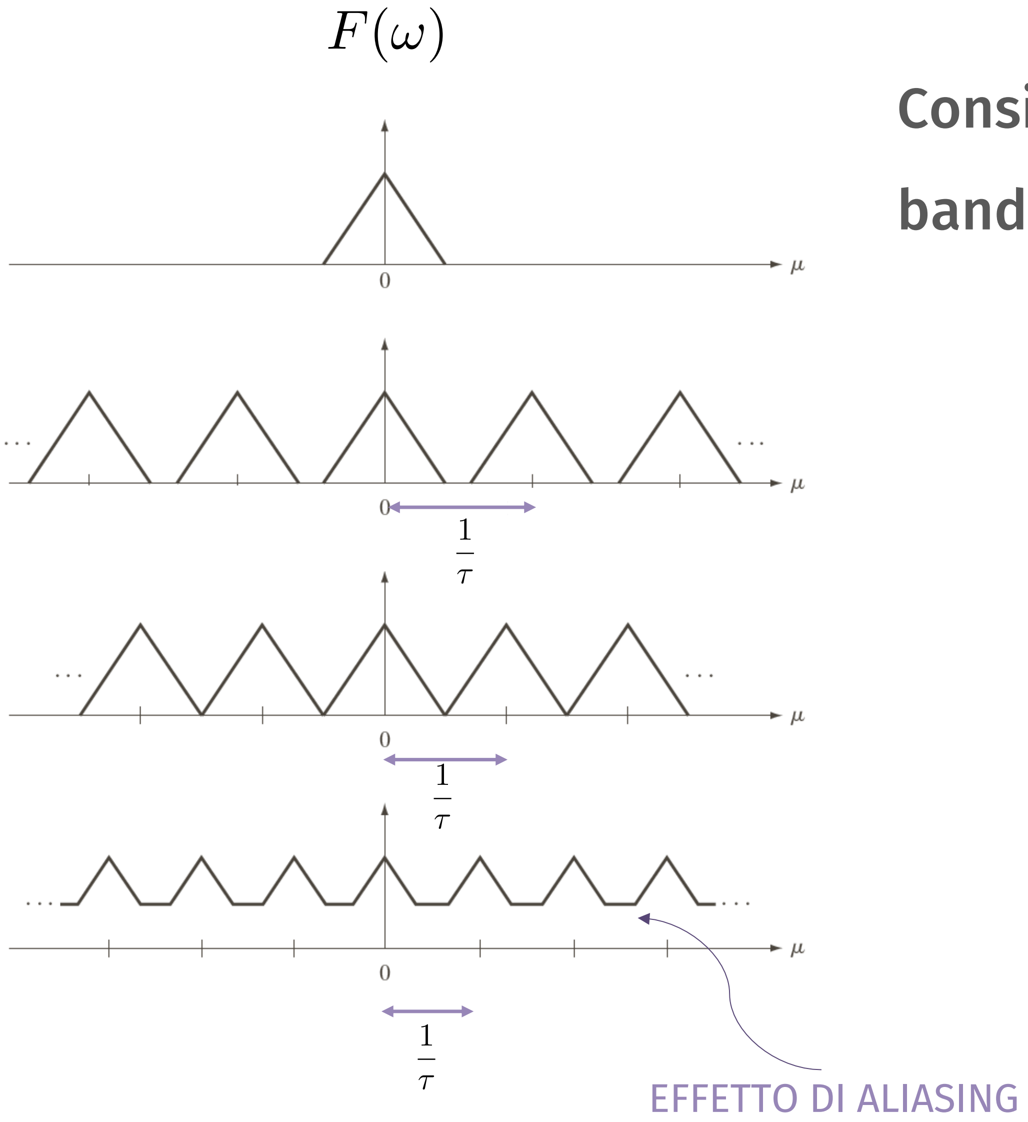
Una funzione f(t) è a banda limitata se la sua trasformata di Fourier è nulla al di fuori dell'intervallo $[-\omega_{MAX}, \omega_{MAX}]$

$$F(\omega) = 0 \quad , \quad |\omega| > \omega_{MAX}$$

(analogamente possiamo definire funzioni a tempo limitato)

$$f(t) = 0 \quad , \quad |t| > T$$

Teorema di campionamento



Consideriamo una funzione a banda limitata

$$\frac{1}{\tau} > 2\omega_{MAX}$$

$$\frac{1}{\tau} = 2\omega_{MAX}$$

$$\frac{1}{\tau} < 2\omega_{MAX}$$

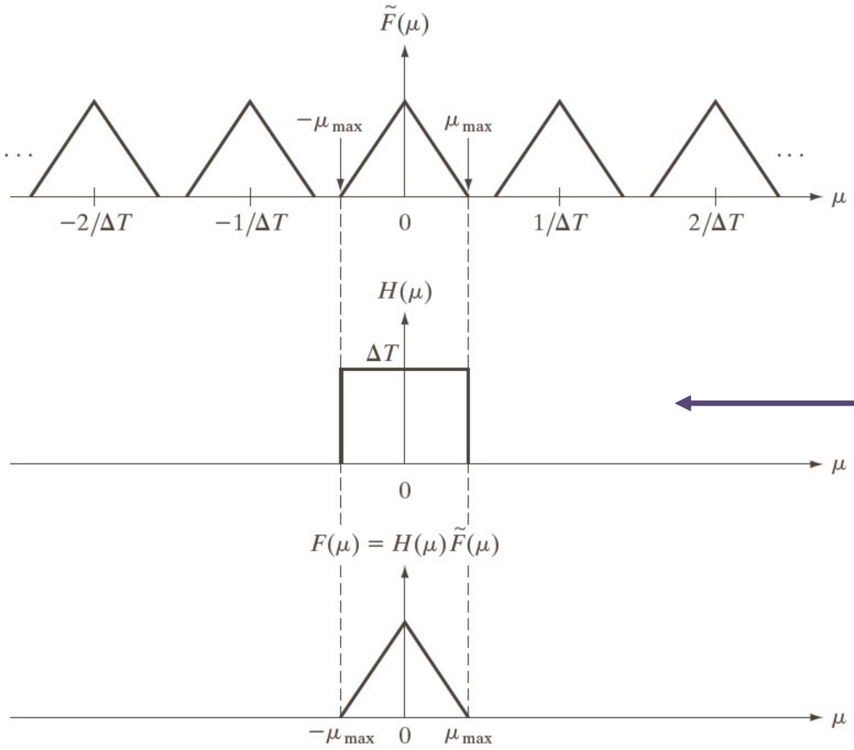
Teorema di campionamento

Consideriamo una funzione continua f(t) a banda limitata.

Una **ricostruzione perfetta** del segnale è garantita se la frequenza di campionamento è almeno il doppio della frequenza massima del segnale

$$\frac{1}{\tau} > 2\omega_{MAX}$$

Ricostruzione del segnale



FILTRO

UniGe

MaLGa