Calcolo differenziale ed integrale 2 – Prova scritta
07 Settembre 2020

Esercizio 3. Data la funzione $f(x) = 1 - \arctan(x^2)$, determinare il suo polinomio di Taylor di ordine 6 centrato nel punto $x_0 = 0$.

Soluzione: Sappiamo che lo sviluppo di Taylor centrato in 0 dell'arcotangente è dato da

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + R_n(x),$$

per cui

$$f(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^{10} + R_{10}(x).$$

Troncando all'ordine 6 troviamo $T_6 f(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^6$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y)}.$$

a) Stabilire se f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ e in tal caso calcolare la derivata nel punto $P = (1, \ln 2)$ lungo il vettore $v = (-1, 1)$.
b) Determinare e disegnare l'insieme di livello di f di quota 1.
c) Determinare i punti critici di f e stabilire se sono massimi relativi, minimi relativi o punti sella.
d) Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluti sull'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 = 1\}$ e in caso affermativo determinarli.

Soluzione: *a*) f è differenziabile come composta di funzioni differenziabili, e quindi il gradiente esiste in ogni punto e vale la formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \langle \nabla f(P), v\rangle.$$

Visto che

$$\nabla f(x, y) = (-2xe^{-(x^2+y)}, -e^{-(x^2+y)}),$$

si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, \ln 2) = e^{-1-\ln 2} = \frac{1}{2}e^{-1}.$$

b) Per definizione

$$Lev_1 f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-(x^2+y)} = 1\}, = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y = 0\}$$

che è la parabola di equazione $y = -x^2$.

c) I punti critici di f sono quelli che annullano il gradiente, cioè soddisfano

$$\begin{cases} 2xe^{-(x^2+y)} = 0 \\ e^{-(x^2+y)} = 0 \end{cases}.$$

Visto che l'esponenziale non si annulla mai, il sistema non ha soluzioni, cioè non esistono punti critici.

d) Definendo $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\} = g^{-1}(\{0\})$. Tale insieme è chiaramente chiuso (g è continua e $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$) e limitato ($g(x, y) = 0$ è l'equazione che definisce un'ellisse), e pertanto, per il teorema di Weierstrass, f ammette max e min assoluti su C, essendo f continua. Per trovarli usiamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange (possiamo perché anche $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Visto che $\nabla g(x,y) = (6x, 2y)$, non ci sono punti critici sul vincolo. I candidati massimi e minimi soddisfano

$$\begin{cases} \det \begin{bmatrix} -2xe^{-(x^2+y)} & -e^{-(x^2+y)} \\ 6x & 2y \end{bmatrix} = 0 \\ 3x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -2xe^{-(x^2+y)}2y = -6xe^{-(x^2+y)} \\ 3x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Pertanto, i possibili massimi e minimi assoluti di f su C verificano

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 3/2 \\ 3x^2 = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Visto che il secondo sistema non ha soluzioni, troviamo solo i punti $P_1 = (0,1)$ e $P_2 = (0,-1)$, che sono rispettivamente punti di minimo e massimo assoluto di f su C.