Esercizi di Algebra Lineare (2)

Determinanti e Sistemi Lineari

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in tal caso determinare un controesempio)

- Una matrice quadrata con due colonne uguali ha determinante nullo
- Se A è nilpotente, allora $\det A = 0$
- Se A è simmetrica, allora $\det A = 0$
- Se $\det A^2 = 0$, allora $\det A = 0$
- $\det(-I) = -1$
- Se $\det(A \cdot B) = 0$, allora $\det A = 0$

2) Calcolare

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Per quali $h \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è invertibile?

4) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + \lambda y - z = 1 \\ x - \lambda z = 2 \\ \lambda x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

a) determinare, se esistono, le soluzioni per $\lambda = 2$

b) discutere le soluzioni al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) Dire per quali valori di λ i seguenti sistemi lineari omogenei ammettono soluzione non banale:

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + \lambda y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ 2x + z + t = 0 \\ \lambda x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

6) Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3u + 4v = 0 \\ 2x + y + 2z + 3u + 4v = 0 \\ 3x + 3y + 6z + 10u + 15v = 0 \end{cases}$$