2 APPARATO MATEMATICO

I — PREREQUISITI MATEMATICI

I due ingredienti essenziali per lo studio dell'informazione quantistica sono i numeri complessi e gli spazi vettoriali complessi in due dimensioni.

2.1.1 Numeri complessi

Unità immaginaria

L'equazione

$$x^2 + 1 = 0$$

non è risolubile nel campo reale perché $x^2 \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se introduciamo l'*unità immaginaria*, ovvero il numero i tale che $i^2 = -1$, otteniamo invece le due soluzioni $x_{1,2} = \pm i$.

L'algebra non cambia

Siamo ora in grado di calcolare la radice quadrata di un qualunque numero reale negativo e possiamo risolvere tutte le equazioni di secondo grado estendendo la validità delle regole usuali dell'algebra nel campo reale al campo complesso $\mathbb{C}$. Ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ può essere scritto come $z = a + ib$, con $a \in \mathbb{R}$ *parte reale* e $b \in \mathbb{R}$ *parte immaginaria*. Se $z = a + ib$ e $w = c + id$, abbiamo

$$\begin{aligned} z + w &= (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \\ z \cdot w &= (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Il *complesso coniugato* di $z = a + ib$ è $z^* = a - ib$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, $z \cdot z^* = a^2 + b^2$ è reale e non negativo. Inoltre, $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ è detto *modulo* di z.

Due rappresentazioni equivalenti

Possiamo rappresentare un numero complesso $z = a + ib$ come una coppia (a, b) sul piano complesso (vedi figura 9). L'asse delle ascisse è utilizzato per la parte reale e l'asse delle ordinate per la parte immaginaria. Si ha $a = |z| \cos\theta$ e $b = |z| \sin\theta$ con $b/a = \tan\theta$ e dove θ è la *fase*. Se $z = 0$, la fase è indefinita.

Questo capitolo è basato sulle note di Alessandro Verri.

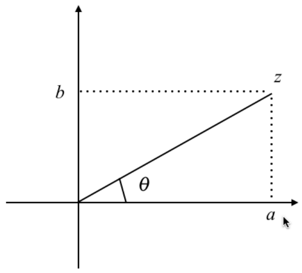

Figure 9: Vedi testo.

Per $|z| = 1$, $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Più in generale, $\forall z \in \mathbb{C}$ possiamo scrivere $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho = |z|$ e

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

In questa notazione, detta *polare*, è evidente che il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per fase la somma delle fasi. In particolare, i numeri con lo stesso modulo ρ nel piano complesso giacciono sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio ρ.

2.1.2 Spazi vettoriali in 2D

Vettori nel piano

Rappresentiamo i vettori nel piano come frecce che hanno la base in un punto fissato, l'origine, e la punta in un punto qualunque del piano. I vettori si indicano in diverse maniere; le più comuni sono in grassetto $\mathbf{v}$ o con una freccia $\vec{v}$.

Un vettore è caratterizzato da tre quantità : modulo, direzione e verso. Il modulo rappresenta la lunghezza del vettore. La direzione è rappresentata dalla retta su cui giace il vettore (e da tutte quelle parallele ad essa). In fine, il verso specifica in che direzione punta il vettore (dato che ogni retta ha due direzioni). Consideriamo per esempio, il vettore spostamento che descrive lo spostamento da Genova a Milano. In questo caso, il modulo sarà 150 km, il verso sarà dato dalla retta congiungente Genova e Milano e il verso sarà da Genova (presa come origine) a Milano.

Possiamo definire alcune operazioni di base fra e con vettori. Se abbiamo due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ possiamo definire la somma che sarà un vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ ottenuto mediante la regola *regola del parallelogramma* (vedi figura 10).

Dato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, per ogni vettore $\mathbf{v}$, possiamo definire il vettore $\alpha\mathbf{v}$ è la freccia ottenuta moltiplicando $\mathbf{v}$ per $|\alpha|$ e invertendone il verso se $\alpha < 0$. Questa operazione è detta *moltiplicazione per scalare* e permette di definire anche il vettore opposto. Se $\alpha = -1$, otteniamo il vettore $-\mathbf{v}$ che stesso modulo, stessa direzione ma verso opposto a $\mathbf{v}$. Sommando $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ otteniamo il vettore nullo $\mathbf{0}$.

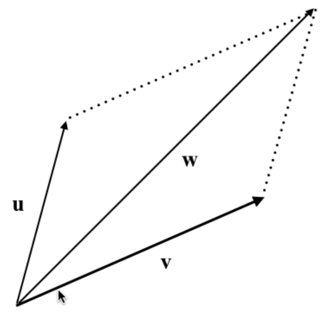

Figure 10: Vedi testo.

L'insieme di tutti i vettori del piano è allora uno spazio vettoriale reale V chiuso rispetto all'operazione di combinazione lineare: ovvero, $\forall \mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in V$ e $\forall \alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$, si ha che il vettore $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in V$. Se α e β anziché reali sono complessi, V è uno spazio vettoriale complesso: gli spazi vettoriali complessi e reali godono delle stesse proprietà. Nel seguito assumeremo sempre di trattare il caso di spazi vettoriali complessi. Due vettori $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_1$ che non sono uno multiplo dell'altro generano lo spazio V. Pertanto, $\forall \mathbf{v} \in V$, esistono α e $\beta \in \mathbb{C}$ tali che $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{v}_1$. La coppia $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_1$ è una base per V. Il vettore nullo è indicato ancora con $\mathbf{o}$.

Prodotto scalare e componenti

Nel caso quantistico gli spazi vettoriali complessi ammettono la definizione di un prodotto scalare. Il prodotto scalare è una funzione $< \cdot, \cdot >$: $V \times V \to \mathbb{C}$ che soddisfa le seguenti tre proprietà:

1. $\forall \mathbf{u} \in V$, $< \mathbf{u}, \mathbf{u} >$ è un numero reale non negativo, con $< \mathbf{u}, \mathbf{u} >= 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{o}$;

2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >=< \mathbf{v}, \mathbf{u} >^*$;

3. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $< \mathbf{w}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} >= \alpha < \mathbf{w}, \mathbf{u} > +\beta < \mathbf{w}, \mathbf{v} >$.

Due vettori per i quali il prodotto scalare è nullo sono *ortogonali*. La lunghezza o norma di un vettore $\mathbf{u} \in V$ è $\sqrt{< \mathbf{u}, \mathbf{u} >}$. Nel seguito, considereremo sempre basi costituite da coppie di vettori ortogonali e a norma unitaria, ovvero basi *ortonormali*. Fissata una base ortonormale, $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_1$ per esempio, ogni $\mathbf{u} \in V$ può essere espresso in componenti come $\mathbf{u} = u_0\mathbf{v}_0 + u_1\mathbf{v}_1$ con

$$u_0 =< \mathbf{u}, \mathbf{v_0} > \quad \text{e} \quad u_1 =< \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 > .$$

Inoltre, si ha $< \mathbf{u}, \mathbf{u} >=< u_0\mathbf{v}_0 + u_1\mathbf{v}_1, u_0\mathbf{v}_0 + u_1\mathbf{v}_1 >= u_0^2 + u_1^2$.

Una notazione particolarmente utile è quella per componenti (o matriciale). Ogni vettore è associato ad una matrice 2×1 che ha per elementi le sue componenti ordinate in colonna. Per reinterpretare le definizioni di sopra in questo contesto, dobbiamo prima fissare la base $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1\}$. Nella rappresentazione per componenti o matriciale questi saranno descritti da

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

In questa notazione, denotiamo con $\mathbf{w}^\dagger$ il vettore trasposto e complesso coniugato del vettore $\mathbf{w}$, il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \in V$ può essere riscritto come il prodotto righe per colonne

$$< \mathbf{w}, \mathbf{u} >= \mathbf{w}^\dagger \mathbf{u} = [w_0^*, w_1^*]^\top \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = w_0^* u_0 + w_1^* u_1.$$

Si noti quindi che, coerentemente,

$$< \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 >= \mathbf{v}_0^\dagger \mathbf{v}_0 = [1, 0]^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$

e, analogamente, $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 >= 1$, $< \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 >=< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0 >= 0$ come ci si aspetta per una base ortonormale. Il vettore generico $\mathbf{u} = u_0 \mathbf{v}_0 + u_1 \mathbf{v}_1$ si sarà

$$\mathbf{u} = u_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che cambiando la base, le componenti di un vettore cambiano ma il vettore non cambia. Vediamo ora la notazione comunemente usata in meccanica quantistica.

Vettori ket e bra

In meccanica quantistica si preferisce indicare un vettore $\mathbf{u}$ con $|\mathbf{u}\rangle$, detto *ket*, e il suo trasposto coniugato con $\langle \mathbf{u}|$, detto *bra*. In questa notazione il prodotto scalare di due vettori $|\mathbf{u}\rangle$ e $|\mathbf{w}\rangle$ si forma allora con il *braket* (*bracketing* significa mettere in parentesi)

$$\langle u|v\rangle :=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > .$$

L'identificativo del vettore, in questa nuova notazione, può essere più facilmente utilizzato per codificare lo stato che si vuole rappresentare.

2.1.3 Somma diretta

Definizioni

Se V e W sono spazi vettoriali, definiamo la *somma diretta* di V e W come

$$V \oplus W := \{(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) \text{ tali che } |\mathbf{v}\rangle \in V \text{ e } |\mathbf{w}\rangle \in W\}.$$

L'insieme $V \oplus W$ è uno spazio vettoriale rispetto alla somma definita come

$$|\mathbf{u}\rangle + |\mathbf{u}'\rangle := (|\mathbf{v}\rangle + |\mathbf{v}'\rangle) \oplus (|\mathbf{w}\rangle + |\mathbf{w}'\rangle)$$

per ogni $|\mathbf{u}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \oplus |\mathbf{w}\rangle$ e $|\mathbf{u}'\rangle = |\mathbf{v}'\rangle \oplus |\mathbf{w}'\rangle \in V \oplus W$: infatti, i vettori della somma diretta $V \oplus W$ si combinano sommando i vettori di V e W separatamente.

Se V e W ammettono prodotto scalare, $V \oplus W$ ammette il prodotto scalare definito come

$$\langle \mathbf{u}|\,|\mathbf{u}'\rangle = (\langle \mathbf{v}| \oplus \langle \mathbf{w}|)(|\mathbf{v}'\rangle \oplus |\mathbf{w}'\rangle) := \langle \mathbf{v}|\,|\mathbf{v}'\rangle + \langle \mathbf{w}|\,|\mathbf{w}'\rangle\,,$$

ovvero il prodotto scalare di vettori di $V \oplus W$ si ottiene sommando i prodotti scalari di vettori di V e W.

Se $\{|\mathbf{v_0}\rangle, |\mathbf{v_1}\rangle\}$ e $\{|\mathbf{w_0}\rangle, |\mathbf{w_1}\rangle\}$ sono basi per V e W, $\{(|\mathbf{v_0}\rangle, |\mathbf{v_1}\rangle), (|\mathbf{w_0}\rangle, |\mathbf{w_1}\rangle)\}$ è base per $V \oplus W$.

Proprietà ed esempi

Nella somma diretta la corrispondenza tra gli $|\mathbf{u}\rangle \in V \oplus W$ e le coppie ordinate $(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle)$ con $|\mathbf{v}\rangle \in V$ e $|\mathbf{w}\rangle \in W$ è biunivoca.

Tutto quanto detto, inoltre, rimane vero per la somma diretta di un qualunque numero di spazi vettoriali di qualunque dimensione. Abbiamo allora che

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W).$$

Pertanto, la somma diretta di n copie di uno spazio V ha dimensione $n \dim(V)$.

Se gli assi coordinati X, Y e Z sono visti come spazi vettoriali 1D, il piano $X \oplus Y$ è lo spazio vettoriale 2D somma diretta di X e Y, mentre lo spazio $X \oplus Y \oplus Z$ è lo spazio vettoriale 3D somma diretta di X, Y e Z.

II — PRODOTTO TENSORE

Definizioni

Consideriamo ora due spazi vettoriali V e W con basi, rispettivamente,$A = \{|\alpha_1\rangle_V, |\alpha_2\rangle_V, ..., |\alpha_n\rangle_V\}$ e $B = \{|\beta_1\rangle_W, |\beta_2\rangle_W, ..., |\beta_m\rangle_W\}$. Da questa scrittura deduciamo che $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$. Il *prodotto tensore* dei due spazi viene indicato con $V \otimes W$ ha dimensione $\dim(V \otimes W) = n\ m$, con una base costituita da $n\ m$ elementi della forma $|\alpha_i\rangle_V \otimes |\beta_j\rangle_W \equiv |\alpha_i \beta_j\rangle$ **[Rieffel2011]**. Le notazioni $|\alpha_i\rangle_V \otimes |\beta_j\rangle_W$ e $|\alpha_i \beta_j\rangle$ sono equivalenti. La prima è più precisa e tiene conto del fatto che gli stati $|\alpha_i\rangle_V$ e $|\beta_j\rangle_W$ appartengono rispettivamente allo spazio vettoriale V e W. La seconda è più coincisa e quindi più usata.

Il prodotto tensoriale soddisfa le seguenti proprietà

1. $\forall\, |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{v}'\rangle \in V, |\mathbf{w}\rangle \in W \quad (|\mathbf{v}\rangle + |\mathbf{v}'\rangle) \otimes |\mathbf{w}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle + |\mathbf{v}'\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle$;

2. $\forall\, |\mathbf{v}\rangle \in V, |\mathbf{w}\rangle, |\mathbf{w}'\rangle \in W \quad |\mathbf{v}\rangle \otimes (|\mathbf{w}\rangle + |\mathbf{w}'\rangle) = |\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle + |\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}'\rangle$;

3. $\forall\,|\mathbf{v}\rangle \in V, |\mathbf{w}\rangle \in W, \alpha \in \mathbb{C} \quad (\alpha\,|\mathbf{v}\rangle) \otimes |\mathbf{w}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \otimes (\alpha\,|\mathbf{w}\rangle) = \alpha(|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle)$.

Se V e W ammettono prodotto scalare, $V \otimes W$ ammette il prodotto scalare definito come

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}'\rangle = (\langle \mathbf{v}| \otimes \langle \mathbf{w}|)(|\mathbf{v}'\rangle \otimes |\mathbf{w}'\rangle) := \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}'\rangle \langle \mathbf{w}|\mathbf{w}'\rangle\,,$$

ovvero come il prodotto dei prodotti scalari definiti su V e W.

Proprietà ed esempi

Consideriamo qualche esempio. Se, nella base canonica di V e W abbiamo che $|\mathbf{v}\rangle = a\,|\alpha_1\rangle_V + b\,|\alpha_2\rangle_V \in V$ e $|\mathbf{w}\rangle = c\,|\beta_1\rangle_W + d\,|\beta_2\rangle_W \in W$, il prodotto tensoriale $|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle$ è

$$\begin{aligned}(a\,|\alpha_1\rangle_V + b\,|\alpha_2\rangle_V) \otimes (c\,|\beta_1\rangle_W + d\,|\beta_2\rangle_W) &= \\ ac\,|\alpha_1\rangle_V \otimes |\beta_1\rangle_W + ad\,|\alpha_1\rangle_V \otimes |\beta_2\rangle_W & \\ +bc\,|\alpha_2\rangle_V \otimes |\beta_1\rangle_W + bd\,|\alpha_2\rangle_V \otimes |\beta_2\rangle_W\,. & \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Per la norma di $|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle$ abbiamo

$$(\langle \mathbf{v}| \otimes \langle \mathbf{w}|)(|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle) = |ac|^2 + |ad|^2 + |bc|^2 + |bd|^2 = (|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2).$$

Se, invece, $|\mathbf{v}'\rangle = f\,|\alpha_1\rangle_V \in V$ e $|\mathbf{w}'\rangle = g\,|\beta_2\rangle_W \in W$, abbiamo semplicemente

$$f\,|\alpha_1\rangle_V \otimes g\,|\beta_2\rangle_W = fg\,|\alpha_1\rangle_V \otimes |\beta_2\rangle_W\,.$$

Per il prodotto scalare di $|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle$ con $|\mathbf{v}'\rangle \otimes |\mathbf{w}'\rangle$, invece, otteniamo

$$(\langle \mathbf{v}| \otimes \langle \mathbf{w}|)(|\mathbf{v}'\rangle \otimes |\mathbf{w}'\rangle) = (a^* f + b^* \cdot 0)(c^* \cdot 0 + d^* g) = a^* f d^* g.$$

Osserviamo che se $\langle \mathbf{v}|\,|\mathbf{v}\rangle = 1$ e $\langle \mathbf{w}|\,|\mathbf{w}\rangle = 1$ allora

$$(\langle \mathbf{v}| \otimes \langle \mathbf{w}|)(|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle) = \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{w}|\mathbf{w}\rangle = 1.$$

Tutto quanto detto rimane vero per il prodotto tensoriale di un qualunque numero di spazi vettoriali di qualunque dimensione. In particolare, quindi,

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V) \times \dim(W).$$

Se si considera il prodotto tensoriale $\Pi^n_\otimes$ di n copie dello stesso spazio vettoriale V si ha

$$\dim(\Pi^n_\otimes V) = \dim(V)^n.$$

In meccanica quantistica, lo stato combinato di n sistemi quantistici a 2 stati è un vettore in uno spazio vettoriale 2^nD, prodotto tensoriale di n spazi. Nel caso classico, invece, lo stato combinato di n sistemi, ciascuno descritto da un punto in uno spazio vettoriale 2D, è descritto da un punto in uno spazio $2n$D, somma diretta degli n spazi.

III — OPERATORI

Gli operatori lineari in generale sono tali che agendo su un vettore dello spazio lineare danno un altro vettore dello stesso spazio: $O : V \to V$. Usando la notazione *braket* possiamo scrivere $O\,|v\rangle = |w\rangle$.

Molto spesso è utile dare una rappresentazione matriciale dell'operatore. A questo proposito, scegliamo una base dello spazio vettoriale (supposto di dimensione n) $\{|\alpha_1\rangle\,, |\alpha_2\rangle\,, ..., |\alpha_n\rangle\}$. L'elemento $i-j$ della matrice associata all'operatore sarà $O_{ij} = \langle\alpha_i|O|\alpha_j\rangle$.

$$O = \begin{array}{c} \\ \langle\alpha_1| \\ \langle\alpha_2| \\ \vdots \\ \langle\alpha_n| \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} |\alpha_1\rangle & |\alpha_1\rangle & |\alpha_1\rangle & \cdots & |\alpha_n\rangle \end{array} \\ \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} & \dots & O_{1n} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} & \dots & O_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{n1} & O_{n2} & O_{n3} & \dots & O_{nn} \end{bmatrix} \end{array}. \tag{2.3.1}$$

Nella scrittura (2.3.1) è implicito un altro modo di scrivere un operatore. Abbiamo detto che il prodotto fra un *bra* e un *ket* rappresenta il prodotto scalare $\langle w|v\rangle$ ed è un numero complesso. Che significato ha invece la composizione fra un *ket* e un *bra* tipo $|w\rangle\langle v|$? Consideriamo prima il caso più semplice in cui $|w\rangle\langle v|$ viene applicato allo stato $|v\rangle$. Otteniamo $|w\rangle\,\langle v|v\rangle = |w\rangle\,(\langle v|v\rangle) = |w\rangle$. Quindi $|w\rangle\langle v|$ si comporta come un *operatore* che trasforma $|v\rangle$ in $|w\rangle$.

Più in generale, se lo applichiamo ad uno stato generico $|q\rangle$ otterremo

$$|w\rangle\,\langle v|q\rangle = |w\rangle\,(\langle v|q\rangle) = a\,|w\rangle \tag{2.3.2}$$

dove $a = \langle w|q\rangle$ è un numero complesso.

Le notazioni usate sono consistenti. Ad esempio, l'operatore O scritto in termini matriciali in Eq. (2.3.1) può essere scritto con i *bra* e *ket* della base $\{|\alpha_1\rangle\,, |\alpha_2\rangle\,, ..., |\alpha_n\rangle\}$ come

$$O = \sum_{ij} O_{ij}|\alpha_i\rangle\langle\alpha_j|. \tag{2.3.3}$$

Infatti, prendendo l'elemento di matrice $k-p$ otteniamo

$$\langle\alpha_k|O|\alpha_p\rangle = \sum_{ij} O_{ij}\,\langle\alpha_k|\alpha_i\rangle\,\langle\alpha_j|\alpha_p\rangle = \sum_{ij} O_{ij}\delta_{ki}\delta_{jp} = O_{kp} \tag{2.3.4}$$

dove abbiamo usato il fatto che la base $\{|\alpha_1\rangle\,, |\alpha_2\rangle\,, ..., |\alpha_n\rangle\}$ è ortonormale; quindi $\langle\alpha_k|\alpha_i\rangle = \delta_{ki}$ è zero se $k \neq i$ e 1 se $k = i$ (δ_{ki} è chiamata delta di Kronecker).

Nell'Eq. (2.3.3) O è scritto come un operatore. Se la sua struttura è nota nella base $\{\alpha_i\}$, possiamo scriverlo in un'altra base $\{\beta_i\}$ semplicemente prendendo gli elementi di matrice nella nuova base. Ad esempio, l'elemento di matrice $k-p$ nella nuova base sarà

$$\langle\beta_k|O|\beta_p\rangle = \sum_{ij} O_{ij}\,\langle\beta_k|\alpha_i\rangle\,\langle\alpha_j|\beta_p\rangle \tag{2.3.5}$$

dove $\langle \beta_k | \alpha_i \rangle$ e $\langle \alpha_j | \beta_p \rangle$ sono i prodotti scalari fra stati delle due basi.

IV — AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Sia O un operatore lineare definito su uno spazio V. Usando la notazione *braket* per denotare i vettori dello spazio V, diremo che se $O|\nu\rangle = \lambda|\nu\rangle$ per un vettore $|\nu\rangle$ (non nullo), diremo che **v** è un *autovettore* di O e λ è l'*autovalore* corrispondente.

Fra gli operatori lineari, in meccanica quantistica hanno un ruolo particolare gli operatori *hermitiani* tali che $O^\dagger = O$ dove con il simbolo † denotiamo l'*aggiunto dell'operatore*. Semplificando, possiamo pensare ad un operatore O rappresentato in una base scelta come una matrice quadrata. In questo caso, l'operatore aggiunto non è altro che l'operazione di "trasposta coniugata".

Gli operatori hermittiani hanno sempre autovalori reali. Per vedere questo partiamo dall'equazione agli autovalori $O|\nu\rangle = \lambda|\nu\rangle$ e ne facciamo il complesso-coniugato (aggiunto). In questo caso, i *ket* vengono trasformati in *bra* e otteniamo $\langle\nu| O^\dagger = \lambda^* \langle\nu|$ (dove λ^* è il complesso coniugato di λ). Usando questo risultato e ricordandoci che i *ket* sono normalizzati ($\langle\nu|\nu\rangle = 1$), possiamo scrivere

$$\lambda = \lambda \langle\nu|\nu\rangle = \langle\nu|\lambda|\nu\rangle = \langle\nu|(O|\nu\rangle) = (\langle\nu|O^\dagger)|\nu\rangle = \lambda^* \langle\nu|\nu\rangle = \lambda^*. \tag{2.4.1}$$

concludiamo che $\lambda = \lambda^*$ e che λ deve essere reale.

Un'altra importante proprietà degli autovettori degli operatori hermittiani è che, se associati ad autovalori diversi, sono ortogonali. Consideriamo due autovettori $|\phi_i\rangle$ e $|\phi_j\rangle$ associati a autovalori differenti tali che $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ [1]. Le equazioni rispettive sono

$$O|\phi_i\rangle = \lambda_i |\phi_i\rangle \tag{2.4.2}$$

e $O|\phi_j\rangle = \lambda_j |\phi_j\rangle$. Prendendo il complesso coniugato di quest'ultima equazione e ricordandoci che $O^\dagger = O$ e che λ_j deve esere reale, arriviamo alla seguente equazione

$$\langle\phi_j| O^\dagger = \langle\phi_j| O = \lambda_j \langle\phi_j| . \tag{2.4.3}$$

Calcoliamo ora l'elemento di matrice $\langle\phi_j|O|\phi_i\rangle$. Usando l'Eq. (2.4.2) possiamo scrivere che

$$\langle\phi_j|O|\phi_i\rangle = \lambda_i \langle\phi_j|\phi_i\rangle . \tag{2.4.4}$$

Usando invece l'equazione coniugata (2.4.3), otteniamo

$$\langle\phi_j|O|\phi_i\rangle = \lambda_j \langle\phi_j|\phi_i\rangle . \tag{2.4.5}$$

Naturalmente i due risultati devo essere uguali quindi arriviamo a scrivere

$$\lambda_i \langle\phi_j|\phi_i\rangle = \lambda_j \langle\phi_j|\phi_i\rangle . \tag{2.4.6}$$

1 Gli autovettori $|\phi_i\rangle$ e $|\phi_j\rangle$ associati a autovalori differenti $\lambda_i \neq \lambda_j$ vengono detti *non-degeneri*. Mentre se $|\phi_i\rangle$ e $|\phi_j\rangle$ sono associati allo stesso autovalore $\lambda_i = \lambda_j$ vengono detti *degeneri*.

Visto che $\lambda_i \neq \lambda_j$, l'unica modo per soddisfare questa equazione è che entrambi i membri si annulino. Questo è possibile solo se $\langle \phi_j | \phi_i \rangle = 0$. Abbiamo quindi dimostrato che *gli autovettori di un operatore hermittiano associati ad autovalori diversi sono ortogonali*.

In meccanica quantistica il concetto di operatore hermittiano, di autovalore e autovettore sono particolarmente importanti quando associati alle misura. Come vedremo gli operatori hermittiano sono associati ad osservabili fisici (ad esempio, la polarizzazione della luce) e gli autovalori sono il risultato di una misura sul sistema.

Possiamo aggiungere un'altra osservazione. Se un operatore è diagonale nella base scelta allora

$$O = \sum_i O_{ii} |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|. \tag{2.4.7}$$

e O_{ii} saranno i suoi autovalori.

V – ESERCIZI

2.5.1 Esercizio 1

1. Si consideri la base ortonormale $B_1 = \{|0\rangle, |1\rangle\}$. In tale base, scrivere l'operatore $P_1 = |0\rangle\langle 1|$. Nella stessa base, scrivere l'operatore $P_2 = |1\rangle\langle 0|$.
2. Scrivere l'operatore $X = P_1 + P_2$. Come agisce X sugli stati della base? Ovvero, cosa otteniamo se calcoliamo $X|0\rangle$ e $X|1\rangle$? Come agisce X sullo stato $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$?
3. Si consideri l'insieme dei ket $B_2 = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ con $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Tale insieme è una base ortronormale?
4. Calcolare $X|+\rangle$ e $X|-\rangle$.
5. Nella base B_2, scrivere l'operatore X.

2.5.2 Esercizio 2

1. Ripetere il calcolo dell'esercizio 2.5.1, per gli operatori $P_1 = |1\rangle\langle 1|$, $P_1 = |0\rangle\langle 0|$ e $Z = P_1 - P_2$.

2.5.3 Esercizio 3

1. Usando i risultati dell'esercizio 2.5.1 per P_1 e P_2, si scriva l'operatore $Y = -i\, P_1 + i\, P_2$ (dove i è l'unità immaginaria).
2. Per Y si ripetano i calcoli dell'esercizio 2.5.1 (nota: attenzione ai punti 4 e 5).