

**Calcolo differenziale ed integrale 2 – Prova scritta**  
14 GENNAIO 2021

**Esercizio 1.** Per ciascuna delle seguenti serie

(1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^4)}{n^2 + 1}$

(2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{4^n + n^2}$

dire se:

- sono a valori positivi,
- convergono semplicemente,
- convergono assolutamente.

Stabilire inoltre se la ridotta  $s_9$  della serie (2) approssima il valore della serie a meno di 0,1.

(3) Determinare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ .

**Esercizio 2.** Determinare il polinomio di Taylor centrato in 0 e di ordine 4 di  $f(x) = \log(\cos x)$ .

**Esercizio 3.** Data la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodica di periodo 4 definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 1 \\ -1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

determinare i suoi coefficienti di Fourier  $\hat{f}_{2n+1}$  per  $n \in \mathbb{Z}$ .

Determinare poi il valore della serie di Fourier di  $f$  in  $x = 0$  e  $x = 1$ .

**Esercizio 4.** Data la funzione  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{3 - xy}$$

- a) Trovare il dominio di  $f$  e specificarne le caratteristiche: dire se è aperto, limitato, connesso
- b) Stabilire se  $f$  è differenziabile su  $D$  e in tal caso calcolare il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(0, 0, f(0, 0))$ .
- c) Determinare i punti critici di  $f$ .
- d) Stabilire se  $f$  ammette massimo e minimo assoluti sull'insieme  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$  e in caso affermativo determinarli.