4. Serie di Fourier

La serie di Fourier permette di sviluppare una funzione periodica in termini di funzioni trigonometriche. Ricordiamo che una funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad y = f(x)$$

è detta periodica di periodo $T > 0$ se

$$f(x+T) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

L'esempio principale di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{30}$$

. Per $k = 0$, $\cos(\frac{2\pi}{T}kx)$ è la funzione costante uguale ad 1 e $\sin(\frac{2\pi}{T}kx)$ è la funzione costante uguale a 0.

Una funzione periodica è definita univocamente dalla sua restrizione all'intervallo $[-T/2, T/2)$. Infatti, data una funzione $f(x)$ definita su $[-T/2, T/2)$, questa si estende univocamente ad una funzione periodica di periodo T ponendo

$$f(x) = f(x - kT) \qquad x \in [-\frac{T}{2} + kT, \frac{T}{2} + kT), \tag{31}$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Geometricamente, il grafico di una funzione periodica si ottiene a partire dal grafico $y = f(x)$, al variare di $-T/2 \leq x < T/2$, e traslandolo in ciascun intervallo $[-T/2 + kT, T/2 + kT)$, vedi Fig. 4.

. Se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo T, la funzione dilatata definita da

$$g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

è periodica di periodo 2π e le funzioni trigonometriche (30) assumono l'espressione più semplice

$$\cos(kx) \qquad \sin(kx) \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

vedi Fig. 3

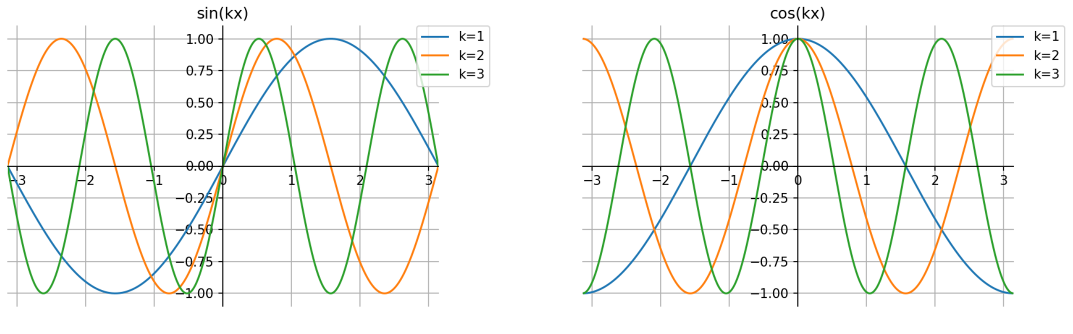

Figura 3. Funzioni trigonometriche $T = 2\pi$.

Def. 1.36 (Coefficienti e serie di Fourier)**.** Data una funzione f periodica di periodo T, i coefficienti di Fourier sono dati da

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}kx}\, dx \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{32}$$

purché l'integrale abbia senso. La serie di funzioni

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k \, e^{i\frac{2\pi}{T}kx} \tag{33}$$

si chiama serie di Fourier associata ad f.

☡. Se la funzione f è a valori reali ed è Riemann integrabile su $[-T/2, T/2]$, allora la (32) ha senso e, usando l'identità di Eulero (45), i coefficienti di Fourier sono

$$\widehat{f}_k = \underbrace{\left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx \right)}_{\text{parte reale di } \widehat{f}_k} - i \underbrace{\left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx \right)}_{\text{parte immaginaria di } \widehat{f}_k}, \tag{34}$$

dove entrambi gli integrali dipendono solo dai valori di $f(x)$ nell'intervallo $[-T/2, T/2)$.

☡. La serie di Fourier (33) è una serie di funzioni $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ dove l'n-esimo termine generale

$$f_n(x) = \widehat{f}_k \, e^{i\frac{2\pi}{T}kx} \qquad x \in \mathbb{R},$$

è una funzione trigonometrica (in forma esponenziale). In generale, non si può dire nulla sulla convergenza della serie. Tuttavia, sotto opportune condizioni, la serie di Fourier converge ad $f(x)$, vedi Teo. 1.39.

Usando l'identità di Eulero (45) e le proprietà di simmetria di seno e coseno, si deduce che

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k \, e^{ikx} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) \\
&= \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}) \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} i(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}) \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right),
\end{aligned}$$

e, ponendo, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_k = \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k} \quad &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx \\
b_k = i(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}) &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx
\end{aligned} \tag{35}$$

si ottiene la serie di Fourier in termini di funzioni trigonometriche reali

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right). \tag{36}$$

Data la (36), si ottiene la (33) definendo per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \\
\widehat{f}_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2}
\end{aligned} \tag{37}$$

Se $f(x)$ è reale, in generale i coefficienti $\widehat{f}_k$ sono numeri complessi, mentre a_k e b_k sono reali e la (36) si può equivalentemente rappresentare nella forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx + \varphi_k\right),$$

dove

$$a_k = A_k \sin\varphi_k \qquad b_k = A_k \cos\varphi_k \qquad k \geq 1.$$

. Nell'equazioni (31), (32), (34) e (35), l'intervallo $[-T/2, T/2)$ può esser sostituito con un qualunque intervallo della forma $[a, a+T)$. Ad esempio,

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}kx}\, dx.$$

Esempio 1.37 (Rampa lineare)**.** Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π

$$f(x) = x \qquad\qquad -\pi \leq x < \pi.$$

vedi Fig. 4. Osserviamo che il grafico di $f(x)$ coincide con la retta $y = x$ solo se $-\pi \leq x < \pi$.

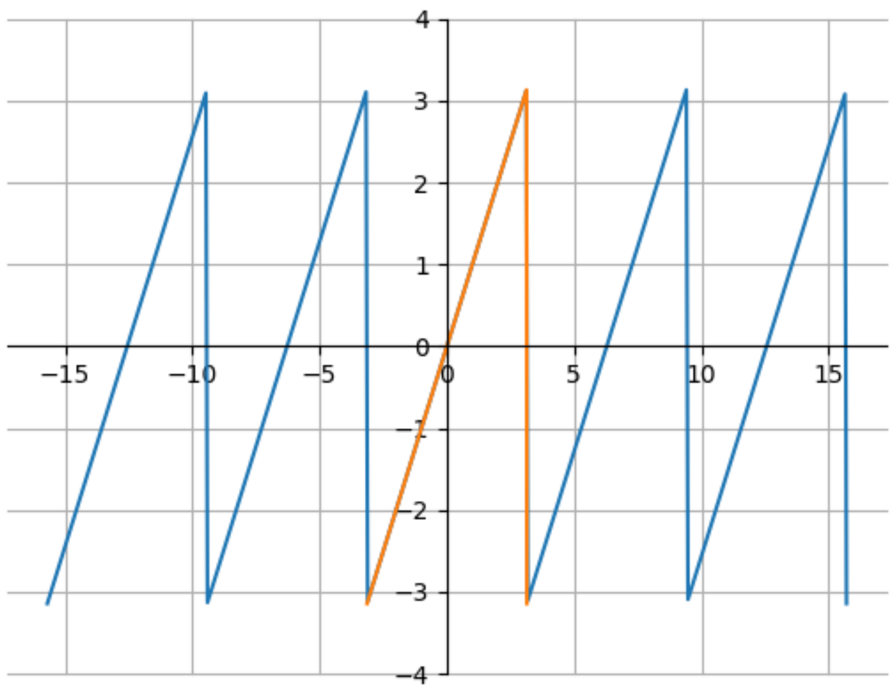

Figura 4. Il grafico della rampa lineare (in blu) e della sua restrizione a $[-\pi, \pi)$ (in arancione)

In particolare $f(\pi) = f(-\pi) = -1$. Poiché $f(x)$ è dispari e $\cos(kx)$ è pari,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx)\, dx = 0 \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Poiché $f(x)$ e $\sin(kx)$ sono dispari, se $k \neq 0$, integrando per parti,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx)\, dx = 2\int_0^{\pi} x \sin(kx)\, dx = 2\left(-x\frac{\cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{2\pi}{k}(-1)^k.$$

Usando (34) e (35) segue che

$$\begin{cases} \widehat{f}_0 = 0 & \\ \widehat{f}_k = i\frac{(-1)^k}{k} & k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} a_k = 0 & k \in \mathbb{N} \\ b_k = 2\frac{(-1)^{k+1}}{k} & k \in \mathbb{N},\ k > 0, \end{cases}$$

da cui, per la (33) e (36), la serie di Fourier di $f(x)$ è

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} i\frac{(-1)^k}{k}e^{ikx} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx).$$

Fissato il periodo T, ad ogni funzione periodica $f(x)$ è associata la sequenza $(\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dei suoi coefficienti di Fourier

$$\ldots,\ \widehat{f}_{-2},\ \widehat{f}_{-1},\ \widehat{f}_0,\ \widehat{f}_1,\ \widehat{f}_2,\ \widehat{f}_3,\ \ldots,\ \widehat{f}_k,\ \ldots,$$

ed è, quindi, definito un operatore $\mathcal{F}$

$$f \longmapsto \mathcal{F}[f] = (\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

che permette di rappresentare una funzione periodica in termini di un vettore con infinite componenti complesse indicizzate da $k \in \mathbb{Z}$. Se $y = f(x)$ rappresenta un segnale analogico (nel spazio o nel tempo), il vettore $\mathcal{F}[f] = (\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ è una rappresentazione discreta del segnale. Questa rappresentazione è compatibile con alcune operazioni sullo spazio di segnali, come mostrato dal seguente teorema.

Teo 1.38. *Valgono le seguenti proprietà:*

a) date due funzioni periodiche f e g di periodo T e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\left(\widehat{\alpha f + \beta g}\right)_k = \alpha\,\widehat{f}_k + \beta\,\widehat{g}_k \qquad k \in \mathbb{Z}; \tag{38a}$$

b) data una funzione periodica f di periodo T

$$f(-x) = f(x) \iff \widehat{f}_{-k} = \widehat{f}_k \iff b_n = 0 \tag{38b}$$

$$f(-x) = -f(x) \iff \widehat{f}_{-k} = -\widehat{f}_k \iff a_n = 0 \tag{38c}$$

$$\overline{f(x)} = f(x) \iff \widehat{f}_{-k} = \overline{\widehat{f}_k} \iff a_n, b_n \in \mathbb{R}; \tag{38d}$$

c) data una funzione periodica f di periodo T e $x_0 \in \mathbb{R}$, i coefficienti di Fourier della funzione traslata $g(x) = f(x - x_0)$ sono

$$\widehat{g}_k = e^{-i\frac{2\pi}{T}x_0 k}\,\widehat{f}_k \qquad k \in \mathbb{Z}; \tag{38e}$$

d) data una funzione periodica f di periodo T, se f è derivabile n-volte con derivata n-esima continua, allora

$$\widehat{f^{(n)}}_k = \left(i\frac{2\pi}{T}k\right)^n \widehat{f}_k \qquad k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}; \tag{38f}$$

e) data una funzione periodica f di periodo T, se f è Riemann integrabile,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2\,dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2 \qquad \text{identità di Parseval} \\ &= \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|a_n|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|b_n|^2.\end{aligned} \tag{38g}$$

La (38a) equivale alla proprietà che l'operatore $\mathcal{F}$ è lineare. Le (38b) e (38c) esprimono il fatto che una funzione è pari/dispari se e solo se i coefficienti di Fourier sono pari/dispari, o equivalentemente, che la serie di Fourier contiene solo i termini $\cos(kx)/\sin(kx)$. La (38d) assicura che per una funzione reale i coefficienti di Fourier a_n e b_n sono reali, mentre i coefficienti $\widehat{f}_k$ sono in generale complessi, ma è sufficiente calcolare quelli per $k \geq 0$, poiché $\widehat{f}_{-k} = \overline{\widehat{f}_k}$. Dalla (35) segue che

$$\text{se } f(x) \text{ è reale, allora } \begin{cases} a_k = 2\,\mathrm{Re}\, f_k \\ b_k = -2 \end{cases} . \tag{39}$$

Le (38e) e (38f) mostrano che le operazioni di traslazione e derivazione di una funzione sono rappresentate nello spazio dei coefficienti di Fourier da operazioni di moltiplicazione, per opportune sequenze

$$\begin{aligned}
&\text{traslazione:} && \widehat{f}_k \longmapsto \underbrace{e^{-i\frac{2\pi}{T}x_0 k}}_{m_k}\,\widehat{f}_k = m_k\,\widehat{f}_k \\
&\text{derivazione:} && \widehat{f}_k \longmapsto \underbrace{\left(i\frac{2\pi}{T}k\right)^n}_{M_k}\,\widehat{f}_k = M_k\,\widehat{f}_k.
\end{aligned}$$

Se $f(x)$ è un segnale, la quantità $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2\,dx$ è una misura della "grandezza" del segnale ed è chiama *energia* di $f(x)$, l'identità di Parseval afferma che l'energia del segnale mediata su un periodo, detta anche *potenza*, è uguale alla somma dei quadrati dei coefficienti di Fourier, che corrisponde al quadrato della norma euclidea di un vettore in $\mathbb{R}^n$. In questo senso, l'operatore di Fuorier preserva le norme dei segnali. Si può inoltre dimostrare che data una successione $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ di numeri complessi tali che la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2$ è convergente, esiste un segnale $f(x)$, periodico di periodo T, tale che $\widehat{f}_k = c_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Una conseguenza dell'identità di Parseval è che, essendo la serie di coefficienti convergente, per il criterio di Cauchy, vedi Prop. 1.12,

$$\lim_{k\pm\infty} |\widehat{f}_k| = 0.$$

Inoltre, dalla (38f), segue che se il segnale è derivabile n-volte con derivata n-esima continua, allora

$$\lim_{k\pm\infty} |\widehat{f^{(n)}}_k| = \lim_{k\pm\infty} |k^n \widehat{f}_k| = 0,$$

cioè tanto più un segnale è regolare, tanto più i suoi coefficienti di Fourier vanno a zero velocemente, cioè esiste $M > 0$ tale che

$$|\widehat{f}_k| \leq \frac{M}{|k|^n} \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{40}$$

In altre parole, se un segnale è globalmente regolare la sua rappresentazione $\mathcal{F}[f]$ data dai coefficienti di Fourier è *sparsa*. Vale anche un risultato inverso. Se esistono $M > 0$ ed $\epsilon > 0$ tali che

$$|\widehat{f}_k| \leq \frac{M}{|k|^{n+1+\epsilon}} \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{41}$$

allora $f(x)$ è una funzione derivabile n-volte e $f^{(n)}(x)$ è una funzione continua.

☡. Gli esponenti che compaiono a secondo membro nelle condizioni di decadimento (40) e (41) non coincidono. Tuttavia questo tipo di risultato non si può migliorare. Per ottenere una caratterizzazione completa occorre introdurre il concetto di derivata debole e di spazi di Sobolev.

☡. Per avere un decadimento come in (40) la funzione deve essere derivabile n-volte su tutto $\mathbb{R}$. Se è presente anche un solo punto di discontinuità nell'intervallo $[-T/2, T/2)$, come nel caso della rampa lineare in $x = -\pi$, vedi Esempio 1.37, allora i coefficienti di Fourier vanno a zero lentamente (nell'esempio $|\widehat{f}_k| = 2/|k|$).

Dimostrazione del Teorema 1.38. Tutte le formule sono una diretta conseguenza della definizione (32), tranne la (38g) per la cui dimostrazione si rimanda ai testi avanzati. Ad esempio, dimostriamo la (38e) e la (38f).

$$\begin{aligned}
\widehat{g}_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x-x_0)e^{-i\frac{2\pi}{T}kx}\,dx \\
(\text{ ponendo } y = x-x_0) \quad &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-x_0}^{\frac{T}{2}-x_0} f(y)e^{-i\frac{2\pi}{T}k(y+x_0)}\,dy \\
(\text{ periodicità e (46d) }) \quad &= \frac{e^{-i\frac{2\pi}{T}kx_0}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)e^{-i\frac{2\pi}{T}ky}\,dy = e^{-i\frac{2\pi}{T}kx_0}\widehat{f}_k,
\end{aligned}$$

che dimostra la (38e). Dimostriamo la (38f) nel caso n=1.

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}kx}\,dx \\
(\text{ integrando per parti }) \quad &= \frac{1}{T}\left(f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}kx}\right)\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\left(-i\frac{2\pi}{T}k\right)e^{-i\frac{2\pi}{T}kx}\,dx \\
&= \frac{1}{T}\left(f\left(\frac{T}{2}\right)e^{-i\pi k} - f\left(-\frac{T}{2}\right)e^{i\pi k}\right) - \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\left(-i\frac{2\pi}{T}k\right)e^{-i\frac{2\pi}{T}kx}\,dx \\
(\text{ periodicità }) \quad &= i\frac{2\pi}{T}k\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}kx}\,dx = i\frac{2\pi}{T}k\,\widehat{f}_k,
\end{aligned}$$

che dimostra la (38f). □

Come già osservato in generale non si può dire nulla sulla convergenza della serie di Fourier. Il seguente risultato fornisce una condizione sufficiente, per la cui dimostrazione si rimanda ai testi avanzati.

Teo 1.39 (Criterio di Dirichelet)**.** *Data una funzione f periodica di periodo T tale che esiste un numero finito di punti*

$$-\frac{T}{2} = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = \frac{T}{2}$$

per cui valgono le seguenti proprietà

i) in ciascun intervallo (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, N$, la funzione $f(x)$ è derivabile e la derivata $f'(x)$ è continua;
ii) per ogni $i = 0, \ldots, N$ esistono finiti

$$\lim_{x\to x_i^-} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_i^-) \qquad \lim_{x\to x_i^+} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_i^+) \tag{42}$$

$$\lim_{x\to x_i^-} f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_i^-) \qquad \lim_{x\to x_i^+} f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_i^+), \tag{43}$$

allora valgono i seguenti fatti:

a) per ogni $x \neq x_0, \ldots, x_N$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k \, e^{i\frac{2\pi}{T}kx} \tag{44a}$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right);$$

b) per ogni $i = 0, 1 \ldots, N$

$$\frac{f(x_i^-) + f(x_i^+)}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{f}_k \, e^{i\frac{2\pi}{T}kx} \tag{44b}$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right).$$

Se, inoltre, $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, cioè

$$f(x_i^-) = f(x_i^+) \qquad i = 0, \ldots, N,$$

allora

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k \, e^{i\frac{2\pi}{T}kx} \qquad x \in \mathbb{R}$$

e la serie converge totalmente su $\mathbb{R}$.

Le funzioni periodiche che soddisfano le condizioni i e ii del precedente teorema sono dette funzioni regolari a tratti.

☡. Poiché $f(x)$ è periodica, si ha che

$$\lim_{x \to (-\frac{T}{2})^-} f(x) = \lim_{x \to (\frac{T}{2})^-} f(x) \qquad \lim_{x \to (-\frac{T}{2})^+} f(x) = \lim_{x \to (\frac{T}{2})^+} f(x),$$

e l'esistenza dei limiti (42) con la scelta $i = 0$ ed $i = N$, cioè $x_0 = -T/2$ ed $x_N = T/2$, implica che

$$f(-(T/2)^-) = f((T/2)^-) \qquad f(-(T/2)^+) = f((T/2)^+).$$

Ne segue che la continuità di $f(x)$ nei punti $x = \pm T/2$ equivale alla condizione

$$f(-(T/2)^+) = f((T/2)^-).$$

Un discorso analogo vale per la derivata prima, per cui

$$f'(-(T/2)^-) = f'((T/2)^-) \qquad f'(-(T/2)^+) = f'((T/2)^+).$$

Se la serie di Fourier converge ad $f(x)$, la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \, e^{i\frac{2\pi}{T}kx}$$

permette di ricostruire il segnale originario a partire dalla successione dei suoi coefficienti di Fourier

$$\ldots, \widehat{f}_{-2}, \widehat{f}_{-1}, \widehat{f}_0, \widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \ldots, \widehat{f}_k, \ldots$$

e la mappa

$$(\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}} \longmapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \, e^{i\frac{2\pi}{T}kx}$$

è l'operatore di ricostruzione. Inoltre, le somme parziali della serie di Fourier

$$\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}_k \, e^{i\frac{2\pi}{T}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)$$

permettono di approssimare $f(x)$ in termini di combinazioni lineari di funzioni trigonometriche.

Nel caso della rampa lineare dell'Esempio 1.37, la funzione $f(x)$ è derivabile con derivata continua nell'intervallo $(-\pi, \pi)$, tuttavia

$$f(-\pi^+) = -\pi \qquad f(\pi^-) = \pi \qquad f'(-\pi^+) = f(\pi^-) = 1.$$

Applicando il criterio di Dirichelet

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} i\frac{(-1)^k}{k}e^{ikx} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Se $x \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$, per periodicità

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} i\frac{2(-1)^k}{k}e^{ikx} = \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) = \begin{cases} x - 2k\pi & -\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \\ 0 & x = \pm\pi + 2k\pi. \end{cases}$$

In Fig. 5 sono riportati i grafici di alcune somme parziali. In corrispondenza dei punti $x = \pi + 2\pi k$ le approssimazioni presentano dei *picchi* di altezza costante. Tale comportamento è noto come fenomeno di Gibbs.

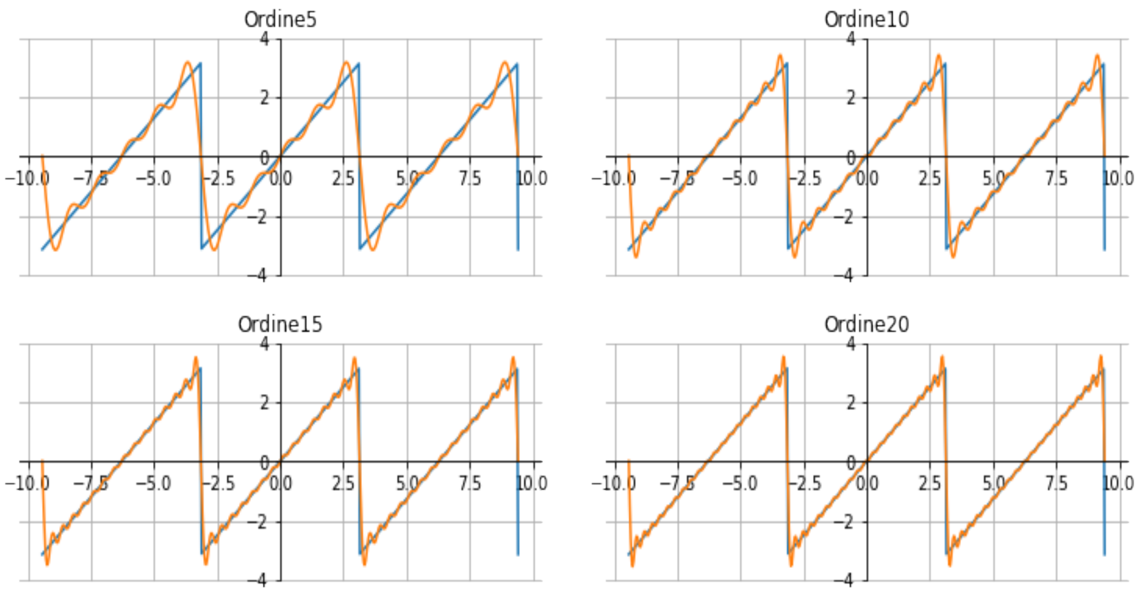

FIGURA 5. Somme parziali della serie di Fourier con $N = 5, 10, 15, 20$.

Riassumiamo nella seguente tabella le formule per il calcolo dei coefficienti di Fourier per una funzione f a valori reali e periodica di periodo T:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} f_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx && k\in\mathbb{Z}, k\neq 0\\
\operatorname{Im} f_k &= -\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx && k\in\mathbb{Z}\\
a_k = 2\operatorname{Re} f_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\,dx && k\in\mathbb{N}\\
b_k = -2\operatorname{Re} f_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\,dx. && k\in\mathbb{N}, k\neq 0.
\end{aligned}$$

Se, inoltre, f è regolare a tratti e continua, vale

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k\, e^{i\frac{2\pi}{T}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right).$$

4.1. **Richiamo sui numeri complessi.** Un numero complesso $z\in\mathbb{C}$ può essere rappresentato in forma algebrica

$$z = a + ib,$$

dove i denota l'unità immaginaria, che soddisfa $i^2=-1$, ed $a,b\in\mathbb{R}$ sono detti

$$\begin{aligned}
a &= \operatorname{Re} z && \text{parte reale}\\
b &= \operatorname{Im} z && \text{parte immaginaria,}
\end{aligned}$$

o, equivalentemente, in forma polare

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta,$$

dove $r\geq 0$ è detto modulo di z ed è denotato anche con $|z|$, mentre $\theta\in\mathbb{R}$ è detto argomento di z ed è definito a meno di multipli di 2π

$$z = r\cos(\theta+2k\pi) + ir\sin(\theta+2k\pi) \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Valgono le seguenti relazioni

$$a = r\cos\theta \qquad\qquad b = r\sin\theta$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \theta = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & a>0,\ b\in\mathbb{R}\\ \arctan\frac{b}{a}+\pi & a<0,\ b>0\\ \arctan\frac{b}{a}-\pi & a<0, b\leq 0\\ \frac{\pi}{2} & a=0,\ b>0\\ -\frac{\pi}{2} & a=0, b\leq 0\end{cases},$$

dove nell'ultima uguaglianza $\theta\in[-\pi,\pi)$.

Il complesso coniugato di $z=a+ib$ è

$$\overline{z} = a - ib.$$

Dati due numeri complessi $z_1=a_1+ib_1, z_2=a_2+ib_2$ la somma è data da

$$z_1+z_2 = (a_1+a_2) + i(b_1+b_2)$$

ed il prodotto è dato da

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

L'identità di Eulero afferma che

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2i}, \tag{45}$$

da cui segue che la forma polare può essere scritta come

$$z = re^{i\theta}.$$

Inoltre, valgono le seguenti proprietà

$$e^{i2\pi k} = 1 \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{46a}$$

$$|e^{i\theta}| = 1 \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{46b}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{46c}$$

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}\, e^{i\theta_2} \qquad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}. \tag{46d}$$