

Calcolo differenziale ed integrale 2 – Prova scritta
4 FEBBRAIO 2021

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti serie

4 (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n)}{n}$

4 (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1) - \log n}{n}$

dire se

- è a valori positivi,
- converge semplicemente,
- converge assolutamente.

4 (3) Determinare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$.

3 **Esercizio 3.** Data la funzione f di periodo 2π definita da

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

determinare il valore della sua serie di Fourier sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

4 **Esercizio 2.** Determinare il polinomio di Taylor centrato in 0 e di ordine 4 di

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + e^x},$$

ricordando che

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + R_2(x).$$

Calcolare inoltre $f^{(4)}(0)$.

Esercizio 4. Sia $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$

2 a) Trovare il dominio di f e specificarne le caratteristiche: dire se è aperto, limitato, connesso.

3 b) Stabilire se f è differenziabile, calcolarne la derivata in $P = (-1/2, 1/2)$ lungo il vettore $v = (5, -1)$. Determinare infine l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(-1/2, 1/2, f(-1/2, 1/2))$.

2 c) Determinare i punti critici di f e stabilire se sono massimi (relativi o assoluti), minimi (relativi o assoluti), o punti di sella.

4 d) Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluti sull'insieme

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{9} = 1\}$$

e in caso affermativo determinarli.