Calcolo differenziale ed integrale 2 – Prova scritta

07 Settembre 2020

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{e^{1/n}-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{10}{n}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(1-\cos(n^2+2))$

dire se:

(1) sono a termini positivi
(2) convergono, divergono, o sono indeterminate
(3) nel caso convergano, se c'è convergenza assoluta.

Esercizio 2. Data la funzione f di periodo 2π definita da

$$f(x) = e^x \text{ se } x \in [-\pi, \pi),$$

calcolare i coefficienti della serie di Fourier e dire se la serie converge totalmente su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Data la funzione $f(x) = 1 - \arctan(x^2)$, determinare il suo polinomio di Taylor di ordine 6 centrato nel punto $x_0 = 0$.

Esercizio 4. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y)}$$

a) Stabilire se f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ e in tal caso calcolare la derivata nel punto $P = (1, \ln 2)$ lungo il vettore $v = (-1, 1)$.
b) Determinare e disegnare l'insieme di livello di f di quota 1.
c) Determinare i punti critici di f e stabilire se sono massimi relativi, minimi relativi o punti sella.
d) Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluti sull'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 = 1\}$ e in caso affermativo determinarli.