Parte 1. Approssimazione di funzioni

1. Formula di Taylor

Il teorema di Lagrange assicura che, data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, se $f(x)$ è derivabile su $[a,b]$, allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a).$$

Questo risultato è generalizzato dal seguente teorema.

Teo 1.1 (Formula di Taylor con il resto di Lagrange)**.** *Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile infinite volte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $c_n \in (a,b)$ tale che*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \\ + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}_{\text{resto di Lagrange}}. \tag{1}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso $n = 2$. Definiamo $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = f(b) - \left(f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2}(b-x)^2 + k\frac{(b-x)^3}{(b-a)^3} \right)$$

dove k è una costante opportuna. Evidentemente $g(b) = 0$ e

$$g(a) = f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + k \right) = 0$$

con la scelta

$$k = f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 \right). \tag{2}$$

Essendo $g(x)$ derivabile, per il teorema di Rolle esiste $c \in (a,b)$ tale che $g'(c) = 0$. La derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = -\left(f'(x) + f''(x)(b-x) - f'(x) + \frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2 - f''(x)(b-x) \right. \\ \left. - 3k\frac{(b-x)^2}{(b-a)^3} \right) = 3\left(k - \frac{f'''(x)}{3!}(b-a)^3 \right)\frac{(b-x)^2}{(b-a)^3}.$$

Allora $g'(c) = 0$ se e solo se

$$k = \frac{f'''(c)}{3!}(b-a)^3.$$

Sostituendo l'espressione di k data dalla (2) si ottiene

$$f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 \right) = \frac{f'''(c)}{6}(b-a)^3,$$

da cui la tesi. □

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'espressione

$$f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \tag{3}$$

fornisce un'approssimazione del valore $f(b)$, tanto migliore quanto più è piccolo il resto

$$\Delta_n = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Tuttavia, dal punto di vista computazionale, la (3) è utile solo se $f(a)$, $f'(a)$,…, $f^{(n)}(a)$ sono facilmente calcolabili.

Esempio 1.2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad x \neq -1,$$

le cui derivate sono

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad \ldots \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}. \tag{4}$$

Con la scelta $a = 0$,

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = -1 \qquad \frac{f''(0)}{2} = 1 \qquad \ldots \qquad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n.$$

Stimiamo $f(1/2) = 2/3 = 0.6666\ldots$, usando la formula di Taylor con $b = 1/2$,

$$\begin{array}{lllll}
n=0 & \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{(1+c_0)^2}\frac{1}{2} & = & 1 + \Delta_0 & |\Delta_0| \leq \frac{1}{2} = 0.5 \\
n=1 & \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{(1+c_1)^3}\frac{1}{4} & = & 0.5 + \Delta_1 & |\Delta_1| \leq \frac{1}{4} = 0.25 \\
n=2 & \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{(1+c_2)^4}\frac{1}{8} & = & 0.75 + \Delta_2 & |\Delta_2| \leq \frac{1}{8} = 0.125 \\
n=3 & \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{(1+c_3)^5}\frac{1}{16} & = & 0.625 + \Delta_3 & |\Delta_3| \leq \frac{1}{16} = 0.0625,
\end{array}$$

dove $c_0, \ldots, c_3 \in (0, 1/2)$. Osserviamo che, al crescere di n, la successione

$$1, \quad 0.5, \quad 0.75, \quad 0.625, \quad \ldots$$

approssima sempre meglio il valore esatto $0.6666\ldots$. Tuttavia, se proviamo a stimare $f(1) = 1/2 = 0.5$ applicando la formula di Taylor con $a = 0$ e $b = 1$,

$$\begin{array}{llll}
n=0 & \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{(1+c_0)^2} & = 1 + \Delta_0 & |\Delta_0| \leq 1 \\
n=1 & \frac{1}{2} = 1 - 1 + \frac{1}{(1+c_1)^3} & = 0 + \Delta_1 & |\Delta_1| \leq 1 \\
n=2 & \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - \frac{1}{(1+c_2)^4} & = 1 + \Delta_2 & |\Delta_2| \leq 1 \\
n=3 & \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{(1+c_3)^5} & = 0 + \Delta_3 & |\Delta_3| \leq 1.
\end{array}$$

Al crescere di n, la successione

$$1, 0, 1, 0, \ldots$$

non approssima il valore $1/2$.

La formula (1) permette di approssimare una funzione sufficientemente regolare con polinomi di grado fissato. Infatti, data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile infinite volte, fissiamo $x_0 \in I$ ed $n \in \mathbb{N}$, per ogni $x \in I$ applicando la formula (1) con $a = x_0$ e $b = x$, allora

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{T_n(x)}$$
$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_{n,x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{T_n(x)} \tag{5}$$

dove il punto $c_{n,x}$ è un numero compreso tra x_0 ed x. Il polinomio

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{6}$$

ha grado al più n ed è detto polinomio di Taylor di ordine n, mentre la differenza

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{x,n})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{7}$$

è detto resto di Lagrange.

Se, inoltre, esiste $M > 0$ tale che

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \qquad \forall x \in I \tag{8}$$

allora vale la maggiorazione

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leq M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{9}$$

Esempio 1.3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad x \in (-1, +\infty),$$

considerata nell'Esempio 1.2, e scegliamo $x_0 = 0$. Dall'equazione (4)

$$\begin{array}{lll}
n = 0 & \dfrac{1}{1+x} = 1 + R_0(x) & |R_0(x)| \leq |x| \\
n = 1 & \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + R_1(x) & |R_1(x)| \leq |x|^2 \\
n = 2 & \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + R_2(x) & |R_2(x)| \leq |x|^3 \\
n = 3 & \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + R_3(x) & |R_3(x)| \leq |x|^4 \\
\quad\dots & & \\
n \in \mathbb{N} & \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x) & |R_n(x)| \leq |x|^{n+1}
\end{array}$$

I grafici di $f(x) = \frac{1}{1+x}$ e delle sue approssimazioni $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$ e $T_4(x)$ sono rappresentati in Fig. 1.

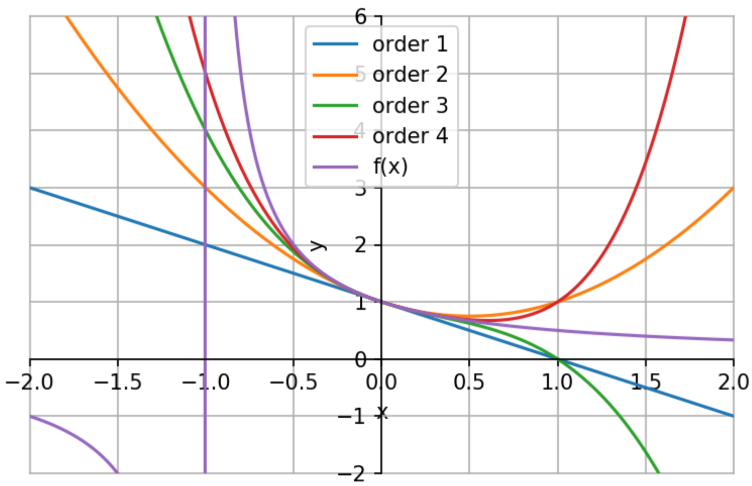

FIGURA 1. Taylor: la funzione $\frac{1}{1+x}$.

Esempio 1.4. Consideriamo la funzione

$$f(x) = e^x \qquad x \in \mathbb{R},$$

poiché

$$f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x \qquad \dots \qquad f^{(n)}(x) = e^x$$

e scegliendo $x_0 = 0$, si ha che

$$\begin{array}{lll}
n = 0 & e^x = 1 + R_0(x) & |R_0(x)| \le |x| \max\{1, 3^x\} \\
n = 1 & e^x = 1 + x + R_1(x) & |R_1(x)| \le \dfrac{|x|^2}{2} \max\{1, 3^x\} \\
n = 2 & e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + R_2(x) & |R_2(x)| \le \dfrac{|x|^3}{6} \max\{1, 3^x\} \\
n = 3 & e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + R_3(x) & |R_3(x)| \le \dfrac{|x|^4}{24} \max\{1, 3^x\} \\
\quad \dots & & \\
n \in \mathbb{N} & e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + R_n(x) & |R_n(x)| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max\{1, 3^x\},
\end{array}$$

dove nella stima dell'errore si è usato che la funzione esponenziale è crescente ed il numero di Nepero $e < 3$, per cui

$$\begin{cases} e^{c_{n,x}} < e^0 = 1 & \text{se } x < c_{n,x} < 0 \\ e^{c_{n,x}} < e^3 < 3^x & \text{se } 0 < c_{n,x} < x \end{cases} = \max\{1, 3^x\}.$$

I grafici di e^x e delle sue approssimazioni $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$ e $T_4(x)$ sono rappresentati in Fig. 2.

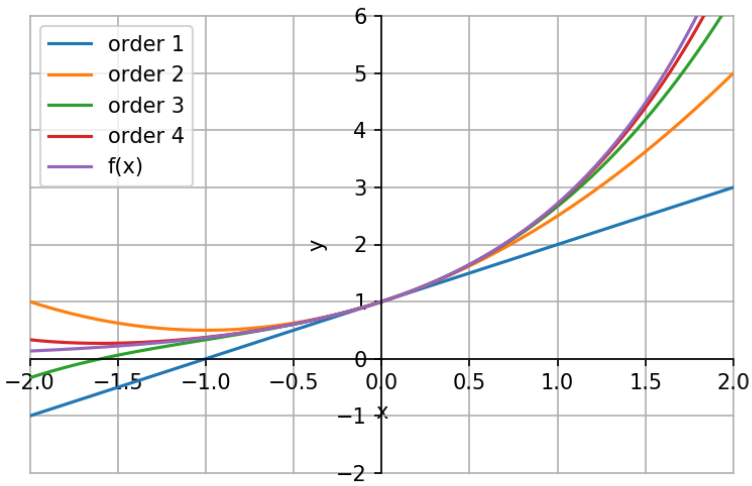

FIGURA 2. Taylor: la funzione e^x.

Se scegliamo $x = 1$, al crescere di n, la successione $(T_n(1))_n$

$$\begin{aligned}
n &= 0 \quad 1 && = 1\\
n &= 1 \quad 2 && = 1 + 1\\
n &= 2 \quad 2.5 && = 1 + 1 + \frac{1}{2}\\
n &= 3 \quad 2.6666\ldots && = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\\
n &= 4 \quad 2.7083\ldots && = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\\
n &= 5 \quad 2.7166\ldots && = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}\\
n &= 6 \quad 2.71805\ldots && = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}
\end{aligned}$$

approssima il valore $f(1) = e = 2.718282\ldots$. Usando la (1), l'errore commesso con l'approssimazione $n = 6$ è

$$0 < R_6(1) = f(1) - T_6(1) = \frac{e^c}{7!} \leq \frac{3}{7!} = 0.0005952 \simeq 5\,10^{-4},$$

poiché $0 < c < 1$.

Dalla (7), definendo la funzione

$$\epsilon(x - x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c_{x,n})}{(n+1)!}(x - x_0),$$

che per costruzione è una funzione infinitesima, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \epsilon(x - x_0) = 0,$$

il resto di Lagrange si può esprimere nella forma

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \epsilon(x - x_0)\,(x - x_0)^n, \tag{10}$$

detto resto di Peano. La precedente equazione mostra che il resto $f(x) - T_n(x)$ tende a zero più velocemente di $(x - x_0)^n$ per x che tende a x_0. Questa proprietà definisce univocamente il polinomio di Taylor, come mostra il seguente risultato.

Teo 1.5. *Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile infinite volte, fissati $x_0 \in I$ ed $n \in \mathbb{N}$, se vale la relazione*

$$f(x) = \underbrace{(a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n)}_{\text{polinomio}} + \underbrace{\epsilon(x - x_0)\,(x - x_0)^n}_{\text{resto}}, \tag{11}$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e la funzione $\epsilon(x - x_0)$ tende a zero per x che tende a x_0, allora

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{12}$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $n = 2$. Posto

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2,$$

dalla formula (6) e dall'ipotesi (11)

$$f(x) = T_2(x) + R_2(x) = P(x) + \epsilon(x - x_0)\,(x - x_0)^2,$$

da cui

$$T_2(x) - P(x) = \epsilon(x - x_0)\,(x - x_0)^2 - R_2(x) = \epsilon(x - x_0)\,(x - x_0)^2,$$

dove si è usato la (10) che assicura che $R_2(x)$ va a zero più velocemente di $(x - x_0)^2$. La funzione $T_2(x) - P(x)$ è il polinomio di grado due

$$(f(x_0) - a_0) + (f'(x_0) - a_1)(x - x_0) + (\frac{f''(x_0)}{2} - a_2)(x - x_0)^2.$$

Ne segue che

$$(f(x_0)-a_0)+(f'(x_0)-a_1)(x-x_0)+(\frac{f''(x_0)}{2}-a_2)(x-x_0)^2=\epsilon(x-x_0)\,(x-x_0)^2. \quad (13)$$

Facendo il limite per x che tende a x_0 si ottiene che $a_0 = f(x_0)$ e, quindi, sostituendo in (13),

$$(f'(x_0)-a_1)(x-x_0)+(\frac{f''(x_0)}{2}-a_2)(x-x_0)^2=\epsilon(x-x_0)\,(x-x_0)^2.$$

Dividendo per $(x-x_0)$ e facendo il limite per x che tende a x_0 si ottiene che $a_1 = f'(x_0)$. Ripetendo ancora una volta la procedura, si deduce che $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$. □

Il risulta precedente assicura che se $f(x)$ può essere scritta come somma di un polinomio di grado al più n

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

ed un resto

$$\epsilon(x-x_0)\,(x-x_0)^n \qquad \text{dove} \qquad \lim_{x\to x_0} \epsilon(x-x_0) = 0,$$

che va a zero più velocemente di $(x-x_0)^n$ per x che tende a x_0, allora necessariamente $P(x)$ è è il polinomio di Taylor di ordine n definito dalla (6).

Esempio 1.6. Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = e^x/(1-x)$.

Dall'Esempio 1.3

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \epsilon(x)\,x^2$$

da cui, sostituendo x con $-x$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \epsilon(-x)\,x^2 = 1 + x + x^2 + \epsilon(x)\,x^2,$$

poiché $\epsilon(-x)$ è ancora una funzione infinitesima. Dall'Esempio 1.4

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \epsilon(x)\,x^2.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{1-x} &= \left(1+x+x^2+\epsilon(x)\,x^2\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\epsilon(x)\,x^2\right) \\
&= 1+x+x^2+\epsilon(x)\,x^2+ \\
&\quad + x + x^2 + \underbrace{x^3}_{\epsilon(x)\,x^2} + \underbrace{\epsilon(x)\,x^3}_{\epsilon(x)\,x^2} + \\
&\quad + \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{x^3}{2}}_{\epsilon(x)\,x^2} + \underbrace{\frac{x^4}{2}}_{\epsilon(x)\,x^2} + \underbrace{\epsilon(x)\,\frac{x^4}{2}}_{\epsilon(x)\,x^2} + \\
&\quad + \underbrace{\left(1+x+x^2+\epsilon(x)\,x^2\right)\epsilon(x)x^2}_{\epsilon(x)\,x^2} \\
&= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \epsilon(x)x^2 = T_n(x) + R_n(x),
\end{aligned}$$

allora

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 2 \qquad f''(0) = 2\frac{5}{2} = 5.$$

Polinomi di Taylor di centro $x_0 = 0$ di alcune funzioni elementari.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R_n(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_n(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x) \qquad \alpha \notin \mathbb{N}$$

$$(1-x)^{-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k-1}{k-1} x^j + R_n(x) \qquad k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$$