Calculus 2 – Prova scritta
6 Giugno 2022

Esercizio 1. Dire se le seguenti serie convergono semplicemente e/o assolutamente:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + (-1)^n}{n^2 + \cos(n)}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\log(2n)}\right)$.

Calcolare poi il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza puntuale della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + 3^n)x^n}{n}.$$

Esercizio 2. Data $f(x) = \sin(x) - \log(1+x)\cos(x)$, determinare il polinomio di McLaurin di ordine 5 di f e calcolare $f^{(5)}(0)$.

Esercizio 3. Sia f la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in [-2, 1); \\ 5 - 3x & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

(1) Disegnare il grafico di f.
(2) Calcolare i coefficienti di Fourier b_k per $k \in \mathbb{Z}$.
(3) Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[-2, 2]$.

Esercizio 4. Sia $f(x, y) = xy(x + y - 1)$.

(1) Stabilire se f è differenziabile sul suo dominio, determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(-1, -1, f(-1, -1))$ e calcolare la derivata direzionale di f in $(-1, -1)$ lungo la direzione $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
(2) Stabilire quali sono i punti critici di f sul suo dominio e classificarli.
(3) Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto di f sull'insieme

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$