Es 1:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{5} - 1\right)$

Oss che $\sqrt[n]{5} - 1 = e^{\frac{1}{n}\lg 5} - 1 > 0$ essendo $\frac{1}{n}\lg 5 > 0 \quad \forall n \geq 1$.

$\Rightarrow$ è una serie a segni alterni perché del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n := \sqrt[n]{5} - 1 > 0 \ \forall n$

Vediamo se possiamo applicare il criterio di Leibnitz per avere la conv. semplice della serie.

- $(a_n)_n$ è decrescente perché $n \mapsto \frac{1}{n}$ è decrescente mentre l'esponenziale è crescente.

- $\lim_n \left(\sqrt[n]{5} - 1\right) = 0$ perché $e^{\frac{1}{n}\lg 5} \to e^0 = 1$.

$\Rightarrow$ la serie converge semplicemente.

Ora studiamo la conv. assoluta, ossia la conv. della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{5} - 1\right).$$

Sappiamo che $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \sqrt[n]{5} - 1 \sim \frac{1}{n} \lg 5 \sim \frac{1}{n}$.

Visto che $\frac{1}{n}$ é termine generale di una serie divergente, per il criterio del confronto asintotico possiamo dire che la serie di partenza <u>non</u> converge assolutamente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^2 - n^2 \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

Sia $a_n := n^2 - n^2 \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right) \quad \forall n \geq 1$

Visto che $\cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, si ha che

$1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq 0 \quad \forall n \geq 1$, e quindi $a_n \geq 0$.

$\Rightarrow$ é una serie a termini positivi.

Ricordiamo che $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x) x^2$, da cui $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$.

Ne segue che $n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim n^2\left(\left(\frac{1}{n^2}\right)^2\frac{1}{2}\right)$,

cioè $\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}$, che è termine generale di una serie convergente (serie armonica generaliz. con $\alpha = 2$).

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto asintotico si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^2 - n^2\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ converge semplicemente (e assolutamente, essendo a termini positivi).

c) $$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n-1)!}x^{n-1} \underset{n-1=k}{=} \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k+2}}{k!}x^k.$$

É una serie di potenze con

$$a_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \dfrac{2^{k+2}}{k!} & k \geq 1 \end{cases}$$

Si può risolvere in 2 modi

<u>I modo</u> : Notiamo che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k+2}}{k!} x^k = 2^2 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} x^k = 2^2 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2x)^k}{k!} =$$

$$= 2^2 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x)^k}{k!} - 1 \right) . \quad (*)$$

Ma $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$ è una serie esponenziale

$\Rightarrow$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = e^{2x}$.

Pertanto anche $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n-1)^{n-1}} x^{n-1}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

($\Rightarrow$ ha raggio di conv. $\rho = +\infty$) e si ha

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n-1)!} x^{n-1} = 4 \left(e^{2x} - 1 \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$(*)$

<u>II modo</u> : Calcoliamo il raggio di conv. della

serie con il criterio del rapporto.

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{\frac{2^{n+3}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n+2}}{n!}} = \lim_n 2 \frac{\cancel{n!}}{(n+1)!} =$$

$$(n+1)! = (n+1)\cdot \cancel{n!}$$

$$= \lim_n \frac{2}{n+1} = 0.$$

Pertanto $\rho = +\infty$, cioè l'insieme di conv. della serie è tutto $\mathbb{R}$.

Es 2 : $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + e^y + 2xy - 1$

a) Basta applicare il Teorema di Dini con $P_0 = (0,0)$.
Guardiamo se sono verificate le ipotesi

- $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ perché somma di un'esponenziale e di una funzione polinomiale;

- $f(0,0) = e^0 - 1 = 0$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^y + 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ per il Teorema di Dini $\exists$ I, J intervalli aperti contenenti 0 ed $\exists!\, g: I \to J$ di classe C^1 su I t.c. $y = g(x)$ è soluzione di $f(x,y) = 0$.

b) Per il Teor. di Dini si ha anche

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, g(x))}{\frac{\partial}{\partial y} f(x, g(x))}.$$

Inoltre $g \in C^2(I)$ perché $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)}{\frac{\partial}{\partial y} f(0,0)}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x + 2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$\Rightarrow g'(0) = 0$.

Quindi il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 di g sarà

$$T_2 g(x) = g''(0)\frac{x^2}{2}.$$

Per calcolare $g''(0)$ uso la formula

$$g''(0) = - \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} .$$

che vale perché $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4 \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -4$,

da cui $g''(0) = 4$.

Pertanto $T_2 g(x) = 4\frac{x^2}{2} = 2x^2$.

<u>Es 3</u>: $g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ -2 & x \in [0, \pi) \end{cases}$

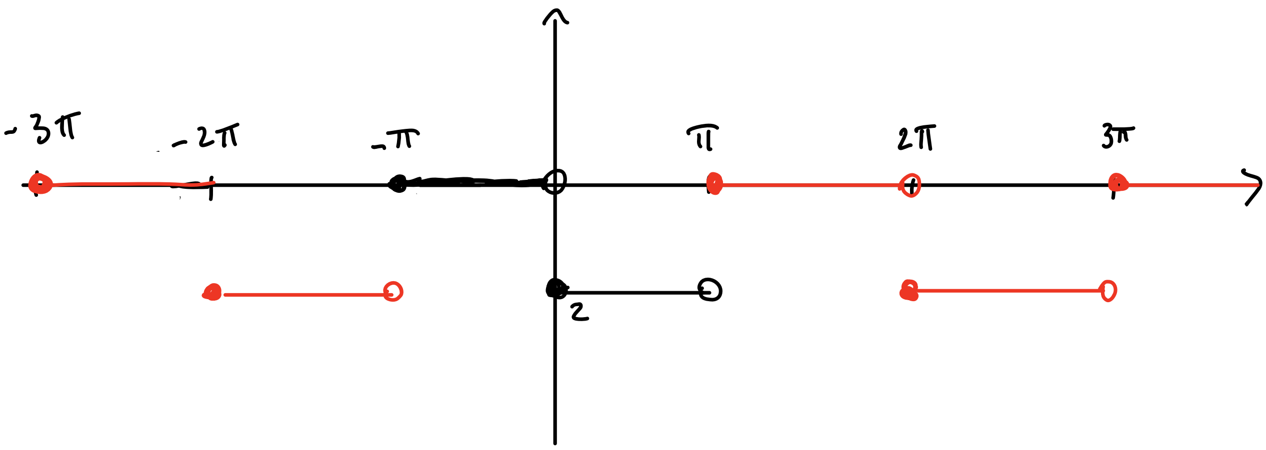
1) Ottengo f estendendo g per periodicità (periodo $T = 2\pi$) a tutto $\mathbb{R}$, cioè ponendo

$$f(x) = g(x - 2\pi k) \quad \text{se } x \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

In questo caso quindi si ha

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi) \\ -2 & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi) \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$



2) $$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(x)\, e^{-i \frac{2\pi}{T} kx}\, dx \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} -2\, e^{-ikx}\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx.$$

Se $k=0$ si ha $\hat{f}_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = -1$.

se $k \neq 0$, $\hat{f}_k = \frac{1}{\pi} \left. \frac{e^{-ikx}}{ik} \right|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi i k} \left(e^{-ik\pi} - 1 \right)$.

Ma $e^{-ik\pi} = \cos(k\pi) - \underbrace{i \operatorname{sen}(k\pi)}_{= 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}} = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

$\Rightarrow \hat{f}_k = \frac{1}{\pi i k} \left((-1)^k - 1 \right) \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

3) Notiamo che, essendo costante a tratti, f è continua e derivabile con cont. su $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

Inoltre $\lim_{x \to -\pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = -2$

periodicità

$$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = \lim_{x \to -\pi^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -2 .$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0) \\ 0 & x \in (0, \pi) \end{cases} \quad , \quad \lim_{x \to -\pi^\pm} f(x) = \lim_{x \to \pi^\pm} f(x) =$$

$$= \lim_{x \to 0^\pm} f(x) = 0$$

$\to$ per il Teor. di Dirichlet la Trasformata di Fourier $\mathcal{F}f$ di f converge su tutto $\mathbb{R}$ e si ha

$$\mathcal{F}f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ -1 & x \in \{\pi, -\pi, 0\} \end{cases} .$$

<u>ES 4</u>: $f(x,y) = x^2 + 5y^2 - \frac{x}{2}$.

1) f è diff. su $\mathbb{R}^2$ perché è una funzione polinomiale

2) Visto che f è diff in ogni punto si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \langle \nabla f(P_0), v \rangle .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 10y$$

$$\Rightarrow \nabla f(P_0) = \nabla f\left(3, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 5\right). \text{ da cui}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \left\langle \left(\frac{11}{2}, 5\right), (-1, 2) \right\rangle = -\frac{11}{2} + 10 = \frac{9}{2}.$$

L'eq. del piano tg al grafico di f in $(P_0, f(P_0))$ è

$z = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0)$, dove

(x_0, y_0) sono le coordinate di P_0.

Qui si ha:

$$z = f\left(3, \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{2}(x-3) + 5\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$z = 9 + 5 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{11}{2}(x-3) + 5\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$z = \frac{35}{4} + \frac{11}{2}(x-3) + 5\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

3) Gli estremi relativi di f soddisfano $\nabla f(x,y) = 0$, cioè

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{2} = 0 \\ 10y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'unico punto candidato ad essere un estremo relativo è $P = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

Per vedere se è effettivamente un estremo relativo usiamo il metodo della matrice hessiana.

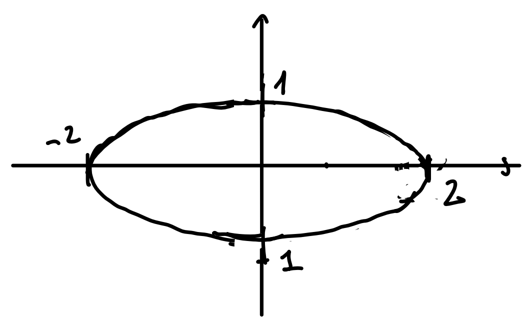
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 10$$

$$\Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = Hf\left(\frac{1}{4}, 0\right).$$

Visto che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{4}, 0\right) > 0$ e $\det Hf\left(\frac{1}{4}, 0\right) > 0$, si ha che $P = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ è un pto di minimo relativo per f.

4) Sia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + 4y^2 = 4\} = g^{-1}(\{0\})$ con $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$.

Notiamo che $x^2 + 4y^2 = 4$ si può riscrivere come $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, e quindi è l'ellisse in figura.



Pertanto C è chiuso e limitato.

Visto che f è continua, grazie al Teor. di Weierstrass possiamo quindi dire che f ha max e min assoluti su C. Per determinare tali punti usiamo il Teor. dei moltiplicatori di Lagrange (possiamo perché $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$). I candidati ad essere pti di max/min assoluto di f su C devono soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla g(x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Ma $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y \quad \Rightarrow \nabla g(x,y) = (0,0)$

solo se $(x,y) = (0,0)$, che però non appartiene a C.

Quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ \left(2x - \frac{1}{2}\right) 8y = 10y \cdot 2x \end{cases}$$

Dividendo per 4 ambo i membri della II equazione:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ 4xy - y = 5xy \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ xy + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y(x+1) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow y = 0 \\ \searrow x = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 + 4y^2 = 4 \\ x = -1 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

I candidati ad essere estremi assoluti sono quindi:

$$P_1 = (2, 0), \quad P_2 = (-2, 0), \quad P_3 = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_4 = \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ma $f(P_1) = 4 - 1 = 3$ $\qquad f(P_2) = 4 + 1 = 5$

$$f(P_3) = f(P_4) = 1 + 5 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{15}{4} + \frac{1}{2} = \frac{21}{4} > 5$$

$\Rightarrow$ P_1 é punto di min assoluto per f su C mentre P_3 e P_4 sono punti di max assoluto per f su C.