Calcolo differenziale ed integrale 2 – Prova scritta
4 Luglio 2019

Esercizio 1.

a) Stabilire se la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \tan\left(\frac{2}{n}\right)$ converge semplicemente e/o assolutamente. [5 punti]

b) Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\sqrt{n}+n(x-2)}$ converge puntualmente. [3 punti]

Soluzione: a) Notiamo che $0 < 2/n < \pi/2$ se $n \geq 2$, quindi la successione $a_n = \tan(2/n)$ è ben definita, e si ha $a_n > 0$ per ogni $n \geq 2$. Pertanto la serie considerata è a segni alterni. Inoltre a_n è decrescente, dal momento che $2/n$ è decrescente e la tangente è strettamente crescente su $[0, \pi/2[$. Infine, $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Grazie al criterio di Leibnitz concludiamo quindi che la serie converge puntualmente. Per la convergenza assoluta dobbiamo studiare la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \tan\left(\frac{2}{n}\right)$. Notiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(2/n)}{2/n} = \frac{\sin(2/n)}{2/n}\frac{1}{\cos(2/n)} = 1.$$

Grazie il criterio del confronto asintotico, deduciamo che la serie considerata ha lo stesso carattere della serie armonica, ed è quindi divergente. La serie dunque non converge assolutamente.

b) Possiamo riscrivere la serie considerata come:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\sqrt{n}} \left(e^{(x-2)}\right)^n,$$

e ponendo $e^{x-2} = z$ (notiamo che $z > 0$) possiamo ricondurci allo studio della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\sqrt{n}} z^n.$$

Per determinare il raggio di convergenza utilizziamo il criterio della radice e calcoliamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left|e^{\sqrt{n}}\right|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left(e^{\sqrt{n}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

La serie converge quindi puntualmente per tutti i numeri reali z tali che $|z| < 1$ e quindi in particolare per $z \in]0, 1[$. Resta da verificare cosa succede per $z = 1$. In questo caso abbiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\sqrt{n}},$$

che non converge perché non è infinitesima. Ricordando che $e^{x-2} = z$ deduciamo che la serie di partenza è convergente puntualmente sull'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |e^{x-2}| < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 < 0\} =]-\infty, 2[$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \frac{x}{1+x} + e^{x^2}$.

a) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato in 0. Calcolare poi $f^{(6)}(0)$. [4 punti]

b) Calcolare i coefficienti di Fourier $\hat{g_1}$ e $\hat{g_{-1}}$ della funzione periodica di periodo 2 definita da $g(x) = \sin(\pi x)$ per $x \in (-1, 1]$.
Calcolare il valore della trasformata di Fourier di g nell'intervallo $[-1, 1]$. [4 punti]

Soluzione: *a*) Dagli gli sviluppi di MacLaurin

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + R_3(x)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

si trova

$$f(x) = x\left(1 - x + x^2 - x^3\right) + 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + R_4(x) = 1 + x + x^3 - \frac{x^4}{2} + R_4(x).$$

Quindi $T_4 f(x) = 1 + x + x^3 - \frac{x^4}{2}$.
Si ha $f^{(6)}(0) = a_6\, 6!$, dove a_6 denota il coefficiente di x^6 nello sviluppo di Taylor f. Tale coefficiente è dato da $b_5 + c_3$, con b_5 coefficiente di x^5 nello sviluppo di Taylor di $\frac{1}{1+x}$, e c_3 coefficiente di x^3 nello sviluppo di Taylor dell'esponenziale.
Essendo $b_5 = (-1)^5 = -1$ e $c_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$, si ottiene

$$f^{(6)}(0) = \left(-1 + \frac{1}{6}\right) 6! = -\frac{5}{6}\, 6! = -5 \cdot 5!$$

b) Visto che g è dispari, tutti gli a_k sono nulli e $\hat{g}_{-k} = -\hat{g}_k$, con $\hat{g}_k = -\mathrm{i}\frac{b_k}{2}$ per ogni $k > 0$. Posto $k = 1$, dalla periodicità di f, si ha

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(\pi x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sin^2(\pi x)\,dx = 2\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{\pi}\,dt.$$

Ricordando che

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x - \cos x \sin x}{2} + c,$$

si trova

$$b_1 = \frac{t - \cos t \sin t}{\pi}\Big|_0^{\pi} = 1,$$

da cui $\hat{g}_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}$ e $\hat{g}_{-1} = \frac{\mathrm{i}}{2}$.

c) Essendo g regolare (in particolare continua), dal teorema di Dirichlet segue che $\mathcal{F}(g)(x) = g(x)$ per ogni $x \in [-1, 1]$.

Esercizio 3. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x^2 + y^2)$$

a) Stabilire se f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ e in tal caso calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0)$ lungo il vettore $v = (4, -2)$ nel punto $P_0 = (1, 1)$. Calcolare poi il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, f(1, 1))$. [5 punti]
b) Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 9\}$$

e stabilire se è aperto, chiuso, limitato o connesso. Determinare poi l'insieme $\mathring{D}$ dei punti interni di D, e l'insieme $C := \partial D$ dei suoi punti di frontiera. [3 punti]
c) Calcolate, se esistono, i punti di massimo e minimo vincolati di f su C. [4 punti]
d) Determinate i punti di massimo e minimo assoluti di f su D. [4 punti]

Soluzione: Essendo f una funzione polinomiale, essa è di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, quindi è differenziabile e il gradiente esiste in ogni punto. Facendo le derivate parziali otteniamo:

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 8x, 4y^3 - 8y).$$

Siccome f è differenziabile, vale la formula del gradiente, da cui deriviamo:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \langle \nabla f(1,1), (4,-2)\rangle = -16 + 8 = -8.$$

L'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,1,f(1,1)) = (1,1,-6)$ è
$z = -6 - 4(x-1) - 4(y-1)$, cioè $4x + 4y + z - 2 = 0$.

b) D è un insieme chiuso, essendo $D = h^{-1}((-\infty, 9]) = h^{-1}([0,9])$ con $h(x,y) = x^2 + y^2$ continua. Inoltre D è connesso e $\|P\|^2 = x^2 + y^2 \leq 9$ per ogni $P = (x,y) \in D$, e quindi D è limitato (è un cerchio di centro O e raggio 3).
Si ha $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 9\}$ e $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 9\}$.

c) Poiché f e g sono funzioni di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ per ogni $(x,y) \in C$, possiamo utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per trovare gli estremi vincolati di f su C. Tali estremi devono verificare

$$\det \begin{bmatrix} 4x^3 - 8x & 4y^3 - 8y \\ 2x & 2y \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 9,$$

cioè

$$\begin{cases} 8xy(x^2 - 2) = 8xy(y^2 - 2) \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Quindi otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = \pm y \\ y = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases},$$

cioè i punti candidati ad essere massimi e minimi vincolati sono $P_1 = (0,3)$, $P_2 = (0,-3)$, $P_3 = (3,0)$ $P_4 = (-3,0)$, $P_5 = (\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$, $P_6 = (\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$, $P_7 = (-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$ e $P_8 = (-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$. Si ha

$$f(0, \pm 3) = 45 = f(\pm 3, 0), \qquad f(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \pm\frac{3}{\sqrt{2}}) = \frac{9}{2},$$

da cui $P_5,\ P_6,\ P_7,\ P_8$ sono punti di minimo vincolato di f su C, mentre $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ sono punti di massimo vincolato.

d) Massimo e minimo assoluto di f su D esistono per il teorema di Weierstrass. Abbiamo già determinato gli estremi relativi di f sulla frontiera di D. Calcoliamo quindi gli estremi relativi di f nell'interno di tale insieme.
Tali punti soddisfano $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 8x, 4y^3 - 8y) = (0,0)$, ovvero $(x(x^2-2), y(y^2-2)) = (0,0)$. Pertanto i punti critici sono $Q_0 = (0,0)$, $Q_1 = (0,\sqrt{2})$, $Q_2 = (0,-\sqrt{2})$, $Q_3 = (\sqrt{2},0)$, $Q_4 = (-\sqrt{2},0)$, $Q_5 = (\sqrt{2},\sqrt{2})$, $Q_6 = (\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $Q_7 = (-\sqrt{2},\sqrt{2})$ e $Q_8 = (-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Per classificare i punti critici possiamo utilizzare il criterio della matrice Hessiana. Risulta

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 8 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 8 \end{bmatrix},$$

da cui

$$Hf(Q_0) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_0 \text{ pto di max rel.} \qquad Hf\,(Q_1) = Hf\,(Q_2) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_1, Q_2 \text{ pti. di sella}$$

$$Hf\,(Q_3) = Hf\,(Q_4) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_3, Q_4 \text{ punti di sella}$$

$$Hf\,(Q_5) = Hf\,(Q_6) = Hf\,(Q_7) = Hf\,(Q_8) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_5, Q_6, Q_7, Q_8 \text{ punti di min rel.}$$

con

$$f(Q_0) = 0, \quad f(Q_5) = f(Q_6) = f(Q_7) = f(Q_8) = -8.$$

Confrontando questi valori con quelli di f assunti su $P_1, \ldots, P_8$ possiamo concludere che Q_5, Q_6, Q_7, Q_8 sono punti di minimo assoluto di f su D, mentre $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ sono punti di minimo assoluto di f su D.

In realtà, se si vogliono determinare solo i punti di massimo e minimo assoluti di f (e non anche quelli relativi), non è necessario usare il metodo dell'Hessiana: visto che $Q_0, \ldots, Q_8$ sono tutti e soli i punti critici di f sull'interno di D, basta confrontare direttamente i valori assunti da f sui tali punti con quelli assunti da f su $P_1, \ldots, P_8$.