5. Serie di potenze

Le serie di potenze sono un caso particolare di serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ in cui i termini generali $f_n(x)$ sono monomi di grado n.

Def. 1.40. Data una successione di numeri reali

$$a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots \qquad n \in \mathbb{N}$$

la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

si chiama serie di potenze di centro 0.

. Nelle serie di potenze si usa la convenzione $0^0 = 1$, mentre $0^n = 0$ per ogni $n \geq 1$.

Il seguente teorema caratterizza l'insieme di convergenza di una serie di potenze.

Teo 1.41 (Raggio di convergenza)**.** *Data una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

esiste $\rho \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, detto raggio di convergenza, tale che

a) se $\rho = 0$, allora la serie di potenze converge solo in 0;
b) se $0 < \rho < +\infty$, la serie di potenze converge assolutamente su $(-\rho, \rho)$, non converge puntualmente su $(-\infty, \rho) \cup (\rho, +\infty)$, converge totalmente su $[-R, R]$ per ogni $0 < R < \rho$;
c) se $\rho = +\infty$, la serie di potenze converge assolutamente su $\mathbb{R}$ e converge totalmente su $[-R, R]$ per ogni $R > 0$.

La dimostrazione del teorema è basata sul seguente risultato.

Lemma 1.42. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ una serie di potenze che converge puntualmente in $y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$, allora la serie di potenze converge totalmente su $[-R, R]$ per ogni $0 < R < |y|$.*

Dimostrazione. Poiché la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ è convergente, la condizione necessaria di Cauchy assicura che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n\, y^n = 0.$$

Allora la successione $(a_n\, y^n)_{n \geq 0}$ è limitata per cui esiste $M > 0$ tale che

$$|a_n\, y^n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{47}$$

Sia $0 < R < |y|$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [-R, R]$

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= |a_n||x|^n \\ &\leq |a_n| R^n \\ &= |a_n y|^n \left(\frac{R}{|y|}\right)^n \\ (\text{ Eq. } (47)\ ) &\leq M \left(\frac{R}{|y|}\right)^n \end{aligned}$$

e, quindi,

$$\sup_{x \in [-R, R]} |a_n x^n| \leq M \left(\frac{R}{|y|}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} M \left(\frac{R}{|y|}\right)^n$ è convergente poiché è proporzionale alle serie geometrica di ragione $q = \frac{R}{|y|}$ con $0 < q < 1$. Ne segue che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ converge totalmente in $[-R, R]$. $\square$

Dimostrazione Teo. 1.41. Definiamo

$$\rho = \sup\{|x| \in [0+\infty) \mid \text{ la serie numerica } \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \text{ converge}\}.$$

Il fatto che la serie di potenza converga sempre per $x=0$ implica che $\rho \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$.

Supponiamo, ad esempio, che $0 < \rho < +\infty$. Per definizione di estremo superiore, se la serie di potenze converge in $x \in \mathbb{R}$, allora $|x| \leq \rho$ e, quindi, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ non converge in $(-\infty,-\rho) \cup (\rho,+\infty)$.

Dato $0 < R < \rho$, dimostriamo che la serie converge totalmente su $[-R,R]$. La definizione di ρ come estremo superiore implica che esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $R < |y| \leq \rho$ e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, y^n$ converge. Per il lemma 1.42, la serie converge totalmente su $[-R,R]$ e, quindi, assolutamente su $[-R,R]$.
Dimostriamo ora la convergenza assoluta in $(-\rho,\rho)$. Sia $x_0 \in (\rho,\rho)$, allora esiste $0 < R < \rho$ tale che $x_0 \in [-R,R]$ e, per quanto dimostrato sopra, la serie converge assolutamente in x_0. □

Il precedente teorema implica che l'insieme di convergenza puntuale di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ con raggio di convergenza $0 < \rho < +\infty$ è un intervallo I tale che

$$(-\rho,\rho) \subset I \subset [-\rho,\rho],$$

ma, in generale, non si può dire nulla sugli estremi $\pm\rho$. Inoltre, se $x \neq \pm\rho$ la convergenza puntuale equivale alla convergenza assoluta.

Esempio 1.43. Sia ρ il raggio di convergenza ed I l'insieme di convergenza puntuale delle seguenti serie di potenze

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=0}^{\infty} x^n & \Rightarrow \quad \rho = 1 & I = (-1,1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n & \Rightarrow \quad \rho = 1 & I = (-1,1] \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n & \Rightarrow \quad \rho = 1 & I = [-1,1]\ . \end{array}$$

Infatti, la prima è la serie geometrica, la seconda è stata discussa nell'esempio 1.29, la terza converge in $[-1,1]$ poiché

$$\sup_{x\in[-1,1]} |\frac{1}{n^2} x^n| \leq \frac{1}{n^2} \qquad n \geq 1,$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente. Se $|x| \geq 1$, poiché $\lim_{n\to+\infty} |\frac{1}{n^2} x^n| = +\infty$, la serie non converge.

I seguenti corollari caratterizzano il raggio di convergenza.

Cor. 1.44. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ una serie di potenze tale che $a_n \neq 0$ per ogni $n \geq 1$. Se esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\},$$

allora

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \ell \in (0,+\infty) \\ 0 & \ell = +\infty \end{cases}.$$

Cor. 1.45. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ una serie di potenze tale che esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\},$$

allora

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \ell \in (0,+\infty) \\ 0 & \ell = +\infty \end{cases}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione dei due corollari è simile. Riportiamo la seconda nel caso $\ell \in (0, +\infty)$. Dato $x \in \mathbb{R}$, per ipotesi

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \ell |x|.$$

Il criterio della radice implica che la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ converge se $\ell |x| < 1$ e diverge se $\ell |x| > 1$. La definizione di ρ ed il fatto che la convergenza puntuale equivale a quella assoluta (se $x \neq \pm\rho$) implicano che $\rho = \frac{1}{\ell}$. $\square$

. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$ ha raggio di convergenza $\rho = \frac{1}{2}$ poiché è la serie geometrica di ragione $q = (2x)^2$. Tuttavia non si possono applicare i precedenti corollari. Infatti, la successione $(a_n)_n$ che definisce la serie di potenze è

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & 1 \\ a_1 & = & 0 \\ a_2 & = & 4 \\ a_3 & = & 0 \\ \ldots & = & \ldots \\ a_{2n} & = & 4^n \\ a_{2n+1} & = & 0 \\ \ldots & = & \ldots \end{array},$$

per cui non esiste $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ e si osservi che $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{4^n} = 4$.

Il seguente risultato caratterizza le proprietà della funzione somma.

Prop. 1.46. *Data una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

con raggio di convergenza $\rho > 0$ ed insieme di convergenza I,

a) la funzione somma

$$f : I \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$$

è continua su I;

b) la funzione f ammette primitiva sull'intervallo I data da

$$\int f(x) \, dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1}}_{\text{serie integrata}} + \text{constante}, \tag{48a}$$

dove la serie integrata ha raggio di convergenza ρ;

c) la funzione f è derivabile su $(-\rho, \rho)$ e vale

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \right)' = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}}_{\text{serie derivata}} \qquad x \in (\rho, \rho), \tag{48b}$$

dove la serie derivata ha raggio di convergenza ρ.

Dimostrazione. La dimostrazione è divisa in cinque passi.

Passo 1. Proviamo che la serie *derivata* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ ha raggio di convergenza ρ. Sia R il raggio di convergenza della serie derivata. Dimostriamo che $R \leq \rho$. Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < R$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ converge assolutamente. Inoltre, poiché

$$|a_n x^n| = \frac{|x|}{n} |a_n n x^{n-1}| \qquad n \geq 1$$

e $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n} = 0$ il criterio del confronto asintotico implica che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ converge assolutamente, per cui $\rho \geq |x|$ e, per l'arbitrarietà di $x \in (-R, R)$, $\rho \geq R$.
Dimostriamo che $\rho \leq R$. Sia $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \rho$, e $y \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < y < \rho$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ converge assolutamente. Inoltre, poiché

$$|a_n n x^{n-1}| = \frac{n|x|^{n-1}}{y^n} |a_n y^n| \qquad n \geq 1$$

e $\lim_{n\to+\infty} \frac{n|x|^{n-1}}{y^n} = 0$ (essendo $0 \leq \frac{|x|}{y} < 1$) il criterio del confronto asintotico implica che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ converge assolutamente, per cui $R \geq |x|$ e, per l'arbitrarietà di $x \in (-\rho, \rho)$, $R \geq \rho$. Per quanto visto prima, $\rho = R$.
Passo 2. Dimostriamo prima che f è derivabile in $(-\rho, \rho)$ e vale la (48b).
L'n-esimo termine generale della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ è la funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = a_n x^n \qquad x \in \mathbb{R},$$

che è derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$f_n'(x) = a_n n x^{n-1} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{49}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ è la serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n x^{n-1}$ con raggio di convergenza ρ per quanto visto al Passo 1.
Fissato $x \in (-\rho, \rho)$, sia $R \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < R < \rho$. Il teorema sul raggio di convergenza assicura che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge puntualmente su $[-R, R]$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge totalmente su $[-R, R]$, allora il teorema di derivazione termine a termine implica che la somma f è derivabile in $[-R, R]$ e, quindi, in $x \in (-\rho, \rho)$. Inoltre

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n x^{n-1}.$$

Passo 3. Proviamo che la serie *integrata* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ ha raggio di convergenza ρ. Sia r il raggio di convergenza della serie integrata. La derivazione termine a termine della serie integrata, è la serie di partenza $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ che ha raggio di convergenza ρ. Per quanto visto al Passo 1, $r = \rho$.

Passo 4. Proviamo ora che f è continua in $x \in I$. Se $x \in (-\rho, \rho)$, la tesi segue dal fatto che f è derivabile in x. Se x coincide con uno dei due estremi, la dimostrazione richiede strumenti più avanzati.

Passo 5. Infine, dimostriamo la (48a). Fissato $x \in I$, $x \neq \pm\rho$, sia J l'intervallo chiuso di estremi 0 e x (ovviamente $J \subset I$ poiché I è un intervallo), per quanto visto sopra, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente su J e il teorema di integrazione termine a termine implica che

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1},$$

da cui segue la (48a) sull'intervallo $(-\rho, \rho)$. Se $x = \pm\rho$, la la dimostrazione richiede strumenti più avanzati. □

La serie derivata e quella integrata hanno lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, ma, in generale, l'insieme di convergenza puntuale può essere diverso.

Esempio 1.47. L'esempio 1.29 mostra che l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ è $(-1, 1]$, mentre l'insieme di convergenza della serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1}$ è $(-1, 1)$, mentre la serie integrata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1}$ converge in $[-1, 1]$.

Poiché il raggio di convergenza della serie derivata è lo stesso della serie di partenza, la derivata prima è a sua volta derivabile. Iterando la procedura si ottiene il seguente risultato.

Teo 1.48. *Data una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

con raggio di convergenza $\rho > 0$ *la funzione somma*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

è derivabile infinite volte in $(-\rho, \rho)$. *Per ogni* $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 0$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \qquad x \in (-\rho, \rho).$$

In particolare

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Per $n = 1$, è il contenuto della Prop. 1.46. La prova per $n > 1$ segue per induzione poiché $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$. □

Esempio 1.49. La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \log(1+x) \qquad x \in (-1, 1].$$

Infatti, l'esempio 1.29 mostra che l'insieme di convergenza è $(-1, 1]$, mentre la serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \qquad x \in (-1, 1), \tag{50}$$

poiché è la serie geometrica. Per il teorema sull'integrazione e derivazione delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \log(1+x) \qquad x \in (-1, 1).$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ e $\log(1+x)$ sono funzioni continue in 1, l'uguaglianza (50) vale anche per $x = 1$ e, quindi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

Esempio 1.50 (Serie esponenziale)**.** Si chiama serie esponenziale la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots,$$

che converge assolutamente in $\mathbb{R}$ alla funzione esponenziale e^x.
Infatti, poiché

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

per il criterio del rapporto il raggio di convergenza è $+\infty$ e la serie converge assolutamente in $\mathbb{R}$ per il teorema sulle serie di potenze. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, allora il teorema sull'integrazione e derivazione delle serie di potenze implica

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

e, quindi, $f'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e, in particolare, $f(0) = a_0 = 1$. Posto $h(x) = e^{-x} f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $h(0) = 1$, h è derivabile e

$$h'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Allora, h è una funzione costante uguale a $h(0) = 1$, per cui $f(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
▶ Il fatto che la somma delle serie esponenziale sia e^x si può provare in modo alternativo. La funzione esponenziale e^x è infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$ e le derivate di ogni ordine in $x_0 = 0$ sono uguali ad 1, per cui la serie esponenziale è la serie di Maclaurin della funzione e^x. Inoltre, fissato $x \in \mathbb{R}$, vale

$$0 \leq D^{(n)}\left(e^t\right) = e^t \leq e^{|x|} \qquad \forall |t| \leq |x|,$$

allora la funzione e^x è sviluppabile in serie di Taylor in $\mathbb{R}$ essendo soddisfatta la condizione sufficiente (teorema 1.54). ◀

Esempio 1.51 (Serie binomiale)**.** Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, si chiama serie binomiale la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

dove $\binom{\alpha}{0} = 1$ e

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} \qquad n \in \mathbb{N}, \geq 1.$$

La serie converge assolutamente in $(-1, 1)$ alla funzione $(1 + x)^\alpha$.
Infatti, poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1,$$

per il criterio del rapporto il raggio di convergenza è 1 e la serie converge assolutamente in $(-1, 1)$ per il teorema sulle serie di potenze. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, allora il teorema sulla derivazione delle serie di potenze implica che per ogni $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha - (n-1)) \binom{\alpha}{n-1} x^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - n) \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n - x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right)' \\ &= \alpha f(x) - x f'(x). \end{aligned}$$

Da cui

$$(1 + x) f'(x) = \alpha f(x) \qquad x \in (-1, 1)$$

e $f(0) = a_0 = 1$. Posto $h(x) = (1 + x)^{-\alpha} f(x)$ per ogni $x \in (-1, 1)$, si ha che $h(0) = 1$, h è derivabile e

$$h'(x) = -(1 + x)^{-\alpha-1} \alpha f(x) + (1 + x)^{-\alpha} f'(x) = 0 \qquad x \in (-1, 1).$$

Allora, h è costante uguale a 1, per cui $f(x) = (1 + x)^\alpha$ per ogni $(-1, 1)$.

Il seguente risultato estende alle serie di potenze, il principio di identità dei polinomi.

Cor. 1.52. *Siano* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *due serie di potenze di centro* x_0 *e raggi di convergenza* $\rho_1 > 0$ *e* $\rho_2 > 0$*, rispettivamente. Se esiste* $0 < \delta < \min\{\rho_1, \rho_2\}$ *tale che per ogni* $x \in (-\delta, \delta)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

allora $a_n = b_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$ converge a $f(x) = 0$ per ogni $|x| < \delta$ e, ovviamente, $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Il teorema precedente implica che

$$(a_n - b_n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \qquad n \in \mathbb{N},$$

da cui $a_n = b_n$. □

I risultati sopra ottenuti si estendono facilmente alle serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ di centro x_0 arbitrario. In particolare, l'insieme di convergenza puntuale è un intervallo I tale che

$$(x_0-\rho, x_0+\rho) \subset I \subset [x_0-\rho, x_0+\rho],$$

dove ρ è il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$, la somma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ è una funzione di classe C^∞ sull'intervallo $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ e $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

Def. 1.53. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo tale che f sia derivabile infinite volte in I. Fissato $x_0 \in I$, la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$$

si chiama serie di Taylor di f con centro x_0 (se $x_0 = 0$ si chiama serie di Maclaurin). La funzione f è sviluppabile in serie di Taylor con centro x_0 nell'intervallo I se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \qquad \forall x \in I.$$

. Se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo aperto, è sviluppabile in serie di potenze con centro x_0, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n \qquad \forall x \in I,$$

allora per il Teorema 1.48

$$I \subset [x_0-\rho, x_0+\rho]$$

dove ρ è il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$, la funzione $f(x)$ è derivabile infinite volte sull'intervallo$(x_0-\rho, x_0+\rho)$ e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad n \in \mathbb{N},$$

da cui segue che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \qquad \forall x \in I$$

cioè $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor su I.

Per gli esempi visti sopra, le funzioni e^x, $\log(1+x)$ e $(1+x)^\alpha$ sono sviluppabili in serie di Maclaurin rispettivamente in $\mathbb{R}$, $(-1,1)$ e $(-1,1)$.

Teo 1.54 (Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo tale che f sia derivabile infinite volte in I. Se esistono $M > 0$, $L > 0$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$*

$$|f^{(n)}(x)| \le M\,L^n \quad \forall x \in I, \tag{51}$$

allora, dato $x_0 \in I$, f è sviluppabile in serie di Taylor con centro x_0 in I.

Dimostrazione. Dato $n \in \mathbb{N}$, la somma parziale n-esima della serie di Taylor di f è il polinomio di Taylor T_n di f di centro x_0

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Fissato $x \in I$, la formula di Taylor con il resto di Lagrange implica che esiste $c_{x,n} \in I$ tale che

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_{x,n})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

La condizione (51) implica

$$|f(x) - T_n(x)| \leq M \frac{L^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}. \tag{52}$$

La condizione necessaria di Cauchy per la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} |x - x_0|^n$ (che converge essendo la serie esponenziale) assicura

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{L^n}{n!} |x - x_0|^n = 0.$$

Facendo il limite per n che tende a $+\infty$ della (52), il criterio del confronto implica

$$\lim_{n \to +\infty} (f(x) - T_n(x)) = 0,$$

per cui $\lim_{n \to +\infty} T_n(x) = f(x)$. □

La condizione (51) può essere indebolita. Infatti è sufficiente richiedere che, per ogni $x \in I$, esistano $M > 0$, $L > 0$ (eventualmente dipendenti da x) tali che

$$|f^{(n)}(t)| \leq M\, L^n \quad \forall t \in I, \; |t - x_0| \leq |x - x_0|.$$

. Data una funzione $f : I \subset \mathbb{R}$ definita su un intervallo I aperto di classe C^{∞}, fissato $x_0 \in I$ denotiamo con T_n il polinomio di Taylor di centro x_0 ed ordine n

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Il teorema di Taylor con il resto di Lagrange assicura che fissato $n \geq 1$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

cioè il resto $f(x) - T_n(x)$ va a zero più velocemente di $(x - x_0)^n$ se x tende a x_0.

Se f inoltre è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0, la definizione implica che fissato $x \in I$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x) - T_n(x) = 0.$$

Serie di Maclaurin di alcune funzioni elementari.

$\frac{1}{1-x}$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$=$	$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$		$x \in (-1, 1)$
e^x	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$	$=$	$1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots$		$x \in \mathbb{R}$
$\log(1 + x)$	$=$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$=$	$x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \ldots$		$x \in (-1, 1]$
$\sin x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$=$	$x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \ldots$		$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$=$	$1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \ldots$		$x \in \mathbb{R}$
$\arctan x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$=$	$x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \ldots$		$x \in [-1, 1]$
$(1 + x)^{\alpha}$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ $\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \notin \mathbb{N}$	$=$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots$		$x \in (-1, 1)$
$(1 - x)^{-k}$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$	$=$	$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k}$		$x \in (-1, 1)$