Calcolo differenziale ed integrale 2 – Prova scritta
22 FEBBRAIO 2021

11

Esercizio 1. Studiare la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

4 (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \sin(1/n^3)$;

4 (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log(1 + 100/n)$.

4 Determinare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^n$.

11

Esercizio 2. Sia f la funzione di periodo 2π definita su $[-\pi, \pi)$ nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -1 \\ 3 & -1 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < \pi \end{cases}$$

3 a) Disegnare il grafico di f e calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

2 b) Determinare gli intervalli su cui f è regolare a tratti.

3 c) Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

3 d) Determinare il polinomio di Mac Laurin di grado 7 della funzione

$$g(x) = x \arctan(f(x)x^2) - 2.$$

definita su $(-1, 1)$.

9

Esercizio 3. Data la funzione $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2 - 1)$$

2 a) Trovare il dominio di f e specificarne le caratteristiche: dire se è aperto, limitato, connesso

3 b) Stabilire se f è differenziabile su D e in tal caso calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 1, f(0, 1))$.

1 c) Determinare i punti critici di f.

3 d) Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluti sull'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$ e in caso affermativo determinarli.