Calcolo differenziale ed integrale 2 – Soluzioni prova scritta
26 maggio 2020

Esercizio 1. Studiare la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\frac{1}{n+2})$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\begin{pmatrix} 4n \\ 3n \end{pmatrix}}$, dove

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \forall\, n, k \geq 0,\ k \leq n, \qquad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Calcolare inoltre un'approssimazione della somma della prima serie a meno di 10^{-2}.

Soluzione: (1) Serie a segni alterni: usiamo il criterio di Leibnitz per vedere se converge. Sia

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n+2}\right), \quad n \geq 1.$$

Osserviamo che:

- $0 < \frac{1}{n+2} < 1 < \frac{\pi}{2}$ per ogni $n \geq 1$,
- $\sin\left(\frac{1}{n+2}\right) > 0$ per ogni $n \geq 1$,
- la funzione $\sin x$ è crescente su $(0, 1)$.

Ne segue che $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$ e $(a_n)_n$ è decrescente. Inoltre $\lim_n a_n = 0$.
Pertanto la serie converge semplicemente.

Per calcolare un'approssimazione della somma della serie usiamo ancora Leibnitz, ossia la relazione

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\frac{1}{n+2}) - s_n\right| \leq a_{n+1} \quad \forall\, n \geq 1,$$

dove s_n denota la ridotta n-esima. Quindi cerco n tale che $a_{n+1} < 10^{-2}$, cioè tale che

$$\frac{1}{n+2} < \arcsin(10^{-2}).$$

Concludiamo che $n > 97$.

Ora studiamo la convergenza assoluta. Dallo sviluppo di Taylor centrato in 0, $\sin x = x + \epsilon(x)x$, si ha

$$\sin\left(\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2} + \epsilon\left(\frac{1}{n+2}\right)\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+2}\left(1 + \epsilon\left(\frac{1}{n+2}\right)\right) = \frac{1}{n+2}\, c_n$$

con $c_n \to_n 0$. Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_n \sin\left(\frac{1}{n+2}\right)$ ha lo stesso carattere di $\sum_n \frac{1}{n+2}$, che diverge.
Concludiamo che la serie di partenza non converge assolutamente.

(2) La serie è a termini positivi, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\begin{pmatrix} 4n \\ 3n \end{pmatrix}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!\, n!}{(4n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!\, n!}{4n(4n-1)\cdots(4n-n+1)(3n)!}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4n(4n-1)\cdots(3n+1)}.$$

Posto $a_n := \frac{n!}{4n(4n-1)\cdots(3n+1)}$, visto che

$$4n(4n-1)\cdots(3n+1) = (4n)\,n\left(\frac{4n-1}{n}\right)\cdots n\left(\frac{3n+1}{n}\right) = n^n\,4\left(\frac{4n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{3n+1}{n}\right),$$

si ha

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0,$$

e quindi è soddisfatto il criterio di Cauchy.
Per studiare la convergenza della serie usiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_n \frac{(n+1)!}{4(n+1)(4(n+1)-1)\cdots(3(n+1)+1)}\,\frac{4n(4n-1)\cdots(3n+1)}{n!}\\ &= \lim_n \frac{(n+1)4n(4n-1)\cdots(3n+1)}{(4n+4)(4n+3)\cdots(4n)(4n-1)\cdots(3n+4)}\\ &= \lim_n \frac{(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} = \lim_n \frac{3^3n^4}{4^4n^4} = \frac{3^3}{4^4} < 1\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che la serie converge (assolutamente).

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = 3e^{2x} - \cos(x^2).$$

(1) Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 3
(2) Calcolare $f^{(3)}(0)$
(3) Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 1 e stimare l'errore commesso in $x = 1/2$:

$$|R_1(1/2)| = |T_1(1/2) - f(1/2)|.$$

(1): Utilizziamo gli sviluppi noti per le funzioni e^x e $\cos(x)$. Si ha:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_3(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_3(x)$$

Otteniamo quindi che:

$$f(x) = 3e^{2x} - \cos(x^2) = 3 + 6x + 6x^2 + 4x^3 - 1 + R_3(x).$$

Pertanto $T_3(x) = 2 + 6x + 6x^2 + 4x^3$.
(2): Dal polinomio di MacLaurin calcolato sopra, deduciamo

$$\frac{f^{(3)}(0)}{6} = 4 \Rightarrow f^{(3)}(0) = 24.$$

(3): Il polinomio di MacLaurin di ordine 1 è:

$$T_1(x) = 2 + 6x.$$

L'errore commesso in $x = 1/2$ ha la seguente forma:

$$R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(1/2)^2, \text{ con } c \in [0, 1/2].$$

Calcoliamo dunque la derivata seconda di f per poterlo maggiorare:

$$f'(x) = 6e^{2x} + 2x\sin(x^2), \qquad f''(x) = 12e^{2x} + 2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2).$$

Pertanto:

$$|R_1(1/2)| \le \frac{1}{8}\max_{c\in[0,1/2]}|f''(c)| \le \frac{1}{8}\max_{c\in[0,1/2]}|12e^{2c}+2\sin(c^2)+4c^2\cos(c^2)| \le \frac{1}{8}(12e+2+1) = \frac{12e+3}{8}.$$

Esercizio 3. Sia f la funzione periodica di periodo 2π definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in (-\pi, -\pi/2] \\ 0 & x \in (-\pi/2, \pi/2] \\ 2 & x \in (\pi/2, \pi] \end{cases}.$$

(1) Trovare i coefficienti a_5, b_5 e $\hat{f}_5$.
(2) Determinare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[\pi/2, \pi]$.

Soluzione: (1) Visto che f è una funzione pari, abbiamo che ogni b_k è nullo e $\hat{f}_k = \frac{a_k}{2}$.

$$a_5 := \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}5x\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(5x)\,dx.$$

Usando che anche il coseno è pari e che il prodotto di 2 funzioni pari è ancora pari, otteniamo

$$a_5 = \frac{1}{\pi}2\int_0^{\pi} f(x)\cos(5x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(5x)\,dx = \frac{4}{5\pi}\sin(5x)\big|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{4}{5\pi}.$$

Quindi $\hat{f}_k = -\frac{2}{5\pi}$.

(2) f è regolare a tratti su $[\pi/2, \pi]$. Quindi, per il criterio di Dirichlet, la serie di Fourier $\mathcal{F}f$ di f converge puntualmente su tale intervallo. In particolare, visto che f è continua in π, si ha

$$\mathcal{F}f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi/2) \\ \frac{f(\pi/2^+)+f(\pi/2^-)}{2} & x = \pi/2 \end{cases}.$$

Esercizio 4. Sia $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^3 + 4x^2 - 2y^2$.

(1) Stabilire se f è differenziabile sul suo dominio e calcolarne la derivata nel punto $P_0 = (1, 2)$ lungo il vettore $v = (-1, 1)$. Determinare poi l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, f(1, 2))$;
(2) Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo relativo di f sul suo dominio.
(3) Sia $h(x, y) = x^2 - 2y^2$ e sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$. Determinare massimo e minimo assoluto di h in C.

Soluzioni

(1): f è una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ quindi la funzione è differenziabile e il gradiente esiste in ogni punto. Facendo le derivate parziali otteniamo:

$$\nabla f(x, y) = (x^2 + 8x, 3y^2 - 4y).$$

Siccome f è differenziabile, vale la formula del gradiente, da cui deriviamo:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = \langle \nabla f(1, 2), (-1, 1)\rangle = \langle (9, 4), (-1, 1)\rangle = -5.$$

L'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1, 2, f(1, 2))$ è:

$$z - 13/3 = 9(x - 1) + 4(y - 2) \text{ equiv. } 3z = 27x + 12y - 38.$$

(2): I punti critici soddisfano $\nabla f(x, y) = 0$, ovvero:

$$\begin{cases} x^2 + 8x = 0 \\ 3y^2 - 4y = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x(x + 8) = 0 \\ y(3y - 4) = 0, \end{cases}$$

pertanto i punti critici sono $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (0, 4/3)$, $P_2 = (-8, 0)$, e $P_3 = (-8, 4/3)$. Per classificare i punti critici possiamo utilizzare il criterio della matrice Hessiana. Risulta:

$$f_{xx} = 2x + 8; \quad f_{yy} = 6y - 4; \quad f_{xy} = f_{yx} = 0,$$

cioè

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+8 & 0 \\ 0 & 6y-4 \end{bmatrix}.$$

Calcolando la matrice Hessiana nei punti critici troviamo:

$$Hf(P_0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow P_0 \text{ è punto di sella} \qquad Hf\,(P_1) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1 \text{ è punto di minimo rel.}$$

$$Hf\,(P_2) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2 \text{ è punto di massimo relativo}$$

$$Hf\,(P_3) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow P_3 \text{ è punto di sella}$$

(3): Massimo e minimo assoluto di h su C esistono per il teorema di Weierstrass perché h è una funzione continua e C è chiuso e limitato. La funzione h è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Cerchiamo gli estremi di g su C. Poiché h e g sono funzioni di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e non ci sono punti singolari sul vincolo (infatti $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ se $g(x,y)=0$), possiamo utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Visto che $\nabla h(x,y) = (2x,-4y)$, gli estremi verificano:

$$\det \begin{bmatrix} 2x & 4y \\ 2x & -4y \end{bmatrix} = 0.$$

Quindi:

$$-8xy - 8xy = 0 \iff xy = 0.$$

E naturalmente devono essere punti di C, cioè tali che $g(x,y)=0$. Quindi abbiamo che i punti di massimo e minimo devono verificare:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2+2y^2-1=0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2+2y^2-1=0. \end{cases}$$

Deriviamo quindi che i candidati massimi e minimi sono:

$$(0, \pm 1/\sqrt{2}), (\pm 1, 0).$$

Si ha:
$h(0,\pm 1/\sqrt{2}) = -1$ e $h(\pm 1, 0) = 1$. Risulta allora che $(\pm 1, 0)$ sono punti di massimo assoluto, e $(0, \pm 1/\sqrt{2})$ sono punti di minimo assoluto. Il massimo di h su C è 1, ed il minimo h su C è -1.