Esercizi di Algebra Lineare

a.a. 2019-20 (I foglio)

Esercizi sulle matrici

1) Calcolare AB e BA con $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Verificare la proprieta' associativa per il seguente prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3) Calcolare A^3 dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4) Dire quando si verifica che $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ e determinare un esempio.

5) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare AB, BA, A^2, B^2.

6) Calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(*) Provare che il prodotto di due matrici diagonali è una matrice diagonale.

7) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare A^2,A^3, A^4, $(A-I)^2$,$(A-I)^3$, $(A-I)^4$.

8) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con $a \neq b$, determinare tutte le matrici B tali che $AB = BA$.

9) Verificare che le uniche matrici $A \in M_2(k)$ che commutano $(AB = BA\ )$ con tutte le matrici $2\ \times\ 2$ sono le matrici scalari, cioé le matrici della forma λI con $\lambda \in k$.

10) Provare con un esempio che se A e B sono matrici simmetriche, AB non è necessariamente simmetrica.

11) Provare che la seguente matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è invertibile e determinare l'inversa.

12) Provare che se una matrice A è invertibile, allora $A^2, A^3, \ldots, A^n$ sono matrici invertibili

13) Sia $A \in M_n(k)$ tale che

$$A^2 + 3A + 2I = 0.$$

Provare che A è invertibile.