Calculus 2 – Prova scritta

20 Giugno 2023

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti serie sono a termini positivi e convergono semplicemente e/o assolutamente.

a) [4 punti] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1001}{\sqrt{n}}\right)$;

b) [3 punti] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,(3-(\cos n)^2)}{n^3+2n+1}$.

c) [3 punti] Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{n^2}\,x^n,$$

determinarne il raggio di convergenza ρ e l'insieme di convergenza puntuale I.

Esercizio 2.

a) [3 punti] Data la funzione $f(x)=x(e^x-1)+\ln(1+x^2)+\sin(2x)$, calcolarne il polinomio di Mc Laurin di ordine 4.

b) [3 punti] Scrivere il resto di Lagrange $R_1(x)$ di ordine 1 (con centro in 0) della funzione $g(x)=\cos(x^2)+\sin(3x)$ e determinarne una stima per $x\in(0,1/4]$.

Esercizio 3. Sia f la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione

$$g(x)=\begin{cases}2\pi+x & x\in[-\pi,0)\\ 2\pi-x & x\in[0,\pi)\end{cases}.$$

(1) [1 punto] Disegnare il grafico di f.
(2) [2 punti] Calcolare il coefficiente di Fourier $\hat{f}_0$.
(3) [3 punti] Calcolare il coefficiente di Fourier $\hat{f}_k$ per $k\neq 0$.
(4) [2 punti] Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[-\pi,\pi)$.

Esercizio 4. Sia $f(x,y)=\frac{3}{2}x^2-8x-4xy+4y^2+12\ln x$.

(1) [1 punto] Determinare il dominio di f e dire dove f è differenziabile.
(2) [3 punti] Calcolare il gradiente nel punto $(1,0)$, la derivata direzionale $\frac{\partial f(1,0)}{\partial v}$ per $v=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1,0,f(1,0))$.
(3) [4 punti] Stabilire quali sono i punti critici di f sul suo dominio e classificarli.