8 INTRODUZIONE AI *QUANTUM GAMES*

1 — INTRODUZIONE

John von Neumann è stato un matematico, fisico, *computer scientist* e uno dei più importanti scienziati (nell'ambito di tali rami) del ventesimo secolo e ha dato contributi fondamentali a diversi rami della matematica, della fisica matematica e della meccanica quantistica [1].

Durante il suo coinvolgimento nel Progetto Manhattan per la produzione delle armi nucleari, il suo interesse arrivò anche all'informatica. Oltre mettere le basi dell'architettura dei primi computer (architettura dei computer infatti viene detta "di Von Neumann"), si dedicò anche alla parte di software. Da questo suo interesse nacque la moderna teoria dei giochi. La data di nascita di questo settore di ricerca a cavallo fra la matematica, l'informatica e l'economica è il 1944 quando von Neumann insieme a Oskar Morgenstern pubblicò il libro *Theory of Games and Economic Behavior*.

La teoria dei giochi è considerata una branca della matematica applicata che studia le decisioni di un soggetto che interagisce con altri soggetti e ha come meta il massimo guadagno (dove guadagno è da intendere in senso lato). La teoria dei giochi ha in realtà moltissime sfaccettature e applicazioni. Come suggerisce il titolo del libro di von Neumann, la più evidente è in ambito economico dove viene usata per cercare di modellizzare il comportamento di singoli individui per descrivere diversi fenomeni economici. L'estensione più naturale è quella alle scienze sociali dove si usa per modellizzare i comportamenti sociali su piccola e grandi scale (dalla scelta di comprare casa in un determinato quartiere alle elezioni nazionali).

Dato che la meccanica quantistica introduce ha diversa struttura matematica che permette una manipolazione profondamente diversa dell'informazione, nella prima decade del ventunesimo secolo i ricercatori hanno iniziato a chiedersi se e come la teoria dei giochi tradizionale poteva essere modificata quando sono inclusi i fenomeni quantistici. Questo nuovo ramo di ricerca dell'informatica quantistica comprende quelli che oggi si chiamano *quantum games*. In questo capitolo ne discutiamo due che possono considerarsi prototipi.

1 https://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann

II – *spin-flip* IN STAR TREK

Discutiamo un modello di *quantum game* proposto dal fisico David Meyer nel 1999 [**meyer1999**, **piotrowski2003**]. Il capitano Picard e Q che sono due personaggi della series televisiva Star Trek. Supponiamo che si sfidino ad un gioco denominato *spin-flip*. Lo spin è una caratteristica delle particelle quantistiche. Per quanto ci interessa sarà sufficiente considerare il caso in cui ci sono due stati di spin: $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. Per uniformare la notazione con quella usata, li denoteremo come $|\uparrow\rangle = |1\rangle$ e $|\downarrow\rangle = |0\rangle$.

Nella versione classica Picard e Q possono agire sullo spin facendolo saltare oppure lo possono lasciare invariato. Queste due operazioni corrispondono applicazione dell'operatore identità $\mathbb{1}$ oppure della una porta X (o NOT):

$$\begin{aligned} |i\rangle &\xrightarrow{\mathbb{1}} |i\rangle \\ |1\rangle &\xrightarrow{X} |0\rangle \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

con $i = 0, 1$.

Il gioco a cui si sfidano Picard e Q è il seguente.

1. Il capitano Picard inizializza lo spin nello stato $|1\rangle$.
2. Q manipola il qubit (applica X o $\mathbb{1}$).
3. Picard applica manipola il qubit (applica X o $\mathbb{1}$).
4. Q manipola il qubit (applica X o $\mathbb{1}$).

Le operazioni fatte da Picard e Q sono ignote all'avversario. Q vince (e Picard perde) se lo stato finale è $|1\rangle$ mentre Picard vince (e Q perde) se lo stato finale è $|0\rangle$.

Facciamo un esempio. Se la sequenza di operazioni è X (da Q), $\mathbb{1}$ (da Picard) e $\mathbb{1}$ (da Q). In totale al qubit verrà applicata la porta X quindi $|1\rangle \to |0\rangle$, lo stato finale sarà $|0\rangle$ e Picard vince.

Si può intuire che, dato che lo stato iniziale è sempre $|1\rangle$ e che $X^2 = \mathbb{1}$, tutte le volte che viene applicato un numero dispari di operatori X vincerà Q mentre se il numero è pari vincerà Picard. In ogni caso, dato che la scelta dell'avversario è ignota, *non esiste una strategia vincente* né per Q né per Picard.

A questo punto facciamo una modifica ai punti $2-4$ del precedente gioco. Supponiamo che Q possa applicare delle generica porta logica quantistica (ai punti 2 e 4) mentre Picard decida con probabilità p di applicare la porta X e con probaibilità $1-p$ di applicare l'indetità .
La struttura del nuovo gioco (quantistico) è

1. Il capitano Picard inizializza lo spin nello stato $|1\rangle$.
2. Q applica al qubit con una porta U_1.
3. Picard con probabilità p applica X e con probaiblità $1-p$ applica l'identità .
4. Q applica al qubit con una porta U_2.

Considerando un generico operatore quantistico U_1 possiamo scrivere l'evoluzione dello stato iniziale come

$$|\psi_0\rangle = |1\rangle \xrightarrow{U_1} a\,|1\rangle + b\,|0\rangle \tag{8.2.2}$$

Per semplificare la discussione supporremo che a e b sinao reali. Per coefficienti complessi è possibile fare una discussione analoga. Questa trasformazione unitaria può essere associata alla matrice (scritta nella base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) [2]

$$U_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{8.2.3}$$

Per descrivere l'azione di Picard (che è classica) dobbiamo dividere l'evoluzione in due parti. Dato che Picard applica la porta X (NOT) con probaiblità p e l'indetià con probabilità $1-p$, lo stato evolverà secondo le regole

$$\begin{cases} a\,|0\rangle + b\,|1\rangle & \text{con probailità } p \text{ applica } X \\ a\,|1\rangle + b\,|0\rangle & \text{con probailità } 1-p \text{ applica } \mathbb{1}. \end{cases} \tag{8.2.4}$$

Per il suo secondo turno, Q supponiamo che applichi una trasformazione una porta di Hadamard; cioè $U_2 = H$. Nei due casi discussi prima, lo stato evolverà in

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(a-b)\,|1\rangle + (a+b)\,|0\rangle\Big] & \text{con probailità } p \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(a+b)\,|0\rangle + (-a+b)\,|1\rangle\Big] & \text{con probailità } 1-p. \end{cases} \tag{8.2.5}$$

Da quest'ultima espressione, si vede immediatamente che se Q decide di applicare anche la prima volta una porta di Hadamard ($U_1 = H$), si avrà $|1\rangle \to 1/\sqrt{2}(|0\rangle - |1\rangle))$ a di conseguenza, usando le notazioni di sopra, $a = b = -1/\sqrt{2}$ [3]. Ne consegue che lo stato finale sarà in entrambi i casi $|1\rangle$ e Q vincerà sempre.

Concludiamo che, scegliendo $U_1 = H$ tale che $a = b = -1/\sqrt{2}$ e $U_2 = H$, Q vince sempre indipendentemente dalla scelta che fa Picard. Questo è un incredibile miglioramento (per Q) rispetto al caso classico ed è dovuto al fatto che Q possa sfruttare a pieno la meccanica quantistica mentre Picard no.

Un'analisi matematica più attenta della struttura del gioco svela il "trucco" di Q. Come passo iniziale Q applica una porta di Hadamard che trasforma lo stato iniziale $|1\rangle$ nello stato $|-\rangle$. Gli operatori che Picard può applicare classicamente sono X e $\mathbb{1}$. Lo stato $|-\rangle$ è autostato sia di X che di $\mathbb{1}$; di conseguenza l'operazione di Picard non cambia lo stato ma genera solamente una (irrilevante) fase globale:

$$|-\rangle \xrightarrow{X \text{ oppure } \mathbb{1}} \pm\,|-\rangle\,. \tag{8.2.6}$$

La seconda operazione di Q (un'altra porta H) cancella l'effetto della prima dato che $H^2 = \mathbb{1}$ e quindi riporta lo stato in quello originale: $|-\rangle \to |1\rangle$.

2 Questa è la generica matrice unitaria the conserva il prodotto scalare con a e b reali.

3 Si noti che l'unica richiesta è che i coefficienti a e b abbiano segno opposto. Il loro segno assoluto è irrilevante.

	Bob: C	Bob: D
Alice: C	(3,3)	(0,5)
Alice: D	(5,0)	(1,1)

Table 7: Ricompensa combinata di Alice e Bob nel dilemma del prigioniero.

III — DILEMMA DEL PRIGIONIERO

8.3.1 Caso classico

Uno degli esempi prototipo della teoria dei giochi è il dilemma del prigioniero originalmente proposto da proposto da Albert Tucker negli anni cinquanta del ventesimo secolo.

Ritorniamo ai consueti Alice (A) e Bob (B) che in questo caso sono complici, sono stati arrestati e vengono interrogati separatamente. Entrambi hanno due scelte o strategie: collaborare fra di loro (*cooperate* in inglese e indicata con la lettera C) oppure non cooperare e accusare l'altro (*defect* in inglese e indicata con la lettera D).

La ricompensa (*payoff*) è espressa con un numero. Lo scopo del gioco è massimizzare questo la ricompensa [4]. Le possibilità che A e B hanno a disposizione sono

1. se solo uno dei due accusa l'altro (ad esempio, Alice sceglie D e Bob sceglie C), quello che accusa ha la massima ricompensa 5 mentre l'altro (che collabora) ha la minima ricompensa 0. Queste vengono rappresentate come strategie $(A, B) = (D, C)$ e $(A, B) = (C, D)$.

2. se entrambi accusano l'altro [strategia $(A, B) = (D, D)$], hanno entrambi una ricompensa ridotta di 1.

3. se entrambi collaborano [strategia $(A, B) = (C, C)$], hanno entrambi una ricompensa ridotta di 3.

Le possibilità sono riassunte in tabella 7 [**eisert1999**].

A livello razionale c'è una strategia dominante che è l'accusa (strategia D). Alice non sa cosa deciderà Bob ma sa che se Bob coopera e lei lo accusa [strategia $(A, B) = (D, C)$] otterrà una ricompensa di 5 contro i 3 che otterebbe se cooperasse [strategia $(A, B) = (C, C)$]. Allo stesso tempo, se Bob la accusasse e anche lei lo accusasse [strategia $(A, B) = (D, D)$], la ricompensa sarebbe 1 contro 0 se cooperasse [strategia $(A, B) = (C, D)$]. Quindi, indipendente mente dalla scelta di Bob, Alice sa che riuscirà a massimizzare la ricompensa se accusa Bob [5].

Possiamo rendere più formale questo discorso introducendo il formalismo della meccanica quantistica che ci servirà anche dopo. In questo caso, usiamo due qubit uno di Alice e uno di Bob in cui loro "scriveranno" la loro scelta. Lo stato totale

4 Nel caso specifico, la ricompensa potrebbe rappresentare lo sconto di pena in anni.

5 Il dilemma del prigioniero è completamente simmetrico quindi il discorso fatto per Alice vale anche per Bob. Ne consegue che anche per Bob la strategia migliore sarebbe la D e la scelta combinata (D, D) è quella migliore. nella teoria dei giochi si dice the la strategia (D, D) è un punto di equilibrio di Nash [**eisert1999**]

sarà $|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \equiv |ij\rangle$ dove gli indici A e B indicano il qubit di Alice e di Bob. Gli stati che descrivono tutto lo spazio delle strategie e ne costituiscono una base sono $\{|DD\rangle, |DC\rangle, |CD\rangle, |CC\rangle\}$.

Come stato iniziale fissiamo (in maniera arbitraria) $|CC\rangle$. Indicheremo le operazioni di Alice e Bob con gli operatori U_A e U_B e l'operatore totale con $U_A \otimes U_B$. Si noti che il prodotto tensore evidenzia che le operazioni di Alice e Bob sono separate e indipendenti. Lo stato finale dopo le scelte di Alice e Bob sarà

$$|CC\rangle \to U_A \otimes U_B\, |CC\rangle$$

La ricompensa sarà associata ad un operatore. Per Alice tale operatore/ricompensa sarà

$$P_A = |DD\rangle\langle DD| + 5|DC\rangle\langle DC| + 3|CC\rangle\langle CC| = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 5 & & \\ & & 0 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}. \tag{8.3.1}$$

dove nell'ultimo membro abbiamo indicato la rappresentazione matriciale nella base di sopra tralasciando gli elementi nulli.

Per Bob tale operatore/ricompensa srà

$$P_B = |DD\rangle\langle DD| + 5|CD\rangle\langle CD| + 3|CC\rangle\langle CC| = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 5 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}. \tag{8.3.2}$$

Si noti che gli operatori P_A e P_B sono definiti nello spazio totale delle strategie ma hanno forma diversa.

Nel caso più semplice e vicino a quello classico, A e B possono i) non fare niente e quindi cooperare (visto che il qubit iniziale è C) oppure ii) applicare (indipendentemente l'uno dall'altra) la trasformazione $|C\rangle \to |D\rangle$ e accusare il compagno. Queste due scelte corrispondono ad applicare l'operatore identità $\mathbb{1}$ (strategia C) oppure l'operatore $D = iY$ (strategia D) che nella base $\{|D\rangle, |C\rangle\}$ assume la forma

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'effetto di D è $D\,|D\rangle \to -|C\rangle$ e $D\,|C\rangle \to |D\rangle$.

Facciamo qualche esempio.
La strategia di $(A, B) = (D, D)$, sarà rappresentata dall'operatore (totale) $D \otimes D$ che genererà lo stato finale $D \otimes D\,|CC\rangle = |DD\rangle$. In questo caso, la ricompensa di Alice sarà $\langle DD|P_A|DD\rangle = 3$ e quella di Bob $\langle DD|P_B|DD\rangle = 3$. Se $(A, B) = (C, D)$, l'operatore (totale) sarà $\mathbb{1} \otimes D$ che genererà lo stato finale $C \otimes D\,|CC\rangle = |CD\rangle$. In questo caso, le ricompense saranno $\langle CD|P_A|CD\rangle = 0$ e quella di Bob $\langle CD|P_B|CD\rangle = 5$. Esattamente come ci aspettavamo.

8.3.2 Caso quantistico

Passando al regime quantistico si hanno più possibilità . Prima di tutto, Alice e Bob possono applicare ai propri qubit un numero maggiore di trasformazioni. Infatti, il più generico operatore unitario agente su un qubit si scrive come

$$U(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \tag{8.3.3}$$

Questo comprende come casi particolari gli operatori usati nel caso classico dato che $C = U(0,0)$ e $D = U(\pi,0)$.

É comunque importante notare che esistono strategie puramente quantistiche. Se prendiamo $\theta = 0$ e $\phi = \pi/2$ abbiamo un operatore che chiamiamo Q

$$Q = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Pur non cambiano la strategia (infatti $|C\rangle \to -i\,|C\rangle$ e $|D\rangle \to i\,|D\rangle$), cambia la fase del qubit. Questo non avrebbe effetto con stati classici ma su stati quantistici in sovrapposizione questa diventa ha un effetto osservabile e quindi una nuova strategia puramente quantistica. Ad esempio, Q trasforma $(|C\rangle + |D\rangle)/\sqrt{2} \to -i(|C\rangle - |D\rangle)/\sqrt{2}$ che sono stati ortogonali e quindi possono essere distinti con una misura.

La meccanica quantistica offre però anche la possibilità di partire da stati diversi e, in particolare, di partire da stati *entangled*. Si può comprendere immediatamente che questo fatto può avere un impatto sul gioco. Infatti, nel caso classico, le azioni di A e B sono completamente indipendenti e scorrelate. Se A e B condividono uno stato entangled, non solo i loro qubit correlati ma la correlazione è quantitica. Sebbene le operazioni di A e B siano ancora indipendenti, la correlazione quantistica può modificare il risultato del gioco. Come vedremo, questo ha importanti conseguenze.

Per introdurre l'entanglement fra A e B, supponiamo che i qubit forniti ad entrambi siano stati modificati tramite l'operatore $J = \exp\{i(\gamma/2)D \otimes D\}$. In termini di matrici questo può essere scritto nella base $\{|DD\rangle, |DC\rangle, |CD\rangle, |CC\rangle\}$ come

$$J = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 & i\sin\frac{\gamma}{2} \\ 0 & \cos\frac{\gamma}{2} & -i\sin\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & -i\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} & 0 \\ i\sin\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}. \tag{8.3.4}$$

Si noti che nel caso $\gamma = 0$, $J = \mathbb{1}$ è semplicemente la matrice identità nello spazio delle strategie.

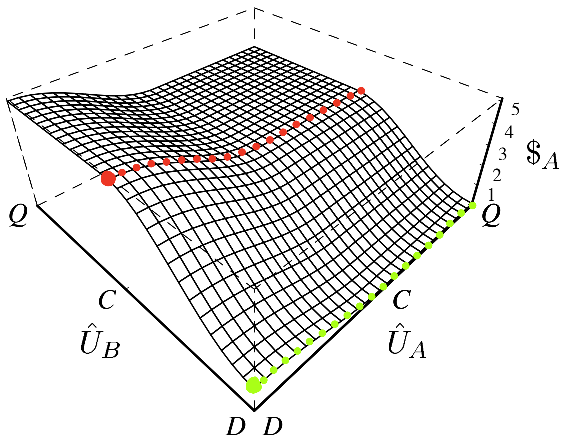

Figure 23: Dilemma del prigioniero. Caso quantistico senza entanglement. Quello mostrato con $\$_A$ è la ricompensa di Alice. Le curve tratteggiate sulla superficie mostrano che, fissata l'operazione di B (quindi una determinata U_B), la massima ricompensa di A è massima nel caso lei accusi B, i.e., strategia D e $U_A = D$. Le operazioni Q (si veda il testo) sono puramente quantistiche (non hanno corrispettivo classico) ma in questo caso non danno alcun vantaggio rispetto alle scelte di Alice e Bob. La figura è presa da [**eisert1999**].

Se invece prendiamo $\gamma = \pi/2$

$$J\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.3.5}$$

che, applicata allo stato $|CC\rangle$, darà

$$J\left(\frac{\pi}{2}\right)|CC\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\,|DD\rangle + |CC\rangle). \tag{8.3.6}$$

Questo è uno stato massimamente entangled [6]. Concludiamo che l'operatore J è un operatore che permette di generare entanglement fra i qubit che poi saranno consegnati ad Alice e Bob.

Consideriamo prima il caso in cui $\gamma = 0$, $J = \mathbb{1}$ e gli stati di A e B non siano entangled. L'analisi dettagliata della ricompensa di Alice (e di Bob) per il caso quantistico è più complessa perchè abbiamo a che fare con strategie continue e non discrete [come lo sono gli operatori unitari (8.3.3) che A e B possono usare]. Un modo di rappresentare la ricompensa di Alice è mostrata in Fig. 23 in uno

6 Lo stato ottenuto non è uno stato di Bell ma può essere ottenuto della stato di Bell $1/\sqrt{2}(|DD\rangle + |CC\rangle)$ applicando l'operatore di phase $U_{ph}(\delta)$ [introdotto nella sezione 3.9] che trasforma $|0\rangle \to |0\rangle$ e $|1\rangle \to e^{i\delta}|1\rangle$ cone $\delta = \pi/2$. Tale operatore può essere applicato al primo o al secondo qubit. Dato che tale operatore agisce "localmente" su un solo qubit, non può modificare l'entanglement. Ne consegue che lo stato generato è già massimamente entangled come quelli di Bell.

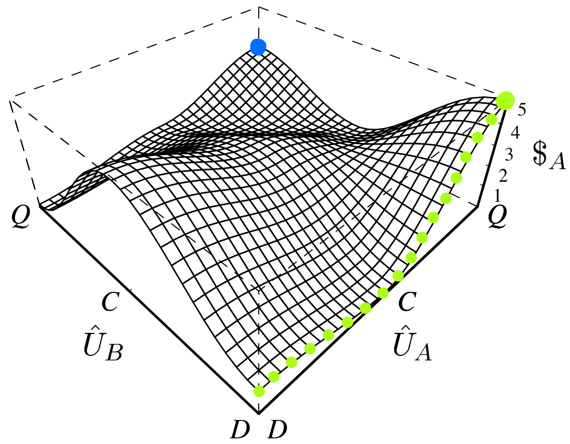

Figure 24: Dilemma del prigioniero. Caso quantistico con entanglement. Quello mostrato con $\$_A$ è la ricompensa di Alice. La curva verde mostra le possibili strategie di Alice quando Bob sceglie D. Al contrario dei casi classico e senza entanglement dove la strategia migliore per Alice era D, in questo caso risulta essere quella puramente quantistica Q con una ricompensa di 5. Il punto blu mostra la strategia globale $(A, B) = (Q, Q)$. Questa è simmetrica e risulta essere quella che massimizza sia la ricompensa di Alice sia quella di Bob (per un valore di 3). Essendo una strategia puramente quantistica non è accessibile nel gioco classico e il vantaggio nella ricompensa è ottenibile solo con stati entangled. La figura è presa da [**eisert1999**].

spazio tridimensionale. La ricompensa di Alice è mostrata sull'asse z mentre sugli assi x e y sono rappresentate, rispettivamente, le scelte di Alice (U_A) e Bob (U_B) [7].

Le scelte "classiche" in Tab. 7 sono rappresentate con i punti C e D sugli assi. La strategia puramente quantistica Q in Eq. (8.3.4) è indicata esplicitamente.

Supponiamo che Bob scelga la strategia (classica) D. Alice ha anche in questo caso uno spettro continuo di possibilità (curva verde in Fig. 23). Come si può vedere, la ricompensa di Alice è massima quando $U_A = D$; ovvero anche Alice sceglie di accusare Bob. Questa è esattamente quello che si aveva nel caso classico.

Se Bob sceglie la strategia (classica) C (curva rossa in Fig. 23), per massimizzare la propria ricompensa Alice dovrà scegliere $U_A = D$. Anche in questo caso, il risultato è uguale a quello classico.

Come si vede in Fig. 23, questo è vero per ogni strategia di Bob e nemmeno la strategia quantistica Q porta differenze. Concludiamo che *indipendentemente* da quello che sceglie Bob, la strategia migliore per Alice è la D. Dato che il problema è simmetrico, lo stesso vale per Bob. Quindi, riotteniamo il risultato classico per il quale, la strategia individuale migliore è la D e quella globale migliore è la (D, D).

Consideriamo adesso il caso massimamente entangled con $\gamma = \pi/2$. Con le stesse indicazioni di sopra, in Fig. 24 è mostrato la ricompensa di Alice.

---

7 Una discussione più approfondita necessiterebbe l'introduzione di una parametrizzazione di U_A e U_B. Questa complicherebbe la discussione e quindi non viene discussa. Per i dettagli ci si può comunque riferire al lavoro originale [**eisert1999**].

In questo caso, la strategia D non è più la migliore per Alice. Se Bob sceglie la strategia D, Alice ha la ricompensa minima (uguale a 0) con la strategia C e 1 se sceglie D, esattamente come nel caso classico. Ma la strategia migliore di Alice risulta quella puramente quantistica Q per la quale la ricompensa è 5 (massima).

Nel caso Bob scelga C, la strategia migliore per Alice è D (come nel caso classico). Ma la strategia D per Alice non solo non è quella che massimizza la ricompensa ma è anche rischiosa in quanto la ricompensa va a zero se Bob scegli la strategia Q. Ne deduciamo che la strategia di Alice per massimizzare la ricompensa *non è indipendente* dalla scelta di Bob come invece accadeva nel caso classico.

Ritornando ad una visione globale del gioco (ricordando che il gioco è simmetrico), si può osservare l'emergere di una nuova strategia di equilibrio. La strategia $(A, B) = (Q, Q)$ permette sia ad A che B di avere una ricompensa di 3 [8]. Si noti che in questo caso è la ricompensa è il triplo di quella ottenibile nel caso classico [in cui per la strategia (D, D) la ricompensa era di 1]. Questa combinazione di strategia così come la ricompensa è puramente quantistica e non compare nel caso classico.

8 Questo è un punto di equilibrio di Nash come discusso in Ref. [**eisert1999**].

IV — COME VINCERE CON LA MECCANICA QUANTISTICA

Discutiamo un altro *quantum game* che rivela una delle proprietà fondamentali della meccanica quantistica e ha importantissime implicazioni nel settore noto come *fondamenti di meccanica quantistica*.

Supponiamo che Alice (A), Bob (B) e Charlie (C) siano stati separati, imprigionati e non abbiano la possibilità di comunicare gli uni con gli altri. Per poter essere liberati, devono vincere ad un strano gioco.

Ognuno ha a disposizione due variabili X e Y a cui possono attribuire valore 1 o -1. Separatamente gli viene chiesto quale valore vogliono attribuire ad X *oppure* quale valore vogliono attribuire a Y. Vengono però informati che le domande fatte hanno una struttura ben precisa. O a tutti viene chiesto "che valore attribuisci a X" oppure a uno viene chiesto "che valore attribuisci a X" e agli altri "che valore attribuisci a Y". In sostanza può essere chiesto il valore di una fra le seguenti terne $\{X_A, X_B, X_C\}$, $\{X_A, Y_B, Y_C\}$, $\{Y_A, X_B, Y_C\}$ o $\{Y_A, Y_B, X_C\}$.

Il gioco consiste nel scegliere i valori attribuiti in maniera tale che i prodotti dei numeri scelti abbiano un preciso valore. Infatti, verranno liberati solo se prendendo i prodotti dei valori assegnati saranno

$$\begin{aligned} X_A X_B X_C &= -1 \\ X_A Y_B Y_C &= 1 \\ Y_A X_B Y_C &= 1 \\ Y_A Y_B X_C &= 1. \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

Naturalmente A, B e C non sono a conoscenza nè della domanda nè delle risposte degli altri. La domande che ci poniamo è :
Esiste una strategia per cui A, B e C sono sicuri di vincere?

La risposta è "no": non esiste nessuna strategia che permetta di vincere con *sicurezza*. Infatti, non sapendo quale domanda è stata posta, la certezza di vincere si avrebbe solo verificando *contemporaneamente* tutte le equazioni (8.4.1). Questo è però impossibile.

Oltre alla verifica mediante calcolo diretto, una dimostrazione più semplice e veloce consistente nel moltiplicare tutti i membri di *sinistra* nelle equazioni (8.4.1)

$$(X_A X_B X_C)(X_A Y_B Y_C)(Y_A X_B Y_C)(Y_A Y_B X_C) = X_A^2 X_B^2 X_C^2 Y_A^2 Y_B^2 Y_C^2 = 1. \tag{8.4.2}$$

L'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che le variabili X_i e Y_i possono assumere solo i valori ± 1. Quindi i loro quadrati saranno tutti 1 ($X_i^2 = 1$ e $Y_i^2 = 1$) e il prodotto in Eq. (8.4.2) sarà uguale a 1, i.e., $(\Pi_i X_i^2)(\Pi_i Y_i^2) = 1$.

D'altro canto, questo deve essere uguale al prodotto dei membri di *destra* dell'Eq. (8.4.1). Dato che questo è -1, concludiamo che il sistema (8.4.1) non ha soluzione e le quattro equazioni non possono essere soddisfatte contemporaneamente.

Ora mostriamo che se A, B e C possono condividere uno stato quantistico entangled esiste una strategia che permette di vincere con sicurezza. Supponiamo che A, B e C condividano lo stato

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C - |1\rangle_A |1\rangle_B |1\rangle_C) \equiv \frac{1}{\sqrt{1}}(|000\rangle - |111\rangle) \qquad (8.4.3)$$

(dove nella seconda equazione gli indici A, B e C sono sottintesi per semplificare la notazione). Questo stato ricorda da vicino gli stati entangled di Bell e prende il nome dalle iniziali dei fisici (D. Greenberger, M. Horne e A. Zeilinger) che lo usarono per studiare le caratteristiche della meccanica quantistica.

Tornando al gioco, il protocollo che A, B, e C applicano usando lo stato quantistico è il seguente:[9]

1. se la domanda posta è "che valore attribuisci a X", si misura l'operatore σ_x
2. se la domanda posta è "che valore attribuisci a Y", si misura l'operatore σ_y.

Ad esempio, se ad A viene chiesto "che valore attribuisci a X" e a C "che valore attribuisci a Y", loro misureranno rispettivamente gli osservabili $\sigma_{x,A}$ e $\sigma_{y,C}$ (dove con gli indici abbiamo esplicitamente la relazione con la misura di A e C).

Si noti che la domanda e l'azione di A, B e C sono indipendenti; loro non sanno cosa è stato chiesto agli altri ma devono solo preoccuparsi di misurare il qubit a loro disposizione nella base opportuna.

Supponiamo che a tutti e tre sia chiesto il valore di X, i.e., $\{X_A, X_B, X_C\}$. In questo caso, A, B e C misureranno $\sigma_{x,A}$, $\sigma_{x,B}$ e $\sigma_{x,C}$. Per stabilire il risultato di queste misure e quindi la risposta data, è necessario scrivere lo stato (8.4.3) nella base di degli autostati degli operatori misurati, i.e., $\sigma_{x,i}$ che, come al solito, indichiamo con $|\pm\rangle$ e che si scrivono come $|0\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ e $|1\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$. Lo stato (8.4.3) si scriverà

$$\begin{aligned}
|GHZ\rangle &= \frac{1}{4}\Big[(|+\rangle + |-\rangle)^{\otimes 3} - (|+\rangle - |-\rangle)^{\otimes 3}\Big] = \\
&= \frac{1}{4}\Big[\,|+++\rangle + |++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle + |+--\rangle + |-+-\rangle + |--+\rangle + |---\rangle \\
&\quad - |+++\rangle + |++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle - |+--\rangle - |-+-\rangle - |--+\rangle + |---\rangle\,\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\,|++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle + |---\rangle\,\Big] \qquad (8.4.4)
\end{aligned}$$

Supponiamo che a causa della misura di $\sigma_{x,A}$, $\sigma_{x,B}$ e $\sigma_{x,C}$ di da parte di A, B e C, lo stato collassi (con probabilità 1/4) nello stato $|++-\rangle$ [10]. I valori che A, B e C otterranno e che poi daranno come risposta sono $X_A = 1$ (legato alla misura di $|+\rangle$ sul primo qubit), $X_B = 1$ (legato alla misura di $|+\rangle$ sul secondo qubit) e $X_C = -1$ (legato alla misura di $|-\rangle$ sul terso qubit). Quindi il loro prodotto sarà $X_A\, X_B\, X_C = -1$.

9 Per evitare confusione fra la variabile X, Y e i corrispondenti operatori di Pauli, useremo per quest'ultimi rispettivamente i simboli σ_x e σ_y.

10 Non è necessario che la misura sia contemporanea così come non è importante la sequenza temporale delle misure.

In maniera analoga, se il sistema collassasse sullo stato $|+-+\rangle$ (con probabilità 1/4) si otterr'ha $\{X_A, X_B, X_C\} = \{1, -1, 1\}$ e prodotto $X_A\ X_B\ X_C = -1$. In questo modo, si vede che qualsiasi sia il risultato della misura il prodotto $X_A\ X_B\ X_C$ sarà sempre -1 e A, B e C vinceranno al gioco.

Supponiamo ora che la domanda riguardi la terna $\{X_A, Y_B, Y_C\}$ [11]. Secondo il protocollo, A misurerà $\sigma_{x,A}$ mentre B e C misureranno $\sigma_{y,B}$ e $\sigma_{y,C}$. Per comprendere quale sarà il risultato di tali misure, è necessario scrivere lo stato $|GHZ\rangle$ in Eq. (8.4.3) in termini degli autostati di $\sigma_{x,A}$, $\sigma_{y,B}$ e $\sigma_{y,C}$.

A tal proposito denotiamo gli autostati di $\sigma_{y,i}$ con $|\bar{\pm}\rangle$ e ricordiamo la loro relazione con gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{|\bar{+}\rangle + |\bar{-}\rangle}{\sqrt{2}} \\ |1\rangle &= -i\frac{|\bar{+}\rangle - |\bar{-}\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{8.4.5}$$

In questo caso, lo stato (8.4.3) si scriverà

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{4}\Big[(|+\rangle + |-\rangle) \otimes (|\bar{+}\rangle + |\bar{-}\rangle)^{\otimes 2} - (|+\rangle - |-\rangle) \otimes (-i)^2 (|\bar{+}\rangle + |\bar{-}\rangle)^{\otimes 2}\Big]. \tag{8.4.6}$$

Si noti che la struttura è analoga all'espressione (8.4.4) con l'unica differenza che il termine $(-i)^2 = -1$ cambia di segno della terza riga dell'equazione. Dal calcolo esplicito si ottiene

$$\begin{aligned} |GHZ\rangle &= \frac{1}{4}\Big[|+\bar{+}\bar{+}\rangle + |+\bar{+}\bar{-}\rangle + |+\bar{-}\bar{+}\rangle + |-\bar{+}\bar{+}\rangle + |+\bar{-}\bar{-}\rangle + |-\bar{+}\bar{-}\rangle + |-\bar{-}\bar{+}\rangle + |-\bar{-}\bar{+}\rangle \\ &\quad + |+\bar{+}\bar{+}\rangle - |+\bar{+}\bar{-}\rangle - |+\bar{-}\bar{+}\rangle - |-\bar{+}\bar{+}\rangle + |+\bar{-}\bar{-}\rangle + |-\bar{+}\bar{-}\rangle + |-\bar{-}\bar{+}\rangle - |-\bar{-}\bar{+}\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[|+\bar{+}\bar{+}\rangle + |+\bar{-}\bar{-}\rangle + |-\bar{+}\bar{-}\rangle + |-\bar{-}\bar{+}\rangle\Big]. \end{aligned} \tag{8.4.7}$$

A seguito delle misure di $\sigma_{x,A}$, $\sigma_{y,B}$ e $\sigma_{y,C}$ da parte di A, B e C, il sistema collasserà in uno degli stati scritti sopra. Se, ad esempio, collassasse (con probabilità 1/4) nello stato $|+\bar{+}\bar{+}\rangle$, la terna data da A, B e C sarà $\{X_A, Y_B, Y_C\} = \{1, 1, 1\}$ e il prodotto $X_A Y_B Y_C = 1$. É evidente che anche per tutte le altre possibili terne estratte dalla misura ($\{X_A, Y_B, Y_C\} = \{1, 1, 1\}$, $\{X_A, Y_B, Y_C\} = \{1, -1, -1\}$, $\{X_A, Y_B, Y_C\} = \{-1, 1, -1\}$ e $\{X_A, Y_B, Y_C\} = \{-1, -1, 1\}$), il prodotto sarà sempre $X_A Y_B Y_C = 1$. Di conseguenza anche in questo caso A, B e C vinceranno il gioco e saranno liberati.

Dato che lo schema del gioco è simmetrico per A, B e C, il protocollo funzionerà anche per le altre domande (ad esempio, qual'è la terna $\{Y_A, X_B, Y_C\}$) restituendo sempre un prodotto uguale a 1.

Abbiamo quindi dimostrato che, per il gioco in questione, non esiste un protocollo classico che assicuri la vincita ma sfruttando la meccanica quantistica esiste una strategia vincente. Il vantaggio quantistico è determinato dall'entanglement

11 Ovvero si chieda ad A che valore assume X e a B e C che valore assume Y.

che permette di avere delle correlazioni quantistiche fra le misure non presenti con stati classici.

V – TEST DI NON-CLASSICITÀ DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Il gioco discusso nel paragrafo precedente è stato introdotto dal fisico L. Vaidman partendo da un articolo divulgativo di D. Mermin. In realtà ha implicazioni molto profonde e ci permette di discutere uno degli esperimenti cruciali per stabilire che la meccanica quantistica non può essere ricondotta a teorie classiche ma che ha una struttura intrinsecamente diversa. Si tenga conto che la discussione qui sotto è , per ovvi motivi, semplificata. si cercherà comunque di evidenziare l'essenza dei risultati trascurando a volte la precisione nel linguaggio (si veda per maggiori dettagli e precisione l'articolo divulgativo di D. Mermin su *Physics Today* del 1990 [**mermin1990**]).

Il dibattito sulla struttura della meccanica quantistica risale alla nascita stessa della teoria hanno coinvolto e Einstein, Bohr, Schroedinger e, più in avanti negli anni, John Bell. Senza entrare nei dettagli tecnici e concettuali del dibattito, è comunque importante fare un'analisi cronologica e storica.

Einstein credeva che la meccanica quantistica fosse incompleta e che le predizioni controintuitive che la teoria faceva fossero in realtà una manifestazione di questa incompletezza. Era in particolare turbato dagli effetti "non-locali" della teoria.

8.5.1 Nonlocalità e entangement in meccanica quantistica

Come abbiamo visto nei capitoli precedenti, gli stati entangled mostrano delle correlazioni quantistiche. Ad esempio, se lo stato di Bell $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ e condiviso fra Alice e Bob, dopo la misura del suo qubit Alice sa esattamente quale sarà il risultato della misura di Bob. Nell'interpretazione standard della meccanica quantistica, questo implica i) che gli ci sia una correlazione fra le misure e ii) che la la teoria sia nonlocale (una misura di Alice perturba lo stato di Bob anche se abbastanza lontano da non interagire con Alice).

La soluzione che Einstein, Poldoski e Rosen (EPR) proposero è che le quantità fisiche avessero sempre un valore definito che si manifestava solo all'atto della misura. Dato che la teoria completa che include questi dettagli, è ignota l'unica cosa che possiamo fare è trattare le misure come statistiche [12].

Il problema delle correlazioni può essere facilmente risolto aggirato usando le correlazioni classiche. Ad esempio, supponiamo di avere una scatola con due palline. Le palline possono avere colore blu o rosso e sappiamo che nella scatola sono state messe palline dello stesso colore. A questo punto, l'estrazione (ovvero

12 La statistica della teoria microscopica completa che include la meccanica quantistica è determinata da altre variabili (o gradi di libertà) che sono sconosciute. Vengono di solito chiamate *variabili nascoste*. Una volta note tali variabili e il loro comportamento, la meccanica quantistica cesserebbe di essere una teoria probabilistica e diventerebbe completamente deterministica.

la misura) di una pallina rivelerà immediatamente il colore della seconda pallina anche se questa non è stata ancora estratta dalla scatola.

Se poi supponiamo di avere N scatole e di mettere in metà palline blue e nelle restanti palline rosse, gli esperimenti descriveranno esattamente la statistica attesa: il 50% delle volte estrarremo i colori blu-blu (che possiamo associare alla misura che porta allo stato $|11\rangle$) e il restante 50% estrarremo i colori rosso-rosso (corrispondente allo stato $|00\rangle$).

Molti fisici stentavano a credere nella nonlocalità della meccanica quantistica sopratutto perchè sembra in contrasto con il principio della relatività ristretta ("niente può viaggiare più voleve della luce") [13].

Se però , come proposero EPR, gli stati quantistici hanno sempre un valore definito e la misura non fa altro che rivelarlo, non c'è un problema di nonlocalità e la misura di Alice non cambia lo stato del sistema di Bob ma ne evidenzia solo il valore. Questo è naturalmente diverso da quanto assume l'interpretazione convenzionale per la quale il valore del sistema di Alice e quello di Bob viene definito (istantaneamente) solo all'atto della misura.

Fino al 1964 sembrava che fosse impossibile distinguere fra queste due possibili interpretazioni. In quell'anno, in un suo famosissimo lavoro [**Bell1964**], J. Bell dimostrò che esisteva un esperimento che permetteva di stabilire se fossero presenti delle variabili nascoste o meno. L'esperimento fu portato a termine negli anni 80 dal fisico francese A. Aspet e confermò l'assenza delle variabili nascoste e la nonlocalità delle meccanica quantistica.

Noi non tratteremo il lavoro di Bell ma una situazione analoga ma più immediata e diretta proposta da GHZ nel 1989.

8.5.2 Esperimento GHZ (basato su [**mermin1990**])

Usando tre qubit, supponiamo di preparare uno stato $|GHZ\rangle$ come in Eq. (8.4.3). Dalla riscrittura dello stato in Eq. (8.4.7) si può vedere che lo stato $|GHZ\rangle$ è autostato dell'operatore $\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{y,C}$. Dato che $\{|\pm\rangle\}$ sono autostati di $\sigma_{x,i}$ e $\{|\bar{\pm}\rangle\}$ sono autostati di $\sigma_{y,i}$, abbiamo che

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{y,C} \, |+\bar{+}\bar{+}\rangle &= |+\bar{+}\bar{+}\rangle \\
\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{y,C} \, |+\bar{-}\bar{-}\rangle &= |+\bar{-}\bar{-}\rangle \\
\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{y,C} \, |-\bar{+}\bar{-}\rangle &= |-\bar{+}\bar{-}\rangle \\
\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{y,C} \, |-\bar{-}\bar{+}\rangle &= |-\bar{-}\bar{+}\rangle
\end{aligned} \tag{8.5.1}
$$

(si veda l'importantissima precisazione alla nota [14]). Dato che tutti gli stati ($|+\bar{+}\bar{+}\rangle$, $|+\bar{-}\bar{-}\rangle$, $|-\bar{+}\bar{-}\rangle$ e $|-\bar{-}\bar{+}\rangle$) sono autostati dell'operatore con lo stesso autovalore $+1$, anche la loro sovrapposizione nello stato $|GHZ\rangle$ in (8.4.7), sarà autostato con lo

13 Come visto nell'esempio del teletrasposto quantistico, la soluzione è nell'interpretare il principio di relatività ristretta in un altro senso. Ovvero che nessuna informazione può essere scambiata a velocità maggiore di quella della luce.

14 ricordiamo che quello che questo corrisponde a *verificare* che gli stati sono autostati dell'operatore *NON* vuol dire applicare l'operatore allo stato.

stesso autovalore. Un analogo ragionamento e calcolo può essere fatto per gli operatori $\sigma_{y,A} \otimes \sigma_{x,B} \otimes \sigma_{y,C}$ e $\sigma_{y,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{x,C}$.

Arriviamo quindi a stabilire che lo stato $|GHZ\rangle$ è autostato di tutti e tre gli operatori con autovalore $+1$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{y,C} |GHZ\rangle &= |GHZ\rangle \\
\sigma_{y,A} \otimes \sigma_{x,B} \otimes \sigma_{y,C} |GHZ\rangle &= |GHZ\rangle \\
\sigma_{y,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{x,C} |GHZ\rangle &= |GHZ\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{8.5.2}
$$

possiamo quindi misurare in sequenza gli operatori *composti* $\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{y,C}$, $\sigma_{y,A} \otimes \sigma_{x,B} \otimes \sigma_{y,C}$ e $\sigma_{y,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{x,C}$ senza cambiare o perturbare lo stato $|GHZ\rangle$. In tutte e tre le misure otterremo l'autovalore $+1$.

Si noti che in questo caso, dato che gli operatori sono composti, [15] non possiamo attribuire un valore preciso alle misure sui *singoli* qubit. Ovvero, dato che misuriamo l'operatore $\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{y,C}$, non è possibile determinare quale sia il valore di $\sigma_{x,A}$. Infatti l'unica informazione che abbiamo è sul prodotto composto delle misure questo potrebbe essere sia $+1$ che -1.

Usando una interpretazione classica del risultato delle misure (come nella teoria delle variabili nascoste discussa sopra), potremmo dire che i qubit hanno un valore specificato (determinato a *priori)* lungo gli assi x e y. Usando la notazione del paragrafo precedente, indicheremo con X_i e Y_i per il qubit i. Ribadiamo che questi valori non sono determinati dalla misura che ha solo il compito di "rivelarli".

Con queste notazioni e interpretazioni, arriviamo a dire che la misura di $\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{y,B} \otimes \sigma_{y,C}$ non determina il valore di X_A, Y_B e Y_C univocamente ma solo il loro prodotto che è $+1$. Come visto in precedenza, questo potrebbe essere attribuito, ad esempio, sia alla terna $\{X_A, Y_B, Y_C\} = \{1, 1, 1\}$ che $\{X_A, Y_B, Y_C\} = \{1, -1, -1\}$ che a cui associamo valori diversi per i singoli qubit.

Nonostante ciò , le misure dei tre operatori di sopra impongono dei vincoli perchè devono soddisfare le seguenti equazioni

$$
\begin{aligned}
X_A Y_B Y_C &= 1 \\
Y_A X_B Y_C &= 1 \\
Y_A Y_B X_C &= 1.
\end{aligned}
\tag{8.5.3}
$$

Come fatto in precedenza moltiplichiamo i membri di sinistra ottenendo

$$(X_A Y_B Y_C)(Y_A X_B Y_C)(Y_A Y_B X_C) = X_A X_B X_C Y_A^2 Y_B^2 Y_C^2 = X_A X_B X_C \tag{8.5.4}$$

dove nell'ultima equazione abbiamo usato il fatto che $Y_i = \pm 1$ e quindi $Y_i^2 = 1$. Uguagliando questo al prodotto dei membri di sinistra otteniamo che necessariamente

$$X_A X_B X_C = 1. \tag{8.5.5}$$

15 É importante notare che qui stiamo supponendo di misurare l'operatore composto sui tre qubit mentre nel paragrfo precedente la misura era pensata come fatta separatamente sui tre qubit.

In altre parole, pur non essendo in grado di stabilire i valori dei singoli X_i, sappiamo che il loro prodotto deve essere uguale a $+1$. Questo è la predizione di una teoria con variabili nascoste in cui i valori X_i (qualsiasi essi siano) sono determinati inizialmente.

A questo punto, dopo aver fatto le prime tre misure (che, ricordiamo, non distruggono lo stato $|GHZ\rangle$) e ottenuto sempre $+1$, misuriamo l'operatore $\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{x,B} \otimes \sigma_{x,C}$. Riscrivendo tale stato nella base degli autostati $\{|\pm\rangle\}$ come in Eq. (8.4.4), possiamo verificare che

$$\begin{aligned}
\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{x,B} \otimes \sigma_{x,C} \, |++-\rangle &= -|++-\rangle \\
\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{x,B} \otimes \sigma_{x,C} \, |++-\rangle &= -|++-\rangle \\
\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{x,B} \otimes \sigma_{x,C} \, |+-+\rangle &= -|+-+\rangle \\
\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{x,B} \otimes \sigma_{x,C} \, |---\rangle &= -|---\rangle \,.
\end{aligned} \tag{8.5.6}$$

Quindi tutti questi stati sono autostati di $\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{x,B} \otimes \sigma_{x,C}$ con autovalore -1. Di conseguenza $|GHZ\rangle$ sarà autostato con lo stesso autovalore. La misura darà quindi risultato -1 senza perturbare lo stato.

Interpretando i risultati in senso classico come sopra, arriviamo a dire che, dalla misura risulta che

$$X_A X_B X_C = -1 \tag{8.5.7}$$

che è in contraddizione con quello che ci saremmo aspettati dall'equazione (8.5.5) che, ricordiamo, derivava come conseguenza delle prime tre misure.

Siamo arrivati alla conclusione le prime tre misure sono incompatibili con il risultato della quarta misura. Questa apparente contraddizione deriva dall'aver supposto che si possa attribuire agli stati dei valori fissati per le variabili X_i e, in questo senso, classici (ad esempio, assumere che il valore di X_A sia fissato ma che sia solamente "sconosciuto"). Nella interpretazione tradizionale della meccanica quantistica, i valori di X_i non sono determinati a priori ma durante la misura. Questo implica immediatamente la nonlocalità della meccanica quantistica.

Da questo punto di vista, l'esperimento discusso permette di discriminare fra questa visione (classica) e una visione puramente quantistica. La misura dell'osservabile $\sigma_{x,A} \otimes \sigma_{x,B} \otimes \sigma_{x,C}$ determina quale delle due interpretazioni sia quella vera. In questo senso basta la misura $X_A X_B X_C = -1$ per escludere l'interpretazione classica.

L'esperimento è stato effettivamente portato a termine nel laboratorio di Anton Zeilinger nel 2000 e ha confermato che la meccanica quantistica non ammette una descrizione in termini di variabili classiche. L'esperimento ha come conseguenza la conferma che la meccanica quantistica è una teoria intrinsecamente nonlocale.

VI – IL GIOCO DI *mermin-peres* (*pseudo-telepathy game*)

Un altro gioco in cui c'è un evidente vantaggio ad usare la meccanica quantistica è quello proposto da Mermin e Peres e, a volte chiamato, *pseudo-telepathy game*. Come nel caso precedente, nel caso classico non c'è una strategia che permetta ai giocatori di vincere sempre mentre questa e' possibile nella versione quantistica del gioco.

8.6.1 Struttura del gioco

Alice e Bob che sono separati e non possono comunicare. Un arbitro ha una matrice (o tabella) con 3 righe e 3 colonne. Ogni casella della tabella viene identificata con il numero della riga i e della colonna j (con $i, j = 1, 2, 3$).

L'arbitro sceglie casualmente il numero della riga i e il numero della colonna j e comunica ad Alice il numero della riga e a Bob il numero della colonna.

Alice e Bob devono fornire una terna ciascuno che andranno a formare i valori della riga i—esima (dati da Alice) e della colonna j—esima dati da Bob. In altre parole, se Alice a Bob hanno mandato rispettivamente le terne $\{a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}\}$ e $\{b_{i,1}, b_{i,2}, b_{i,3}\}$ (con $a_{i,k}, b_{i,k} = \pm 1$), l'arbitro compila la i—esima riga e la j—esima colonna della matrice M. Ad esempio, se $i = 3$ e $j = 4$ abbiamo (8.6.1)

$$M = \begin{bmatrix} & & b_{1,2} \\ & & b_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}/b_{3,3} \end{bmatrix}. \tag{8.6.1}$$

Come si può vedere, per qualsiasi scelta di i e j c'è sempre un elemento di sovrapposizione fra la terna di Alice e quella di Bob: l'elemento $M_{i,j}$. La condizione per vincere il gioco è che l'elemento $M_{i,j}$ della matrice sia definito univocamente ovvero che $a_{i,j} = b_{j,i}$.

Ci sono due vincoli sui numeri che Alice e Bob possono scegliere

1. possono essere solo $+1$ e -1.
2. per Alice il prodotto dei numeri scelti deve essere uguale a $+1$ e per Bob deve essere uguale a -1. Ovvero,

$$\begin{aligned} \Pi_{k=1}^{3} a_{i,k} &= a_{i,1} a_{i,2} a_{i,3} = +1 \\ \Pi_{k=1}^{3} j_{b,k} &= b_{i,1} b_{i,2} b_{i,3} = -1. \end{aligned} \tag{8.6.2}$$

Riassumendo, scelti i e j a caso ($i, j = 1, 2, 3$)

- Alice e Bob vincono se scelgono $a_{i,j} = b_{j,i}$.
- $a_{i,k} = \pm 1$ $b_{j,k} = \pm 1$ (con $k = 1, 2, 3$).
- $\Pi_{k=1}^{3} a_{i,k} = +1$ e $\Pi_{k=1}^{3} b_{j,k} = -1$.

8.6.2 Caso classico

Come detto Alice e Bob sono separati e non possono comunicare. Possono però aver stabilito una strategia prima di essere separati. La domanda è : esiste una strategia classica (prestabilita) che permetta ad Alice e bob di vincere sempre?

Alice e Bob riescono a vincere sempre se per ogni i e j riescono ad avere $a_{i,j} = b_{j,i}$ con i vincoli **??**. Questo corrisponderebbe ad riuscire a costruire una matrice tale che gli elementi delle righe moltiplicati diano $+1$ e gli elementi delle colonne moltiplicati diano -1. Tale strategia non esiste. Per dimostrarlo prendiamo la matrice

$$M = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & +1/-1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} +1 \\ +1 \\ -1/+1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1/+1 \end{array} & \end{array}$$

A destra delle righe è riportato il prodotto $\Pi_{k=1}^{3} a_{i,k}$ e sotto le colonne $\Pi_{k=1}^{3} b_{j,k}$. Come si può vedere, le prime due righe e colonne soddisfano i vincoli richiesti. L'ultima riga e colonna invece hanno vincoli incompatibili. Se scegliamo l'elemento $M_{3,3} = +1$ possiamo soddisfare la condizione $\Pi_{k=1}^{3} b_{3,k} = -1$ ma avremmo $\Pi_{k=1}^{3} a_{3,k} = -1$. Al contrario, scegliendo $M_{3,3} = -1$ avremo $\Pi_{k=1}^{3} a_{3,k} = +1$ come richiesto ma $\Pi_{k=1}^{3} b_{3,k} = +1$. Si può dimostrare che anche con altre scelte è impossibile costruire una matrice M che soddisfi tutte le condizioni richieste.

Alice e Bob possono stabilire una strategia a priori (che equivale a scegliere una particolare matrice M) ma non la possono cambiare dopo perchè non possono comunicare. Dato che la scelta di i e j è casuale, statisticamente Alice e Bob potranno vincere 8 volte su 9 (esattamente come gli elementi di M che soddisfano tutte le richieste) ma non potranno vincere sempre.

8.6.3 Caso quantistico

La versione quantistica del gioco segue le stesse regole della controparte classica in Sez. 8.6.1 con i vincoli (8.6.1) ma Alice e Bob possono condividere e misurare stati quantistici.

Supponiamo che condividano quattro qubit denominati con le lettere minuscole a, b, c, d *entangled* a coppie (stati di Bell); ovvero,

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \frac{1}{2}\Big(|0\rangle_a \otimes |0\rangle_b + |1\rangle_a \otimes |1\rangle_b \Big) \otimes \Big(|0\rangle_c \otimes |0\rangle_d + |1\rangle_c \otimes |1\rangle_d \Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(|0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_c |0\rangle_d + |0\rangle_a |0\rangle_b |1\rangle_c |1\rangle_d + |1\rangle_a |1\rangle_b |0\rangle_c |0\rangle_d + |1\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_c |1\rangle_d \Big) \end{aligned} \quad (8.6.3)$$

dove nell'ultimo passaggio, per semplicità , abbiamo omesso e sottinteso il simbolo di prodotto tensore $\otimes$.

I qubit a e c saranno di Alice mentre quelli b e d saranno di Bob. É conveniente riscrivere lo stato $|\psi_0\rangle$ raccogliendo i qubit di Alice e Bob $|i\rangle_a |j\rangle_b |k\rangle_c |l\rangle_d \equiv$

$|i\rangle_a |k\rangle_c |j\rangle_b |l\rangle_d = |ij\rangle_A |jl\rangle_B$ dove gli indici A e B indicano l'appartenenza ad Alice e Bob, rispettivamente. Con queste notazioni, lo stato $|\psi_0\rangle$ si può riscrivere

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \frac{1}{2}\Big(|0\rangle_a |0\rangle_c |0\rangle_b |0\rangle_d + |0\rangle_a |1\rangle_c |0\rangle_b |1\rangle_d + |1\rangle_a |0\rangle_c |1\rangle_b |0\rangle_d + |1\rangle_a |1\rangle_c |1\rangle_b |1\rangle_d \Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(|00\rangle_A |00\rangle_B + |01\rangle_A |01\rangle_B + |10\rangle_A |10\rangle_B + |11\rangle_A |11\rangle_B \Big) \end{aligned} \tag{8.6.4}$$

Come possiamo notare, *nei singoli contributi* lo stato di Alice è uguale a quello di Bob; ovvero, lo stato $|\psi_0\rangle$ e la somma di contributi del tipo $|ij\rangle_A |ij\rangle_B$.

Prima di andare avanti facciamo una breve osservazione matematica. Gli stati di Bell che compongono $|\psi_0\rangle$ in eq. (8.6.3) hanno la stessa struttura nelle basi di σ_z ($\{|0\rangle, |1\rangle\}$), σ_x ($\{|+\rangle, |-\rangle\}$) e σ_y ($\{|+_y\rangle, |-_y\rangle\}$) (dove $|\pm_y\rangle = 1/\sqrt{2}(\mp i|0\rangle + |1\rangle)$) [16]. In altri termini, abbiamo che

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|{+_y}{+_y}\rangle - |{-_y}{-_y}\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{8.6.5}$$

Questo significa che lo stato iniziale può essere scritto nelle tre basi differenti come

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \frac{1}{2}\Big(|00\rangle_A |00\rangle_B + |01\rangle_A |01\rangle_B + |10\rangle_A |10\rangle_B + |11\rangle_A |11\rangle_B \Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(|{+}{+}\rangle_A |{-}{-}\rangle_B + |{+}{-}\rangle_A |{+}{-}\rangle_B + |{-}{+}\rangle_A |{-}{+}\rangle_B + |{-}{-}\rangle_A |{-}{-}\rangle_B \Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(|{+_y}{+_y}\rangle_A |{+_y}{+_y}\rangle_B - |{+_y}{-_y}\rangle_A |{+_y}{-_y}\rangle_B \\ &\qquad - |{-_y}{+_y}\rangle_A |{-_y}{+_y}\rangle_B + |{-_y}{-_y}\rangle_A |{-_y}{-_y}\rangle_B \Big). \end{aligned} \tag{8.6.6}$$

Fatte queste premesse possiamo passare alla strategia quantistica che Alice e Bob adottano. Prima di essere separati, decidono di misurare lo stato entangled secondo la matrice M

$$M = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \mathrm{Id} & -\sigma_z \otimes \sigma_z \\ \sigma_x \otimes \mathrm{Id} & \sigma_x \otimes \mathrm{Id} & -\sigma_x \otimes \sigma_x \\ \sigma_x \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \sigma_x & -\sigma_y \otimes \sigma_y \end{bmatrix}. \tag{8.6.7}$$

e di mandare all'arbitro i risultati delle misure. La matrice (8.6.7) va interpretata nel seguente modo. Una volta ricevuto l'indice i, Alice fa in sequenza le misure indicate nella riga i. Ad esempio, se $i = 2$, Alice misurerà in sequenza gli osservabili $\mathrm{Id} \otimes \sigma_x$, $\sigma_x \otimes \mathrm{Id}$ e $-\sigma_x \otimes \sigma_x$ e manderà i risultati all'arbritro. Allo stesso modo, ricevuto l'indice $j = 1$, Bob misurerà $\mathrm{Id} \otimes \sigma_z$, $\mathrm{Id} \otimes \sigma_x$ e $\sigma_x \otimes \sigma_z$ e manderà i risultati della misura.

Per semplificare la discussione facciamo un esempio pratico e supponiamo che l'arbitro abbia estratto i due numeri $i = 1$ e $j = 1$. Alice quindi dovrà misurare gli operatori $\mathrm{Id} \otimes \sigma_z$, $\sigma_z \otimes \mathrm{Id}$ e $-\sigma_z \otimes \sigma_z$ mentre Bob $\mathrm{Id} \otimes \sigma_z$, $\sigma_z \otimes \mathrm{Id}$ e $-\sigma_z \otimes \sigma_z$.

Supponiamo che Alice faccia la prima misura di $\mathrm{Id} \otimes \sigma_z$. Notiamo che lo stato $|\psi_0\rangle$ non è autostato di $\mathrm{Id} \otimes \sigma_z$ ed i qubit di Alice e Bob sono *entangled*. Con-

16 Questo lo si può dimostrare con il calcolo diretto. Ad esempio ...... WRITE

Alice	$\|00\rangle$	$\|01\rangle$	$\|10\rangle$	$\|11\rangle$
$Id \otimes \sigma_z$	-1	+1	-1	+1
$\sigma_z \otimes Id$	-1	-1	+1	+1
$-\sigma_z \otimes \sigma_z$	-1	+1	+1	+1
$\prod_{k=1}^{3} a_{i,k}$	-1	-1	-1	-1

Table 8: Tabella della misure di Alice quando viene chiesta la riga $i = 1$. Le righe rappresentano gli osservabili che Alice misura. Questi sono tutti diagonali nella stessa base mostrata nella parte superiore della tabella. La prima misura di Alice fa collassare lo stato in uno degli stati riportati (con uguale probabilità di 1/4). Le misure successive non alterano lo stato. I rispettivi risultati delle misure sono mostrati nella tabella e il prodotto delle misure è riportato nell'ultima riga. Come si vede, questo è sempre uguale a -1.

cludiamo che alla misura di Alice i) con probabilità 1/4, il sistema composta dai quattro qubit collassa in uno dei seguenti stati $|00\rangle_A |00\rangle_B$, $|01\rangle_A |01\rangle_B$, $|10\rangle_A |10\rangle_B$ o $|11\rangle_A |11\rangle_B$, ii) anche il sistema di Bob collassa.

La prima importante osservazione è che *indipendentemente* dallo stato in cui il sistema collassa, gli stati di Alice e Bob *sono uguali*, i.e., come notato prima $|ij\rangle_A |ij\rangle_B$. Dato che la matrice delle misure M (8.6.7) impone ad Alice e Bob di misurare lo stesso osservabile sullo stesso stato, concludiamo che *per ogni* i *e* j *il risultato della misura sarà lo stesso* e quindi $a_{i,j} = b_{j,i}$. La prima condizione per la vincita è dunque soddisfatta.

Un discorso analogo si può fare per gli altri osservabili. Come mostrato in eq. (8.6.6), in qualsiasi base i termini di Alice e Bob sono identici quindi una misura dello stesso osservabile, farà collassare il sistema ma darà lo stesso valore.

La seconda condizione in 8.6.1 è banalmente soddisfatta perchè i risultati della misura sono due e quindi possono immediatamente essere associati ai valori $\pm$. Rimane quindi l'ultima condizione $\prod_{k=1}^{3} a_{i,k} = +1$ e $\prod_{k=1}^{3} b_{j,k} = -1$ che è la più complicata da verificare.

Supponiamo per semplificare che Alice faccia prima tutte le sue misure. Si può dimostrare che i tre osservabili che Alice misura possiedono una base comune; ovvero, esiste una base in cui tutti e tre sono diagonali [17].

Nello specifico, la la base comune ai tre osservabili che Alice misura per $i = 1$ è riportata in tabella 8 con i rispettivi autovalori (è immediato verificare che questi sono effettivamente autostati e autovalori). In termini di misura, questo significa che quando Alice farà la prima misura il sistema collasserà in uno degli stati riportati nella tabella (si ricordi che $|\psi_0\rangle$ non è autostato degli osservabili che Alice misura). Una volta avvenuto il collasso, le successive misure non saranno probabilistiche ma daranno un risultato certo. Ad esempio, se dopo la misura dell'osservabile $Id \otimes \sigma_z$, il sistema collassa in $|10\rangle$, Alice ottiene il valore $+1$. Dato che $|10\rangle$ è autostato di $\sigma_z \otimes Id$, il risultato della misura sarà certamente -1. Allo stesso modo la terza misura ($-\sigma_z \otimes \sigma_z$), darà con certezza il risultato $+1$.

17 In maniera più formale, si può dimostrare che gli operatori delle righe e delle colonne *commutano*. Dati due operatori A e B, si dice che commutano se $[A, B] \equiv AB - BA = 0$ (dove il simbolo $[\dots, \dots]$ indica l'operatore di commutazione). si può dimostrare che se due operatori commutano esiste una base in cui sono entrambi diagonali.

Bob	$\vert +0\rangle$	$\vert +1\rangle$	$\vert -0\rangle$	$\vert -1\rangle$
$Id \otimes \sigma_z$	-1	+1	-1	+1
$\sigma_x \otimes Id$	+1	+1	-1	-1
$\sigma_x \otimes \sigma_z$	-1	+1	+1	-1
$\Pi_{k=1}^{3} b_{i,k}$	+1	+1	+1	+1

Table 9: Tabella della misure di Bob quando viene chiesta la riga $j = 1$. Le righe rappresentano gli osservabili che Bob misura. Questi sono tutti diagonali nella stessa base mostrata nella parte superiore della tabella. La prima misura di Bob fa collassare lo stato in uno degli stati riportati (con uguale probabilità di 1/4). Le misure successive non alterano lo stato. I rispettivi risultati delle misure sono mostrati nella tabella e il prodotto delle misure è riportato nell'ultima riga. Come si vede, questo è sempre uguale a $+1$.

Come si può vedere il prodotto dei risultati delle misure di Alice è $(+1)(-1)(+1) = -1$. Si può facilmente verificare che questo accade per un qualsiasi stato in tabella 8.

Un discorso analogo può essere fatto per Bob. Sempre nel caso in cui $j = 1$, gli osservabili da misurare hanno un base di autostati comuni mostrata in tabella 9. Dopo la prima misura e rispettivo collasso, le misure seguenti saranno deterministiche e daranno un risultato certo. Come si può vedere dalla tabella 9, indipendentemente dallo stato su cui collassa il sistema, il prodotto delle tre misure sarà $\Pi_{k=1}^{3} b_{i,k} = +1$ come richiesto.

Dobbiamo fare una precisazione. Prendiamo ancora il caso in cui $i = 1$ e $j = 1$, supponiamo che Alice prima faccia la prima misura e che ottenga il risultato -1 quando misura $Id \otimes \sigma_z$. Per capire meglio, dobbiamo scrivere lo stato $|\psi_0\rangle$ in termini di autostati di $Id \otimes \sigma_z$ facendo però attenzione ai rispettivi autovalori. Otteniamo

$$|\psi_0\rangle \quad = \quad \frac{1}{2}\Big[\Big(|00\rangle_A |00\rangle_B + |01\rangle_A |01\rangle_B \Big) + \Big(|10\rangle_A |10\rangle_B + |11\rangle_A |11\rangle_B \Big)\Big] \tag{8.6.8}$$

dove abbiamo separato gli autostati con autovalore -1 da quelli con autovalore $+1$. La misura di $Id \otimes \sigma_z$ farà collassare il sistema nella sovrapposizione $\Big(|00\rangle_A |00\rangle_B + |01\rangle_A |01\rangle_B$ perchè non può distinguere stati con stesso autovalore. In ogni caso, la misura successiva dell'osservabile $\sigma_z \otimes Id$ distinghuerà i due stati stato che $|00\rangle_A$ ha autovalore -1 e $|01\rangle_A$ ha autovalore $+1$. Quindi, è la sequenza completa di misura di Alice che seleziona uno degli autostati in tabella 8.

L'ultimo punto da chiarire è cosa succede con le misure in sequenza di Alice e di Bob. Supponiamo che Alice abbia fatto le sue misure e selezionato lo stato $|01\rangle_A$. Come discusso [si veda eq. (8.6.6) e relativi commenti], anche lo stato di Bob sarà $|01\rangle_B$. Questo però non è un autostato degli osservabili che Bob deve misurare (tabella 9). Cosa succederà ?

Per capirlo basta riscrivere lo stato $|01\rangle_B$ nella base in tabella 9. Abbiamo (ricordiamo che $|0\rangle = 1/\sqrt{2}(|+\rangle + |-\rangle)$)

$$|01\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle_B + |-1\rangle_B). \tag{8.6.9}$$

La misura di Bob di $\mathrm{Id} \otimes \sigma_z$ non distinghuerà e non farà collassare lo stato (questo è già autostato con autovalore 1). La seconda misura di $\sigma_x \otimes \mathrm{Id}$ farà collassare (con uguale probabilità) il sistema nello stato $|+1\rangle_B$, nel qual caso Bob otterrà $+1$, o $|-1\rangle_B$, nel qual caso Bob otterrà -1. Quindi, anche in questo caso, sono le misure sequenziali che individuano (statisticamente) uno degli stati in tabella 9. Il fatto che ci sia o meno un collasso e quando questo avvenga (durante la prima o seconda misura) è irrilevante perchè il prodotto delle tre misure sarà sempre $+1$.

Naturalmente, la discussione fatta non dipende dal fatto di aver scelto $i = 1$ e $j = 1$. Discorsi analoghi con identiche conclusioni si possono fare per generici i e j. Abbiamo quindi dimostrato che nel caso quantistico esiste una strategia che permettere ad Alice e Bob di vincere sempre contro una probabilità massima di 8/9 nel caso classico.