Calcolo differenziale ed integrale 2 – Prova scritta
4 Luglio 2019

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti serie convergono semplicemente e/o assolutamente:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{\frac{n^2}{n^2-1}}-e\right)$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^5\,3^{2n}}{10^n}$.

Soluzione:

a) Sia $a_n = e^{\frac{n^2}{n^2-1}} - e$. Si osserva immediatamente che

$$a_n = e\left(e^{\frac{n^2}{n^2-1}-1}-1\right) = e\left(e^{\frac{1}{n^2-1}}-1\right) \geq 0 \quad \forall\, n \geq 0,$$

e quindi la serie è a termini positivi. Visto che $e^{\frac{1}{n^2-1}}-1$ è asintotica a $\frac{1}{n^2-1}$, la serie di partenza ha lo stesso carattere di

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1},$$

e quindi converge.

b) Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5\,3^{2n}}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

Possiamo usare il criterio della radice o quello del rapporto.

- Radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^5\,3^{2n}}{10^n}} = n^{5/n}\,\frac{3^2}{10} \longrightarrow_n \frac{9}{10} < 1,$$

  e quindi la serie di partenza converge assolutamente.

- Rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5\,3^{2(n+1)}}{10^{n+1}}\,\frac{10^n}{n^5\,3^{2n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^5\frac{3^2}{10} \longrightarrow_n \frac{9}{10} < 1,$$

  e quindi si conclude come prima.

A questo punto, visto che la serie di partenza converge assolutamente, essa converge anche semplicemente.

Si poteva anche studiare prima la convergenza semplice e poi quella assoluta. In questo caso possiamo applicare il criterio di Leibnitz visto che:

- $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$;
- si ha

$$\lim_n a_n = \lim_n n^5\left(\frac{9}{10}\right)^n = \lim_n \frac{n^5}{\left(\frac{10}{9}\right)^n} = \lim_n \frac{n^5}{e^{n\lg(10/9)}} = 0$$

  (limite notevole, oppure ricordando che l'esponenziale tende a $+\infty$ di ordine superiore ad ogni potenza positiva);
- $(a_n)_n$ è decrescente perché $(n^5)_n$ è crescente e

$$\frac{3^{2n}}{10^n} = \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

  è termine generale di una successione decrescente (essendo $9/10 < 1$).

Esercizio 2. Data la funzione f di periodo 2π definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\pi, 0) \\ 0 & x \in [0, \pi) \end{cases},$$

Determinare il valore della sua serie di Fourier sull'intervallo $[\pi, \pi]$.

Soluzione:
Visto che f è continua a tratti su $[-\pi, \pi]$ con punti di discontinuità $-\pi, 0$ e π, per il teorema di Dirichlet abbiamo che la sua serie di Fourier converge su tale intervallo e

$$\mathcal{F}f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2} = \frac{1}{2} & x = -\pi, \pi \end{cases}$$

Esercizio 3. Data la funzione $f(x) = x^2 \ln(2 - \cos x)$, determinare il polinomio di Taylor di ordine 5 centrato nel punto $x_0 = 0$.

Soluzione:
Si ha $f(x) = x^2 \ln(1 + (1 - \cos x))$:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + R_2(t) \qquad 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + R_4(x),$$

pertanto:

$$f(x) = x^2 \left(\frac{x^2}{2} + R_4(x) - \frac{(\frac{x^2}{2} + R_4(x))^2}{2} \right) + R_5(x).$$

Troncando all'ordine 5 troviamo:

$$f(x) = \frac{x^4}{2} + R_5(x)$$

Esercizio 4. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$$

a) Stabilire se f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ e in tal caso calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0, f(1, 0))$.
b) Determinare i punti critici di f e stabilire se sono massimi relativi, minimi relativi o punti sella.
c) Stabilire se f ammette massimo e minimo assoluti sull'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2y^2 = 1\}$ e in caso affermativo determinarli.

Soluzione:
La funzione f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ perché è il prodotto di due funzioni differenziabili. Si ha:

$$\nabla f(x, y) = (e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x), e^{x-y}(2y^2 - x^2 - 4y))$$

e quindi $\nabla f(1, 0) = (3e, -e)$. L'equazione del piano tangente è:

$$z - e = 3e(x-1) - ey, \quad \text{o, equivalentemente} \quad z = 3ex - ey - 2e.$$

I punti critici sono i punti in cui $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x) = 0 \\ e^{x-y}(2y^2 - x^2 - 4y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ 2y^2 - x^2 - 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 2y^2 - x^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x = 2y \\ -2y^2 - 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ y(y+2) = 0 \end{cases}$$

da cui deduciamo che i punti critici sono: $P_0(0,0)$ e $P_1(-4,-2)$. Per stabilire la natura dei punti critici utilizziamo il criterio della matrice Hessiana. Prima di tutto notiamo che la funzione è di classe C^2 su $\mathbb{R}$ e possiamo quindi calcolare le derivate seconde. Si ha:

$$Hf(x,y) = e^{x-y}\begin{bmatrix} x^2-2y^2+4x+2 & -x^2+2y^2-2x-4y \\ -x^2+2y^2-2x-4y & -2y^2+x^2+8y-4 \end{bmatrix}$$

Da qui deduciamo che

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad Hf(-4,-2) = e^{-2}\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$$

e quindi $(0,0)$ è punto sella (il determinante è minore di zero), mentre $(-4,-2)$ è punto di massimo relativo.

Massimo e minimo assoluto di f su C esistono per terorema di Weierstrass. PEr trovarli usiamo teorema dei moltiplicatori di Lagrange sia $g(x,y) = x^2-2y^2-1$. Si ha $\nabla g(x,y) = (2x,-4y)$ e quindi non ci sono punti critici sul vincolo. I candidati massimi e minimi soddisfano

$$\det\begin{bmatrix} e^{x-y}(x^2-2y^2+2x) & e^{x-y}(2y^2-x^2-4y) \\ 2x & -4y \end{bmatrix} = 0,$$

ovvero $-4ye^{x-y}(x^2-2y^2+2x)-2xe^{x-y}(2y^2-x^2-4y)=0$ ed inoltre soddisfano il vincolo. Equivalentemente:

$$\begin{cases} -4y(x^2-2y^2+2x)-2x(2y^2-x^2-4y)=0 \\ x^2-2y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} -4y(1+2x)-2x(-1-4y)=0 \\ x^2-2y^2=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2y+x=0 \\ x^2-2y^2=1 \end{cases}$$

Pertanto, i possibili massimi e minimi assoluti di f su C verificano

$$\begin{cases} x=2y \\ y^2=1/2 \end{cases}$$

da cui otteniamo due soli punti $A(2/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ e $B=(=-2/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$. Calcolando f A è il punto di massimo assoluto e B il punto di minimo assoluto (su C).