3. Serie di funzioni

Il concetto di somma infinita si estende naturalmente al caso di funzioni.

Def. 1.26. Data una successione di funzioni definite sullo stesso insieme $I \subset \mathbb{R}$

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots, \qquad x \in I,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

a) converge puntualmente su I, se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge per ogni $x \in I$ e, in tal caso, la funzione $f : I \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{25}$$

è detta somma della serie;

b) converge assolutamente su I se la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge per ogni $x \in I$.

La funzione $f_n(x)$ è detta n-esimo termine generale della serie.

. Se per qualche $x \in I$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverge o è indeterminata, bisogna restringere il dominio della funzione somma $f(x)$ all'insieme

$$\{x \in I \mid \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge}\},$$

detto insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni ed il dominio della funzione somma definita dalla (25).

Esempio 1.27 (Serie geometrica)**.** Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. L'n-esime termine generale è

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^n.$$

Per le proprietà della serie geometrica, Esempio 1.9, la serie converge se $-1 < x < 1$ e non converge se $x \leq -1$ o $x \geq 1$. Ne segue che l'insieme di convergenza puntuale è $(-1, 1)$ e la funzione somma è

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}. \tag{26}$$

La funzione $x/(1-x)$ è definita per ogni $x \neq 1$, tuttavia l'uguaglianza (26) vale solo per $-1 < x < 1$, cioè sull'insieme di convergenza puntuale.

Il seguente risultato fornisce un criterio sufficiente per la convergenza.

Teo 1.28 (Criterio di Weierstrass)**.**
Data una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su I, se la serie numerica a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)| < +\infty, \tag{27}$$

allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente e puntualmente su I.

Dimostrazione. Posto $a_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)| \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, allora

$$|f_n(x)| \leq a_n \qquad \forall x \in I,\ n \geq 1, \tag{28}$$

e, per ipotesi, la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Fissato $x \in I$, la condizione (28) e il criterio del confronto (per serie numeriche) assicurano che la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge. Per l'arbitrarietà di $x \in I$, ne segue che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente e, quindi, puntualmente su I. $\square$

. Se è soddisfatta la condizione (27) si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente su I. Il criterio di Weierstrass mostra che la convergenza totale implica quella puntuale, ma in generale non è vero il viceversa, come mostra l'Esempio 1.29.

. Per verificare la convergenza totale, anziché usare la (27) è sufficiente trovare una successione numerica positiva

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

che soddisfi le seguenti condizioni

$$\begin{cases} |f_n(x)| \leq a_n \text{ per ogni } x \in I \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty. \end{cases} \tag{29}$$

Esempio 1.29. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$

a) La serie converge puntualmente solo in $(-1, 1]$. Se $|x| < 1$, la serie converge assolutamente e, quindi, puntualmente. Se $x = 1$, la convergenza puntuale segue dal criterio di Leibnitz. Se $x = -1$, la serie diverge (serie armonica). Se $|x| > 1$, la serie non converge poiché non è soddisfatta la condizione di Cauchy ($\lim_{n \to +\infty} |\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n| = +\infty$). In particolare, l'insieme di convergenza puntuale è l'intervallo $(-1, 1]$.
b) Poiché
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0,1]} |\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$
la serie non converge totalmente in $[0, 1]$.
c) La serie converge totalmente in $[0, \frac{1}{2}]$. Infatti
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0,\frac{1}{2}]} |\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n} < +\infty.$$

La convergenza totale garantisce che la funzione somma abbia le stesse proprietà di regolarità delle funzioni f_n.

Cor. 1.30 (Continuità della somma)**.**
Data una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su I, se

a) le funzioni $f_n(x)$ sono continue su I per ogni $n \geq 1$,
b) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente su I ad $f(x)$,

allora $f(x)$ è continua su I.

Cor. 1.31 (Integrazione termine a termine)**.**
Data una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su $[a, b]$, se

a) le funzioni f_n sono continue in $[a, b]$ per ogni $n \geq 1$,
b) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente su $[a, b]$ ad $f(x)$,

allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Cor. 1.32 (Derivazione termine a termine)**.**
Data una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, dove le funzioni $f_n(x)$ sono definite su un intervallo I, se

a) le funzione $f_n(x)$ sono derivabili e le derivate $f_n'(x)$ sono funzioni continue per ogni $n \geq 1$,

b) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge puntualmente su* I,
c) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *converge totalmente su* I,

allora $f(x)$ *è derivabile e*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \in I.$$

Esempio 1.33. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2},$$

converge assolutamente su $\mathbb{R}$ poiché, fissato $x \in \mathbb{R}$

$$|\frac{x}{x^2 + n^2}| = \frac{1}{n^2} \frac{|x|}{\frac{x^2}{n^2} + 1}$$

dove $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|}{\frac{x^2}{n^2}+1} = |x|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < +\infty$.

Tuttavia la serie non converge totalmente su $\mathbb{R}$. Infatti, essendo f_n una funzione dispari e positiva su $[0, +\infty)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,+\infty)} f_n(x).$$

Inoltre, essendo $f_n'(x) = \frac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2}$, f_n ha un punto di massimo (assoluto) in $x = n$ ed il massimo assoluto è $f_n(n) = 1/(2n)$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty.$$

Invece la serie converge totalmente su ogni intervallo $[a, b]$. Infatti, posto $R = \max\{|a|, |b|\}$, allora

$$\sup_{x \in [a,b]} |\frac{x}{x^2 + n^2}| \leq \sup_{x \in [-R,R]} |\frac{x}{x^2 + n^2}| \leq \frac{R}{n^2}$$

dove $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < +\infty$.

Analogamente, si dimostra che la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - x^2}{(x^2 + n^2)^2}$$

converge totalmente su ogni intervallo $[a, b]$ poiché

$$\sup_{x \in [a,b]} |\frac{n^2 - x^2}{(x^2 + n^2)^2}| \leq \frac{n^2 + R^2}{n^4}.$$

Per il teorema sulla derivazione termine a termine, la funzione somma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

è di classe C^1 su ogni intervallo $[a, b]$ e, quindi, $f \in C^1(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché la serie converge totalmente e, quindi, uniformemente su $[0, 1]$, per il teorema di integrazione termine a termine

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{x^2 + n^2} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \log(t^2 + n^2) \,|_0^1$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \log(\frac{1 + n^2}{n^2}).$$

Concludiamo con un risultato utile per dimostrare che una serie non converge totalmente su un intervallo aperto.

Cor. 1.34. *Data una serie di funzioni* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *definite su* $[a,b]$ *se*

a) le funzioni $f_n(x)$ *sono continue su* $[a,b]$ *per ogni* $n \geq 1$*;*
b) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge totalmente su* (a,b)*;*

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge totalmente su* $[a,b]$ *e la funzione somma è continua su* $[a,b]$.

Dimostrazione. Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su (a,b), fissato $n \geq 1$ e posto $a_n = \sup_{a<x<b} |f_n(x)|$, allora per ogni $x \in (a,b)$

$$|f_n(x)| \leq a_n.$$

Poiché f_n è continua in $x = a$, allora $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ e, quindi $|f_n(a)| \leq a_n$ ed analogamente $|f_n(b)| \leq a_n$. Segue che

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x)| \leq a_n.$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su (a,b), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ e, quindi, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su $[a,b]$. □

Esempio 1.35. La serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ non converge totalmente su $(-1,1)$ perché se per assurdo convergesse totalmente, essendo $f_n(x) = x^n$ continue su $[-1,1]$, si avrebbe convergenza totale su $[-1,1]$ e, per il criterio di Weierstrass, convergenza puntuale su $[-1,1]$.