Algebra Lineare e Analisi Numerica

Matteo Varbaro

Martedì 11-13, Giovedì 11-13

Esercizio 1

Calcolare il determinante della seguente matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando rispetto alla *terza colonna*, abbiamo

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-3) = -1.$$

Se avessimo sviluppato rispetto alla *seconda riga*...

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (1-0) + 1 \cdot (2-0) = -1.$$

Poiché $\det A \neq 0$, A è invertibile: qual è l'inversa?

Esercizio 1 (continuazione)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \quad A^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \; c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$c_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = -3, \; c_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = 2, \; c_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = -10, \; c_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 10, \; c_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -10 & 10 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 10 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Dire per quali $h \in \mathbb{R}$ la seguente matrice $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ è invertibile:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & h \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando rispetto alla *seconda riga*, abbiamo

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & h \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & h \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{0}_{R_3 = 2R_1} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & h \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

D'altronde sviluppando rispetto alla *prima colonna* si ha:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & h \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -2 & h \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & h \end{vmatrix} = 5(-4 + 2h) - (-h + 2) = 11h - 22,$$

e cioè $\det A = 11(2 - h)$. Quindi A è invertibile se e solo se $h \neq 2$.

Esercizio 3

Date due matrici invertibili $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, dire quali delle seguenti alternative sono corrette:

1. $A \cdot B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile.
2. Le matrici trasposte A^T e B^T sono invertibili.
3. $A + B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile.
4. $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$.

1. SI: Se $A^{-1}, B^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, allora sfruttando la proprietà associativa si ha: $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot \mathrm{I}_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \mathrm{I}_n$. Analogamente $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = \mathrm{I}_n$, dunque $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
2. SI: Chiamando $C = A^{-1}$, siccome $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n^T = (A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$ e $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n^T = (C \cdot A)^T = A^T \cdot C^T$, A^T è invertibile e la sua inversa è $C^T = (A^{-1})^T$. Analogamente B^T è invertibile e la sua inversa è $(B^{-1})^T$.
3. NO: se $B = -A$, $A + B = 0$ non è invertibile.
4. NO: se $A = \mathrm{E}_{12}$ e $B = \mathrm{E}_{23}$, $(AB)^{-1} = \mathrm{E}_{23}\,\mathrm{E}_{12} \neq \mathrm{E}_{12}\,\mathrm{E}_{23} = A^{-1}B^{-1}$.

Esercizio 3 (continuazione)

Come controesempio per 3 basta scegliere $A = \mathrm{I}_n$ e $B = -\mathrm{I}_n$. Come controesempio per 4, scegliamo $n = 2$ e

$$A = \mathrm{E}_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \mathrm{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Si ha

$$A^{-1} = \mathrm{E}_{21}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B^{-1} = \mathrm{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dunque $B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B^{-1}$.

Esercizio 4

Calcolare il rango della seguente matrice $A \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avendo 3 righe, sicuramente $\mathrm{rk}(A) \leq 3$. Il minore di ordine 2 in alto a sinistra, $M = (R_1 R_2 | C_1 C_2)$, ha determinante $1 + 2 = 3 \neq 0$, quindi $\mathrm{rk}(A) \geq 2$. Il teorema di Kronecker ci assicura che $\mathrm{rk}(A) = 3$ se e solo se uno fra i minori di ordine 3 che orlano M ha determinante non nullo:

$$\det(C_1 C_2 C_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0,$$

$$\det(C_1 C_2 C_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 + 10 - 5 = 0.$$

Quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$.

Esercizio 4 (modo alternativo)

Alternativamente, visto che il rango di A è uguale al numero di pivot in una sua ridotta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, essendo i pivot due, anche in questo modo troviamo $\mathrm{rk}(A) = 2$.

Esercizio 5

Sia $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ una matrice di rango 2, e si consideri il sistema lineare $AX = 0$. Allora:

1. il sistema ammette ∞^1 soluzioni.
2. il sistema non ammette soluzioni.
3. il sistema ammette un'unica soluzione.
4. il sistema ammette ∞^2 soluzioni.

Poiché il sistema $AX = 0$ è omogeneo, ammette almeno una soluzione ($X = 0$), possiamo usare il teorema di Rouché-Capelli che assicura che esistono ∞^{n-p} soluzioni dove n è il numero delle incognite e $p = \mathrm{rk}(A)$. Nel nostro caso $n = 4$ e $p = 2$, dunque l'unica opzione corretta è la quarta.

Esercizio 6

Discutere le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \longrightarrow (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad 3 = 2 + 1 \textit{ pivot}.$$

Dunque, essendoci un pivot nell'ultima colonna della riduzione di $(A \mid B)$, il sistema non ammette soluzioni.

Esercizio 6'

Discutere le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \longrightarrow (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textit{incognite pivotali}: \ x_1, x_2.$$

Dunque, essendo il rango di A uguale al numero di pivot nelle prime 4 colonne, $\mathrm{rk}(A) = 2$, e non essendoci pivot nell'ultima colonna $\mathrm{rk}(A \mid B) = \mathrm{rk}(A) = 2$; quindi per R-C esistono $\infty^{n-p} = \infty^2$ soluzioni.

Esercizio 6' (continuazione)

Quindi risolvere il sistema dell'esercizio equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4 + 2 \\ x_2 = -5x_3 + 2x_4 - 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[e\ S\ l'insieme\ delle\ soluzioni]{chiamando\ s=x_3\ e\ t=x_4} S = \left\{ \begin{pmatrix} s - 2t + 2 \\ -5s + 2t - 1 \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 7

Determinare, se esistono, valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema lineare non ammette soluzioni:

$$\begin{cases} (a-1)x + y - z = 1 \\ x + ay + z = 1 + a \\ x + y + z = 2a \end{cases} \longrightarrow (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1+a \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{array} \right)$$

Poiché il sistema non ammette soluzione se e solo se $\mathrm{rk}(A) < \mathrm{rk}(A \mid B)$ per R-C, e siccome $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(A \mid B) \leq 3$, prima di tutto troviamo gli $a \in \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{rk}(A) < 3$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (1+a) - (a) + (a^2 - a - 1) = a^2 - a,$$

quindi $\mathrm{rk}(A) < 3 \iff \det A = 0 \iff a \in \{0, 1\}$.

Esercizio 7 (continuazione)

Quindi se $a \neq 0, 1$ si ha $\text{rk}(A) = \text{rk}(A \mid B) = 3$, quindi per R-C il sistema ammette soluzioni (una sola) in tal caso. Se $a = 0$

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

scegliendo il minore $(C_2 C_3 C_4)$, $\det(C_2 C_3 C_4) = (-1) - (2) = -3 \neq 0$. Quindi $a = 0 \implies \text{rk}(A \mid B) = 3 > \text{rk}(A)$, dunque per R-C il sistema non ammette soluzioni se $a = 0$. Se $a = 1$

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

poiché $R_3 = R_2$ in questo caso $\text{rk}(A \mid B) < 3$. Siccome il minore $(R_1 R_2 \mid C_1 C_2)$ ha determinante non nullo, $\text{rk}(A) \geq 2$. Ne segue $\text{rk}(A) = \text{rk}(A \mid B) = 2$, quindi per R-C il sistema ammette (∞^1) soluzioni se $a = 1$.

Esercizio 8

Dire quali affermazioni sono esatte per i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. v, v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.
2. v è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.
3. v, v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.
4. v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Per la quarta affermazione, calcoliamo il rango di $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:
osserviamo che il determinante del minore $(R_2 R_3 R_4)$ è $-(0) + (-1) = -1 \neq 0$, quindi $\mathrm{rk}(A) = 3$, cioè v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 8 (continuazione)

Per la seconda affermazione, osserviamo che v è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 se e solo se il sistema lineare $AX = v$ ammette soluzioni (dove A è la matrice $(v_1 \;\; v_2 \;\; v_3)$ della slide precedente). Siccome $\mathrm{rk}(A) = 3$, per R-C la frase in verde è equivalente al fatto che $\mathrm{rk}(A \mid v)$ sia uguale a 3, che a sua volta è equivalente al fatto che la seguente matrice abbia determinante nullo:

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Siccome $R_1 = R_3$, effettivamente $\det(A \mid v) = 0$. Dunque v è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 (infatti $v = v_1 + v_2 + v_3$). Di conseguenza anche la prima affermazione è esatta, mentre la terza affermazione è l'unica sbagliata.

Esercizio (Completamento a base)

Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. È possibile perché v_1, v_2 sono linearmente indipendenti (non essendo proporzionali). Aggiungendo $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, v_1, v_2, w sono una base di $\mathbb{R}^3$: sono tre vettori e

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Esercizio

Calcolare il rango di $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2h & -2 \\ -3 & 2+2h & -1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overset{1\leq \mathrm{rk}(A)\leq 3}{\mathrm{rk}(A)=3 \iff \det A \neq 0}.$$

Osserviamo che $\det A = \det(\mathrm{E}_{21}(-1)A)$, che è uguale a

$$\begin{vmatrix} -3 & 2h & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + h\begin{vmatrix} 2h & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + h(2h+4) = 2h^2 + 4h - 6.$$

Ma $h^2 + 2h - 3 = 0$ se e solo se $h = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}$, cioè se e solo se $h = 1$ o $h = -3$. Quindi $\mathrm{rk}(A) = 3$ se e solo se $1 \neq h \neq -3$.

Esercizio (continuazione)

D'altra parte, per ogni $h \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2h & -2 \\ -3 & 2+2h & -1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango ≥ 2: infatti

$$\det(R_1 R_2 \mid C_1 C_3) = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Dunque, $\mathrm{rk}(A) = 2$ se $h = 1, -3$ e $\mathrm{rk}(A) = 3\ \forall\ h \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$.

Esercizio

Usare Cramer per risolvere il seguente sistema a 3 equazioni e 3 incognite:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \quad \to \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$, il sistema ha una sola soluzione $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4}{5}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{9}{5}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{3}{5}.$$