2. Serie numeriche

Il concetto di serie estende la definizione di somma al caso in cui ci sia un numero infinito di addendi. Un esempio è l'espansione decimale di una frazione, ad esempio

$$\frac{13}{45} = 0.28888\ldots = \frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{10^3} + \ldots + \frac{8}{10^n} + \ldots .$$

Def. 1.7 (Serie)**.** Data una successione di numeri reali

$$a_1, \, a_2, \, \ldots, \, a_n, \, \ldots \qquad n \in \mathbb{N}, \, n \geq 1,$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

a) converge se se esiste finito

$$\lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = s \in \mathbb{R},$$

il limite s è detto somma della serie e si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

b) diverge se

$$\lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \pm\infty$$

e si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty;$$

c) è indeterminata se non esiste

$$\lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) .$$

Il fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga, diverga o sia indeterminata è detto il carattere della serie.

È comodo definire per ogni $n \geq 1$

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= \ a_1 + a_2 \\ \ldots &= \ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \qquad (14) \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

Il termine a_n è detto n-esimo termine generale ed s_n è detto somma parziale n-esima. Se la serie converge, allora

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s.$$

Esempio 1.8. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n})$ diverge a $+\infty$. Infatti, dato $n \geq 1$, la somma parziale n-esima

$$\begin{aligned} s_n &= \log(1 + \frac{1}{1}) + \log(1 + \frac{1}{2}) + \ldots + \log(1 + \frac{1}{n-1}) + \log(1 + \frac{1}{n}) \\ &= \log(\frac{2}{1}) + \log(\frac{3}{2}) + \ldots + \log(\frac{n}{n-1}) + \log(\frac{n+1}{n}) \\ &= \log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1). \end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty,$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n})$ diverge a $+\infty$.

I seguenti esempi introducono alcune serie notevoli.

Esempio 1.9 (Serie geometrica)**.** Dato $q \in \mathbb{R}$, la serie geometrica di ragione q

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \dots$$

ha il seguente carattere

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{q}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}.$$

Infatti,

$$s_n = q + q^2 + \dots + q^n \qquad n \geq 1.$$

Se $q = 1$, allora $s_n = n$ e

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty,$$

per cui la serie diverge a $+\infty$.
Se $q \neq 1$,

$$s_n = \frac{1-q}{1-q}\left(q + q^2 + \dots + q^n\right) = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} \qquad n \geq 1,$$

per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \left\{ \begin{array}{cc} +\infty & q > 1 \\ \frac{q}{1-q} & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{array} \right. .$$

► Il carattere della serie geometrica può essere studiato anche senza calcolare esplicitamente le somme parziali.

a) Se $q \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ è una serie a termini positivi il cui termine generale q^n non tende a zero. La condizione necessaria di Cauchy e il carattere delle serie a termini positivi implicano che $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ diverge a $+\infty$.
b) Se $|q| \leq 1$,

$$|q^n| = (n^2|q|^n)\,\frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geq 1,$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e $\lim_{n\to+\infty} n^2|q|^n = 0$, allora il criterio del confronto asintotico assicura che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |q^n|$ converge e, quindi, converge $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.
c) Se $q \leq -1$,

$$q_n = (-1)^n|q|^n \qquad \forall n \geq 1,$$

la successione $(|q|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente ($|q| \geq 1$) e non tende a 0, quindi il criterio di Leibnitz garantisce che la serie è indeterminata. ◄

Esempio 1.10 (Serie armonica generalizzata)**.** Dato $\alpha > 0$, la serie armonica generalizzata di esponente α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

ha il seguente caratettere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

► Poiché la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ è positiva e decrescente su $[1,+\infty)$ e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases},$$

il criterio del test integrale implica che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \text{diverge a } +\infty & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Si può provare la divergenza della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ in modo alternativo. Infatti, la successione $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_n$ è crescente e converge al numero di Nepero e. Quindi

$$1 \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq \mathrm{e} \qquad \forall n \geq 1$$

e la crescenza del logaritmo assicura

$$0 \leq \log(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq 1.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n})$ diverge, il criterio del confronto implica che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. ◄

Date due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, i teoremi sui limiti assicurano che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tranne quando si ha una forma indeterminata.
La (14) implica che la successione delle somme parziali $(s_n)_n$ è definita per ricorrenza

$$\begin{cases} s_1 = a_1 \\ s_n = s_{n-1} + a_n & n \geq 2 \end{cases}. \tag{15}$$

Date due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ per cui esiste $\overline{n} \geq 1$ tale che

$$a_n = b_n \qquad \forall n \geq \overline{n},$$

allora le due serie hanno lo stesso carattere, ma, in generale, hanno somma diversa. Inoltre, se $b_n = 0$ per ogni $n < \overline{n}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ si denota semplicemente con

$$\sum_{n=\overline{n}}^{+\infty} a_n = a_{\overline{n}} + a_{\overline{n}+1} + \ldots$$

Analogamente l'indice iniziale $\overline{n}$ può essere 0 o un intero negativo.

Esempio 1.11. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge se e solo se $|q| < 1$ con somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Prop. 1.12 (Condizione necessaria di Cauchy per le serie)**.**
Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è una serie convergente, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. La definizione di somma parziale implica che

$$s_n - s_{n-1} = (a_1 + \ldots + a_n) - (a_1 + \ldots + a_{n-1}) = a_n \qquad \forall n \geq 1$$

per cui

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

con $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente. □

☡. La condizione $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ non è sufficiente, in generale, a garantire la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ad esempio, $\lim_{n\to+\infty} \log(1+\frac{1}{n}) = 0$, ma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n})$ diverge a $+\infty$.

2.1. **Serie a termini positivi.** Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è detta **a termini positivi** se $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. I seguenti criteri caratterizzano il carattere di queste serie.

Prop. 1.13. *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini positivi converge oppure diverge a $+\infty$. Inoltre, se esiste $C > 0$ tale che*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq C \qquad \textit{per ogni } n \geq 1, \tag{16}$$

allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente.

Dimostrazione. La definizione di somma parziale implica che

$$s_n = (a_1 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = s_{n-1} + a_n$$

per ogni $n \geq 1$. Poiché $a_n \geq 0$, allora $s_n \geq s_{n-1}$, cioé la successione delle somme parziali $(s_n)_n$ è crescente ed il teorema sulle successioni monotone implica che esiste

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sup\{s_n \,|\, n \geq 1\} = s \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\},$$

cioé, la la serie è convergente o divergente a $+\infty$. Se, inoltre, vale la (16), allora $s_n \leq C$ per ogni $n \geq 1$ e, quindi, $s = \sup\{s_n \,|\, n \geq 1\}$ è finito, cioé la serie converge. □

La precedente proposizione implica che una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini positivi è convergente se e solo se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Prop. 1.14 (Criterio del confronto)**.**
Data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini positivi,

$$\textit{se per ogni } n \geq 1 \textit{ esiste } b_n \geq a_n \textit{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \quad \textit{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \tag{17a}$$

$$\textit{se per ogni } n \geq 1 \textit{ esiste } b_n \leq a_n \textit{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \quad \textit{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \tag{17b}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (17a). Per ogni $n \geq 1$, poichè $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente, allora

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty,$$

allora la (16) è soddisfatta con $C = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e per la Prop. 1.13 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente. Analogamente, per dimostrare la (17b), per ipotesi

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

allora, passando al limite per n che tende a $+\infty$, il teorema del confronto per successioni implica che $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$. □

Prop. 1.15 (Criterio del confronto asintotico)**.**
Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi tale che per ogni $n \geq 1$

$$a_n = c_n b_n \ \textit{dove } b_n, c_n \geq 0$$

$$\textit{se} \lim_{n\to+\infty} c_n \in (0,+\infty) \ \textit{allora} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{e} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \textit{hanno lo stesso carattere} \tag{18a}$$

$$\textit{se} \lim_{n\to+\infty} c_n = 0 \ \textit{e} \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \ \textit{allora} \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \tag{18b}$$

$$\textit{se} \lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty) \cup \{+\infty\} \ \textit{e} \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \ \textit{allora} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \tag{18c}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che se $\lim_{n\to+\infty} c_n$ è finito e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Poiché $\lim_{n\to+\infty} c_n \in \mathbb{R}$, allora la successione $(c_n)_n$ è limitata ed esiste $M > 0$ tale che

$$0 \leq c_n \leq M \qquad \forall n \geq 1.$$

Moltiplicando la disuguaglianza per $b_n \geq 0$

$$0 \leq a_n = b_n c_n \leq M b_n \qquad \forall n \geq 1.$$

La convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ed il criterio del confronto assicurano che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Da questo segue la (18b).

Analogamente, dimostriamo che se $\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Essendo $\lim_{n\to+\infty} c_n$ strettamente positivo o $+\infty$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $c_n > 0$ per ogni $n > N$ ed esiste finito $\lim_{n\to+\infty} 1/c_n$. Analogamente a prima esiste $M' > 0$ tale che

$$0 < \frac{1}{c_n} \leq M' \qquad \forall n > N.$$

Moltiplicando la disuguaglianza per $a_n = b_n c_n \geq 0$

$$0 \leq b_n \leq M' a_n \qquad \forall n > N.$$

La divergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ed il criterio del confronto assicurano che la serie $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ diverge e, quindi, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Da questo segue la (18c).

Per dimostrare la (18a) è sufficiente applicare il primo risultato se $\sum b_n$ converge ed il secondo risultato se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge. □

Nella precedente proposizione non si perde di generalità ad assumere che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (poiché altrimenti la serie diverge) e che $b_n > 0$, di modo che $c_n = a_n/b_n$. In (18a) l'ipotesi che $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n \in (0,+\infty)$ equivale al fatto che le successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ hanno lo stesso ordine di infinitesimo e la proposizione assicura che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere. In (18b) l'ipotesi che $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$ equivale al fatto che $(a_n)_n$ va a zero più velocemente di $(b_n)_n$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora converge anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Infine in (18c) l'ipotesi che $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = +\infty$ equivale al fatto che $(a_n)_n$ va a zero più lentamente di (b_n) e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, allora diverge anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

☡. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge oppure se $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, non si può concludere nulla sul carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Il teorema del confronto e del confronto asintotico non valgono per serie a segni qualunque.

☡. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-n)$ diverge a $-\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e

$$-n \leq 0 \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geq 1.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge per il criterio di Leibnitz (che vedremo successivamente), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge a $+\infty$ (poiché somma di una serie divergente ed una convergente) e

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{a_n} = \underbrace{\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}_{c_n} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{b_n}$$

con $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

Prop. 1.16 (Criterio della radice)**.**
Data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini positivi tale che esista

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

a) Se $\ell < 1$, allora la serie converge.
b) Se $\ell > 1$, allora la serie diverge.

Dimostrazione. Se $\ell < 1$, si fissi $q \in \mathbb{R}$ tale che $\ell < q < 1$. Allora

$$a_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a_n}}{q}\right)^n q^n \qquad \forall n \geq 1.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ converge per il criterio del confronto asintotico. Infatti, poiché $q < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ converge, inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{q} = \frac{\ell}{q} < 1,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_n}}{q}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n \log(\frac{\sqrt[n]{a_n}}{q})} = 0$$

Se $\ell > 1$, la dimostrazione è analoga scegliendo $1 < q < \ell$. □

Prop. 1.17 (Criterio del rapporto)**.**
Data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini strettamente positivi tale che esista

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

a) Se $\ell < 1$, allora la serie converge.
b) Se $\ell > 1$, allora la serie diverge.

Dimostrazione. Se $\ell < 1$, la definizione di limite con $\epsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$ implica che esiste $\overline{n} \geq 1$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2} \qquad \forall n \geq \overline{n}.$$

Posto $0 < q = \frac{1+\ell}{2} < 1$ e moltiplicando per $a_n \geq 0$

$$0 \leq a_{n+1} \leq q a_n \qquad \forall n \geq \overline{n}.$$

Poiché il carattere della serie non cambia, se i primi $\overline{n}$ termini sono cambiati, si può supporre che la disuguaglianza sia verificata per ogni $n \geq 1$. Allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_2 \leq q a_1 \\ 0 &\leq a_3 \leq q a_2 \leq q^2 a_1 \\ &\dots \leq \dots \\ 0 &\leq a_n \leq q a_{n-1} \leq q^{n-1} a_1 \end{aligned}$$

Essendo $0 < q < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ converge e il criterio del confronto implica la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Se $\ell > 1$, la dimostrazione è analoga. □

Il criterio del confronto e della radice non permettono di stabilire il carattere della serie nel caso in cui $\ell = 1$.

Esempio 1.18. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$, ma

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = 1$$

per ogni $\alpha > 0$.

Prop. 1.19 (Test integrale)**.** *Data una funzione* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$*, decrescente e positiva, posto* $a_n = f(n)$ *per ogni* $n \geq 1$*, allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se e solo se la funzione* f *ammette integrale improprio convergente sull'intervallo* $[1, +\infty)$ *e*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{19}$$

Dimostrazione. Poiché f è decrescente e positiva, la funzione ammette integrale improprio convergente o divergente a $+\infty$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è a termini positivi, quindi anch'essa è convergente o divergente a $+\infty$. Fissato $n \geq 1$, l'additività dell'integrale sui domini implica che

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{2} f(x)\,dx + \int_2^{3} f(x)\,dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx,$$

e, essendo f decrescente, la monotia dell'integrale assicura che per ogni $k = 1, \ldots, n$

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) = a_k.$$

Allora

$$a_2 + \ldots + a_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Passando al limite per n che tende a $+\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1 \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

da cui la tesi. □

Esempio 1.20. La serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$ poiché la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ ha integrale divergente su $[1, +\infty)$. Inoltre si può stimare la somma parziale n-esima

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n.$$

2.2. **Convergenza assoluta.** Il seguente risultato mostra che lo studio del carattere di una serie a segni non costanti può essere ricondotto a quello di una serie a termini positivi. Introduciamo la seguente definizione.

Def. 1.21 (Convergenza assoluta)**.**
Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Proviamo che la convergenza assoluta implica la convergenza (*semplice*).

Prop. 1.22 (Convergenza assoluta)**.**
Se una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge assolutamente, allora* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge (semplicemente).*

Dimostrazione. Per ogni $n \geq 1$ sia

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases} = \max\{a_n, 0\} = \frac{|a_n| + a_n}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} -a_n & \text{se } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{se } a_n > 0 \end{cases} = -\min\{a_n, 0\} = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

La definizione implica che

$$b_n \geq 0, \quad c_n \geq 0, \qquad |a_n| = b_n + c_n, \quad a_n = b_n - c_n$$

per ogni $n \geq 1$. In particolare

$$0 \leq b_n \leq |a_n| \qquad 0 \leq c_n \leq |a_n|,$$

la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ed il criterio del confronto implicano la convergenza sia di $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ che di $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

L'implicazione opposta è in generale falsa, come mostra il seguente contro-esempio.

. ▶ La serie $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ converge (semplicemente) per il criterio di Leibnitz, ma non converge assolutamente poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. ◀

La serie

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \ldots$$

converge, poiché le somme parziali sono

$$s_{2n-1} = \frac{1}{n} \qquad s_{2n} = 0,$$

per cui la serie converge a zero, ma la serie

$$\begin{aligned} 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots &\geq \\ \geq \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots& \end{aligned}$$

è divergente per confronto con la seria armonica.

2.3. **Serie a segno alterno.**

Prop. 1.23 (Criterio di Leibnitz)**.**
Sia $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ *una serie tale che*

a) $a_n \geq 0$ *per ogni* $n \geq 1$,
b) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$,
c) $a_{n+1} \leq a_n$ *per ogni* $n \geq 1$,

allora $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *converge e la somma* s *della serie soddisfa*

$$|s - s_n| \leq a_{n+1} \qquad \forall n \geq 1. \tag{20}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è divisa in tre passi. Preliminarmente, si noti che la somma parziale n-esima della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ è

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n \qquad \forall n \geq 1. \tag{21}$$

Passo 1. L'ipotesi c) implica che esistono

$$\lim_{n \to +\infty} s_{2n} = s_p \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$\lim_{n \to +\infty} s_{2n+1} = s_d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Mostriamo, infatti, che $(s_{2n})_n$ è una successione crescente e $(s_{2n+1})_n$ è una successione decrescente. Per ogni $n \geq 1$, dalla (21)

$$s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n}$$

poiché $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$. Analogamente

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq s_{2n-1} = s_{2(n-1)+1},$$

poiché $a_{2n} \geq a_{2n+1}$. Il teorema sulle successioni monotone implica che esistono

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \sup\{s_{2n} \mid n \geq 1\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \inf\{s_{2n+1} \mid n \geq 1\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Passo 2. L'ipotesi *b*) implica che $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = s \in \mathbb{R}$. Infatti, la (21) assicura

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} (s_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty} s_{2n}$$

poiché $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$. Il fatto che $s \in \mathbb{R}$ segue osservando che $s = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} \neq +\infty$ e $s = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} \neq -\infty$.

Passo 3. Mostriamo la (20). Infatti, poiché la somma s è sia l'estremo superiore di $\{s_{2n} \mid n \geq 1\}$ sia l'estremo inferiore di $\{s_{2n+1} \mid n \geq 1\}$,

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1} \qquad \forall n \geq 1,$$

allora, sottraendo s_{2n},

$$0 \leq s - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1},$$

da cui $|s - s_{2n}| \leq a_{2n+1}$. Analogamente,

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n-1} \qquad \forall n \geq 1,$$

allora, sottraendo s_{2n-1},

$$-a_{2n} = s_{2n} - s_{2n-1} \leq s - s_{2n-1} \leq 0,$$

da cui $|s - s_{2n-1}| \leq a_{2n}$. □

Si verifica facilmente che l'ipotesi a), $a_n \geq 0$, è conseguenza del fatto che la successione $(a_n)_{n\geq 0}$ è infinitesima e decrescente (ipotesi b) e c)).
Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, dove $(a_n)_{n\geq 0}$ è una successione **monotona**, il primo passo della dimostrazione prova che esistono sempre

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1},$$

il secondo passo prova che tali limiti sono uguali (quindi, necessariamente finiti) se e solo se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Per cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, con $(a_n)_{n\geq 0}$ monotona, o converge (se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$) o è indeterminata (se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$).

2.4. **Complemento: successioni numeriche.** Una successione $(a_n)_n$ è una famiglia numerabile di numeri reali

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R},$$

dove l'indice $n = 1, 2, \ldots$ varia su i numeri naturali $\mathbb{N}$ maggiori od uguali di 1. Il concetto di limite di successione si definisce in modo analogo a quello di limite di funzione quando la variabile indipendente tende a $+\infty$.

Def. 1.24. Data la successione

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

si dice che esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

- $\ell \in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\ell - \epsilon \leq a_n \leq \ell + \epsilon \qquad \forall n \geq n_0;$$

- $\ell = +\infty$: se per ogni $M > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che
$$a_n \geq M \qquad \forall n \geq n_0;$$
- $\ell = -\infty$: se per ogni $M > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che
$$a_n \leq -M \qquad \forall n \geq n_0.$$

I principali teoremi sui limiti di funzioni si estendono ai limiti di successioni.

Un'ampia classe di esempi di successioni è definita nel seguente modo. Data una funzione
$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad y = f(x)$$
si definisce
$$a_n = f(n) \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{22}$$
In tal caso, si dimostra facilmente che, se esiste
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$
allora esiste anche il limite
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell.$$

. Può accadere che il limite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esista, tuttavia esista $\lim_{n \to +\infty} a_n$. Ad esempio, non esiste
$$\lim_{x \to +\infty} x \cos(2\pi x),$$
tuttavia
$$\lim_{n \to +\infty} n \cos(2\pi n) = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty.$$

. Data una successione $(a_n)_n$, la scelta naturale per la funzione $f(x)$ che soddisfa la (22) è quella che si ottiene sostituendo l'indice n con la variabile x, purché abbia senso. Ad esempio, la successione
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$
è definita dalla funzione $f(x) = 1/x$. Tuttavia alla successione
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3!}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$$
non è associata in modo naturale nessuna funzione, poiché il fattoriale $n!$ è definito solo se $n \in \mathbb{N}$.

. Per i limiti di successioni che coinvolgono il fattoriale può essere utile la seguente disuguaglianza
$$e\, e^{-n}\, n^n \leq n! \leq e\, n\, e^{-n}\, n^n \qquad n \in \mathbb{N} \tag{23}$$
e l'approssimazione di Stirling
$$n! = \sqrt{2\pi n}\; e^{-n}\, n^n \Big(1 + \epsilon\big(\frac{1}{n}\big)\Big), \tag{24}$$
dove $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$, cioè $\epsilon(x)$ è una funzione infinitesima per x che tende a 0.

Esempio 1.25. Data la successione $(\frac{1+2n}{2+n})_n$, allora
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1+2n}{2+n} = 2.$$
Infatti, posto $f(x) = \frac{1+2x}{2+x}$, evidentemente $a_n = f(n)$ e
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+2x}{2+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{2}{x} + 1} = 2.$$