Calculus 2 – Prova scritta
04 Luglio 2022

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti serie sono a termini positivi e convergono semplicemente e/o assolutamente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\log\left(1+\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n(3+\sin n)}{\sqrt[3]{n^7}}$.

Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-n}}{n}(x-2)^n,$$

determinarne il raggio di convergenza ρ e l'insieme di convergenza puntuale I.

Esercizio 2.

a) Data la funzione $f(x)=(e^{-2x}-1)\sin(3x)$, calcolarne il polinomio di Mc Laurin di ordine 4.

b) Scrivere il resto di Lagrange $R_1(x)$ di ordine 1 (con centro in 0) della funzione $g(x)=e^{-2x}\sin(3x)$ e determinarne una stima per $x\in(0,1/6]$.

Esercizio 3. Sia f la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione

$$g(x)=\begin{cases}x+\pi & x\in[-\pi,0)\\ \pi-x & x\in[0,\pi)\end{cases}.$$

(1) Disegnare il grafico di f.
(2) Calcolare il coefficiente di Fourier $\hat{f}_0$.
(3) Calcolare il coefficiente di Fourier $\hat{f}_k$ per $k\neq 0$.
(4) Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[-\pi,\pi)$.

Esercizio 4. Sia $f(x,y)=(x-1)^2+y^2-4\ln x$.

(1) Determinare il dominio di f e dire dove f è differenziabile.
(2) Calcolare il gradiente nel punto $(1,1)$, la derivatA direzionale $\frac{\partial f(1,1)}{\partial v}$ per $v=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1,1,f(1,1))$.
(3) Stabilire quali sono i punti critici di f sul suo dominio e classificarli.