Parte 2. Calcolo differenziale

6. Spazi vettoriali euclidei

In questa sezione sono richiamate alcune proprietà di $\mathbb{R}^n$, visto come spazio vettoriale euclideo. Per semplicità consideriamo esplicitamente il caso $n = 2$.

6.1. Vettori, norma e prodotto scalare.

Gli elementi del prodotto cartesiano

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

sono detti vettori. Ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$ è una coppia ordinata (x, y) ed i numeri reali x, y sono detti le componenti di v. In particolare si denota con $0 = (0, 0)$ il vettore nullo. In $\mathbb{R}^2$ sono definite le seguenti operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale euclideo.

a) La somma di due vettori $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ è il vettore

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

b) La moltiplicazione di un vettore $v = (x, y)$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è il vettore

$$\lambda v = (\lambda x, \lambda y).$$

c) La norma di un vettore $v = (x, y)$ è lo scalare

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La norma soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\|v\| \geq 0 \\
&\|v\| = 0 \iff v = 0 \\
&\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \\
&|\, \|v\| - \|w\| \,| \leq \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \text{(disuguaglianza triangolare)}
\end{aligned}$$

per ogni $v, w \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Inoltre, se $v = (x, y)$

$$|x| \leq \|v\| \qquad |y| \leq \|v\|. \tag{53}$$

d) Il prodotto scalare di due vettori $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ è lo scalare

$$v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Il prodotto scalare soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1 \\
&v_1 \cdot (\lambda v_2) = \lambda(v_1 \cdot v_2) \\
&v_1 \cdot (v_2 + v_3) = (v_1 \cdot v_2) + (v_1 \cdot v_3) \\
&v_1 \cdot v_1 = \|v_1\|^2 \\
&|v_1 \cdot v_2| \leq \|v_1\| \|v_2\| \qquad \text{(disuguaglianza di Schwarz)}
\end{aligned}$$

per ogni $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. In particolare, se $v_1 \cdot v_2 = 0$, allora v_1 e v_2 sono detti ortogonali.

. A differenza della retta reale in $\mathbb{R}^2$ non è stata introdotta una relazione d'ordine "$<$".

. Il nome "disuguaglianza triangolare" si riferisce alla relazione $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, da cui discende l'altra. Inoltre vale che

$$|\, \|v\| - \|w\| \,| \leq \|v - w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Nel piano vale la relazione
$$v_1 \cdot v_2 = \|v_1\|\|v_2\| \cos\theta,$$
dove $\theta \in (-\pi, \pi]$ è l'angolo compreso tra i due vettori (se entrambi i vettori sono non nulli). Segue che $v_1 \cdot v_2 = 0$ se e solo se vale una della seguenti tre condizioni
$$v_1 = 0 \quad \text{o} \quad v_2 = 0 \quad \text{o} \quad \theta = \pm\frac{\pi}{2}.$$
Dato un vettore v non nullo, il vettore $\widehat{v} = v/\|v\|$, detto versore direzionale, ha norma 1 e
$$v = \|v\|\,\hat{v}.$$
Se w è un altro vettore, allora
$$w = \frac{w \cdot v}{\|v\|^2}\, v + v^{\perp},$$
dove $v^{\perp}$ è ortogonale a v, cioè $v^{\perp} \cdot v = 0$, e il vettore
$$\frac{w \cdot v}{\|v\|^2}\, v = w \cdot \widehat{v} \quad \widehat{v}$$
è detta proiezione di w lungo v.

Se due vettori v, w sono ortogonali vale il teorema di Pitagora
$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$
Nota. A volte è comodo identificare i vettori di $\mathbb{R}^2$ con matrici 2×1 (vettori colonna) o matrici 1×2 (vettori riga)
$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad v^t = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$
dove ^{t} indica la trasposizione. Con questa notazione il prodotto scalare diventa
$$v_1 \cdot v_2 = v_1^t\, v_2 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$
dove il prodotto è quello righe per colonne.

Indicheremo i versori degli assi cartesiani con
$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
che soddisfano
$$\|\mathbf{i}\| = 1 \qquad \|\mathbf{j}\| = 1 \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0,$$
e per ogni vettore $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$v = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j},$$
cioè sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.

Nel piano euclideo, in cui sono stati scelti un'origine O ed un sistema di assi cartesiani, ogni vettore v è rappresentato geometricamente da un segmento orientato il cui primo estremo è l'origine O. Il secondo estremo del vettore individua univocamente un punto P del piano di modo che la coppia ordinata (x, y) indica sia le componenti del vettore $v = (x, y)$ sia le coordinate del punto $P = (x, y)$. In particolare il vettore nullo 0 individua l'origine O. Viceversa, due punti del piano $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ individuano un vettore il cui primo estremo è P_1 e il secondo estremo è P_2. Tale vettore, denotato con $P_2 - P_1$, ha componenti
$$P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$
Infine, dato un punto $P = (x, y)$ ed un vettore $v = (h, k)$, il secondo estremo del vettore v, il cui primo estremo è in P, individua un punto, denotato con $P + v$, le cui coordinate sono
$$P + v = (x + h, y + k).$$
Il punto $P + v$ è detto il traslato di P.

La distanza (euclidea) tra due punti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ è definita da

$$\mathrm{d}(P_1, P_0) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \|P_1 - P_0\|. \tag{54}$$

Quanto detto si estende naturalmente al prodotto di n copie di $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

in particolare i punti di $\mathbb{R}^3$ sono descritti da triple (x, y, z) ed i tre versori sono

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6.2. **Elementi di topologia.** Dati $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$ si definisce palla (aperta) di centro P_0 e raggio δ l'insieme

$$B(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n \,|\, \|P - P_0\| < \delta\}.$$

Se $n = 2$ e $P_0 = (x_0, y_0)$, allora

$$B((x_0, y_0), \delta) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\right\},$$

cioè $B((x_0, y_0), \delta)$ è il cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio δ, circonferenza esclusa. In $\mathbb{R}^3$ $B(P_0, \delta)$ è una sfera (senza la buccia). Le seguenti definizioni esprimono le proprietà di vicinanza di un punto ad un insieme.

Def. 2.1. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $P_0 \in \mathbb{R}^n$.

a) Il punto P_0 è interno ad A se esiste $\delta > 0$ tale che $B(P_0, \delta) \subset A$, ovvero P_0 è interno se tutti i punti sufficientemente vicini a P_0 appartengono ad A.
b) Il punto P_0 è di aderenza per A se per ogni $\delta > 0$ si ha $B(P_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$ ovvero P_0 è di aderenza se esistono punti di A arbitrariamente vicini a P_0.
c) Il punto P_0 è di frontiera per A se per ogni $\delta > 0$ si ha che

$$B(P_0, \delta) \cap A \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad \mathrm{B}(P_0, \delta) \cap A^c \neq \emptyset,$$

ovvero P_0 è di frontiera se esistono punti di A e del suo complementare A^c arbitrariamente vicini a P_0. Questo equivale al fatto che P_0 è di aderenza per A, ma non è interno ad A.

Introduciamo alcuni insiemi costruiti a partire da A in base alle precedenti definizioni.
Def. 2.2. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$.
a) L'insieme dei punti interni di A si chiama parte interna e si denota con $\mathring{A}$. Poiché un punto interno appartiene necessariamente ad A, allora $\mathring{A} \subset A$.
b) L'insieme dei punti di aderenza di A si chiama chiusura e si denota con $\overline{A}$. Poiché i punti di A sono necessariamente di aderenza per A, si ha $A \subset \overline{A}$.
c) L'insieme dei punti di frontiera di A si denota con ∂A.

Prop. 2.3. *Data $A \subset \mathbb{R}^n$, valgono le seguenti relazioni*

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A} \tag{55a}$$

$$\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A \tag{55b}$$

$$\mathring{A} = A \setminus \partial A \tag{55c}$$

Dimostrazione. La relazione (55a) segue immediatamente dalle definizione. Dimostriamo la (55b). Evidentemente, $\mathring{A} \cup \partial A \subset \overline{A}$. Proviamo che $\overline{A} \subset \mathring{A} \cup \partial A$. Se $P \in \overline{A}$ e $P \in \partial A$, la tesi è evidente. Viceversa, se $P \in \overline{A}$ e $P \notin \partial A$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $B(P, \delta) \cap A^c = \emptyset$, cioè $B(P, \delta) \subset A$, per cui $P \in \mathring{A}$. Dimostriamo la (55c). Se $P \in \mathring{A}$, per definizione $P \in A$ e $P \notin \partial A$, da cui segue che $\mathring{A} \subset A \setminus \partial A$. Viceversa se $P \in A$ e $P \notin \partial A$, allora esiste δ tale che $B(P_0, \delta) \cap A^c = \emptyset$, cioè $B(P_0, \delta) \subset A$ e, quindi, $P \in \mathring{A}$. □

Definiamo due famiglie di insiemi per cui l'inclusione destra o sinistra in (55a) è in effetti un'uguaglianza.

Def. 2.4. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$.

a) L'insieme A è detto aperto se $\mathring{A} = A$, cioè se tutti i punti di A sono interni.
b) L'insieme A è detto chiuso se se $\overline{A} = A$, cioè se tutti i punti di aderenza di A appartengono ad A.
c) L'insieme A è limitato se esiste $R > 0$ tale che $A \subset B(O, R)$, cioè se

$$\|P - O\| < R \qquad \forall P \in A.$$

. Gli unici insiemi che sono sia aperti sia chiusi sono $\mathbb{R}^2$ e $\emptyset$.

Esempio 2.5. La palla $B(P_0, r)$ di centro $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ è aperta. Infatti se $Q_0 \in B(P_0, r)$ allora Q_0 è punto interno. Scelto $\delta = r - \|Q_0 - P_0\|$, $\delta > 0$ poiché $\|Q_0 - P_0\| < r$. Allora, per ogni $P \in B(Q_0, \delta)$ la disuguaglianza triangolare implica che

$$\|P - P_0\| \leq \|P - Q_0\| + \|Q_0 - P_0\| < \delta + \|Q_0 - P_0\| = r$$

allora $P \in B(P_0, r)$ e, quindi, $B(Q_0, \delta) \subset B(P_0, r)$. Ne segue che Q_0 è punto interno ed $B(P_0, r)$ è aperto.

Prop. 2.6. *Dato $A \subset \mathbb{R}^n$,*

a) A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \emptyset$;
b) A è chiuso se e solo se $\partial A \subset A$;
c) A è limitato se e solo se $\sup_{P \in A} \|P - O\| < +\infty$.

Dimostrazione.

a) Se A è aperto, allora per la (55c) $A \cap \partial A = \mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$. Viceversa, se $A \cap \partial A = \emptyset$, dato $P \in A \subset \overline{A}$ allora per la (55b) necessariamente $P \in \mathring{A}$, cioè $\mathring{A} = A$.
b) Segue dalla (55b).
c) Segue dalla definizione di insieme limitato.

□

7. Funzioni

Una funzione $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una legge che assegna ad ogni punto $P \in A$ uno ed un solo elemento $Q = F(P) \in \mathbb{R}^m$. L'insieme A è detto dominio ed $\mathbb{R}^m$ codominio. Se $m = 1$, la funzione è detta scalare, se $m > 1$ è detta funzione vettoriale.

Data una funzione $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $Q = F(P)$, si hanno n variabili indipendenti che parametrizzano il punto $P \in A$

$$P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

ed m variabili dipendenti che parametrizzano il valore $Q = F(P)$

$$Q = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Con questa notazione la funzione $Q = F(P)$ si scrive come

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \iff \begin{cases} z_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \quad \ldots \\ z_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}.$$

Le m funzioni scalari $f_1 : A \to \mathbb{R}$, ..., $f_m : A \to \mathbb{R}$ sono dette le componenti della funzione F, hanno tutte lo stesso dominio $A \subset \mathbb{R}^n$ e lo stesso codominio $\mathbb{R}$.

Esempio 2.7. Sia $F(x,y) = (\frac{1}{x^2+y^2}, \log x)$, allora

$$F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \neq (0,0),\ x > 0\} = ((0,+\infty) \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}$$
$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{x^2+y^2} = f_1(x,y) \\ z_2 = \log x = f_2(x,y) \end{cases}$$

Sia $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $Q = F(P)$ allora

a) dato $B \subset \mathbb{R}^n$, l'immagine di B secondo F è il sotto-insieme di $\mathbb{R}^m$
$$F(B) = \{F(P) \in \mathbb{R}^m \,|\, P \in B\},$$
in particolare $F(A) = \operatorname{Im} F$ è detta immagine di F.

b) dato $C \subset \mathbb{R}^m$, la contro-immagine di C secondo F è il sotto-insieme di $\mathbb{R}^n$
$$F^{-1}(C) = \{P \in A \,|\, F(P) \in C\}.$$

Consideriamo nel seguito alcuni casi particolari.

Funzioni scalari. Data una funzione scalare di 2 variabili indipendenti
$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad z = f(x,y)$$

(1) il sotto-insieme di $\mathbb{R}^3$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in A,\ z = f(x,y)\}$$
è detto grafico della funzione che rappresenta una *superficie* nello spazio;

(2) dato $c \in \mathbb{R}$ il sotto-insieme di $\mathbb{R}^2$
$$A_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \in A,\ f(x,y) = c\},$$
è detto insieme di livello di f di quota c è una *curva* (eventualmente patologica) nel piano

L'insieme di livello è l'insieme vuoto se $c \notin \operatorname{Im} F$. Se $c \in \operatorname{Im} F$, allora l'insieme di livello è la proiezione sul piano xy della curva ottenuta intersecando il grafico della funzione con il piano $z = c$.

. L'insieme di livello può essere patologico. Ad esempio, la funzione
$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$
con dominio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, ha come grafico la semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ che giace nel semispazio delle $z \geq 0$ (emisfero nord). Se $0 \leq c < 1$, l'insieme di livello è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{1 - c^2}$. Tuttavia se $c = 1$ l'insieme di livello si riduce alla sola origine $\{(0,0)\}$, mentre se $c > 1$ o $c < 0$ l'insieme di livello è l'insieme vuoto.

Esempio 2.8. Una funzione scalare lineare affine di due variabili è della forma
$$f(x,y) = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0) = z_0 + (a,b) \cdot (x - x_0, y - y_0),$$
dove $z_0, a, b \in \mathbb{R}$ sono coefficienti fissati. Il grafico è il piano passante per il punto (x_0, y_0, z_0) in $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$
non parallelo all'asse z. Dato $c \in \mathbb{R}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$ l'insieme di livello è la retta (nel piano) di equazione cartesiana
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = c - z_0.$$
Se $a = b = 0$, il grafico è il piano $z = z_0$ parallelo al piano xy e gli insiemi di livello A_c sono l'insieme vuoto, tranne nel caso in cui $c = z_0$ per cui $A_{z_0} = \mathbb{R}^2$.

Curve. Una curva è una funzione $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con dominio $I \subset \mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}^2$. Le funzioni $x(t)$ ed $y(t)$ sono dette componenti della curva e sono funzioni scalari con dominio $I \subset \mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$. La curva γ si denota spesso con

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \quad t \in I.$$

L'immagine di γ

$$\gamma(I) = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^3$$

è detta traccia o traiettoria della curva.

. Nelle precedenti equazioni vi è un piccolo abuso di notazione, poiché i simboli x ed y indicano sia le componenti di γ, che sono funzioni, sia il valore di tali funzioni in t, cioè numeri reali.

Esempio 2.9. Dato $r > 0$, la curva piana

$$\gamma : \begin{cases} x = r\,\cos t \\ y = r\,\sin t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

ha come componenti $x(t) = r\,\cos t$ e $y(t) = r\,\sin t$, la traccia è la circonferenza di centro l'origine e raggio r di equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Campi. Un campo bidimensionale è una funzione $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

che assegna ad ogni punto $P = (x, y)$ del dominio un vettore $v = F(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le componenti $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono funzioni scalari con dominio $A \subset \mathbb{R}^2$ e codominio $\mathbb{R}$. Il campo F si denota anche con

$$F(x, y) = f(x, y)\,\mathbf{i} + g(x, y)\,\mathbf{j}.$$

Esempio 2.10. Il campo che assegna ad ogni punto il versore radiale è

$$F(P) = \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|} = \frac{(x - x_0, y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

con componenti

$$f(x, y) = \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$
$$g(x, y, z) = \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}.$$

Trasformazioni. Una trasformazione (attiva) è una funzione

$$\Psi : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

che assegna ad ogni punto del dominio $P \in A$ il punto $\Psi(P)$. Esplicitamente, la trasformazione è data da

$$\Psi : \begin{cases} \overline{x} = \overline{x}(x, y) \\ \overline{y} = \overline{y}(x, y) \end{cases} .$$

dove le componenti $\overline{x}(x, y)$ ed $\overline{y}(x, y)$ sono le coordinate del punto trasformato.

Esempio 2.11. Data la matrice 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, la trasformazione lineare associata è

$$\Psi : \begin{cases} \overline{x} = ax + cy \\ \overline{y} = bx + dy \end{cases} ,$$

in cui le componenti sono $\overline{x}(x, y) = ax + cy$ e $\overline{y}(x, y) = bx + dy$. La trasformazione Ψ manda il quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$, nel parallelogramma di vertice l'origine ed i cui due lati adiacenti sono i vettori (a, b) e (c, d). Se il determinate $ad - bc$ è zero, i vettori (a, b) e (c, d) sono paralleli ed il parallelogramma si riduce ad un segmento.

Un caso di particolare interesse sono le rotazioni. Fissato un angolo $\theta \in \mathbb{R}$, la corrispondente matrice di rotazione è

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

e la corrispondente trasformazione lineare è data da

$$\Psi : \begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ \overline{y} = \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases} .$$

Superfici. Una superficie (in $\mathbb{R}^3$) è una funzione $\sigma(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$ con dominio $A \subset \mathbb{R}^2$ e codominio $\mathbb{R}^3$. La superficie si denota spesso con

$$\sigma : \begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \\ z = z(t, s) \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sigma(t, s) = x(t, s)\,\mathbf{i} + y(t, s)\,\mathbf{j} + z(t, s)\,\mathbf{k}.$$

Esempio 2.12 (piano)**.** Dato un punto $P_0 = (x_0, y_o, z_0)$ e due vettori $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ non paralleli tra di loro, il piano passante per i punti P_0, $P_0 + v$ e $P_0 + w$ è la superficie

$$\sigma : \begin{cases} x = x_0 + tv_1 + sw_1 \\ y = y_0 + tv_2 + sw_2 \\ z = z_0 + tv_3 + sw_3 \end{cases} .$$

La condizione che v e w non siano paralleli equivale al fatto che il rango della matrice 3×2

$$\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

sia uguale a due.

Ritornando al caso generale, l'esempio delle funzioni scalari lineari può essere facilmente esteso al caso vettoriale.

Esempio 2.13 (funzioni lineari)**.** Data una matrice $A = [a_{ij}]$ di taglia $m \times n$ questa definisce una funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da

$$F(v) = A\,v = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1:} \cdot v \\ \dots \\ a_{m:} \cdot v \end{bmatrix}$$

dove $v = (v_1, \dots, v_n)$ è pensato come vettore colonna, $A\,v$ indica il prodotto matriciale riga per colonna, e $a_{i,:} \in \mathbb{R}^n$ è l'i-esimo vettore riga della matrice A. Dato $i = 1, \dots, m$, la i-esima componente di F è

$$f_i(v) = (Av)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = a_{i,:} \cdot v.$$

La funzione F è lineare, cioè

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) \qquad v, w \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ogni funzione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è della forma descritta per un'unica matrice A di taglia $m \times n$.

Esempio 2.14 (funzioni affini)**.** Una matrice $A = [a_{ij}]$ di taglia $m \times n$ e due punti $P^* \in \mathbb{R}^n$ e $Q^* \in \mathbb{R}^m$ definiscono una funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$F(P) = Q^* + A(P - P^*) = \begin{bmatrix} z_1^* \\ \dots \\ z_m^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ \dots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix},$$

dove $P = (x_1, \dots, x_n)$, $P^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ e $Q^* = (z_1^*, \dots, z_m^*)$. Dato $i = 1, \dots, m$, la i-esima componente di F è

$$f_i(P) = z_i^* + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^*) = z_i^* + a_{i,:} \cdot (P - P^*).$$

7.1. **Funzioni continue.** La definizione di funzione continua è la naturale estensione di quella data per funzioni di una variabile.

Def. 2.15. Una funzione $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è detta continua in $P_0 \in A$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|F(P) - F(P_0)\| < \epsilon \text{ se } P \in A \text{ e } \|P - P_0\| < \delta,$$

cioè, $F(P)$ è arbitrariamente vicino a $F(P_0)$ per ogni $P \in A$ sufficientemente vicino a P_0.

Una funzione è detta continua se è continua in tutti i punti del suo dominio. Si denota con $\mathrm{C}^0(A, \mathbb{R}^m)$ l'insieme delle funzioni continue definite su $A \subset \mathbb{R}^n$ ed a valori in $\mathbb{R}^m$. Se $m = 1$ si scrive semplicemente $\mathrm{C}^0(A)$.

Se $z = f(x, y)$ è una funzione scalare di due variabili con dominio $A \subset \mathbb{R}^2$, f è continua se, fissato $P_0 = (x_0, y_0) \in A$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon \text{ per ogni } (x, y) \in A \text{ tale che } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

. Data una funzione continua di una variabile $\varphi : I \to \mathbb{R}$, questa definisce naturalmente una funzione di due variabili $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \varphi(x)$$

che risulta continua come funzione di due variabili. Analogamente, se si scambia il ruolo di x e di y.

La continuità di una funzione vettoriale può essere ricondotta allo studio della continuità delle sue componenti.

Lemma 2.16. *Una funzione vettoriale*

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad F(P) = (f_1(P), \dots, f_m(P))$$

è continua se e solo se tutte le sue componenti $f_1 : A \to \mathbb{R}$, *...*, $f_m : A \to \mathbb{R}$ *sono continue.*

Dimostrazione. Per chiarezza supponiamo che $m = 2$. Se F è continua in P_0, dato $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\|F(P) - F(P_0)\| < \epsilon$ se $P \in A$ e $\|P - P_0\| < \delta$. Dalla (53) si ha che $|f_1(P) - f_1(P_0)| < \epsilon$ e $|f_2(P) - f_2(P_0)| < \epsilon$ per cui f_1 e f_2 sono entrambe continue in P_0. Viceversa, se f_1 e f_2 sono continue in $P_0 \in A$, dato $\epsilon > 0$ esistono $\delta_1, \delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned} |f_1(P) - f_1(P_0)| &< \frac{\epsilon}{2} \qquad && P \in A \cap B(P_0, \delta_1) \\ |f_2(P) - f_2(P_0)| &< \frac{\epsilon}{2} \qquad && P \in A \cap B(P_0, \delta_2). \end{aligned}$$

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $P \in A \cap B(P_0, \delta)$, valgono entrambe le precedenti disuguaglianze

$$\|F(P) - F(P_0)\| = \sqrt{(f_1(P) - f_1(P_0))^2 + (f_2(P) - f_2(P_0))^2} = \sqrt{2\frac{\epsilon^2}{4}} < \epsilon.$$

$\square$

Dal precedente lemma segue che una curva piana $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

è continua se e solo se sono continue le componenti $x(t)$ e $y(t)$ ed un campo bidimensionale $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = f(x, y)\,\mathbf{i} + g(x, y)\,\mathbf{j}$$

è continuo se e solo se sono continue le sue componenti f e g.

La continuità è preservata dalle operazioni elementari tra funzioni, come mostrano i seguenti due teoremi.

Teo 2.17 (Continuità della funzione composta)**.** *Date due funzioni continue $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, allora la funzione composta $G \circ F$ è continua.*

Dimostrazione. Fissato $P_0 \in A$ ed $\epsilon > 0$, per la continuità di G in $Q_0 = F(P_0)$ esiste $\delta' > 0$ tale

$$\|G(Q) - G(F(P_0))\| < \epsilon \text{ se } \|Q - F(P_0)\| < \delta' \text{ e } Q \in B. \tag{56}$$

Per la continuità di F in P_0, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|F(P) - F(P_0)\| < \delta' \text{ se } \|P - P_0\| < \delta \text{ e } P \in A.$$

Quindi se $P \in A$ e $\|P - P_0\| < \delta$, scegliendo nella (56) $Q = F(P)$, che appartiene a B essendo $F(A) \subset B$, segue che $\|G(F(P)) - G(F(P_0))\| < \epsilon$. □

Teo 2.18. *Date due funzione scalari continue*

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

allora la somma $f + g$, il prodotto $f\,g$ ed il rapporto f/g sono funzioni continue sul loro dominio naturale.

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo che $n = 2$ e dimostriamo ad esempio che il prodotto è una funzione continua su $A \cap B$. Per ogni $(x, y) \in A \cap B$

$$f(x, y)\, g(x, y) = m(f(x, y), g(x, y)) = m(F(x, y)),$$

dove

$$\begin{aligned} &F : A \cap B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad && F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \\ &m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} && m(x, y) = xy. \end{aligned}$$

Per il Teorema 2.17 la funzione $f\,g$ è continua se F ed m sono continue. Infatti, poiché f e g sono continue, allora F è continua per il Lemma 2.16. Mostriamo che m è continua. Fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, allora se $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$ con $0 < \delta < 1$

$$\begin{aligned} |m(x, y) - m(x_0, y_0)| &= |x(y - y_0) + (x - x_0)y_0| \\ &\le |x - x_0 + x_0||y - y_0| + |y_0||x - x_0| \\ &\le (|x - x_0| + |x_0|)|y - y_0| + |y_0||x - x_0| \\ &\le (|x_0| + \delta)\delta + |y_0|\delta \\ &\le (|x_0| + |y_0| + 1)\delta < \epsilon \end{aligned}$$

se $\delta < \epsilon/(|x_0| + |y_0| + 1)$. □

Esempio 2.19. La funzione $f(x, y) = x^2/\sqrt{y}$ è continua su $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ poiché prodotto delle funzioni $g(x, y) = x^2 = \varphi(\pi_1(x, y))$ e $h(x, y) = 1/\sqrt{y} = \psi(\pi_2(x, y))$ dove

$$\varphi(t) = t^2 \qquad \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

sono funzioni (di una variabile) continue rispettivamente su $\mathbb{R}$ e su $(0, +\infty)$.

7.1.1. *Funzioni infinitesime.* Introduciamo una classe di funzioni che formalizzano l'idea intuitiva di errore infinitesimo.

Def. 2.20. Una funzione $\epsilon : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è detta infinitesima (nell'origine) se $0 \in A$, $\epsilon(0) = 0$ ed ϵ è continua in zero.

Se $\epsilon(v)$ è una funzione infinitesima (nell'origine) e P_0 è un punto di $\mathbb{R}^n$, diremo che $\epsilon(P - P_0)$ è una funzione infinitesima in P_0. In altre parole, per ogni $\widetilde{\epsilon} > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|\epsilon(P - P_0)\| < \widetilde{\epsilon} \qquad \text{se } P \in A \text{ e } \|P - P_0\| < \delta.$$

Una funzione vettoriale $\epsilon(v) = (\epsilon_1(v), \ldots, \epsilon_m(v))$ è infinitesima se e solo se lo sono tutte le sue componenti ϵ_i.

Una funzione scalare di due variabile $\epsilon(x - x_0, y - y_0)$ è infinitesima in (x_0, y_0) se per ogni $\widetilde{\epsilon} > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\epsilon(x - x_0, y - y_0)| < \widetilde{\epsilon} \qquad \text{se } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Con lieve abuso di notazione, nel seguito indicheremo con $\epsilon(v)$, $\epsilon(P - P_0)$ una generica funzione infinitesima, anche quando si tratta di funzioni differenti. Ad esempio $2\epsilon(v) = \epsilon(v)$ e $\epsilon(v) - \epsilon(v) = \epsilon(v) \neq 0$.

Dalle proprietà delle funzioni continue si verifica immediatamente che

$$\begin{aligned} &\lambda\epsilon(v) + \mu\epsilon(v) = \epsilon(v) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &\epsilon(\epsilon(v)) = \epsilon(v) \\ &\|\epsilon(v)\| = \epsilon(v) \end{aligned} \tag{57}$$

per ogni vettore v per cui il membro di sinistra è ben definito. Inoltre

a) se una funzione F vettoriale è maggiorata da una funzione scalare (positiva) infinitesima,
$$\|F(v)\| \leq \epsilon(v) \qquad v \in A,$$
allora F è una funzione infinitesima;
b) se f è una funzione scalare tale che $0 \in \operatorname{dom} f$ ed f è localmente limitata, cioè esistono $C, \delta > 0$ per cui $|f(v)| \leq C$ per ogni $v \in \operatorname{dom} f \cap B(0, \delta)$, allora
$$f(v)\epsilon(v) = \epsilon(v);$$
c) se F è una funzione vettoriale tale che $0 \in \operatorname{dom} F$ ed F è localmente limitata, cioè esistono $C, \delta > 0$ per cui $\|F(v)\| \leq C$ per ogni $v \in \operatorname{dom} F \cap B(0, \delta)$, allora
$$F(v) \cdot \epsilon(v) = \epsilon(v).$$

Evidentemente, una funzione $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua in P_0 se e solo se

$$F(P) = F(P_0) + \epsilon(P - P_0), \tag{58}$$

dove l'errore $\epsilon(P - P_0)$ è una funzione infinitesima.

7.2. **Proprietà delle funzioni continue scalari.** Il seguente risultato è utile per determinare se un insieme è aperto o chiuso.

Prop. 2.21. *Data una funzione continua $f : A \subset \mathbb{R}^n \to$, allora*

a) se A è aperto, allora per ogni intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ l'insieme
$$\{P \in A \mid f(P) \in I\}$$
è un aperto di $\mathbb{R}^n$;
b) se A è chiuso, allora per ogni intervallo chiuso $I \subset \mathbb{R}$ l'insieme
$$\{P \in A \mid f(P) \in I\}$$
è un chiuso di $\mathbb{R}^n$.

Se $f(x,y)$ è una funzione definita su tutto $\mathbb{R}^2$, poiché $(-\infty, c)$ è un intervallo aperto e $(-\infty, c]$ è un intervallo chiuso, dal precedente teorema segue che l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) < c\}$$

è aperto, e l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq c\}$$

è chiuso. Poiché l'intervallo degenere $\{c\}$ è chiuso anche l'insieme di livello di quota c

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$$

è chiuso.

. Per una funzione continua, in generale non è vero che l'immagine di un insieme aperto (risp. chiuso) sia aperto (risp. chiuso). Ad esempio, la funzione scalare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ è continua, ma $f(\mathbb{R}^2)$ è l'intervallo $(0,1]$. Infatti, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ evidentemente $0 < f(x,y) \leq 1$ e, dall'Analisi 1, $\{f(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\} = (0,1]$. Allora $f(\mathbb{R}^2) = (0,1]$ dove $\mathbb{R}^2$ è chiuso ed aperto, ma $(0,1]$ non è né chiuso né aperto.

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza dei massimi e minimi assoluti.

Teo 2.22 (Teorema di Weierstrass)**.** *Data una funzione continua $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita su un insieme chiuso e limitato A, allora esistono $P_1, P_2 \in A$ tali che*

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2) \qquad \forall P \in A.$$

I valori $f(P_1) = \min f(A)$ e $f(P_2) = \max f(A)$ sono detti, rispettivamente, minimo e massimo assoluto di f su A. I punti P_1 e P_2 sono detti punti di minimo e massimo assoluti (in generale non sono unici).

La condizione che il dominio di f sia chiuso e limitato non si può eliminare.

Esempio 2.23. La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ con dominio $\mathbb{R}^2$ è continua. Si verifica facilmente che $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$, poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = +\infty$. Quindi f non ammette massimo assoluto in $\mathbb{R}^2$.
La funzione $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ con dominio $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\right\}$ è continua e $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$, poiché $\lim_{x\to 1^-} f(x,0) = +\infty$. Quindi f non ammette massimo assoluto in A.

Introduciamo la seguente definizione che estende ad $\mathbb{R}^n$ il concetto di intervallo.

Def. 2.24. Un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ è connesso per archi se, per ogni $P_0, P_1 \in C$, esiste una curva continua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tale che $P_0 = \gamma(0)$, $P_1 = \gamma(1)$ e $\gamma(t) \in C$ per ogni $t \in [0,1]$, cioè esiste una curva continua γ di estremi $\gamma(0) = P_1$ e $\gamma(1) = P_2$, la cui traccia è contenuta tutta in C.

Nota. Se C è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, C è connesso per archi se e solo se è un intervallo. Infatti, se C è un intervallo chiaramente è connesso per archi. Viceversa, se C è un insieme connesso per archi, proviamo che C è un intervallo, mostrando che se $x_1 < x_2 < x_3$ e $x_1, x_3 \in C$, allora $x_2 \in C$. Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ curva continua di estremi $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$ e $\gamma(t) \in C$ per ogni $t \in [0,1]$. Essendo γ continua e $\gamma(0) = x_1 < x_2 < x_3 = \gamma(1)$ per il teorem dei valori intermedi (Analisi I), esiste $t \in (0,1)$ tale che $\gamma(t) = x_2$ e, quindi, $x_2 \in C$.

Teo 2.25 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Data una funzione continua $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita su un insieme A connesso per archi, per ogni $c \in (\inf f, \sup f)$ esiste un punto $P_c \in A$ per cui $f(P_c) = c$.*

Nelle ipotesi del teorema dei valori intermedi segue immediatamente che l'immagine di f è l'intervallo estremi $\inf f$ e $\sup f$, tuttavia gli estremi possono o meno appartenere a $f(A)$. Più precisamente

$$f(A) = \begin{cases} (\inf f, \sup f) & \text{se } f \text{ non ammetta né minimo né massimo} \\ [\min f, \sup f) & \text{se } f \text{ ammetta minimo, ma non massimo} \\ (\inf f, \max f] & \text{se } f \text{ ammetta massimo, ma non minimo} \\ [\min f, \max f] & \text{se } f \text{ ammetta minimo e massimo} \end{cases}$$

Sia $z = f(x, y)$ continua con dominio A connesso per archi, allora il teorema dei valori intermedi assicura che se $\inf f < c < \sup f$, l'equazione $f(x, y) = c$ ammette almeno una soluzione $(x_0, y_0) \in A$. Ovviamente se $c < \inf f$ o $c > \sup f$ l'equazione $f(x, y) = c$ non ha soluzioni. Se $c = \inf f$ o $c = \sup f$, l'equazione $f(x, y) = c$ ha soluzione solo se f ammette minimo o massimo assoluto, rispettivamente. In particolare, se f è continua ed il dominio è connesso per archi e compatto l'immagine di f è l'intervallo chiuso

$$\operatorname{Im} f = [\min f, \max f].$$

Per la validità del teorema dei valori intermedi, la condizione che A sia connesso per archi non si può eliminare.

Esempio 2.26. Sia $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ con $(x, y) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$. La funzione è continua, $\inf_{(x,y)\in A} f(x, y) = -\infty$ e $\sup_{(x,y)\in A} f(x, y) = +\infty$ poiché

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} f(x, -x) = -\infty.$$

Tuttavia l'equazione $\frac{1}{xy} = 0$ non ha soluzioni.