Calculus 2 – Prova scritta

15 Settembre 2021

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti serie sono a termini positivi e convergono semplicemente e/o assolutamente.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\log 2)^n}{(n-1)!}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(2+\sin n)}{\sqrt{n^5}}$.

Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n,$$

determinarne il raggio di convergenza ρ, l'insieme I di convergenza puntuale e calcolare il valore della funzione somma della serie.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x) = \log(2 - \cos(2x))$, calcolare la formula di McLaurin con resto di Peano di f di ordine 4.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π data su $[-\pi, \pi)$ da

$$\begin{cases} 0 & x \in [-\pi, -1) \\ 2x & x \in [-1, 1) \\ 0 & x \in [1, \pi) \end{cases}.$$

a) Rappresentare il grafico di f sull'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.
b) Dire se la serie di Fourier converge puntualmente su $\mathbb{R}$ e determinarne il valore della somma su $[-\pi, \pi]$.
c) Calcolare la ridotta s_1 di ordine 1 della serie di Fourier di f.

Esercizio 4. Sia $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.

a) Stabilire se f è differenziabile sul suo dominio e determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $P_0 = (1, -1, f(1, -1))$.
b) Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo relativo di f sul suo dominio.
c) Dire se l'insieme
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$$
è chiuso e/o limitato, e determinare, se esistono, punti di massimo e minimo assoluto di f su tale insieme.