Calcolo differenziale ed integrale 2 – Prova scritta
8 Giugno 2020

Esercizio 1. Studiare la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\frac{1}{n+2})$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{4n}{3n}}$.

Calcolare inoltre un'approssimazione della somma della prima serie a meno di 10^{-2}.

Esercizio 2. Sia
$$f(x) = 3e^{2x} - \cos(x^2).$$
(1) Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 3.
(2) Calcolare $f^{(3)}(0)$.
(3) Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 1 e stimare l'errore commesso in $x = 1/2$:
$$|R_1(1/2)| = |T_1(1/2) - f(1/2)|.$$

Esercizio 3. Sia f la funzione periodica di periodo 2π definita da
$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in (-\pi, -\pi/2] \\ 0 & x \in (-\pi/2, \pi/2] \\ 2 & x \in (\pi/2, \pi] \end{cases}.$$
(1) Trovare i coefficienti a_5, b_5 e $\hat{f}_5$.
(2) Determinare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[\pi/2, \pi]$.

Esercizio 4. Sia $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^3 + 4x^2 - 2y^2$.
(1) Stabilire se f è differenziabile sul suo dominio e calcolarne la derivata nel punto $P_0 = (1, 2)$ lungo il vettore $v = (-1, 1)$. Determinare poi l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, f(1, 2))$;
(2) Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo relativo di f sul suo dominio.
(3) Sia ora $h(x, y) = x^2 - 2y^2$ e sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$. Determinare massimo e minimo assoluto di h in C.