Calculus 2 – Prova scritta
6 Giugno 2022

Esercizio 1. Dire se le seguenti serie convergono semplicemente e/o assolutamente:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + (-1)^n}{n^2 + \cos(n)}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\Big(\frac{1}{\log(2n)}\Big)$.

Calcolare poi il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza puntuale della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + 3^n)x^n}{n}.$$

Soluzione:

(1) La serie è a termini positivi perchè sia il numeratore che il denominatore lo sono per $n \geq 1$. Abbiamo

$$\frac{2n + (-1)^n}{n^2 + \cos(n)} = \frac{1}{n} \frac{2 + (-1)^n/n}{1 + \cos(n)/n^2} \sim \frac{2}{n}$$

per $n \to \infty$. Dato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge in quanto serie armonica (di esponente 1), allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+(-1)^n}{n^2+\cos(n)}$ converge per il criterio del confronto asintotico.

(2) La serie è a segni alterni, è decrescente (perché $\sin(x)$ è crescente su $[0, \pi/2]$ mentre $1/\log(2x)$ è decrescente e con immagine in $[0, \pi/2]$) ed è chiaramente infinitesima. Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz. La serie non converge assolutamente. Infatti abbiamo

$$\sin\Big(\frac{1}{\log(2n)}\Big) \sim \frac{1}{\log 2n}$$

per $n \to \infty$. Dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{1/\log 2n}{1/\sqrt{n}} = \infty$ e che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge in quanto serie armonica generalizzata di esponente $1/2$ segue che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(2n)}$ per il criterio del confronto asintotico e quindi anche $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\frac{1}{\log(2n)})$ diverge per il criterio del confronto asintotico.

(3) Calcoliamo il raggio di convergenza con il criterio del rapporto. Posto $a_n = \frac{2^n+3^n}{n}$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 3 \frac{2(2/3)^{n+1} + 1}{(2/3)^n + 1} \frac{n}{n+1} = 3.$$

Quindi il raggio di convergenza è $1/3$. Per $n = 1/3$ abbiamo $\frac{(2^n+3^n)(1/3)^n}{n} \sim \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$ e dunque la serie diverge. Per $x = -1/3$ abbiamo $\frac{(2^n+3^n)(-1/3)^n}{n} = (-1)^n \frac{(2/3)^n+1}{n}$ e dunque la serie converge per il criterio di Leibniz. L'insieme di convergenza è quindi $[-1/3, 1/3)$.

Esercizio 2. Data $f(x) = \sin(x) - \log(1+x)\cos(x)$, determinare il polinomio di McLaurin di ordine 5 di f e calcolare $f^{(5)}(0)$.

Soluzione:
Abbiamo

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Quindi

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^5)$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{15} + o(x^5)$$

Segue che $f^{(5)}(0) = -\frac{1}{15} \cdot 5! = -8$.

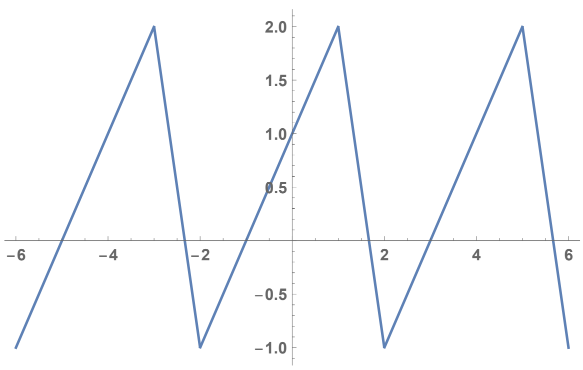
Esercizio 3. Sia f la funzione ottenuta estendendo per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-2,1); \\ 5-3x & x \in [1,2]. \end{cases}$$

(1) Disegnare il grafico di f.
(2) Calcolare i coefficienti di Fourier b_k per $k \in \mathbb{Z}$.
(3) Calcolare il valore della serie di Fourier di f sull'intervallo $[-2,2]$.

Soluzione:

(1)



(2) Usando l'integrazione per parti troviamo

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(t)\sin(\tfrac{\pi}{2}kt)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(t+1)\sin(\tfrac{\pi}{2}kt)\,dt + \frac{1}{2}\int_{1}^{2}(5-3t)\sin(\tfrac{\pi}{2}kt)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[-(t+1)\frac{2}{\pi k}\cos(\tfrac{\pi}{2}kt)\Big]_{-2}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} 1\cdot\frac{2}{\pi k}\cos(\tfrac{\pi}{2}kt)\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[-(5-3t)\frac{2}{\pi k}\cos(\tfrac{\pi}{2}kt)\Big]_{1}^{2} + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} 5\cdot\frac{2}{\pi k}\cos(\tfrac{\pi}{2}kt)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[-(t+1)\frac{2}{\pi k}\cos(\tfrac{\pi}{2}kt)\Big]_{-2}^{1} + \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{2}{\pi k}\Big)^2\sin(\tfrac{\pi}{2}kt)\Big]_{-2}^{1} \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[-(5-3t)\frac{2}{\pi k}\cos(\tfrac{\pi}{2}kt)\Big]_{1}^{2} + \frac{1}{2}\Big[5\cdot\Big(\frac{2}{\pi k}\Big)^2\sin(\tfrac{\pi}{2}kt)\Big]_{1}^{2} \\
&= -\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}k)}{\pi k} - \frac{\cos(\pi k)}{\pi k} + \frac{2\sin(\frac{\pi}{2}k)}{(\pi k)^2} + \frac{\cos(\pi k)}{\pi k} + \frac{2\cos(\frac{\pi}{2}k)}{\pi k} - \frac{10\sin(\frac{\pi}{2}k)}{(\pi k)^2} \\
&= -\frac{8\sin(\frac{\pi}{2}k)}{(\pi k)^2}.
\end{aligned}$$

(3) La funzione f è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile a tratti, quindi la sua serie di Fourier converge a f in ogni punto.

Esercizio 4. Sia $f(x,y) = xy(x+y-1)$.

(1) Stabilire se f è differenziabile sul suo dominio, determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico in $(-1,-1,f(-1,-1))$ e calcolare la derivata direzionale di f in $(-1,-1)$ lungo la direzione $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.
(2) Stabilire quali sono i punti critici di f sul suo dominio e classificarli.
(3) Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto di f sull'insieme

$$T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\geq 0, x+y\leq 1\}.$$

Soluzione:

(1) Il dominio è $\mathbb{R}^2$ e la funzione è $\mathcal{C}^2$ sul suo dominio in quanto polinomio. Abbiamo $\nabla f(x,y) = (y^2+2xy-y, x^2+2xy-x)$ e quindi $\nabla f(-1,-1) = (4,4)$ e il piano tangente in $(-1,-1,f(-1,-1))$ è $z = -3+4(x+1)+4(y+1)$. Per la formula del gradiente abbiamo $\frac{\partial f}{\partial(\frac{3}{5},\frac{4}{5})} = \nabla f(-1,-1)\cdot(\frac{3}{5},\frac{4}{5}) = \frac{12}{5}+\frac{16}{5} = \frac{28}{5}$.

(2) Dato che $\nabla f(x,y) = (y^2+2xy-y, x^2+2xy-x) = (y\cdot(y+2x-1), x\cdot(x+2y-1))$, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y\,(y+2x-1) = 0, \\ x\,(x+2y-1) = 0 \end{cases}$$

troviamo i quattro punti critici $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (0,1)$ e $P_4 = (\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Abbiamo $H[f](x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}$. In particolare, dato che $H[f](P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $H[f](P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $H[f](P_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hanno determinante -1, segue che P_1, P_2, P_3 sono punti di sella. Dato che $H[f](P_4) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ha determinante $1/3$, segue che P_4 è un punto di minimo relativo. Quindi P è un punto di minimo relativo.

(3) L'unico punto critico di f all'interno del triangolo (bordo escluso) è P_4, in cui la funzione vale $f(P_1) = -1/27$. Inoltre è chiaro dalla definizione che f vale zero su ogni punto sul bordo del triangolo[1]. Segue quindi che il minimo di f su T è $-1/27$ (in P_4) e il massimo è 0 raggiunto su tutti i punti del bordo del triangolo.

[1]Si può vedere anche parametrizzando i tre lati con $\gamma_1(t) = (t,0)$, $\gamma_2(t) = (0,t)$ e $\gamma_3(t) = (1-t,t)$ per $t\in[0,1]$.