Es 1:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^4)}{n^2+1}$

- La serie é a segni variabili visto che il coseno può assumere sia valori positivi che negativi.

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos(n^4)}{n^2+1}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ e tale serie converge visto che $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$

  che é termine generale di una serie armonica generalizzata convergente.

  $\Rightarrow$ la serie converge assolutamente e quindi semplicemente.

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{4^n+n^2}$

- Serie a segni alterni. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n = \frac{3^n}{4^n+n^2} > 0$.

- Per la convergenza semplice quindi si può applicare il criterio di Leibnitz.

  La succ. $\left(\frac{3^n}{4^n+n^2}\right)_{n\geq 1}$ é decrescente visto che

  $n \mapsto 3^n$ e $n \mapsto 4^n + n^2$ sono crescenti e quindi

  $n \mapsto \frac{1}{4^n+n^2}$ é decrescente.

  Infine $\boxed{0 < \frac{3^n}{4^n+n^2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n}$ (*), e quindi $\lim_n \frac{3^n}{4^n+n^2} = 0$

  $\Rightarrow$ la serie converge semplicemente per il criterio di

Leibnitz.

- La serie converge assolutamente per il criterio del confronto grazie alla disuguaglianza (*), in quanto $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ è il termine generale di una serie geometrica convergente (ha ragione < 1).

- Guardiamo se la ridotta $s_9 = \sum_{n=1}^{9} (-1)^n \frac{3^n}{4^n+n^2}$ approssima il valore della serie a meno di 0,1, cioè se

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{4^n+n^2} - s_9 \right| < \frac{1}{10}.$$

Per Leibnitz si ha

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{4^n+n^2} - s_n \right| \leq a_{n+1}.$$

$\Rightarrow$ guardiamo se $a_{9+1} = a_{10} = \frac{3^{10}}{4^{10}+10^2} < \frac{1}{10}$.

Questo vuol dire verificare se $\underbrace{10 \cdot 3^{10}}_{= 590490} < \underbrace{4^{10} + 100}_{= 1048676}$.

Tale disuguaglianza è vera, e quindi s_9 approssima il valore della serie a meno di 0,1.

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ è serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ con

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall\, n \geq 1$, con $a_n > 0$.

Il raggio di conv. ρ si può determinare in 2 modi:

<u>I modo</u>:

Calcolo $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sqrt{n} = \underset{\ell}{\overset{\shortparallel}{1}}$

$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\ell} = 1.$

<u>II modo</u>:

Calcolo $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n a_n^{1/n} = \lim_n \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} =$

$= \lim_n \frac{1}{n^{2/n}} = 1 = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho = 1$

Questo vuol dire che l'insieme I di convergenza puntuale della serie di potenze soddisfa:

$$(-1, 1) \subseteq I \subseteq [-1, 1].$$

Dobbiamo quindi verificare se in $x = \pm 1$ c'è convergenza.

Se $x = -1$, si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^n$ che converge per il criterio di Leibnitz, essendo $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ decrescente, infinitesima e positiva.

$\Rightarrow -1 \in I$.

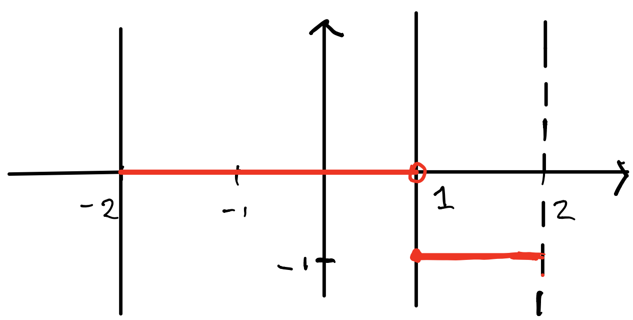
se invece $x = 1$, si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ che diverge

essendo una serie armonica generalizzata del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ con $\alpha = \frac{1}{2}$ (< 2).

Concludiamo che $I = [-1, 1)$.

Es 3:

f di periodo $T = 4$



$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} k x} \, dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} f(x) \, e^{-\frac{\pi}{2} k x} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_{1}^{2} (-1) e^{-i \frac{\pi}{2} k x} \, dx = + \frac{1}{4} \left. \frac{e^{i \frac{\pi}{2} k x}}{i \frac{\pi}{2} k} \right|_{1}^{2} =$$

$$= \frac{e^{i \pi k} - e^{i \frac{\pi}{2} k}}{2 i \pi k} = \frac{\cos(\pi k) + i \,\mathrm{sen}(\pi k) - \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right) - i \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} k\right)}{2 i \pi k}.$$

Per $k = 2m+1$ si ottiene:

$$\hat{f}_{2m+1} = \frac{\cos(\pi(2m+1)) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2m+1)\right)}{2i\pi(2m+1)}, \quad \text{visto che}$$

$$\mathrm{sen}\left(\pi(2m+1)\right) = 0 \quad e \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}(2m+1)\right) = 0$$

Inoltre $\cos\left(\pi(2m+1)\right) = \cos\left(\pi + 2m\pi\right) = -1$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2m+1)\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$= (-1)^n.$$

$$\Rightarrow \hat{f}_{2m+1} = \frac{-1 + i(-1)^{m+1}}{2i\pi(2m+1)}.$$

Osserviamo che f é regolare a tratti su $[-2,2)$ con pti di discontinuitá dati da $x=-2$ e $x=1$

$$\Rightarrow \mathcal{F}f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{su } (-2,1) \cup (1,2) \\ \dfrac{f(-2^-) + f(-2^+)}{2} & x = -2 \\ \dfrac{f(1^-) + f(1^+)}{2} & x = 1 \end{cases}$$

e quindi $\mathcal{F}f(1) = \dfrac{0 + (-1)}{2} = -\dfrac{1}{2}$, mentre

$\mathcal{F} f(0) = f(0) = 0.$