Esercizi di Geometria,
C.S. in Ingegneria Informatica, a.a.2014-2015.

Matrici e sistemi lineari

Negli esercizi seguenti i coefficienti delle equazioni e le entrate delle matrici sono numeri reali.

Es. 31. Ridurre totalmente per righe le seguenti matrici.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Es. 32. Per ciascuna matrice A dell'esercizio precedente scrivere il sistema lineare che ha A come matrice completa e descrivere le sue soluzioni.

Es. 33. Risolvere i seguenti sistemi lineari riducendo totalmente per righe la matrice completa associata.

$$\begin{cases} 2x+y+z = 2 \\ 3x+2y+2z = 2 \\ -x+y+2z = -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x+y+z = 0 \\ 3x+2y+2z = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \end{cases}.$$

Es. 34. La matrice completa di un sistema lineare S è equivalente per righe alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual'è la soluzione generale del sistema?
Scrivere due diversi sistemi lineari equivalenti ad S ma con un diverso numero di equazioni non nulle.

Es. 35. Risolvere i seguenti sistemi lineari

$$S_1: \begin{cases} 3x-y-z = 4 \\ 3x+2y-2z = -6 \\ 2x+y-3z = -6 \\ x-y-z = 0 \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} 3x+3y-5z = -12 \\ x+2y-2z = -6 \\ 2x+y-3z = -6 \\ x-y-z = 0 \end{cases}, \quad S_3: \begin{cases} 3x+3y-5z = -12 \\ x+2y-2z = -6 \\ 2x+y-3z = 4 \\ x-y-z = 0 \end{cases}$$

Es. 36. Risolvere i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y - 2z - u = 1 \\ 2x + y - 2z - 2u = 2 \\ 3x - 3y + 2z - u = 0 \end{cases}$$

Es. 37. Calcolare la caratteristica delle seguenti matrici reali

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione di alcuni esercizi

Es. 31 Si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3-2R_2,\\ -\frac{1}{5}R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-2R_3,\\ R_1-R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per la seconda matrice si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-R_1,\\ R_3-R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3\leftrightarrow R_2,\\ -R_2,\\ -R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1-R_2,\\ R_2-R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per la terza matrice si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1,\\ R_3-R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}R_2\\ R_1+R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◀

Es. 32 a) $\begin{cases} x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 2 \\ x_2+x_3 & = & 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 2 \\ 0 & = & 1 \end{cases}$ quindi non ha soluzioni.

b) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 & = & 1 \\ x_1+x_2 & = & 2 \\ x_1 & = & 3 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & -1 \end{cases}$ e quindi ha una sola soluzione: $(3,-1,-1)$.

c) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3 & = & 1 \\ 2x_1+2x_2+x_3 & = & 0 \\ x_1+x_2+2x_3 & = & -1 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x_1+x_2 & = & 1/3 \\ x_3 & = & -2/3 \end{cases}$

le cui soluzioni sono:

$$x_1 = 1/3 - t,\ x_2 = t,\ x_3 = -2/3$$

con $t \in K$. ◀

Es. 33 La matrice completa associata al primo sistema è $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Sulle righe di questa matrice eseguendo, nell'ordine, le seguenti operazioni elementari: $E_3(-1)$, $E_{1,3}$, $E_{2,1}(-3)$, $E_{3,1}(-2)$, si ottiene $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & -7 \\ 0 & 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

Il terzo sistema è omogeneo, è equivalente a $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2y+3z=0 \end{cases}$ e le sue soluzioni sono $(-\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z)$ con $z \in \mathbb{R}$. ◀

Es. 35 $S_1:\ (2,-1,3)$; $S_2:\ \left(\frac{4}{3}t-2, \frac{1}{3}t-2, t\right)_{t\in\mathbb{R}}$; $S_3:$ incompatibile. ◀