Esercizi di Algebra Lineare (3)

Caratteristica e vettori

1) Calcolare la caratteristica di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Calcolare la caratteristica di

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Discutere la caratteristica di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & h & h & 1 & h \\ -1 & 1 & 0 & 2h & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$

4) Scrivere una matrice 3×4 con caratteristica 2

5) Determinare, se esiste, una matrice tale che $rk(A^2) < rk(A)$

6) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in tal caso dare un controesempio)

a) $rk(A \cdot B) \geq rk(A)$

b) se B è invertibile $rk(A \cdot B) = rk(A)$

c) se A ha tutte le righe uguali e $A \neq 0$, allora $rk(A) = 1$.

d) se A è quadrata di ordine n ed è invertibile, allora $rk(A) = n$

e) se A è una matrice 3×5 con $rk(A) = 2$, allora il sistema omogeneo associato $AX = 0$ ha ∞^3 soluzioni

f) se A è una matrice 3×5 con $rk(A) = 3$, allora il sistema $AX = B$ ammette sempre soluzioni

g) se A è una matrice triangolare superiore allora $rk(A)$ è massimo.

h) $rk(A) = rk(2A)$

7) In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori
$v_1 = (1, 2, 3, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1)$ e $v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.
Provare che v_1, v_2, v_3 sono l. d

ed esprimere v_3 come combinazione lineare di v_1 e v_2.

8) In $\mathbb{R}^3$ quali fra i vettori $(3,5,3)$, $(4,2,6)$, $(1,5,6)$, $(0,0,0)$ è combinazione lineare di $(1,1,3)$ e $(2,4,0)$?

9) In $\mathbb{R}^4$ il vettore $(1,0,1,0)$ è una combinazione lineare di $(1,-1,0,1)$, $(0,1,2,0)$, $(1,-1,1,2)$?

10) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene entrambi i vettori $u=(1,-1,1)$ e $v=(-3,3,-3)$? Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene entrambi i vettori $u=(1,-1,1)$ e $v=(1,0,1)$?

11) Provare che $\langle(-1,2,1),(1,1,0)\rangle$
$= \langle(-1,2,1),(1,1,0),(0,3,1)\rangle$

12) Dire se esiste una base di $\mathbb{R}^4$:
a) che contiene il vettore $v_1=(\sqrt{2},\pi,e,1)$
b) formata da vettori che hanno la prima componente nulla
c) formata da vettori che hanno la terza componente uguale a 1
d) contenente $(0,0,0,0)$

13) Dire se $<(1,2,0),(1,-1,1)>$
$= <(1,2,0),(0,3,-1)>$
$= <(2,1,1),(1,5,-1)>$

14) Dire se $<v_1, v_2, v_3> =$
$= <v_1, 2v_2, 3v_3>$

15) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

a) 3 vettori in $\mathbb{R}^3$ sono l.i.

b) se v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$, allora $<v_1, 2v_2, 3v_3> = \mathbb{R}^3$

c) se v_1, v_2, v_3 sono l.d., allora v_1 è combinazione lineare di v_2 e v_3

d) due vettori v_1, v_2 sono linearm. dip. se e solo se sono proporzionali ($v_1 = \lambda v_2$ o $v_2 = \lambda v_1$ con $\lambda \in \mathbb{R}$).