

## Calculus 2 – Prova scritta

1 LUGLIO 2021

**Esercizio 1.** Dire se le seguenti serie convergono semplicemente e/o assolutamente:

- a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{1}{5^n},$
- b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3}{\sqrt{n} + \log n}.$

Calcolare poi il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza puntuale della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3!}{\sqrt{n}} (2x)^n.$$

**Esercizio 2.** Sia  $f(x, y) = (x - 1) \log(y + 1) + y - 1.$

- (1) Determinare il dominio di  $f$  e stabilire se è aperto.
- (2) Verificare che sono soddisfatte le ipotesi del teorema del Dini e che quindi è possibile scrivere  $y$  come funzione di  $x$ , ossia  $y = g(x)$ , in un intorno di  $P_0 = (1, 1).$
- (3) Calcolare  $g'(x)$  in un intorno di  $P_0.$
- (4) Determinare lo sviluppo di Taylor centrato in 1 e di ordine 2 di  $g$  in un intorno di  $P_0.$
- (5) Calcolare il terzo coefficiente di Fourier  $\hat{h}_3$  della funzione  $h$  periodica di periodo 2 data da

$$h(x) = \begin{cases} -2 & x \in [-1, 0) \\ 0 & x \in [0, 1) \end{cases}.$$

**Esercizio 3.** Sia  $f(x, y) = x^2 e^y + e^y.$

- (1) Stabilire se  $f$  è differenziabile sul suo dominio e determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico in  $(-1, 0, f(-1, 0));$
- (2) Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo relativo di  $f$  sul suo dominio.
- (3) Determinare, se esistono, punti di massimo e minimo assoluto di  $f$  sull'insieme

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}.$$