제7장 가우스-조던 소거법(Gauss-Jordan Elimination)

① 기본 행 연산(Elementary row operations)

i) 한행에 영이 아닌 상수배 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $c \neq 0$.

ii) 행 교환

iii) 한 행의 상수배($\neq 0$)를 다른 행에 더하기 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1행 (-2)배 다음행.

$-2 \ -4 \ -6$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

② 가우스 조던 소거법

: 확장행렬을 기약 행사다리꼴로 바꾸는 알고리즘

ex) $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+4y-2z=5 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ -2, -3

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & -2 & -5 & -19 \end{pmatrix}$ $-5 \Rightarrow$ leading 1 $-\frac{1}{5} \rightarrow 1$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & -2 & -5 & -19 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 가우스 소거법 : 행사다리꼴화 알고리즘

행사다리꼴

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

제 3장 가우스 조던 소거법에 대한 고찰

① 이미 해가 구해진 연립 선형 방정식의 확장행렬은 항상 기약행 사다리꼴이다.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad x_3 = ? \text{ 자유변수} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

② 가우스 조던 소거법은 왜 가능할까?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

가감법을 이용한 소거법

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \\ x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \\ 0 + \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

가우스 소거법

제 9강 행렬

① 행렬이란?

ex) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

② 용어 1×3? $(a\ b\ c)$ 3차원 벡터? 행벡터

성분, 원소, 항 열벡터 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

(i,j) 성분: i행 j열에 위치한 성분

$n\times n$ 행렬: $\underset{n차}{정}$사각 행렬 (정방행렬)

③ 행렬의 같음

$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{B}$ → 행렬의 크기와 각 원소가 서로 같다.

④ 행렬의 덧셈

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & A_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$ 행렬의 덧셈은 크기가 같아야 정의 된다.

$=B+A$

⑤ 행렬의 스칼라배: 각 원소에 모두 곱해준다.

* 동형사상 (isomorphism)

$(A, *_1) =? (B, *_2)$

$\exists f: A\to B$ s.t f is an isomorphism

$\Leftrightarrow A\cong B,\ B\cong A$ A is isomorphism to B

B is isomorphism to A

$(a b c)$ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ → 3차원 벡터?

cA: 덧셈의 성질

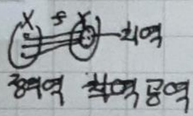
* dot product는 연산?

닫혀있다.

행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ → 벡터 (a,b,c,d)

제10강 선형사상(함수)과 행렬의 곱셈

① 함수의 정의



함수는 정의역에 모든원소에 대해, 그 원소를 공역의 오직 한 원소에 대응 시키는 관계이다.

② 함수의 종류

㉠ 전사(onto): 치역 = 공역

㉡ 단사, 일대일 함수 (one-to-one function)

㉢ 전단사, 일대일 대응함수 (one-to-one correspodence)

③ 선형사상

$f: V \to W$ (V: n차원 좌표, W: m차원)

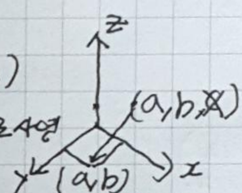
$\underbrace{(x_1, x_2 \cdots x_n)}_{n\text{개}} \xrightarrow{f} \underbrace{(\ ,\ ,\ \cdots,\ )}_{m\text{개}}$

$ax_1 + bx_1$

ex) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ by $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$

실수 3차원 좌표값

x, y 평면으로 사영



$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ by $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3)$

$= (y_1, y_2)$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

$Y = A \circ X$

④ 행렬의 곱셈

$m \times n$ 행렬 A와 $n \times k$ 행렬 B에 대해 행렬의 곱셈은 $m \times k$ 행렬이다.

⑤ 행벡터, 열벡터 표기법

$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$

$(AB)_{ij} = v_i v_j$

제 11강 +12강: 행렬 곱셈의 성질

① 선형사상의 행렬화

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}^{m \times n} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Y = A \cdot X$

② 행렬곱셈의 성질

i) 스칼라배 $(cA)B = A(cB) = c(A \cdot B)$

ii) 결합법칙 $(AB)C = (AB)C = (ABC)$

iii) 분배 법칙 $A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

$AB \neq BC$

제 13강 항등행렬

① 항등행렬: 정사각 행렬 중 대각성분은 모두 1이고, 그 외 성분은 모두 0인 행렬

ex) $\underset{I_1}{(1)}$ $\underset{I_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\underset{I_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\cdots$ I_n

② 행렬곱의 열분해

$AB = C$

③ 항등행렬의 성질

i) $AI = IA = A$

→ 항등원

제1 14강 역행렬 $\Leftrightarrow$ n차 정사각 행렬 가정

① 역행렬의 정의 $Ax = xA = I$ $\quad x \to \underbrace{A\text{의 역원}}_{A^{-1}}$

② 역행렬의 유일성

A^{-1}을 B, C라고 하자

$AB = BA = I \qquad BAC = IC$

$CA = AC = I \qquad BI = C \Rightarrow B = C$

③ 영인자 (zero divisor)

$AB = O \not\Rightarrow A = O$ or $B = O$

$\Rightarrow$ 0가 아닌 것과 곱하여 0을 만들 수 있는 원소

ex $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

④ 2x2 행렬의 역행렬

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

*가우스 조던 소거법

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ ay+bw=0 \\ cx+dz=0 \\ cy+dw=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & w & \text{상수} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{c}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a/(ad-bc) \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & d/(ad-bc) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b/(ad-bc) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -c/(ad-bc) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a/(ad-bc) \end{array}\right)$$

제 15강 역행렬의 성질

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$ad-bc=0$ 이면? ⇒ 역행렬 존재 X

① 가역행렬 (Invertible matrix): 역행렬이 존재하는 행렬

$\underline{ad-bc} \neq 0$ 인 행렬

↳ 판별식, 행렬식 (determinant) $det(A)=ad-bc$

비가역행렬: $ad-bc=0$ 인 행렬

↳ $det(A)=0$인 행렬

② 곱의 역행렬

$ABX=XAB=I$ (단, A^{-1}, B^{-1} 존재)

$ABX=I$ $A^{-1}ABX=A^{-1} \Rightarrow$ $B^{-1}A^{-1}AB=I$ $\Rightarrow (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$X=B^{-1}A^{-1}$

③ 행렬의 지수

$A^n=(\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{n번})$

$A^{-n}=\underbrace{A^{-1}\cdot A^{-1}\cdots\cdot A^{-1}}_{n번}=(A^{-1})^n$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \|$

$=(\underbrace{A\cdots\cdot A}_{n번})^{-1}=(A^n)^{-1}$

Theorem $(A^{-1})^n=(A^n)^{-1}$ (단, A는 정방행렬 & 가역행렬)

proof) 1) $n=2$ 일때

$(AA)^{-1}=A^{-1}\cdot A^{-1}=(A^{-1})^2$ 귀납법

⋮

k) $n=k+1$일때,

$(A^{k+1})^{-1}=(A^{-1})^{k+1}$

④ 역행렬의 성질

1) $(A^{-1})^{-1}=A$

2) $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$

제 16강 전치행렬(transposed matrix)

① 전치행렬의

$\underbrace{(A^T)_{ij}}_{m\times k} = \underbrace{A_{ji}}_{k\times m}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$ 대각선기준 대칭

② 전치행렬의 성질

1) $(A^T)^T = A$ Proof) $((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ij}$

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(kA)^T = kA^T$

4) $(AB)^T = B^T A^T$

↳ $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

5) A가 가역행렬 이므로 A^T도 가역행렬이고,

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$로 구할 수 있다.