제 17강 대각합(trace)

① 대각합의 정의 : 대각성분들의 합(정사각 행렬)

n차 정사각행렬 A에 대해서,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}$$

② 대각합의 성질

i) $tr(A^T) = tr(A)$

ii) $tr(cA) = c\,tr(A)$

iii) $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$

iv) $tr(AB) = tr(BA)$

③ dot product와 행렬곱 사이의 관계

벡터란? 점, 좌표 ex

선형사상 행렬 $A = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1) 벡터와 벡터) 2) 열벡터와 열벡터)

행벡터?

* 행렬곱 $(AB)_{ij} = a_i b_j = a_i^T \cdot b_j$

n차 정사각 행렬 A, n×1 행렬(열벡터) u, v에 대해서

$\underbrace{Au}_{n\times n \;\; n\times 1}$: n×1 행렬 $Au \cdot v = v^T A u = (v^T A)u$

$= (A^T v)^T u$ ⟹ $Au \cdot v = v \cdot A^T v$

$= v \cdot A^T v$

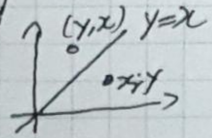
제 18강 기본행연산의 행렬화

열벡터 → 벡터로 취급 가능

↳ 행렬이기도 하니까, 기본행연산을 적용할 수 있다. → 전부 선형사상이다.

① 행교환 ⇒ 선형사상이다.

n×1 열벡터 $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{행교환}} A' = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ → 좌표를 뒤바꾸었다.



n×2일 때, $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{행교환}} A' = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ 함수

↳ 대칭함수

↳ 선형사상

* 선형사상은 행렬로 표현할 수 있다.

* 기본행연산도 행렬로 표현할 수 있다.

i행과 j행교환 n×1 열벡터

$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = (y_1, y_2 \cdots y_n)$

$\begin{cases} y_i = x_j \\ y_j = x_i \\ y_k = x_k \end{cases}$ (만약 k가 i와 j가 아닐 경우) 항등함수 → 항등행렬

↳ 확장행렬 I

↳ I의 i행과 j행을 행교환 시킨 행렬

n=4일 경우, 1행과 3행을 교환한 선형사상

$\begin{cases} y_1 = x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_1 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$
$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

② 한 행의 상수배

↳ i행에 상수배 → 항등행렬 I의 i행에 상수배한 행렬

↳ 좌표에 c배 → i좌표에만 상수 c배

ex) 3×1 열벡터의 2행에 3배 연산을 행렬화하면?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ i행의 상수 c배를 j행에 더하기

ex) 4×1 열벡터에 2행의 2배를 4행에 더하는 연산을 행렬화 하면?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

④ 행렬의 열분해를 이용한 기본행연산의 행렬화 확장

ex) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i) 1행과 2행 교환 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$