**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**
**Helsingborg**

**TENTAMENSSKRIVNING**
**LINJÄR ALGEBRA, FMAA55**
**2025-06-05 kl 8.00–13.00**

*INGA HJÄLPMEDEL.*
*Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar och svaren förenklas maximalt. Alla baser och koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade, om inte annat anges.*

**1.** Låt $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, a, 3)$ och $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$.

**a)** Bestäm talet $a$ så att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ blir ortogonala. (0.2)

**b)** Beräkna minsta vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$. (0.4)

**c)** Beräkna, för $a = 2$, volymen av parallellepipeden som spänns upp av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. (0.4)

**2. a)** Beräkna eventuella skärningen mellan linjen $\ell\colon (x, y, z) = (3 - 2t, 2 - t, -3 + t)$ och planet $\pi\colon 2x - y + z = 5$. (0.3)

**b)** Bestäm en ekvation på affin form för planet $\pi_1$ som innehåller punkterna $P_1\colon (1, 0, 2)$, $P_2\colon (2, -1, 1)$ och $P_3\colon (2, 2, 3)$. (0.4)

**c)** Ange avståndet mellan punkten $P_0\colon (1, 2, 3)$ och planet $\pi_2\colon 2x - 6y + 3z = 6$. (0.3)

**3.** Lös matrisekvationen $XA + X = B^{\mathsf{T}}$ där $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1.0)

**4.** Låt $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, b)$ och $\mathbf{u}_3 = (b, 2, 0)$.

**a)** Ange de värden på talet $b$, för vilka vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ är linjärt *beroende.* (0.4)

**b)** För varje sådant $b$, skriv $\mathbf{u}_3$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. (0.6)

**5.** Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beteckna avbildningen $F(\mathbf{x}) = (1, 2, 3) \times \mathbf{x}$.

**a)** Bevisa, med hjälp av definitionen, att $F$ är linjär. (0.3)

**b)** Ange avbildningsmatrisen för $F$. (0.5)

**c)** Ange värdemängden för $F$. (0.2)

**6.** Linjen $\ell_1$ innehåller punkten $(1, 2, -3)$ och skär linjen $\ell_2\colon (x, y, z) = (1 + t, -2t, -2 + 3t)$ ortogonalt. Bestäm ekvationen för $\ell_1$. (1.0)

*SLUT!*