Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

G414: Álgebra y Geometría

Guion MATLAB: Endormismos y Diagonalización

Sara Pérez Carabaza (sara.perezcarabaza@unican.es)

Valvanuz Fernández Quiruelas (valvanuz.fernandez@unican.es).

Objetivos

- Cálculo de autovalores y autovectores
- Diagonalización de endomorfismos

Table of Contents

Funciones de MATLAB utilizadas en este guion: `eig` , `eye`, `diag`

En este guion utilizaremos el siguiente ejemplo de endormorfismo en $\mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \rightsquigarrow (3x - 3z, 3y + 9z, -3z)$$

Comenzaremos por definir la matriz estándar asociada al endomorfismo:

```
A = [3 0 -3; 0 3 9; 0 0 -3];  % matriz estándar de f
n=3%dimensión del dominio y codominio
```

1. Cálculo de autovalores y autovectores.

Paso 1: Hallar autovalores

Para hallar los **autovalores** de f (o A), podemos recurrir a la función *eig,* a la cuál le pasaremos como argumento de entrada la matriz cuadrada de la cual queremos hallar los autovalores. La función eig nos devuelve las raices del polinomio característico $p(\lambda)$, obtenido al imponer $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$

```
autoval = eig(A)
```

En este caso al tratarse de un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ el polinomio característico tiene 3 raices: $\lambda = 3$ (doble) y $\lambda = -3$ (doble). Puesto que ambas son números reales, se trata de autovalores del endomorfismo.

<u>Nota:</u> ojo `eig` nos devuelve las n raices (reales o complejas). Puesto que estamos en $\mathbb{R}^n$, los autovalores serán únicamente aquellas raíces reales, luego deberemos quedarnos únicamente con las raices reales.

Paso 2: Hallar autovectores asociados a cada autovalor

Una vez tenemos los autovalores de f (o A), procedamos a obtener los **autovectores** mediante la resolución de la ecuación $(A - \lambda_i I)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Deberemos resolver este sistema homogéneo (compatible indeterminado) para cada uno de los distintos autovalores obtenidos.

Esto nos permitirá obtener el subespacio propio V_3 del autovalor $\lambda = 3$y el subespacio propio V_{-3} del autovalor $\lambda = -3$.

En concreto, el subespacio propio V_3 esta formado por los vectores que verifican $A\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{v}$, o lo que es lo mismo $(A - 3I)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Hallamos el **<u>subespacio propio</u>** V_3 , es decir, el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 3$ (doble). De antemano sabemos que al tener multiplicidad algebraica 2, luego la multiplicidad geométrica podrá ser 1 o 2. Recordemos además que la multiplicidad geométrica, dimensión del subespacio propio, es como mucho igual a la algebraica: $1 \le \dim(V_\lambda) \le m(\lambda)$

```
n-rank(A-3*eye(n))%multiplicidad geométrica-> número de parametros libres sist. homogéneo
% base del subespacio propio asociado al autovalor 3
baseV3 = null(A - 3*eye(3), 'r')  % dim(V3)=2=m(3)
```

Al obtener una base de $V_3 =< (1,0,0),(0,0,1) >$ con dos vectores, la dimensión del subespacio V_3 es igual a 2. Luego la multiplicidad geométrica también, $dim(V_3) = 2$.

Comprobación. Comprobemos que efectivamente los vectores de la base de V_3 son autovectores con $\lambda = 3$, es decir que

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
A*baseV3-3*baseV3
```

Además, por ser V_3 un espacio vectorial, la combinación lineal de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cualesquiera de V_3 pertenecerá también a V_3, y por tanto será autovector de Acon $\lambda = 3$. Escojamos por ejemplo la siguiente combinación lineal:

```
w=3*baseV3(:,1)-5*baseV3(:,2)%una combinación lineal cualquiera de los vectores
basede V3
```

y comprobemos que w es autovector con $\lambda = 3$, es decir, $A\vec{w} = 3\vec{w}$

```
A*w-3*w
```

Por último, hallamos el **subespacio propio** V_{-3} asociado al autovalor $\lambda = -3$. De antemano al ser multiplicidad algebraica simple,$m(-3) = 1$, sabemos que la multiplicidad geométrica será 1.

```
% base subespacio propio asociado al autovalor -3
baseVmenos3 = null(A +3*eye(3), 'r')  % dim(Vmenos3)=1=m(-3)
```

$V_{-3} =< (1/2, -3/2, 1) >$

Comprobación. Comprobemos que efectivamente los vectores de la base de V_{-3} son autovectores con $\lambda = -3$, es decir que

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
A*baseVmenos3+3*baseVmenos3
```

2. Diagonalización de un endomorfismo

Antes de diagonalizar la matriz comprobaremos siempre que el endormorfismo sea diagonalizable. Recordemos que para que un endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$sea diagonalizable debemos poder obtener una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de f. Para ello, han de cumplirse dos condiciones:

1. Todos sus autovalores tienen que ser reales (necesitamos n autovalores contando multiplicidades)
2. La dimensión de cada subespacio propio tiene que coincidir con la multiplicidad (algebraica) del autovalor al que está asociado.

En nuestro ejemplo de endomorfismo en $\mathbb{R}^3$, podemos ver que ambas condiciones se cumplen.

1. todas las raices son reales: $\lambda = 3$(doble) $\lambda = -3$

2. la multiplicidad geométrica de cada autovalor coincide con la algebraica: $m(3) = dim(V_3) = 3$ y $m(-3) = dim(V_{-3}) = 1$

Por tanto, f será diagonalizable. Como sabemos, diagonalizar f consiste en encontrar una matriz diagonal D y otra matriz regular P tales que $A = PDP^{-1}$, o lo que es lo mismo $D = P^{-1}AP$.

La diagonal de D estará formada por los autovalores de f y P contendrá en sus columnas una base de $\mathbb{R}^n$ formada de autovectores de f. Ha de respetarse el mismo orden al colocar los valores propios en la diagonal de D y los correspondientes vectores propios en las columnas de P.

```
D = diag(autoval)
P = [baseVmenos3 baseV3 ]
```

Podemos comprobar fácilmente que, efectivamente, al juntar las bases de los subespacios propios obtenemos una base de $\mathbb{R}^3$:

```
rank(P)  % los tres vectores son l.i. -> forman base de R³
```

Comprobamos que las matrices D y P que hemos obtenido son las correctas $A = PDP^{-1}$

```
A - P*D*inv(P)
```

Bibliografía

- Guiones para Matlab realizados por Rodrigo García Manzanas y Ruth Carballo Fidalgo para la asignatura de Álgebra y Geometría del Grado en Ingeniería Civil.