Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

G414: Álgebra y Geometría

Subespacios vectoriales y operaciones

Sara Pérez Carabaza (sara.perezcarabaza@unican.es)

Valvanuz Fernández Quiruelas (valvanuz.fernandez@unican.es).

Objetivos

- Pasar de la forma implícita de un subespacio a la paramétrica y viceversa
- Suma e intersección de subespacios
- Hallar el subespacio suplementario.

Table of Contents

Funciones de MATLAB utilizadas en este guion: `rank, null, rref`

```
format rat
clear all;
```

1. Formas de expresar subespacios vectoriales

Un subespacio vectorial puede ser definido y representado de diversas maneras, cada una con sus propias características y utilidades. Las principales formas son:

- **forma implícita**: un conjunto de ecuaciones no redundantes que especifican las restricciones de los vectores del subespacio.
- **forma paramétrica**: expresión que nos permite obtener todos los vectores del subespacio dando valores a los parámetros.
- **base**: conjunto de vectores linealmente independientes cuyas combinaciones lineales nos permiten obtener cualquier vector del subespacio.

Nota: también podemos expresar el subespacio a partir de un sistema generador que no sea base, sin embargo un sistema generador tipo base es la forma más compacta, ya que tiene el mínimo número de vectores necesarios para describir completamente el subespacio.

1.1 Paso de forma implícita a paramétrica

La forma implícita de un subespacio se trata de un conjunto de ecuaciones implítas que forman un sistema lineal homogéneo. Estas ecuaciones implícitas determinan las condiciones que deben cumplir los vectores de dicho subespacio. Para obtener la forma paramétrica de S debemos resolver el sistema lineal homogéneo.

Veamos un ejemplo. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado en su forma implícita,

$$S : \left.\begin{array}{r} x+y-z-t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \end{array}\right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Acabamos de ver que para obtener una base del mismo bastará con resolver el sistema homogéneo que forman sus ecuaciones implícitas. Puesto que todos los subespacios de $\mathbb{R}^n$ deben contener al vector nulo, cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ será siempre un sistema homogéneo y podremos resolverlo con la función `null`.

```
coefImpS = [1 1 -1 -1; 2 2 -1 -1];  % matriz de coefs. del sistema homogéneo
baseS = null(coefImpS, 'rational')  % cada columna es un vector de la base de S
```

La función null nos devuelve vectores cuya combinación lineal es la solución general del sistema homogéneo. Es decir, en este ejemplo la solución general es:

$$S : \{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Por tanto, la forma paramétrica que buscamos es $S = \{(-\alpha, \alpha - \beta, \beta, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

1.2 Paso de la forma paramétrica de un subespacio a la implícita (implicitación)

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado en su forma paramétrica, por ejemplo $S = \{(\alpha, \alpha, \beta, \beta) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,0,1,1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ cuya base está formada por los vectores $(1,1,0,0)$ y

$(0, 0, 1, 1)$. Sabemos que cualquier vector de S (y en particular los vectores de la base) verificarán las ecuaciones implícitas del subespacio, cuya forma general para subespacios de $\mathbb{R}^4$ será $ax + by + cz + dt = 0$. Es decir, en este ejemplo debe cumplirse

$$\begin{array}{l} a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d \cdot 1 = 0 \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, bastará con resolver el sistema homogéneo donde las incógnitas serán los coeficientes de las ecuaciones implícitas (a, b, c y d en este ejemplo), y cuya matriz de coeficientes estará formada por los vectores de la base (colocados en filas).

Resolvemos este sistema lineal homogéneo con la función null.

```
baseS = [1 1 0 0; 0 0 1 1]';  % base de S (en columnas)
null(baseS', 'rational')  % matriz con los vectores de la base por columnas
traspuesta
```

Nota: Es importante observar que este en este proceso de implicitación es la única vez de este guion en el que hemos utilizado la matriz de los vectores metidos por filas (matriz por columnas traspuesta).

La función null nos devuelve vectores cuya combinación lineal es la solución general del sistema homogéneo. Es decir, en este ejemplo la solución general es:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dando valores a los parámetros libres obtenemos las 2 ecuaciones implícitas del sistema.

$$\begin{array}{l} \text{Si } \alpha = 1, \beta = 0 \rightarrow (a, b, c, d) = (-1, 1, 0, 0) \rightarrow -x + y = 0 \\ \text{Si } \alpha = 0, \beta = 1 \rightarrow (a, b, c, d) = (0, 0, -1, 1) \rightarrow -z + t = 0 \end{array}$$

La expresión del subespacio en implícitas será por tanto $S : \left. \begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -z + t = 0 \end{array} \right\}$

Nota: Resulta más conveniente para ver estas ecuaciones y guardar sus coeficientes transponer la matriz devuelta por `null`. De manera tendremos los coeficientes de las ecuaciones implícitas de S por filas:

```
coefImpS=null(baseS', 'rational')' %notar el transpuesto
```

1.3 Obtención de una base de un subespacio

Un subespacio además de su forma paramétrica y su forma implícitas también queda representado por su base. A continuación veremos cómo obtener una base de un subespacio partiendo de su forma paramétrica o implícita.

1.3.1 Base a través de forma paramétrica.

Si el subespacio viene dado por sus ecuaciones paramétricas, la obtención de una base del subespacio es directa. Por ejemplo, para el subespacio S de $\mathbb{R}^5$:

$$S = \{\begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta \\ 2\beta - \gamma \\ -3\alpha + \beta \\ -\gamma \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \{\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Una base posible de S sería $\{(2, 0, -3, 0, 0), (3, 2, 1, 0, 1), (0, -1, 0, -1, 0)\}$.

```
baseS = [2 0 -3 0 0; 3 2 1 0 1; 0 -1 0 -1 0]' ; % traspuesta para que sean vectores
por columnas
```

<u>Nota</u>: *Como convenio, siempre que introduzcamos por teclado una base colocaremos los vectores que la componen en columnas.*

1.3.2 Base a través de forma implícita.

Si, por el contrario, lo que se conoce del subespacio son sus ecuaciones implícitas, podemos obtener su forma paramétrica simplemente resolviendo el sistema lineal de ecuaciones. Puesto que todos los subespacios deben contener al elemento neutro, el sistema lineal será siempre homogéneo y podremos resolverlo con la función null.

Por ejemplo, en el caso del subespacio T de $\mathbb{R}^4$:

$$T : \begin{cases} x - y + 2z + 3t &= 0 \\ 3x - 2y + z - t &= 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya matriz de coeficientes guardaremos en la variable `coefImpT`

```
coefImpT = [1 -1 2 3; 3 -2 1 -1];  % matriz de coefs. del sistema homogéneo
baseT = null(coefImpT, 'rational')  %con otras versiones anteriores de matlab poner
"r" en vez de "rational"
```

La función null nos devuelve vectores cuya combinación lineal es la solución general del sistema homogéneo. Es decir, en este ejemplo la solución general es:

$$S : \{\lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Es decir, la función `null` nos devuelve directamente una base del subespacio $S : \{(3, 4, 1, 0), (7, 10, 0, 1)\}$.

<u>Nota</u>: *Recuerda que la base obtenida no es única, sino que hay infinitas. Por ejemplo, otra posible base del ejemplo anterior sería {(6 1 2 0),(7 10 0 1)}*

2. Operaciones con subespacios

2.1 Intersección de subespacios

Sean S y T dos subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por sus ecuaciones implícitas:

$$S : \left.\begin{array}{r} x+y-z-t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \end{array}\right\} \qquad T : \left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ z-t=0 \end{array}\right\}$$

El subespacio $S \cap T$ está formado por los vectores que cumplen tanto las ecuaciones implicitas S como las de T. Por lo que se calcula resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de S y las de T, ya que cualquier elemento de la intersección estará a la vez en S y en T, y por tanto, verificará ambos conjuntos de ecuaciones simultáneamente.

$$S \cap T : \left.\begin{array}{rr} x+y-z-t= & 0 \\ 2x+2y-z-t= & 0 \\ x-y= & 0 \\ z-t= & 0 \end{array}\right\}$$

```
coefImpS = [1 1 -1 -1; 2 2 -1 -1];  % coefs. eqs. implícitas S
coefImpT = [1 -1 0 0; 0 0 1 -1];  % coefs. eqs. implícitas T
baseSinterT = null([coefImpS; coefImpT], 'r')  % resuelvo el sistema homogéneo -->
```

Puesto que la función null nos devuelve un vector vacio, el sistema sólo tiene la solución trivial. Por lo que el subespacio intersección de S y T está compuesto tan sólo por el vector nulo. $S \cap T = \{(0,0,0,0\}$.Por tanto S y T están en suma directa, $dim(S \cap T) = 0$.

Nota: Ojo al juntar las ecuaciones de ambos sistemas no siempre tenemos porqué obtener las ecuaciones implícitas de $S \cap T$, ya que las ecuaciones implícitas por definición deben ser no redundantes. Si queremos hallar las ecuaciones implícitas de $S \cap T$ podemos hallar el sistema escalonada y ver si hay ecuaciones redundantes (filas de ceros que corresponden con la ecuacion 0=0)

```
rref([coefImpS; coefImpT])
```

En este ejemplo vemos que el rango es igual al numero de ecuaciones y que por tanto no hay ecuaciones redundantes (ecuaciones que son C.L del resto). Por lo que las 4 ecuaciones forman las ecuaciones implícitas de $S \cap T$. El subespacio vectorial $S \cap T$ de $\mathbb{R}^4$, tiene 4 ecuaciones implícitas y 0 parámetros libres, es decir, $dim(S \cap T) = 0$. (es decir, dim ($\mathbb{R}^4$) = 4 ecuaciones implícitas + 0 p.I).

2.2 Suma de subespacios

Para calcular el subespacio $S+T$, obtendremos en primer lugar una base de S y otra de T. A partir de ellas, es inmediato formar un sistema generador de $S+T$ (sólo habrá que unir ambas bases).

Sean S y T dos subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por sus ecuaciones implícitas:

$$S: \begin{matrix} x+y-z-t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \end{matrix}\Big\} \qquad T: \begin{matrix} x-y=0 \\ z-t=0 \end{matrix}\Big\}$$

```
baseS = null(coefImpS, 'r')  % base de S --> dim(S)=2
baseT = null(coefImpT, 'r')  % base de T --> dim(T)=2
genST = [baseS baseT]  % sistema generador de S+T
```

Una vez tenemos un sistema generador e $S+T$, podemos obtener una base $S+T$ los vectores necesario manteniendo el rango. Es importante recordar que la dimensión de un espacio vectorial es igual al rango de los vectores del sitema generador. Veamos primero cual es la dimensión de S+T

```
rank(genST)  % rango máximo --> sistema libre
```

En este caso los 4 vectores del sistema generador son libres, luego forman una base de $S+T$.

```
% Por tanto, genST será una base del subespacio suma (S+T), es decir:
baseST = genST  % dim(S+T)=4
```

Si nos fijamos en la fórmula de Grassmann $\mathbf{dim(S+T)=dim(S)+dim(T)\text{-}dim(S\cap T)}$, donde al ser suma directa tenemos $dim(S\cap T)=0$. Tenemos que tanto la dimensión de S como T es 2, $dim(S)=dim(T)=2$ (ya que tanto S como T tienen 2 ecuaciones implícitas en $\mathbb{R}^4$). Por lo que $dim(S+T)=4$, es decir la suma de S y T es todo $\mathbb{R}^4$. S y T son espacios suplementarios.

2.3 Búsqueda de espacios suplementarios

El suplementario de un subespacio en$V$=$\mathbb{R}^5$, es aquel subespacio T que cumple que:

$dim(S\cap T)=0 \quad dim(S+T)=V$

Ejemplo. Sea el subespacio de $\mathbb{R}^5$.

$$S: \begin{matrix} -143x-54y-44r=0 \\ t=0 \end{matrix}\Big\}$$

Para encontrar un subespacio suplementario de S en $\mathbb{R}^5$, lo primero es hallar una base de S (resolvemos el sistema):

```
coefImpS = [-143 -54 0 0 -44; 0 0 0 1 0];
baseS = null(coefImpS, 'rational')  % dim(S)=3
rank(baseS)% el subespacio S tiene rango 3 (dimensión 3)
```

Una vez tenemos una base de S, se trata de extender esta base añadiendo nuevos vectores que sean linealmente independientes de los anteriores hasta formar una base del espacio total, en este caso $\mathbb{R}^5$. Puesto que la base de S tiene dimensión 3, sabemos que una base del espacio suplementario tendrá 2 vectores.

Podemos probar a añadir cualquier vector, por ejemplo, los de la base canónica de $\mathbb{R}^5$. Lo que tenemos que comprobar es que el vector añadido aumente el rango del conjunto.

```
rank([baseS, [1 0 0 0 0]'])  % ya tenemos el primer vector, tenemos 4 vectores l.i.
```

Comprobamos como el rango aumenta. Los 4 vectores son libres, nos falta encontrar otro vector libre. Probamos con otro de la base canónica por comodidad

```
rank([baseS, [1 0 0 0 0]', [0 1 0 0 0]'])
```

[0 1 0 0 0]' este no nos sirve. Probamos con otro

```
rank([baseS, [1 0 0 0 0]', [0 0 0 1 0]'])
```

Ahora sí, ya tenemos 5 vectores l.i que generan todo $\mathbb{R}^5$. Los tres primeros forman una base de S y los 2 añadidos una base de su suplementario en $\mathbb{R}^5$.

Los vectores que hemos añadido a los de la base de S forman una base del suplementario de S en $\mathbb{R}^5$ que buscábamos: $\{(1,0,0,0,0),(0,0,0,1,0)\}$

Podemos comprobar que se cumple la fórmula de Grassmann: $\mathbf{dim(S+T)=dim(S)+dim(T)\text{-}dim(S \cap T)}$. Por ser suplementarios siempre $dim(S \cap T) = 0$ y ademas $dim(S \cup T) = dim(V)$, que en este caso es 5. Tenemos que 5=3+2+0

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Encuentra las relaciones de dependencia lineal (en caso de haberlas) que se dan en el conjunto de vectores $S = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$, siendo $\vec{u_1} = (1,0,1,2)$, $\vec{u_2} = (0,1,1,1)$, $\vec{u_3} = (4,3,7,11)$ y $\vec{u_4} = (-2,1,-1,-3)$. Comprueba que son correctas.

Ejercicio 2:

Halla una base del siguiente subespacio de $\mathbb{R}^5$:

- *a)* $S = \{(x,y,z,t,p) : x+y=0, z+t=0\}$

Ejercicio 3:

Encuentra la forma paramétrica de los siguientes subespacios:

- *a)* En $\mathbb{R}^4$, $S : \left.\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ y-2z-t=0 \end{array}\right\}$
- *b)* En $\mathbb{R}^3$, $S : x-2y=0$
- *c)* En $\mathbb{R}^4$, $S : \left.\begin{array}{r} x=z \\ y=t \end{array}\right\}$

Ejercicio 4:

Encuentra la forma implícita de los siguientes subespacios:

- *a)* En $\mathbb{R}^4$, $S = \{(\alpha+\beta, \alpha+2\beta, -\beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- *b)* En $\mathbb{R}^3$, $S = \{(\alpha+2\beta, -2\alpha+5\beta, -5\alpha+8\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- *c)* En $\mathbb{R}^2$, $S = \{(-\alpha+\beta, -2\alpha-\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Bibliografía

- Guiones para Matlab realizados por Rodrigo García Manzanas y Ruth Carballo Fidalgo para la asignatura de Álgebra y Geometría del Grado en Ingeniería Civil.