Курганов Владислав Андреевич
st132903@student.spbu.ru
st132903

Homework Assignment 6

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.11.02

Задача 220(e).

Умножить матрицы: e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2+1 & 3+2+2 & 1-1 \\ -1+2 & 1+4 & -2 \\ 6-1+1 & 9+1+2 & 3-1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 2+7 & 1+14 \\ 1-6 & 2+5-2 & -1+10-2 \\ 6+6 & 12+12+2 & 6+24+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$

Задача 220(f).

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

Решение: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & ac+b^2+ac \\ a+b+c & ac+b^2+ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$

Задача 221.

Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

Решение:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 2+1+1 & 2+2 \\ 6+3 & 3+1 & 3 \\ 3 & 1+2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$answer: \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+3 \\ 2+3 & 1+9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$

$answer: \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$

$c)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 9-8 & 6-4 \\ -12+8 & -8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-8 & 2-8 \\ -4+16 & -8+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21+24 & -14+12 \\ 36-32 & 24-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$answer: \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$d) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot ... \cdot n$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ==> \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 224.

Вычислить $A \cdot A'$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение: $A \cdot A' =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+4+1+4 & 12+2+1+6 \\ 12+2+1+6 & 16+1+1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$$

Задача 274.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 1014 & 100 & 443 \\ -342 & 100 & 621 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 246 & 1 & 327 \\ 1014 & 1 & 443 \\ -342 & 1 & 621 \end{vmatrix} =$$

=100*((246*621+443*(-342)+327*1014)-(327*(-342) + 246*443 + 1014*621))=-29400000

Задача 232(c).

Вычислить определитель: c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

Решение:
=a$^2x - a^2x + a^3 + a^3 + a^2x + a^2x = 2a^2x + 2a^3 = 2a^2(a + x)$

Задача 232(d).

Вычислить определитель: d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

Решение: =12+3+3-2-9-6=1

Задача 232(f).

Вычислить определитель: f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, где $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

Решение: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$,
$=\omega^2 + \omega + \omega^2 - \omega - \omega^3 - \omega = \omega * (2\omega - \omega^2 - 1) = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) * (2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) - (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^2 - 1) = (\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(2((\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)) - ((\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))^2 - 1) = (\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-1 + \sqrt{3}i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1) = (\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i - \frac{3\sqrt{3}}{4}i + \frac{9}{4}i^2) = \frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$

Задача 284.
$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

Решение: $xy(x+y) + xy(x+y) + xy(x+y) - (x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y) - (x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3x^2y + 3x^2y - x^3 - 3x^2y - 3x^2y - y^3 - x^3 - y^3 = -2x^3 - 2y^3 = -2(x^3 + y^3)$
