Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 12

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.12.24

Задача 10.
Дан четырёхугольник $ABCD$. Найти такую точку M, чтобы $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

Решение:
т.к $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MQ}$
и $MAQB$ образует параллелограмм, то $AK = KB$
ан-но $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MP}$
и так как $MCPD$ параллелограмм, то $DH = HC$
=>
$\overrightarrow{MQ}=-\overrightarrow{MP}$
Для $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}$ известно, что $BX = XC$.
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MR}$ $AN = ND$.
т.о $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MP}=0$.
$\overrightarrow{MO}=-\overrightarrow{MR}$ и $\overrightarrow{MQ}=-\overrightarrow{MP}$
то можно записать:
$\overrightarrow{MO}=-\overrightarrow{MR}, \quad \overrightarrow{MQ}=-\overrightarrow{MP}$.
Это означает, что т.R и т.O лежат на одной прямой, а т.Q и т.P находятся на другой прямой. Из этого следует, что точки K и H лежат тоже на одной прямой, и точки X и N тоже лежат на одной прямой => точка M является точкой пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон.

Задача 13.
Дан тетраэдр $ABCD$. Найти точку M для которой $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

Решение:

Задача 24.
В трапеции $ABCD$ отношение основания BC к основанию AD равно λ. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Решение:
$\vec{AB} = 0 * \vec{AD} + \vec{AB} = \{0, 1\}$
$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \{\lambda, 0\}$
$\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} = \{1-\lambda, -1\}$
$\vec{DA} = -\vec{AD} = \{-1, 0\}$
$\vec{AC} = \lambda * \vec{AD} + \vec{AB} = \{\lambda, 1\}$
$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \{1, -1\}$

Задача 17.
Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вер-

шинам, равна нулю.

Решение:

1.в правильном многоугольнике все вершины равноудалены от центра => векторы равны по длине
2.углы между этими векторами так же равны
3.если повернуть каждый из этих векторов на одинаковое количество градусов, то они совпадут таким образом сумма этих векторов равна 0

Задача 29.
Показать, что каковы бы ни были три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и три числа α, β, γ векторы $\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b}-\alpha\vec{c}$, $\beta\vec{c}-\gamma\vec{a}$ компланарны.

Решение: если эти векторы являются компланарными, то они линейно зависимы => один из векторо

$l(\alpha\vec{a}-\beta\vec{b})+n(\gamma\vec{b}-\alpha\vec{c})+m(\beta\vec{c}-\gamma\vec{a})=0$
$l\alpha\vec{a}-l\beta\vec{b}+n\gamma\vec{b}-n\alpha\vec{c}+m\beta\vec{c}-m\gamma\vec{a}=0$
$\vec{a}(\alpha l-\gamma m)+\vec{b}(\gamma n-\beta l)+\vec{c}(\beta m-\alpha n)=0$

По условию a,b,c могут быть какими либо, тогда $=> \begin{cases}\alpha l-\gamma m=0\\ \gamma n-\beta l=0\\ \beta m-\alpha n=0\end{cases}$

найдем определитель

$\begin{vmatrix}\alpha & 0 & -\gamma\\ \beta & \gamma & 0\\ 0 & -\alpha & \beta\end{vmatrix}=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=0 => \exists l,n,m$ одновременно $\neq 0 =>$ векторы ЛЗ

=> компланарны $\forall\alpha\beta\gamma$

Задача 31.
Даны вектора $\vec{a}=\{1,2,3\}$, $\vec{b}=\{2,-2,1\}$, $\vec{c}=\{4,0,3\}$, $\vec{d}=\{16,10,18\}$. Найти вектор, являющийся проекцией вектора $\vec{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при направлении проектирования, параллельном вектору $\vec{c}$.

Решение:

$\vec{e},\vec{a},\vec{b}$ компланарны => ЛЗ

$\begin{cases}\vec{e}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\\ d+\lambda c=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\end{cases}$

$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16\\10\\18\end{pmatrix} => \begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ \beta\\ \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\10\\18\end{pmatrix}$

$\lambda=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 16\\ 2 & 2 & 10\\ 3 & 1 & 18\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 1 & -3\end{vmatrix}}=\frac{70}{-14}=5$

$Answer: 5$
