Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 2

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.10.09

Задача 120.
Представить в тригонометрической форме: $2+\sqrt{3}+i$.

Решение: $2+\sqrt{3}+i = 2(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i) =$

$values: \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin\varphi = \frac{1}{2}; \varphi = \frac{\pi}{6}$

$continue$
$= 2(1+\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2} = 2(2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}*2\cos\frac{\varphi}{2}i) = 4\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}) = 4\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

Задача 137(c, d).
Вычислить, пользуясь формулой Муавра
c) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$,
d) $\left(\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}\right)+\left(\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}\right)$.

Решение: c) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24} = \left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^{24} = (1-(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}))^{24} =$
$((\cos\pi+i\sin\pi-\cos(\dfrac{-\pi}{6})-i\sin(\dfrac{-\pi}{6}))^{24} = (2\sin\dfrac{\pi+\frac{\pi}{6}}{2}*\sin\dfrac{-\pi+\frac{\pi}{6}}{2}+i(2\sin\dfrac{\pi-\frac{\pi}{6}}{2}*\cos\dfrac{\pi+\frac{\pi}{6}}{2}))^{24} =$
$(2\sin\dfrac{7\pi}{12}*\sin\dfrac{5\pi}{12}+i(2\sin\dfrac{5\pi}{12}*\cos\dfrac{7\pi}{12}))^{24} = (2\sin\dfrac{\pi}{12}*\sin(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12})+i(2\sin\dfrac{\pi}{12}*\cos(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12})))^{24}$

d) $\left(\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}\right)+\left(\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}\right) = \left(\dfrac{-2^{15}*(-1+i*0)}{2^{10}*(-1+i*0)}\right)+\left(\dfrac{-2^{15}*(-1+i*0)}{2^{10}*(-1+i*0)}\right)$
$= -2^{15}*2 = -64$
solutions:
(-1+i$\sqrt{3})^{15} = (-2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i))^{15} = (-2(\cos(\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{3}))^{15} = -2^{15}*(\cos(-5\pi)+i\sin(-5\pi))$
$(1-i)^{20} = (\sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4}))^{20} = -2^{10}(\cos(-5\pi)+i\sin(-5\pi))$
$(-1+i\sqrt{3})^{15} = (-2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i))^{15} = (-2(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))^{15} = -2^{15}*(\cos(5\pi)+i\sin(5\pi))$
$(1-i)^{20} = (\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))^{20} = -2^{10}(\cos(5\pi)+i\sin(5\pi))$

Задача 143(b, e).
Извлечь корни b) $\sqrt[3]{2+2i}$, e) $\sqrt[6]{-27}$.

Решение: b) $\sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{2(1+i)} = \sqrt[3]{2(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}))} = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi*k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi*k}{3})$
$k = 0,1,2$

$d)\sqrt[6]{1} = 1 * (\cos 0 + i \sin 0)^{\frac{1}{6}} = \cos \frac{2\pi * k}{6} + i * \sin \frac{2\pi * k}{6} = \cos \frac{\pi * k}{3} + i * \sin \frac{\pi * k}{3}$
$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$e)\ \sqrt[6]{-27} = \sqrt[6]{27 * (-1)} = \sqrt[6]{27(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt{3} * (\cos \frac{\pi + 2\pi * k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi * k}{6})^{\frac{1}{6}} =$
$\sqrt{3} * (\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi * k}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi * k}{3}))^{\frac{1}{6}}$
$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Задача 145(c).
Вычислить $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

Решение: b) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}} = \sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}} = \sqrt[8]{\dfrac{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}{2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})}}$
$= \sqrt[8]{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\dfrac{-19\pi}{12} + \dfrac{\pi * k}{6}) + i \sin(\dfrac{-19\pi}{12} + \dfrac{\pi * k}{6}))}$; k=0,1,2,3,4,5,6,7
c) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{2}(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4})}{2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})}} = \sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\dfrac{-7\pi}{12} + \dfrac{\pi * k}{6}) + i \sin(\dfrac{-7\pi}{12} + \dfrac{\pi * k}{6}))}$
k=0,1,2,3,4,5

Задача 125.
Доказать, что всякое комплексное число z, отличное от -1, модуль которого 1, может быть представлено в форме $z = \dfrac{1+it}{1-it}$, где t – вещественное число.

Решение:

Задача 182.
Найти сумму всех корней n-й степени $(n > 1)$ из 1.

Решение: $\sqrt{1} + \sqrt[2]{1} + \sqrt[3]{1} + ... + \sqrt[n-1]{1} + \sqrt[n]{1}$
$\lim_{n \to \propto}(1^{\frac{1}{1}} + 1^{\frac{1}{2}} + 1^{\frac{1}{3}} + ... + 1^{\frac{1}{n}}) = \propto;$
$n > 1 and \sqrt[n]{1} = 1 => 1 + 1 + ... + 1 = \propto$

Задача 183.
Вычислить $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + ... + n\varepsilon^{n-1}$, где ε – корень n-й степени из 1.

Решение:

Задача 146.
Выразить $\cos 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$

Решение:
