Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 8

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.05.10

Задача 1.
Составить уравнения касательной, главной нормали, бинормали, нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$. Найти репер Френе.

Решение:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ht \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = a\cos t \\ z' = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -a\cos t \\ y'' = -a\sin t \\ z'' = 0 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0 - jha\cos t + a^2\sin^2 t\cdot k - 0 + iha\sin t = -jha\cos t + a^2\sin^2 t\cdot k + a^2\cos^2 t\cdot k - i\cdot ha\sin t$$

вектор бинормали: $\beta = \{ah\sin t; -ah\cos t; a^2\}$

Найдем репер Френе

$\tau = \frac{\overrightarrow{r'}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t)|} = \left\{\frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}}, \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+h^2}}, \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right\}$

$\beta = \frac{\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)|} = \left\{\frac{h\sin t}{\sqrt{\alpha(a^2+h^2)}}, \frac{-h\cos t}{\sqrt{a(a^2+h^2)}}, \frac{a^2}{\sqrt{\alpha(a^2+h^2)}}\right\}$

$\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t) = \{h\sin t, -h\cos t, a^2\}$

$|\overrightarrow{r'}(t)\times\overrightarrow{r''}(t)| = \sqrt{a(a^2+h^2)}$

направляющий вектор гл. нормали:

$\frac{x-x(t_0)}{-cost_0} = \frac{y-y(t_0)}{-sint_0} = \frac{z-z_0}{0}$

Нормальная плоскость:

$-a\sin t(X - a\cos t) + a\cos t(Y - a\sin t) + h(Z - ht) = 0$

Спрямляющая плоскость:

$-\cos t(X - a\cos t) - \sin t(Y - a\sin t) + 0 = 0$

Соприкасающая плоскость:

$\frac{h\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}}(X - a\cos t) + \frac{-h\cos t}{\sqrt{a^2+h^2}}(Y - a\sin t) + \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}(Z - ht) = 0$

$h\sin t(X - a\cos t) - h\cos t(Y - a\sin t) + a(Z - ht) = 0$

Репер Френе:

$\tau = \{\frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}}, \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+h^2}}, \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\}$

$\beta = \{\frac{h\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}}, \frac{-h\cos t}{\sqrt{a^2+h^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\}$

$\nu = \{\frac{x-x(t_0)}{-cost_0}, \frac{y-y(t)}{-sint}, \frac{z-z}{0}\}$

Задача 2.
Найти главную нормаль кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ параллельную плоскости $x - y + 3z - 1 = 0$.

Решение:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \\ z' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -\cos t \\ y'' = -\sin t \\ z'' = 0 \end{cases}$$

$\overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{r'}}{|\overrightarrow{r'}|} = \left\{ \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}; \frac{\cos t}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

$\overrightarrow{\beta} = \frac{\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}}{|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}|} = \left\{ \frac{\sin t}{\sqrt{2}}; \frac{-\cos t}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

$$\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = i \sin t - j \cos t + k$$

$\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} = \{\sin t; -\cos t; 1\}$

$|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}| = \sqrt{2}$

$$\overrightarrow{\nu} = \overrightarrow{\beta} \times \overrightarrow{\tau} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin t & -\cos t & 1 \\ -\sin t & \cos t & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-i \cos t - j \sin t) \cdot 2$$

$\overrightarrow{\nu} = \{\cos t; -\sin t; 0\}$

Главная нормаль: $\frac{x - x(t_0)}{\cos t_0} = \frac{y - y(t_0)}{-\sin t_0} = \frac{z - z(t_0)}{0}$

нормальный вектор плоскости: $\overrightarrow{n}\{1; -1; 3\}$

$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\nu} \Rightarrow (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{\nu}) = 0 \Rightarrow \cos t + \sin t = 0$

$t = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

$\cos t = -\sin t$

пусть $k = 0$: $\quad t = \frac{3\pi}{4}$

$\frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - \frac{3\pi}{4}}{0}$

Задача 3.
Через точку $M(1, 0, 1)$ провести соприкасающуюся плоскость к кривой $x = t$, $y = 2t$, $z = t^2$.

Решение:
Для соприкасающ. плоскости найдем касательную и нормаль
M(t, 2t, t)

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ z' = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \\ z'' = 2 \end{cases}$$

$$\beta = \overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4i + 0 + 0 - 0 - 0 - 2j = 4i - 2j$$

$\beta = \{4, -2, 0\}$

тогда M не принадл. кривой

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$4(x - t) - 2(y - 2t) = 0$

$4x - 4t - 2y + 4t = 0$

$4x - 2y = 0$

Задача 4.
Через точку $M(1, 2, 1)$ провести плоскость, пересекающую кривую $\vec{r}(t) = \{t, t^2, -t\}$ под прямым углом.

Решение:

$\overrightarrow{r}(t) = \{t, t^2, -t\}$

$M(1,2,1)$

касательный вектор и кривой $\overrightarrow{r'}(1, 2t, -1)$

Построим уравнение плоскости: $A(x-1) + B(y-2) + C(z-1) = 0$ (проходит через M)

нормаль к п-ти: $\overrightarrow{n}(A, B, C)$

должна совпадать с $\overrightarrow{r'} \Rightarrow \overrightarrow{n}(1, 2t, -1)$

Найдем т. пересеч. п-ти и прямой: $F(t) : (t, t^2, -t)$

$1(t-1) + 2t(t^2-2) + 1(-t-1) = 0$

$t - 1 + 2t^3 - 4t + t - 1 = 0$

$-2t + 2t^3 = 0$

$t(t^2-1) = 0 \Rightarrow t = 1; t = -1; t = 0$

$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0, \quad \overrightarrow{n}(1; 2t; -1)$

$(x-1) + 2t(y-2) - (z-1) = 0$

$x - 1 + 2ty - 4t - z + 1 = 0$

$x + 2ty - 4t - z = 0$

при $t = 1: \quad x + 2y - 4 - z = 0 \Rightarrow x + 2y - z = 4$

при $t = -1: \quad x - 2y + 4 - z = 0 \Rightarrow x - 2y - z = -4$

при $t = 0: \quad x + 2y \cdot 0 - 4 \cdot 0 - z = 0 \Rightarrow x - z = 0$

Задача 5.
Через точку $M(3,1,5)$ провести плоскость, являющуюся спрямляющей для кривой $x = t^2$, $y = 1 + t$, $z = 2t$.

Решение:
Через т. M(3; 1; 5) проведем соприкасающую плоскость для кривой

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2t \\ y' = 1 \\ z' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 2 \\ y'' = 0 \\ z'' = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\beta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2t & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{0; 4; -2\}$$

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2t & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \{-10; 4t; 8t\}$$

$\Rightarrow 10(x - x(t_0)) - 4t(y - y(t_0)) - 8t(z - z(t_0)) = 0$

$10(x - t^2) - 4t(y - (1+t)) - 8t(z - 2t) = 0$

подставим точку $M(3; 1; 5)$

$10(3 - t^2) - 4t(1 - (1+t)) - 8t(5 - 2t) = 0$

$30 - 10t^2 + 4t^2 - 40t + 16t^2 = 0$

$10t^2 - 40t + 30 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$t_1 = 1; t_2 = 3$

Ответ:

$t_1 = 1: \quad 10(X-1) - 4(Y-2) - 8(Z-2) = 0$

$t_2 = 3: \quad 10(X-9) - 12(Y-4) - 24(Z-6) = 0$
