Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 3
Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.10.16

Задача 550(b).
Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$ $f(x) = x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$, $x_0 = -2-i$.

Решение: f(x) = x$^5 + (i + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7; x_0 = -2 - i$
|.....|1|1+2i|0 |-1-3i |0 |7
|-2-i|1|-1+i|3-i|-8-4i|12+16i|0
$1)(-2 - i) + (1 + 2i) = -1 + i$
$2)(-2 - i)(-1 + i) = 2 - 2i + i + 1 = 3 - i$
$3)(-2 - i)(3 - i) = -6 + 2i - 3i + i^2 = -7 - i$
$(-7 - i) + (-1 - 3i) = -8 - 4i$
$4)(-2 - i)(8 - 4i) = 16 + 8i + 8i + 4i^2 = 12 + 16i$
$5)(-2 - i)(12 + 16i) = -24 - 32i - 12i - 16i^2 = -44i - 8$
$-44i - 8 + 7 = -44i - 1$
$Answer : -44i - 1$

Задача 551(b).
Пользуясь схемой Горнера, разложить полином $f(x) = x^5$ по степеням $x - 1$.

Решение: f(x) = x$^5, (x - 1)$
|..|1|0|0|0|0
|1|1|1|1|1|1
$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + 1$

Задача 553(b).
Разложить $f(x) = (x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$ по степеням x.

Решение: f(x)=(x-2)$^4 + 4(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 10(x - 2) + 20 =^*$
$(x - 2)^4 = (x - 2)^2 * (x - 2)^2 = (x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4 + 4) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^3 + 16x^2 - 16x + 4x^2 - 16x + 16 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x - 16 + 4x^3 - 18x^2 + 34x - 8 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 8$
$Answer : x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 8$

Задача 555(b).
Чему равен показатель кратности корня -2 для полинома $x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$?

Решение: $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, x+2
0.|..|1|7|16|8|-16|-16
1.|-2|1|5|6|-4|-8|0
2.|-2|1|3|0|-4|0
3.|-2|1|1|-2|0
4.|-2|1|-1|0
5.|-2|1|-3
Answer:4

Задача 559(b).
Доказать, что полином $f(x) = x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$ имеет число 1 тройным корнем.

Решение: f(x) = $\mathrm{x}^{2n+1} - (2n-1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$
$x_1 = 1; \quad (1^{2n+1} - 1 * (2n+1) + (2n+1) *! - 1) = 0$
$f'(x) = (2n+1)x^{2n} - (2n+1)(n+1)x^n + n(2n+1)x^{n-1} = (2n+1)(x^{2n} - (n+1)X^n + n * x^{n-1});$
$x_2 = 1; ((2n+1)(1-(n+1)*1+n)) = 0$
$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = (2\mathrm{n}+1)(2\mathrm{n}^*\mathrm{x}^{2n-1} - n(n+1)x^{n-1} + (n-1)n * x^{n-2}$
$x_3 = 1; 2n - n(n+1)*1 + (n-1)n*1 = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0$
$x_{1,2,3} = 1$

Задача 569.
Доказать, что полином делится на свою производную в том и только том случае, когда он равен $a_0(x-x_0)^n$.

Решение:
$\mathrm{P(x)} = \mathrm{a}_0(x-x_0)^n$
$P'(x) = a_0(x-x_0)^{n-1}$
$\frac{P(x)}{P'(x)} => \frac{a_0*(x-x_0)^n}{a_0*n*(x-x_0)^{n-1}} => \frac{X-X_0}{n}$

Задача 570.
Доказать, что полином $f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

Решение:

Задача 114.
Решить уравнения и левые части их разложить на множители с вещественными коэффициентами:
a) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$,
b) $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0$.

Решение: $x^4+6x^3+9x^2+100 = 0$ $\mathrm{x}^4+6x^3+9x^2+100 = x^2(x^2+6x+9)+100 = (x(x+3))^2+100 =$
$(x(x+3)+10i)(x(x+3)-10i)^* =$
$x^2 + 3x + 10i = 0$
$D = 9 - 40i$
$\sqrt{9-40i} = a + bi; a, b \in R$
$\begin{cases} a^2 - b^2 = 9; \\ 2ab = -40 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 9; \\ ab = -20 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -5; \\ b = 4 \end{cases} \quad or \begin{cases} a = 5; \\ b = -4 \end{cases}$
$x_1 = \frac{-3+(-5+4i)}{2} = -4 + 2i$
$x_2 = \frac{-3+(5-4i)}{2} = 1 - 2i$
$^* = (x-(-4+2i))(x-(-4-2i))(x-(1-2i))(x-(1+2i))$
$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - 2Re(\alpha)x + (\alpha)^2;$
$(x^2+8x+20)(x^2-2x+5)$

Задача 2.
Разложить на неприводимые вещественные множители полиномы:
c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$,
d) $x^6 + 27$.

Решение: c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1 = (\mathrm{x}^2 + 2)^2 + 1 = (x^2 + 2)^2 - i^2 = (x + 2 - i)(x + 2 + i)$
d) $x^6 + 27 = (\mathrm{x}^2)^3 + 27 = (x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9)$
$(x^2 + 3) - no \quad solution$
$(x^4 - 3x^2 + 9)$
$(t^2 - 3t + 9)$
$D = 9 - 4 * 9 = -27, D < 0$