Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 6

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.05.10

Задача 1.
Составить параметрические уравнения траектории конца туго натянутой нерастяжимой нити, сматываемой с неподвижной круглой плоской катушки диаметром $2R$.

Решение:
нить, сматываемая с неподвижной круглой плоской катушки формирует собой график Эвольвенты, которая задается уравнением:
$\mathrm{x} = 2\mathrm{R}(\cos\phi + \phi\sin\phi)$
$y = 2R(\cos\phi - \phi\sin\phi)$

Задача 2.
На середине лестницы длины L, приставленной к стене, сидит котенок. По какой траектории он будет двигаться, если лестница начнет скользить по полу?

Решение:
Чтобы определить, как будет двигаться котенок, необходимо сделать чертеж лестницы.
Достроим прямоугольник, где лестница будет выполнять роль диагонали и достроим еще одну диагональ. Построив еще 2 промежуточных чертежа, можно прийти к выводу о том, что котенок опишет своим движением четверть окружности, которая имеет центр в углу комнаты.
Ответ: по дуге окружности.

Задача 3.
Отрезок AB длиной l скользит своими концами по осям прямоугольной системы координат Oxy. Из точки O опущен перпендикуляр OM к отрезку AB. Составить уравнение траектории точки M.

Решение:
$x = |OM_x| = OMcos\phi \ = |OB|cos^2\phi = |AB|sin\phi * cos^2\phi$
$sin\phi = \frac{MB}{OB} = \frac{OB}{AB} = lsin\phi * cos^2\phi$
$y = |OM_y| = |OM|sin\phi = |OA|sin^2\phi = l\cos\phi * sin^2\phi$

Получили уравнение четырехлепестковой розы Гвидо Гранди

Задача 4.
Окружность с радиусом R катится по прямой без скольжения. Составить уравнение траектории точки M, лежащей на окружности.

Решение:
$\begin{cases} R\text{-радиус} \\ \phi \text{ - угол поворота окружности} \end{cases}$
$\Rightarrow$ При повороте на угол ϕ длина дуги, при движении $\quad \mathrm{l} = \mathrm{R}\phi$

$\Rightarrow$ центр окружности смещается на расстояние $R\phi$ вдоль оси Ox.
центр окружности $(R\phi, R)$.
Начальное положение точки $\phi = 0$, координаты $(0, 0) \Rightarrow (0, -R)$ в системе координат, связанной с окружностью, так как точка находится в нижней части окружности.
При вращении окружности по часовой стрелке:
$\begin{cases} x = -R\sin\phi, \\ y = -R\cos\phi. \end{cases}$
Получим уравнение точки M:

$\begin{cases} x = R\phi - R\sin\phi = R(\phi - \sin\phi), \\ y = R - R\cos\phi = R(1 - \cos\phi). \end{cases}$
Визуализация сводится к графику циклоиды.

Задача 5.
Луч OC, выпущенный из начала координат $Oxyz$ и не перпендикулярный оси Oz, равномерно вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω. Точка M движется по лучу со скоростью пропорциональной пройденному пути $|OM|$. Составить параметрические уравнения траектории точки M.

Решение:
$\begin{cases} x = |OM|\sin\varphi\cos\omega t \\ y = |OM|\sin\varphi\sin\omega t \\ z = |OM|\cos\varphi, \end{cases}$
$\varphi : \angle(Oz, OC)$
по условию $v = k|OM| = r(t)' = kr(t)$
r(t) = kx+b $\Rightarrow b = 0$
$r(t) = ae^{tk} + b$

Тогда $r(t) = |OM| = ae^{tk} + b$
$\begin{cases} x = ae^{tk}\sin\varphi\cos\omega t \\ y = ae^{tk}\sin\varphi\sin\omega t \\ z = ae^{tk}\cos\varphi \\ t \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$

Задача 6.
Сфера радиуса R с центром в начале координат пересекается с поверхностью кругового цилиндра $x^2 + y^2 - Rx = 0$. Написать параметрическое уравнение полученной в сечении кривой (кривая Вивиани).

Решение:
Уравнение цилиндра x$^2 + y^2 = Rx$.
Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
ϕ - угол поворота по оси цилиндра: $\phi[0, 2\pi)$

$\begin{cases} x = Rcos^2\phi \\ y = Rcos\phi\sin\phi \end{cases}$

Подставим в уравнение сферы:
$z^2 = R^2 - (x^2 + y^2) = R^2 - Rx = R^2 - R * R * cos^2\phi = R^2(1 - cos^2\phi) = R^2 sin^2\phi$
$\Rightarrow z = \pm R sin\phi$
Получим уравнение кривой Вивиани в сечении:
$$\begin{cases} x = Rcos^2\phi \\ y = Rcos\phi * sin\phi \\ z = Rsin\phi \end{cases}$$

Задача 7.
Луч OC вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. Точка M движется по лучу OC со скоростью пропорциональной пройденному пути $|OM|$. Составить уравнение траектории точки M (логарифмическая спираль).

Решение:
$$\begin{cases} x = |OM| \sin\varphi \cos\omega t \\ y = |OM| \sin\varphi \sin\omega t \end{cases}$$
по условию $v = k|OM| = r(t)' = kr(t)$
r(t) = kx+b $\Rightarrow b = 0$
$r(t) = ae^{tk} + b$

Тогда $r(t) = |OM| = ae^{tk} + b$
$$\begin{cases} x = ae^{tk} \sin\varphi \cos\omega t \\ y = ae^{tk} \sin\varphi \sin\omega t \\ t \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

Задача 8.
Найти кривую, которая получается в пересечении однополостных гиперболоидов $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

Решение:
Чтобы получить кривую:
1)Сложим чтобы исключить y и z и найти x
$(x^2 + y^2 - z^2) + (x^2 - y^2 + z^2) = 2$
$2x^2 = 2$
$x^2 = 1$
$x = \pm 1.$
2)Вычтем, чтобы найти y и z и избавиться от x
$(x^2 + y^2 - z^2) - (x^2 - y^2 + z^2) = 0$
$2y^2 - 2z^2 = 0$
$y^2 = z^2$
$y = \pm z.$
Получим кривую, заданную четырьмя прямыми линиями
(x = 1, y=z)
(x = 1, y=-z)
(x =-1, y=z)
(x = -1, y=-z)

В параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$