Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 7

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.05.16

Задача 1.
Составить уравнение касательной и нормали к кривой $x = R\sin t\cos^2 t$, $y = R\sin^2 t\cos t$ в точке $t = t_0$.

Решение:

$$\begin{cases} x = R\sin t\cos^2 t \\ y = R\sin^2 t\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = R(cos^3(t_0) - 2sin^2(t_0)cos(t_0)) \\ y' = R(2sin(t_0)cos^2(t_0) - sin^3(t_0)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = R((cos(t_0)(cos^2(t_0) - 2sin(t_0))) \\ y' = R(2sin(t_0)cos^2(t_0) - sin^3(t_0)) \end{cases}$$

составим равнение касательной:

$\frac{X - Rsin(t_0)cos^2(t_0)}{R((cos(t_0)(cos^2(t_0)-2sin(t_0)))} = \frac{Y - Rsin^2(t_0)cos(t_0)}{R(2sin(t_0)cos^2(t_0)-sin^3(t_0))}$

составим уравнение нормали :

R((cos(t$_0$)$(cos^2(t_0) - 2sin(t_0)))(X - Rsin(t_0)cos^2(t_0)) + R(2sin(t_0)cos^2(t_0) - sin^3(t_0))(Y - Rsin^2(t_0)cos(t_0)) =$
0

(X - R $\sin t_0\cos^2 t_0)(\cos^3 t_0 - 2\sin^2 t_0\cos t_0) + (Y - R\sin^2 t_0\cos t_0)(2\sin t_0\cos^2 t_0 - \sin^3 t_0) = 0$

Задача 2.
Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = a^3(x^2 + a^2)^{-1}$ в точке $x = a$.

Решение:
частная производная по x: $\phi'_x = \frac{-2a^3x}{(x^2+a^2)^2}$
частная производная по y: $\phi'_y = 1$

составим каноническое уравнение касательной в точке x:

$\frac{X-a}{1} = \frac{Y - \frac{a}{2}}{-\frac{1}{2}}$

составим уравнение нормали в точке x:
$\phi'_y(X - x_0) + \phi'_x(Y - y_0) = 0$
$(X - a) - \frac{Y}{2} + \frac{a}{4} = 0$

Задача 3.
Составить уравнение касательной и нормали к кривой $x^2 + y^2 = a^2$, $z = a$ в точке $A(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a)$.

Решение:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=a \end{cases}$$

частная производная по x: $\phi'_x = 2x$
частная производная по y: $\phi'_z = 2y$
частная производная по z: $\phi'_y = 2z$

$\frac{X-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2y} = \frac{Y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{-2x} = \frac{z-a}{2z}$

составим уравнение касательной:

$$\frac{X-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{1} = \frac{Y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{-1} = \frac{Z-a}{1}$$

составим уравнение нормали:
$X - \frac{a\sqrt{2}}{2} - Y + \frac{a\sqrt{2}}{2} + Z - a = 0$

Задача 4.
Составить уравнение касательной и нормали к кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ в точке $t = t_0$.

Решение:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -asint \\ y' = acost \\ z' = b \end{cases}$$

составим уравнениее касательной в t:

$\frac{X-acost_0}{-asint_0} = \frac{Y-asint_0}{acost_0} = \frac{Z-bt_0}{b}$

составим уравнение нормали:
$-asint_0(X - acost_0) + acost_0(Y - asint_0) + b(Z - bt_0) = 0$

Задача 5.
Составить уравнение касательной к кривой $x = t^2$, $y = t$, $z = e^t$ параллельной плоскости $2x - 4y - 3 = 0$.

Решение:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \\ z = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2t \\ y' = 1 \\ z' = e^t \end{cases}$$

Направляющий вектор касательной: $\vec{n_1}\{2t, 1, e^t\}$

Нормальный вектор плоскости в Oxyz: $\vec{n_2}\{2,-4,0\}$

кривая параллельна 2x-4y-3=0 $\Rightarrow$
скалярное произведение нормального вектора плоскости и
направляющего вектора касательной равно 0
$(\vec{n_1},\vec{n_2}) = 4t - 4 = 0$
$\Rightarrow t = 1$

составим уравнение касательной по полученному t
$\frac{X-t^2}{2t} = \frac{Y-t}{1} = \frac{Z-e^t}{e^t}$

$\frac{X-1}{2} = \frac{Y-1}{1} = \frac{Z-e}{e}$

Задача 6.
Доказать, что кривая $\vec{r}(t) = \{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos t, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin t, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\}$ пересекает образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под углом $\frac{\pi}{4}$.

Решение:
подставим координаты
$x^2 + y^2 = z^2$:

$(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}cost)^2 + (e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}sint)^2 = (e^{\frac{t}{\sqrt{2}}})^2$
$(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}})^2 = (e^{\frac{t}{\sqrt{2}}})^2$

$\Rightarrow$ кривая лежит на конусе

r'(t)= $(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}cost \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}sint; e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}sint \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}cost; e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})$

Направляющий вектор лежит на прямой

r(t)=$(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}cost, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}sint, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}})$

Для нахождения искомого угла найдем $\cos(\phi)$

$\cos\phi = \frac{r'(t)\cdot r(t)}{|r'(t)|\cdot|r(t)|}$

вычислим скалярное произведние $(r(t), r'(t))$:

$(r(t), r'(t)) =$
$e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}cost \cdot (e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}cost \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}sint) + e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}sint(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}sint \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}cost) + e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}$

$|r'(t)| = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$
$|r(t)| = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(cos^2 t + sin^t + 1) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$

подставим полученное
$cos\phi = \frac{\sqrt{2}(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}})^2}{\sqrt{2}^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2}^{\frac{t}{\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$
ч.т.д.

Задача 7.
Доказать, что любая гипербола перпендикулярна любому эллипсу, имеющему те же фокусы.

Решение:

общее уравнение эллипса:
$\dfrac{x^2}{a_e^2} + \dfrac{y^2}{b_e^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a_e^2} + \dfrac{y^2}{a_e^2 - c_e^2} = 1$
общее уравнение гиперболы:
$\dfrac{x^2}{a_g^2} - \dfrac{y^2}{b_g^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a_g^2} - \dfrac{y^2}{c_g^2 - a_g^2} = 1$
$c_e^2 = a_e^2 - b_e^2$ - для эллипса
$c_g^2 = a_g^2 + b_g^2$ - для гиперболы
найдем направляющие векторы эллипса и гиперболы:
$r'_x = \dfrac{2x}{a_e^2}; \quad r'_y = \dfrac{2y}{a_e^2 - c_e^2} \Rightarrow$ эллипс $\overrightarrow{r}\left(-r'_y; r'_x\right)$
$\Phi'_x = \dfrac{2x}{a_g^2}; \quad \Phi'_y = \dfrac{-2y}{c_g^2 - a_g^2} \Rightarrow$ гипербола $\overrightarrow{\Phi}\left(-\Phi'_y; \Phi'_x\right)$
$\left(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{\Phi}\right) = \left(\left(-r'_y, r'_x\right) \cdot \left(-\Phi'_y, \Phi'_x\right)\right) = \left(\left(-\dfrac{2y}{a_e^2 - c^2}, \dfrac{2x}{a_e^2}\right) \cdot \left(\dfrac{2y}{c^2 - a_g^2}, \dfrac{2x}{a_g^2}\right)\right) = \dfrac{-4y^2}{(a_e^2 - c^2)(c^2 - a_g^2)} +$
$\dfrac{4x^2}{(a_e^2 \cdot a_g^2)} = \dfrac{-4y_0^2}{(a_e^2 - c^2)(c^2 - a_g^2)} + \dfrac{4}{a_g^2}(1 - \dfrac{y_0^2}{a_e^- c^2}) = \dfrac{4}{a_e^2 - c^2}(\dfrac{a_e^2 - c^2 - y_0^2}{a_g^2} - \dfrac{y_0^2}{(c^2 - a_g^2)}) = \dfrac{4}{a_e^2 - c^2} \dfrac{(a_e^2 - c^2)(c_g^2 - a_g^2)}{a_g^2(c}$
$* \, (x_0 = c)$
$* \, (y_0^2 = (c^2 - a_g^2)\dfrac{x_0^2 - a_g^2}{a_g^2} = \dfrac{(c^2 - a_g^2)^2}{a_g^2})$
$= \dfrac{4}{a_e^2 - c_e^2} * \dfrac{(a_e^2 - c^2)}{(c^2 - a_g^2) - \frac{c^2}{a_g^2}(c^2 - a_g^2)^2} = \dfrac{4}{a_e^2 - c^2} * \dfrac{a_g^2(a_e^2 - c^2) - c^2(c^2 - a_g^2)}{a_g^4} = \dfrac{4}{a_e^2 - c^2}\dfrac{a_g^2 * a_e^2 - c^4}{a_g^4}$

Эксцентреситеты эллипса и гиперболы когда равны фокусы и фокальные хорды:
$\epsilon_e = \frac{1}{\epsilon_g} \Rightarrow \frac{c}{a_e} = \frac{1}{\frac{c}{a_g}}$
$\Rightarrow c^2 = a_g * a_e = 0$
