Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 9

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.04.28

Задача 1.
Найти длину дуги кривой $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\cos(t/2)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Решение:

$$\begin{cases} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \\ z &= 4a\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases} \begin{cases} x' &= a - a\cos t = a(1 - \cos t) \\ y' &= a\sin t \\ z' &= -2a\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

$\mathrm{S} = \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 + \left(-2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2} dt$
$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + 4a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt$
$= |a| \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt$
$= |a| \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t + 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt$
$= \sqrt{2}|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt$
$= 2|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$
$= 2|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{2 sin^2\frac{t}{2}} dt$
$= 2\sqrt{2}|a| \int_0^{2\pi} |sin\frac{t}{2}| dt$
$= 2\sqrt{2}|a| \int_0^{2\pi} |sin\frac{t}{2}| d\frac{t}{2}$
$= 2\sqrt{2}|a| (\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2} d\frac{t}{2} - \int_\pi^{2\pi} sin\frac{t}{2} d\frac{t}{2})$
$= 2\sqrt{2}|a|(-\cos(\frac{t}{2})|_0^\pi - \cos(\frac{t}{2})|_\pi^{2\pi})$
$= \sqrt{2}|a|(1 - (-1)) = 2\sqrt{2}|a|$
Длина дуги кривой

Задача 2.
Найти длину дуги, отсекаемую плоскостями $x = a/3$, $x = 9a$, кривой $y^3 = 3a^2x$, $2yz = a^2$.

Решение:
2)

$$\begin{cases} X = \frac{y^3}{3a^2} \Rightarrow X' = \frac{y^2}{a^2} \\ Z = \frac{a^2}{2y} \Rightarrow Z' = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{a}{3} \\ X = 9a \\ y^3 = 3a^2x \\ 2yz = a^2 \end{cases}$$

$\mathrm{S} = \int_a^{3a} \sqrt{\left(\frac{y^2}{a^2}\right)^2 + 1 + \left(-\frac{a^2}{2y^2}\right)^2} dy = \int_a^{3a} \sqrt{\frac{y^4}{a^4} + 1 + \frac{a^4}{4y^4}} dy =$
$= \int_a^{3a} \sqrt{\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{a^2}{2y^2}\right)^2} dy = \int_a^{3a} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{a^2}{2y^2}\right) dy$
$y^3 = 3 \cdot a^2 \cdot \frac{a}{3} \Rightarrow y^3 = a^3 \Rightarrow y = a$
$y^3 = 9a \cdot 3a^2 \Rightarrow 27a^3 = y^3 \Rightarrow y = 3a$

$\Rightarrow y \in [a, 3a]$
$S = \frac{y^3}{3a^2} - \frac{a^2}{2y}\Big|_a^{3a} = \left(\frac{(3a)^3}{3a^2} - \frac{a^2}{2\cdot 3a}\right) - \left(\frac{a^3}{3a^2} - \frac{a^2}{2a}\right) = \left(9a - \frac{a}{6}\right) -$
$- \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{2}\right) = 9a - \frac{a}{6} + \frac{2a}{6} - \frac{3a}{6} = 9a$
Ответ: $S = 9a$

Задача 3.
Найти кривизну и кручение кривой $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \sin \frac{t}{2}$.

Решение:

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \\ z = 4a\sin\frac{t}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = a - a\cos t \\ y' = a\sin t \\ z' = 2a\cos\frac{t}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = a\sin t \\ y'' = a\cos t \\ z'' = -a\sin\frac{t}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''' = a\cos t \\ y''' = -a\sin t \\ z''' = -\frac{a}{2}\cos\frac{t}{2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a - a\cos t & a\sin t & 2a\cos\frac{t}{2} \\ a\sin t & a\cos t & -a\sin\frac{t}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -ia^2\sin t\sin\frac{t}{2} + (a - a\cos t)a\cos tk + j(a\sin t)(2a\cos\frac{t}{2}) -$$

$$- ia^2\sin t + j(a - a\cos t)(a\sin t) - i(a\cos t)(2a\cos\frac{t}{2})$$

$$= -ia^2\sin t\sin\frac{t}{2} + a^2k\cos t - ka^2\cos^2 t + j2a^2\cos\frac{t}{2}\sin t - ka^2\sin^2 t$$

$$+ ja^2\sin t - ja^2\cos t\sin t - ia^2\cos t\cos\frac{t}{2}$$

$$\overrightarrow{j} : a^2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2} + 2a^2\cos\frac{t}{2}\sin t = 2a^2\sin\frac{t}{2}(1+\cos\frac{t}{2})$$

$$\overrightarrow{k} : a^2(1-\cos t)\cos t - a^2\sin^2 t - 2a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} = \left(-2a^2\cos^3\frac{t}{2}, 2a^2\sin\frac{t}{2}(1+\cos\frac{t}{2}), -2a^2\sin^2\frac{t}{2}\right)$$

$$|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}| = \sqrt{\left(-2a^2\cos^3\frac{t}{2}\right)^2 + \left(2a^2\sin\frac{t}{2}(1+\cos\frac{t}{2})\right)^2 + \left(-2a^2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4a^4\cos^6\frac{t}{2} + 4a^4\sin^2\frac{t}{2}(1+\cos\frac{t}{2})^2 + 4a^4\sin^4\frac{t}{2}} =$$

$$= \sqrt{4a^4\left(\cos^6\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}(1+\cos\frac{t}{2})^2 + \sin^4\frac{t}{2}\right)} = \sqrt{4a^6\frac{6}{2} + \sin^2\frac{6}{2} + 2\sin^2\frac{6}{2}\cos^2\frac{6}{2} + \text{co}$$

$$+ \sin^2\frac{6}{2}\cos^2\frac{6}{2} + \sin^4\frac{6}{2} = \sqrt{4a^4(1+\sin^2\frac{t}{2})} = 2a^2\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}$$

Найдем кривизну: $k = \dfrac{|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}|}{|\overrightarrow{r'}|^3} = \dfrac{2a^2\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}}{(2a)^3} = \dfrac{\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}}{4a}$

Найдем кручение: $(r' \times r''), r''' = a^3\cos\frac{t}{2}(\cos^2\frac{t}{2} - 3)$

$$æ(t) = \frac{a^3\cos\frac{t}{2}(\cos^2\frac{t}{2} - 3)}{4a^4(1+\sin^2\frac{t}{2})} = \frac{\cos\frac{t}{2}(\cos^2\frac{t}{2} - 3)}{4a(1+\sin^2\frac{t}{2})}$$

Задача 4.
Найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнениями в неявном виде $x^2+y^2-z^2=1$, $2x-y-z^2=0$ в точке $M(1,1,1)$.

Решение: $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ 2x-y-z^2=0 \end{cases}$

Проверим принадлежит ли точка M(1; 1; 1) нашей кривой

$\begin{cases} 1=1 \Rightarrow \text{принадлежит} \\ 0=0 \Rightarrow \text{принадлежит} \end{cases}$

Введем параметризацию кривой: r(x) = (x; y(x); z(x))

продифференцируем по x, первые производные:

$$\begin{cases} 2x+2yy'-2zz'=0 \\ 2-y'-2zz'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+yy'-zz'=0 \\ 2-y'-2zz'=0 \end{cases}$$

подставим т. M: $\begin{cases} 1+y'-z'=0 \\ 2-y'-2z'=0 \end{cases}$, отсюда: $\begin{cases} y'=0 \\ z'=1 \end{cases}$

тогда в точке M(1; 1; 1) касательный вектор: $r'(1; y'(1); z'(1)) = (1; 0; 1)$

Вторые производные:

$$\begin{cases} 1+y'y'-z'z'+yy''-zz''=0 \\ -y''-2(z'z'+zz'')=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+y'^2+yy''-z'^2-zz''=0 \\ -y''-2z'^2-2zz''=0 \end{cases}$$

подставим т.M: $\begin{cases} 1+y'^2+y''-z'^2-z''=0 \\ -y''-2z'^2-2z''=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''-z''=0 \\ -y''-2z''=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''=-\frac{2}{3} \\ z''=-\frac{2}{3} \end{cases}$

$r''(1) = (0; y''(1); z''(1)) = \left(0; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

третьи производные: $\begin{cases} 2y'y''+(y'y'''+yy'')-2z'z''-(z'z''+zz''')=3y'y''+yy'''-3z'z''-zz'''=0 \\ -y'''-2\left(2z'z''\right)-2\left(z'z''+zz'''\right)=-y'''-6z'z''-2zz'''=0 \end{cases}$

подставим т.M $\begin{cases} 0+y'''+2-z'''=0 \\ 0-y'''+4-2z'''=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'''-z'''=2 \\ -y'''-2z'''=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'''=0 \\ z'''=2 \end{cases}$

$r'''(1) = (0; y'''(1); z'''(1)) = (0; 0; 2)$

кривизна:

$k = \frac{|r'(x)\times r''(x)|}{|r'(x)|^3} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$r'(x)\times r''(x) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = i\cdot\frac{2}{3} + j\cdot\frac{2}{3} - k\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

$|r'(x)\times r''(x)| = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$|r'(x)| = \sqrt{2}$

кручение:

$(r'(x), r''(x), r'''(x)) = -\frac{4}{3}$

$|r'(x)\times r''(x)|^2 = \frac{4}{3}$

$æ = \frac{(r'(x), r''(x), r'''(x))}{|r'(x)\times r''(x)|^2} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = -1$

Задача 5.
Доказать, что кривизна прямой линии равна 0. Справедливо ли обратное утверждение?

Решение:

воспользуемся формулой кривизны: $\text{k} = \dfrac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$

Введем параметризацию прямой: $X = tv + a$

$X'(t) = v$

$X''(t) = 0$

подставим в формулу: $\quad k = \dfrac{|v \times 0|}{|v|^3} = 0. \quad$ ч.т.д

Рассмотрим обратное:

у прямой в любой точке кривизна равна 0. Если мы воспользуемся формулой $k = \lim\limits_{l \to 0} \dfrac{\varphi}{l},$ где угол поворота касательной будет равен 0. Тогда если мы выберем кривую и вычислим, что в любой точке $\dfrac{\varphi}{l} = 0,$ получим прямую
