Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 10

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.05.10

Задача 1.
Плоская кривая $x = f_1(v)$, $z = f_2(v)$, лежащая в плоскости Oxz и не пересекающая ось Oz, вращается вокруг указанной оси. Найти параметрические уравнения поверхности вращения.

Решение:
$$\begin{cases} x = f_1(v) \\ z = f_2(v) \end{cases}$$
Oz - ось вращения кривой $\Rightarrow$ получится некоторая окружность
радиуса R
тогда если у нас образовалась окружность $\Rightarrow$ угол вращения
равен $u \in [0; 2\pi)$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = f_1(v)\cos u \\ y = f_1(v)\sin u \\ z = f_2(v) \end{cases}$$
$u \in [0; 2\pi)$

Задача 2.
Направляющая цилиндрической поверхности задается уравнением $x = f_1(v)$, $y = f_2(v)$, $z = 0$, а её образующие параллельны оси Oz. Найти параметрические уравнения цилиндра.

Решение:
Уравнение направляющей:
$$\begin{cases} x_0 = f_1(v) \\ y_0 = f_2(v) \\ z_0 = 0 \end{cases}$$
Так как образующие параллельны Oz, уравнение цилиндра в параметрическом виде будет:
$$\begin{cases} x = f_1(v) \\ y = f_1(v) \\ z = u \end{cases}$$

Задача 3.
Написать уравнение цилиндрической поверхности с направляющей $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ и образующими, параллельными постоянному вектору $\vec{a}$.

Решение:
у цилиндра направляющей $\rho = \vec{\rho}(u)$является окружность:
зададим параметрически:
$$\begin{cases} x = Rcosu \\ y = Rsinu \\ z = 0 \end{cases}$$

образующие, параллельные вектору а будут параллельны оси Z:

$$\begin{cases} x = Rcosu \\ y = Rsinu \\ z = u \end{cases}$$

тогда уравнение:

$$\begin{cases} x = Rcosu \\ y = Rsinu \\ z = u \end{cases}$$

Задача 4.
Задана точка $M(\vec{\rho}_0)$ и кривая L: $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$. Написать параметрическое уравнение конуса с вершиной в точке M и направляющей L.

Решение: у конуса направляющей $\rho = \vec{\rho}(u)$ является окружность:
u – параметр направляющей
v – параметр образующей
образующие соберутся в одной точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

зададим параметрически направляющую:

$$\begin{cases} x = Rcosu \\ y = Rsinu \\ z = 0 \end{cases}$$

тогда уравнение:

$$\begin{cases} x = x_0 + v(Rcos(u) - x_0) \\ y = y_0 + v(Rsin(u) - y_0) \\ z = z_0 + v(0 - z_0) \end{cases}$$

Задача 5.
Показать, что уравнение $\vec{r}(t) = \{u \cos v, u \sin v, u^2\}$ и уравнение $x = \dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y = \dfrac{v}{u^2+v^2}$, $z = \dfrac{1}{u^2+v^2}$ задают одну и ту же поверхность.

Решение:

$$1)\ \begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u^2 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2}, \\ y = \dfrac{v}{u^2+v^2}, \\ z = \dfrac{1}{u^2+v^2} \end{cases}$$

представим y = u^2 при помощи основного тригонометрического тождества:

$$z = u^2(sin^2(v) + cos^2(v)) \Rightarrow \begin{cases} x^2 = u^2cos^2(v) \\ y^2 = u^2sin^2(v) \end{cases} \Rightarrow z = x^2 + y^2$$

подставим из второй системы:

$x^2+y^2=\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2=\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}=\frac{1}{u^2+v^2}=z$ отсюда: $z=x^2+y^2$

Задача 6.
К поверхности $xyz+8=0$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $2x+2y+2z-5=0$.

Решение: xy z + 8 = 0
2x + 2y + 2z - 5 = 0
$\overrightarrow{n_2}(2;2;2)$
$xyz+8=0 \Rightarrow z=-\frac{8}{xy}$
для уравнения касательной:$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$
найдем частные производные:
$F_x=\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{8}{x^2y};F_y=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{8}{xy^2}$
найдем нормальный вектор к касательной плоскости
$\overrightarrow{n_2}=\left(\frac{8}{x^2y},\frac{8}{xy^2},-1\right)$
если плоскости параллельны, найдем λ чтобы проверить коллинеарность
$\frac{8}{x^2y}=2k \qquad \frac{8}{xy^2}=2k \qquad -1=2k$
$\frac{8}{x^2y}=-1 \qquad \frac{8}{xy^2}=-1 \qquad k=-\frac{1}{2}$
$x^2y=-8$
$y^2=\frac{8}{x^2}$
$xy^2=\frac{-8}{4}$
$y=-2$
$\frac{8}{x\cdot\frac{1}{x^2}}=-1$
$\frac{8\cdot x}{x^3}=-1$
$\frac{8}{x^3}=-1$
$x^3=-8 \Rightarrow x=-2$
$\overrightarrow{n_1}=(-2;-2;-2)$
Так как плоскость параллельна другой и одновременно касается
поверхности в определенной точке $\Rightarrow Ax+By+Cz+D=0$
$2x+2y+2z+D=0$
т.к. касается поверхности:
$2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+2\cdot(-1)+D=0 \Rightarrow D=12$
$\Rightarrow 2x+2y+2z+12=0$

Задача 7.
Написать уравнение конуса с вершиной в точке $P(4,-1,3)$, образующие которого касаются эллипсоида $x^2+2y^2+3z^2=1$.

Решение:
$\begin{cases} x=4+at \\ y=-1+bt \\ z=3+ct \end{cases}$ - параметрическое уравнение образующей
(a, b, c) - координаты направл. вектора (x-4; y+1; z-3)

$$\begin{cases} x = 4 + t(x-4) \\ y = -1 + t(y+1) \\ z = 3 + t(z-3) \end{cases}$$

далее подставим в уравнение эллипсоида x, y, z из этой системы и уберем зависимость параметра t

$(4+\mathrm{at})^2 + 2(-1+bt)^2 + 3(3+ct)^2 = 1$

найдем параметрическое уравнение относительно параметра t

$16 + 8at + a^2t^2 + 2(1 - 2bt + b^2t^2) + 3(9 + 6ct + c^2t^2) = 1$

$16 + 8at + a^2t^2 + 2 - 4bt + 2b^2t^2 + 27 + 18ct + 3c^2t^2 = 1$

$a^2t^2 + 8at + 44 - 4bt + 2b^2t^2 + 18ct + 3c^2t^2 = 0$

$t^2(a^2 + 2b^2 + 3c^2) + t(8a - 4b + 18c) + 44 = 0 -$ получили квадратное уравнение

$D = 0$ в точке касания: $(At^2 + Bt + C = 0)$

$(8a - 4b + 18c)^2 - 4(a^2 + 2b^2 + 3c^2) \cdot 44 = (8(x-4) - 4(y+1) + 18(z-3))^2 - 176(x-4)^2 + 2(y+1)^2 + 3(z-3))^2 = 0$

$(8x - 32 - 4y - 4 + 18z - 54)^2 - 176(x^2 - 8x + 16) + 2(y^2 + 2y + 1) + 3(z^2 - 6z + 9)) =$

$(8x - 4y + 18z - 90)^2 = 176(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 8x + 4y - 18z + 45)$

но так нам необходим 1конус (уравнение задаём в один из которых отражений).

координатами центра эллипсоида: $(0; 0; 0)$

если вершина конуса в т. $P(4; -1; 3)$, то необходимое уравнение конуса

$-(8x - 4y + 18z - 90) = \sqrt{176(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 8x + 4y - 18z + 45)}$

Задача 8.

Через точку $M(1, 2, 1)$ провести плоскость, касательную к поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Решение:

$\mathrm{x}^2 + y^2 - z^2 = 0$

$F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0$

$F'_x = 2x; F'_y = 2y; F'_z = -2z$

$F'_x(M) = 2; F'_y(M) = 4; F'_z(M) = -2$

$2(x-1) + 4(y-2) + 2(z-1) = 0$
