Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 16

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.05.24

Задача 1.

Множество $X \subset R^2$ состоит из точек $A(x_1, x_2)$ $\begin{cases} x_1 - x_2^2 \leq 0 \\ -x_1^2 + x_2 \leq 2 \end{cases}$ Выпукло ли это множество?

Решение:
$\begin{cases} x_1 - x_2^2 \leq 0 \\ -x_1^2 + x_2 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_2^2 \\ x_2 \leq x_1^2 + 2 \end{cases}$
Берем точки $A(0,0) => 0 \leq 0$; $B(0,2) => 0 \leq 4$.
Проверим лежит ли отрезок $\lambda = 0,5 : 0,5A + 0,5B :$
$(0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0;\ 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 2) = (0,1)$
еще 2 точки: $(3,3); (3,-3) => -6 \leq 0;\ -6 \leq 2$
$\lambda = 0,5 : 0,5A + 0,5B = (0,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 3;\ 0,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot (-3)) = (3,0)$
$3 - 0 \leq 0 => X$ не выпуклое

Задача 2.

Найти вещественные значения α, при которых множество будет выпуклым $\begin{cases} \alpha(x_1 - x_2^2) = 0 \\ x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} \alpha(x_1 - x_2^2) = 0 \\ x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$
$\alpha \neq 0 :$
$\begin{cases} x_1 - x_2^2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 + x_2 - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{2} \\ x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{2} \end{cases}$
$\alpha = 0 :$ при $\forall x_1, x_2 \alpha(x_1 - x_2^2) = 0$ имеет решение:
$x_1 + x_2 = 15 -$ прямая
$A = (\lambda x_1' + (1-\lambda)x_1'', \lambda x_1' + (1-\lambda)x_2''), \lambda \in [0,1]$
Пусть $(x_1, x_2) = (0, 15)$ и $(15, 0) => (\lambda \cdot 0 + (1-\lambda)15\ ;\ \lambda \cdot 15 + (1-\lambda) \cdot 0) =$
$= (15 - 15\lambda; 15\lambda) : x_1 + x_2 = 15\ (\ 15 - 15\lambda + 15\lambda = 15)$
мн-во выпуклое

Задача 3.

Найти вещественные значения α, при которых множество будет выпуклым $x_1^2(\alpha^2 + 5\alpha + 1) - x_2 \geq 0$.

Решение: При $(\alpha^2 + 5\alpha + 1) > 0 :$ парабола ветви вверх
При $(\alpha^2 + 5\alpha + 1) = 0 :$ полуплоскость
При $(\alpha^2 + 5\alpha + 1) < 0 :$ парабола ветви вниз
Определим выпуклость/вогнутость

$x_1^2(\alpha^2+5\alpha+1)-x_2=0$
$x_1^2(\alpha^2+5\alpha+1)=x_2-f(x_1)$
$f''(x_1)=2(\alpha^2+5\alpha+1)\geq 0-$ Выпуклое
$2(\alpha^2+5\alpha+1)\geq 0$
$\alpha^2+5\alpha+1\geq 0$
$\alpha\leq\frac{-5-\sqrt{21}}{2}$ или $\alpha\geq\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$

Задача 4.

Выписать все возможные грани множества $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3\leq 6 \\ x_1+x_2+x_3\leq 2 \end{cases}$

Решение:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$a=(-2,4,0)$
$\vec{q_1}=\{-1,2,-1\}$
$\Rightarrow G_2: X=a+\lambda\vec{q_1}$
$G_1^1:\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ x_1+x_2+x_3\leq 2 \end{cases}$
$a=(-2,4,0)$
$\vec{q_1}=\{-2,1,0\}$
$\vec{q_2}=\{-3,0,1\}$
$\Rightarrow G_1^1: X=a+\lambda_1\vec{q_1}+\lambda_2\vec{q_2}$
$G_1^2:\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3\leq 6 \\ x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$
$a=(-2,4,0)$
$\vec{q_1}=\{1,-1,0\}$
$\vec{q_2}=\{1,0,-1\}$
$\Rightarrow G_1^2: X=a+\lambda_1\vec{q_1}+\lambda_2\vec{q_2}$

Задача 5.

Найти вершины многогранного множества $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\leq 3 \\ x_1+x_2\leq 2 \\ x_1+x_3\leq 2 \\ x_2+x_3\leq 2 \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2=2 \\ x_1+x_3=2 \\ x_2+x_3\leq 2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1=2-x_2 \\ x_1=2-x_3 \\ x_2+x_3\leq 2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ x_1=2-x_2 \\ x_2=x_3x_2+x_3\leq 2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=1 \end{cases}\Rightarrow V_1(1,1,1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 \leq 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = 2 - x_1 \\ x_1 + x_3 \leq 2 \\ x_2 = 2 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_3 + x_2 = 3 \\ x_2 = 2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \leq 2 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow V_1(1,1,1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_3 = 2 - x_1 \\ x_3 = 2 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 = x_2 \\ x_3 = 2 - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow V_1(1,1,1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 = 2 - x_2 \\ x_2 = x_3 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow V_1(1,1,1)$$

Answer: $V_1(1,1,1)$
