Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 11

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.05.10

Задача 1.
Найти первую и вторую квадратичные формы тора $\vec{r}(u,v) = \{(a + r\cos u)\cos v, r\sin u, (a + r\cos u)\sin v\}$.

Решение: $\overrightarrow{r}(u,v) = \left\{(a + r\cos u)\cos v, r\sin u, (a + r\cos u)\sin v\right\}$

$$\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = r\sin u \\ z = (a + r\cos u)\sin v \end{cases}$$

$\overrightarrow{r_u} = \left\{-r\sin u\cos v, r\cos u, -r\sin u\sin v\right\}$
$\overrightarrow{r_v} = \left\{-(a + r\cos u)\sin v, 0, (a + r\cos u)\cos v\right\}$
$\overrightarrow{r_{uu}} = \left\{-r\cos u\cos v, -r\sin u, -r\cos u\sin v\right\}$
$\overrightarrow{r_{vv}} = \left\{-(a + r\cos u)\cos v, 0, -(a + r\cos u)\sin v\right\}$
$\overrightarrow{r_{uv}} = \left\{r\sin u\sin v, 0, \ -r\sin u\cos v\right\}$
$E = \overrightarrow{r_u}\cdot\overrightarrow{r_u} = r^2\sin^2 u\cos^2 v + r^2\cos^2 u + r^2\sin^2 u\sin^2 v = r^2$
$F = \overrightarrow{r_u}\cdot\overrightarrow{r_v} = r\sin u\cos v(a + r\cos u)\sin v - r\sin u\sin v(a + r\cos u)\cos v = 0$
$G = \overrightarrow{r_v}\cdot\overrightarrow{r_v} = (a + r\cos u)^2\sin^2 v + (a + r\cos u)^2\cos^2 v = (a + r\cos u)^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = (a + r\cos u)^2$
$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^2(a + r\cos u)^2 - 0^2} = r(a + r\cos u)$
$I_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = r^2du^2 + (a + r\cos u)^2dv^2$

$$(r_{uu}, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} -r\cos u\cos v & -r\sin u & -r\cos u\sin v \\ -r\sin u\cos v & r\cos u & -r\sin u\sin v \\ -(a + r\cos u)\sin v & -r\sin u\sin v & (a + r\cos u)\cos v \end{vmatrix} = -ar^2 - r^3\cos u$$

$$(r_{vv}, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} r\sin u\sin v & 0 & -r\cos v\sin u \\ -r\sin u\cos v & r\cos u & -r\sin u\sin v \\ -(a + r\cos u)\sin v & -r\sin u\sin v & (a + r\cos u)\cos v \end{vmatrix} = 0$$

$$(r_{vv}, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} -(a + r\cos u)\cos v & 0 & -(a + r\cos u)\sin v \\ -r\sin u\cos v & r\cos u & -r\sin u\sin v \\ -(a + r\cos u)\sin v & 0 & (a + r\cos u)\cos v \end{vmatrix} = -a^2r\cos u - 2ar^2\cos^2 u - r^3\cos^3 u$$

$L = \frac{-ar^2 - r^3\cos u}{r(a + r\cos u)} = -r$
$M = 0$
$N = \frac{-r(a^2 + 2ar\cos^2 u + r^2\cos^3 u)}{r(a + r\cos u)} = -\cos u\cdot a - \cos^2 u\cdot r$
$I_2 = -rdu^2 + (-\cos u\cdot a - \cos^2 u\cdot r)dv^2$

Задача 2.
Найти первую и вторую квадратичные формы однополостного гиперболоида $\vec{r}(u,v) = \{a\mathrm{ch}u\cos v, a\mathrm{ch}u\sin v, b\mathrm{sh}u\}$.

Решение: $\overrightarrow{r}(u,v) = \left\{a\cosh u\cos v, a\cosh u\sin v, b\sinh u\right\}$

$$\begin{cases} x = a\cosh u\cos v \\ y = a\cosh u\sin v \\ z = b\sinh u \end{cases}$$

$\overrightarrow{r_u} = \left\{a\sinh u\cos v, a\sinh u\sin v, b\cosh u\right\}$
$\overrightarrow{r_v} = \left\{-a\cosh u\sin v, a\cosh u\cos v, 0\right\}$
$\overrightarrow{r_{uu}} = \left\{a\cosh u\cos v, a\cosh u\sin v, b\sinh u\right\}$
$\overrightarrow{r_{vv}} = \left\{-a\cosh u\cos v, -a\cosh u\sin v, 0\right\}$
$\overrightarrow{r_{uv}} = \left\{-a\sinh u\sin v, a\sinh u\cos v, 0\right\}$
$E = \overrightarrow{r_u}\cdot\overrightarrow{r_u} = a^2\sinh^2 u\cos^2 v + a^2\sinh^2 u\sin^2 v + b^2\cosh^2 u = a^2\sinh^2 u + b^2\cosh^2 u$
$F = 0$
$G = \overrightarrow{r_v}\cdot\overrightarrow{r_v} = a^2\cosh^2 u\sin^2 v + a^2\cosh^2 u\cos^2 v = a^2\cosh^2 u$
$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{(a^2\sinh^2 u + b^2\cosh^2 u)(a^2\cosh^2 u)} = a\cosh u\sqrt{a^2\sinh^2 u + b^2\cosh^2 u}$
$I_1 = (a^2\sinh^2 u + b^2\cosh^2 u)du^2 + a^2\cosh^2 u dv^2$

$$(r_{uu}, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} a\cosh u\cos v & a\cosh u\sin v & b\sinh u \\ a\sinh u\cos v & a\sinh u\sin v & b\cosh u \\ -a\cosh u\sin v & b\cosh u\cos v & 0 \end{vmatrix} = -a^2\cosh^3 u\cdot b + a^2\sinh^2 u\cdot b\cosh u$$

$$(r_{uv}, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} -a\sinh u\sin v & a\sinh u\cos v & 0 \\ a\sinh u\cos v & a\sinh u\sin v & b\cosh u \\ -a\cosh u\sin v & b\cosh u\cos v & 0 \end{vmatrix} = a^2\sinh u\cdot b\cosh^2 u\sin 2v$$

$$(r_{vv}, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} -a\cosh u\cos v & -a\cosh u\sin v & 0 \\ a\sinh u\cos v & a\sinh u\sin v & b\cosh u \\ -a\cosh u\sin v & b\cosh u\cos v & 0 \end{vmatrix} = a^2\cosh^3 u\cdot b$$

$L = \frac{-ba^2\cosh^2 u + ba^2\sinh^2 u}{a\cosh u\sqrt{a^2\sinh^2 u + b^2\cosh^2 u}} = \frac{b(\sinh^2 u - \cosh^2 u)}{\cosh u} = \frac{-b}{\cosh u}$
$M = b\sinh u\sin(2v)$
$N = \frac{a^2\cosh^3 u\cdot b}{a^2\cosh^2 u} = b\ cosh u$
$I_2 = \frac{b(\sinh^2 u - \cosh^2 u)}{\cosh u}du^2 + 2b\sinh u\sin(2v)dudv + b\cosh u\cdot dv^2$

Задача 3.
Найти угол между линиями $av+bu=0$, $cv+du=0$ на поверхности с первой квадратичной формой $ds^2 = du^2 + dv^2$.

Решение:

$$\begin{cases} av+bu=0 \\ cv+du=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$$

Введем параметризацию для линий
$av+bu=0:$

$$\begin{cases} v=t \\ u=-\frac{at}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt}=1 \\ \frac{du}{dt}=-\frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow dv=dt \Rightarrow \frac{du}{dv}=-\frac{a}{b} \Rightarrow du=-\frac{a}{b}dv$$

$cv+du=0:$

$$\begin{cases} v=t \\ u=-\frac{ct}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt}=1 \\ \frac{du}{dt}=-\frac{c}{d} \end{cases} \Rightarrow dv=dt \Rightarrow \frac{du}{dv}=-\frac{c}{d} \Rightarrow du=-\frac{c}{d}dv$$

$$\cos\phi = \frac{\frac{adv}{b}\cdot\frac{c\delta v}{d} + dv\delta v}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}dv^2+dv^2}\sqrt{\frac{c^2}{d^2}\delta v^2+\delta v^2}} = \frac{dv\delta v(1+\frac{ac}{bd})}{\sqrt{dv^2(1+\frac{a^2}{b^2})}\sqrt{\delta v^2(1+\frac{c^2}{d^2})}} = \frac{1+\frac{ac}{bd}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\sqrt{1+\frac{c^2}{d^2}}}$$

Задача 4.

Найти периметр и внутренние углы криволинейного треугольника $u = \pm av$, $v = 1$, лежащего на поверхности с первой квадратичной формой $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

Решение: $\begin{cases} u = \pm av \\ v = 1 \end{cases}$

$\mathrm{I}_1 = ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$

$E = 1; F = 0; G = u^2 + a^2$

координаты точек треугольника - точки пересечения линий u и v:

$A(0, 0)$

$B(a, 1)$

$C(-a, 1)$

$u = \pm av \Rightarrow |AB| = |AC|:$

$P = |AB| + |BC| + |AC| = 2|AB| + |BC|$

введем параметризацию AB :

$\begin{cases} u = t \\ v = \frac{t}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{du}{dt} = 1 \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{a} \end{cases}$

$du = dt \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{1}{a}$

$u = av$

$\begin{cases} v \in [0; 1] \\ u \in [0; a] \end{cases}$

$|AB| = \int_0^1 \sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2} dv$

$= \int_0^1 \sqrt{a^2 + a^2v^2 + a^2} dv = |a| \int_0^1 \sqrt{2 + v^2} dv = a\left(\frac{v}{2}\sqrt{2 + v^2} + \ln(v + \sqrt{2 + v^2})\right)\Big|_0^1 =$

$= a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}\right)$

введем параметризацию BC :

$\begin{cases} u = t \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{du}{dt} = 1 \\ \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$

$du = dt \Rightarrow \begin{cases} \frac{du}{du} = 1 \\ \frac{dv}{du} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} v = 1 \\ u \in [-a; a] \end{cases}$

$|BC| = \int_{-a}^a \sqrt{E\left(\frac{du}{du}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2} du = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (u^2 + a^2)0} du = |u|_{-a}^a = 2a$

$P = 2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}\right) + 2a$

Найдем углы:

в$(\cdot)(0, 0)$

$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + G\delta v^2}} = \frac{du\delta u + (u^2 + a^2)dv\delta v}{\sqrt{du^2 + (u^2 + a^2)dv^2}\sqrt{\delta u^2 + (u^2 + a^2)\delta v^2}} = \frac{-a^2 + a^2}{2a^2} = 0$

$\cos\theta = 0$

в$(\cdot)(a, 1)$ и в$(\cdot)(-a, 1)$

$\cos\theta = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Задача 5.

На поверхности $\vec{r}(u, v) = \{u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv\}$ дана точка $M(u = 1, v = 1)$. Вычислить кривизну нормального сечения в точке M, проходящего через касательную к линии $v = u^2$.

Решение:

$\mathrm{r}_u = \left\{2u, 2u, v\right\}$

$r_v = \left\{2v, -2v, u\right\}$

$r_{uu} = \left\{2, 2, 0\right\}$

$r_{uv} = \left\{0, 0, 1\right\}$

$r_{vv} = \left\{0, 0, 1\right\}$

$$(r_{uu}, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2u & 2u & v \\ 2v & -2v & u \end{vmatrix} = 8v^2$$

$$(\mathrm{r}_{uv}, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2u & 2u & v \\ 2v & -2v & u \end{vmatrix} = -8u$$

$$(\mathrm{r}_{vv}, r_u, r_v) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2u & 2u & v \\ 2v & -2v & u \end{vmatrix} = 8u^2$$

$(\cdot)$M: $(\mathrm{r}_{uu}, r_u, r_v) = 8$

$(\cdot)$M: $(\mathrm{r}_{uv}, r_u, r_v) = -8$

$(\cdot)$M: $(\mathrm{r}_{vv}, r_u, r_v) = 8$

E = 4u$^2 + 4u^2 + v^2 = 8u^2 + v^2 = 9$

$(\cdot)$M = 9

F = 4uv - 4uv + vu = vu

$(\cdot)$M = 1

G = 4v$^2 + 4v^2 + u^2 = 8v^2 + u^2$

$(\cdot)$M = 9

$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{80}$

$L = \frac{8}{\sqrt{80}}; M = \frac{-8}{\sqrt{80}}; N = \frac{8}{\sqrt{80}}$

$I_1 = 9du^2 + 2dudv + 9dv^2$

$I_2 = \frac{8}{\sqrt{80}}du^2 + 2\frac{-8}{\sqrt{80}}dudv + \frac{8}{\sqrt{80}}dv^2$

рассмотрим линию: u$^2 = v$

$\frac{du}{dv} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}} = \frac{1}{2u} = \frac{1}{2}$

$du = \frac{1}{2}dv$

$k = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{8}{\sqrt{80}}du^2 - \frac{16}{\sqrt{80}}dudv + \frac{8}{\sqrt{80}}dv^2}{9du^2 + 2dudv + 9dv^2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{80}}\frac{dv^2}{4} - \frac{16}{\sqrt{80}}\frac{dv^2}{2} + \frac{8}{\sqrt{80}}dv^2}{9\frac{dv^2}{4} + 2\frac{dv^2}{2} + 9dv^2} = \frac{2\sqrt{5}}{245}$