Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 13

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.12.24

Задача 31.
Даны вектора $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$, $\vec{c} = \{4, 0, 3\}$, $\vec{d} = \{16, 10, 18\}$. Найти вектор, являющийся проекцией вектора $\vec{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при направлении проектирования, параллельном вектору $\vec{c}$.

Решение:
$\vec{e}, \vec{a}, \vec{b}$ компланарны => ЛЗ

$$\begin{cases} \vec{e} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \\ d + \lambda c = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \end{cases}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 2 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{70}{-14} = 5$$

$Answer: 5$

Задача 138.
Доказать, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости или в пространстве имеет место равенство $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

Решение:
AB=B-A
BC=C-B
CD=D-C
AD=D-A
CA=CD+DA=(D-C)+(A-D)
BD=BC+CD=C-B+D-C
(C-B,D-A)+(D-C+A-D,-B+D)+(B-A,D-C)
(C,D)-(C,A)-(B,D)+(B,A)+(C,B)-(C,D)-(A,B)+(A,D)+(B,D)-(B,C)-(A,D)+(A,C)=0

Задача 142.
Даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти вектор $\vec{x}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и удовлетворяющий системе уравнений $(\vec{a}, \vec{x}) = 1$, $(\vec{b}, \vec{x}) = 0$.

Решение:
$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

$$\begin{cases}(\vec{a}, \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = 1\\ (\vec{b}, \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = 0\end{cases}$$
$$\begin{cases}\alpha(\vec{a},\vec{a}) + \beta(\vec{a},\vec{b}) = 1\\ \alpha(\vec{a},\vec{b}) + \beta(\vec{b},\vec{b}) = 0\end{cases}$$
$$\begin{cases}\beta = \frac{1-\alpha(\vec{a},\vec{a})}{(\vec{a},\vec{b})}\\ \alpha(\vec{a},\vec{b}) + \frac{(\vec{b},\vec{b})-\alpha(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{b})} = 0\end{cases}$$

$$\alpha = \frac{(\vec{b},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2} \quad \beta = \frac{-(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2}$$
$$\vec{x} = \frac{\vec{a}(\vec{b},\vec{b}) - \vec{b}(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b}) - (\vec{a},\vec{b})^2}$$

Задача 145.
Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{n}$. Найти вектор $\vec{b}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{n}$.

Решение:
$\vec{b} = \vec{a} + \alpha\vec{n}$
$(\vec{b},\vec{n}) = 0$
$(\vec{a} + \alpha\vec{n}, \vec{n}) = 0$
$(\vec{a},\vec{n}) + \alpha(\vec{n},\vec{n}) = 0$
$$\alpha = -\frac{(\vec{a},\vec{n})}{(\vec{n},\vec{n})}$$
$$\vec{b} = \vec{a} - \frac{\vec{n}(\vec{a},\vec{n})}{(\vec{n},\vec{n})}$$

Задача 151.
Даны два вектора $\vec{a} = \{8, 4, 1\}$ и $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$. Найти вектор $\vec{c}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перпендикулярный к вектору $\vec{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\vec{b}$ тупой угол.

Решение:

$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$
$(\vec{c},\vec{a}) = 0$
$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{a}) = 0$
$\alpha(\vec{a},\vec{a}) + \beta(\vec{a},\vec{b}) = 0$
$(\vec{a},\vec{a}) = 81$
$(\vec{a},\vec{b}) = 9$
$81\alpha + 9\beta = 0$
$\beta = -9\alpha$
$\vec{c} = \alpha\vec{a} - 9\alpha\vec{b} = \alpha\{-10, 22, -8\}$
$|\vec{a}| = |\vec{c}|$
$(\vec{a},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{c})$
$81 = \alpha^2(100 + 484 + 64) = \alpha^2 648 \implies \alpha = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$(\vec{c}, \vec{b}) < 0 \implies (\vec{c}, \vec{b}) = \alpha(-72) \implies \alpha > 0$
$\vec{c} = \{-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{11}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{\sqrt{2}}\}$

Задача 184.
Даны три вектора $\vec{a} = \{8, 4, 1\}$, $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$, $\vec{c} = \{4, 0, 3\}$. Найти вектор $\vec{d}$ длины 1, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

Решение:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
Векторное произв. 2х векторов даёт
вектор, перпендикулярный обоим
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$
$= 6\vec{i} - 6\vec{j} - 24\vec{k} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix}$
$l(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{36 + 36 + 5 + 6} = 18\sqrt{2}$
Чтобы получить единичный вектор, нормируем:
$\vec{l} = \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{1}{18\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{-4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
Узнаем знак скалярного произв. если $\vec{c} \cdot \vec{l} < 0,$ то меняем знак вектора $\vec{l}$
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{-4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{4}{3\sqrt{2}} + 0 - \frac{12}{3\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow$ меняем знак у $\vec{l}$
Answer: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Задача 191.
Вычислить объем параллелепипеда, зная длины $|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$, $|\overrightarrow{OC}| = c$ трёх его ребер, выходящих из одной его вершины O, и углы $\angle BOC = \alpha$, $\angle COB = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ между ними.

Решение:
Пусть $\vec{h}$ - высота параллелепипеда
$\vec{OC'} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$
$\vec{h} = \vec{OC} - \alpha\vec{OA} - \beta\vec{OB}$
$(\vec{h}, \vec{OA}) = 0$
$(\vec{h}, \vec{OB}) = 0$
$\begin{cases}(\vec{OC} - \alpha\vec{OA} - \beta\vec{OB}, \vec{OA}) = 0 \\ (\vec{OC} - \alpha\vec{OA} - \beta\vec{OB}, \vec{OB}) = 0\end{cases}$
$\begin{cases}\alpha(\vec{OA}, \vec{OA}) + \beta(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) \\ \alpha(\vec{OA}, \vec{OB}) + \beta(\vec{OB}, \vec{OB}) = (\vec{OB}, \vec{OC})\end{cases}$
$(\vec{OA}, \vec{OA}) = a^2 \cos 0 = a^2$
$(\vec{OA}, \vec{OB}) = ab\cos\gamma$
$\begin{cases}\alpha a^2 + \beta ab\cos\gamma = ac\cos\beta \\ \alpha ab\cos\gamma + \beta b^2 = bc\cos\alpha\end{cases}$
$\alpha = \dfrac{c}{a} \cdot \dfrac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin^2\gamma}$
$\beta = \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta}{\sin^2\gamma}$
$|\vec{OA} \text{ x } \vec{OB}| = ab\sin\gamma$
$|h|^2 = (\vec{OC} - \alpha\vec{OA} - \beta\vec{OB}, \vec{OC} - \alpha\vec{OA} - \beta\vec{OB}) = (\vec{OC}, \vec{OC}) - \alpha(\vec{OC}, \vec{OA}) - \beta(\vec{OC}, \vec{OB}) - \alpha(\vec{OA}, \vec{OC}) + \alpha^2(\vec{OA}, \vec{OA}) + \alpha\beta(\vec{OA}, \vec{OB}) - \beta(\vec{OB}, \vec{OC}) + \alpha\beta(\vec{OB}, \vec{OA}) + \beta^2(\vec{OB}, \vec{OB}) = (\vec{OC}, \vec{OC}) - 2\alpha(\vec{OA}, \vec{OC})$
$- 2\beta(\vec{OB}, \vec{OC}) + 2\alpha\beta(\vec{OA}, \vec{OB}) + \alpha^2(\vec{OA}, \vec{OA}) + \beta^2(\vec{OB}, \vec{OB}) = c^2 - 2\alpha ac\cos\beta - 2\beta bc\cos\alpha + 2\alpha\beta ab\cos\gamma + \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 =$
$= c^2 - \dfrac{2c^2\cos\beta(\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha)}{\sin^2\gamma} - \dfrac{2c^2\cos\alpha(\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta)}{\sin^2\gamma} +$
$+ \dfrac{2c^2\cos\gamma(\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha)(\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta)}{\sin^4\gamma} + \dfrac{c^2(\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha)^2}{\sin^4\gamma} + \dfrac{c^2(\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta)^2}{\sin^4\gamma} =$
$= \dfrac{c^2}{\sin^4\gamma}(\sin^4\gamma - 2\cos\beta\sin^2\gamma(\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha) - 2\cos\alpha\sin^2\gamma(\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta) +$
$+ 2\cos\gamma(\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha)(\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta) + (\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha)^2 + (\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta)^2)$
$V = abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$

Задача 192.
Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ связаны соотношениями $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$, $\vec{b} = [\vec{c}, \vec{a}]$, $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Найти длины этих векторов.

Решение:

$\begin{cases} cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \\ cos(\vec{a}, \vec{c}) = 0 \\ cos(\vec{b}, \vec{c}) = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}||\vec{c}| \\ |\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{c}| \\ |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \end{cases} \Longrightarrow$
$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

Задача 197.
Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, отложенных от одной точки O. Найти вектор $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, отложенный от той же точки O и образующий с векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равные между собой острые углы.

Решение:

$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

$\dfrac{(\vec{a},\vec{d})}{|d||a|} = \dfrac{(\vec{b},\vec{d})}{|d||b|} = \dfrac{(\vec{c},\vec{d})}{|d||c|}$

$\vec{d} = \gamma[\vec{a},\vec{b}] + \alpha[\vec{b},\vec{c}] + \beta[\vec{c},\vec{a}]$

$\dfrac{\alpha(a,[b,c])}{|a|} = \dfrac{\beta(b,[c,a])}{|b|} = \dfrac{\gamma(c,[a,b])}{|c|}$

$\dfrac{\alpha}{|a|} = \dfrac{\beta}{|b|} = \dfrac{\gamma}{|c|}$

Пусть $\alpha = |\vec{a}|, \beta = |\vec{b}|, \gamma = |\vec{c}|$

$\vec{d} = (|\vec{c}|[\vec{a},\vec{b}] + |\vec{a}|[\vec{b},\vec{c}] + |\vec{b}|[\vec{c},\vec{a}]) * \delta$

$(\vec{a},\vec{d}) = |\vec{a}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) * \delta > 0$

$\vec{d} = (|\vec{c}|[\vec{a},\vec{b}] + |\vec{a}|[\vec{b},\vec{c}] + |\vec{b}|[\vec{c},\vec{a}]) * \delta, \delta = sign(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$