Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 4
Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.03.24

Задача 1.
Определить тип поверхности и положение относительно осей
a) $x^2 - y^2 + z^2 = 4z$,
b) $x^2 + 4y^2 - 2z + 4xy = 0$,
c) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$, d) $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$.

Решение: a) $\mathrm{x}^2 - y^2 + z^2 = 4z$
$x^2 - y^2 + z^2 - 4z = 0$
$x^2 - y^2 + z^2 - 4z + 4 - 4 = 0$
$x^2 - y^2 + (z-2)^2 - 4 = 0$
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{4} = 1$
$$\begin{cases} x^{'} = x \\ y^{'} = y \\ z^{'} = z - 2 \end{cases}$$
$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{4} = 1$

однополостный гиперболоид, вытянут вдоль оси Oy

b) $\mathrm{x}^2 + 4y^2 - 2z + 4xy = 0$
$x^2 + 4y^2 + 4xy - 2z = 0$
$(x-2)^2 - 2z = 0$
$$\begin{cases} x^{'} = x + 2y \\ z^{'} = z \end{cases}$$
нормируем каждый вектор
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \end{cases};$$
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Сумма произведений должна быть $= 0$
$$\begin{cases} x' = \frac{x+2y}{\sqrt{5}} \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5}x' = x + 2y \\ z' = z \end{cases}$$
$(\sqrt{5}x')^2 - 2z'^2 = 0 \Leftrightarrow 5x'^2 - 2z = 0$ – параболический цилиндр
Осью является Oy': $\begin{cases} x' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+2y}{\sqrt{5}} = 0 \\ \frac{y-2x}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
c) $\mathrm{x}^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
$(x^2 - 2xy + y^2) + 2(x-y) + 1 = 0$
$(x-y)^2 + 2(x-y) + 1 = 0$

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \\ z' = z \end{cases} \quad x'^2 + 2x' + 1 = 0$$

$(x' + 1)^2 = 0$

$x'^2 = 0$

Найдем т. пересечения с осями: $P(-1;0), P(0;1)$

$x = -1$ $y = 0$: $1 - 2 + 1 = 0$

$x = 0$ $y = 1$: $1 - 2 + 1 = 0$

две совпадающие плоскости

d) $\quad \mathrm{x}^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$

$(x - y)^2 - 1 = 0$

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \\ z' = z \end{cases} \quad \Rightarrow x'^2 - 1 = 0$$

$x'^2 = 1$ Две параллельные плоскости

Найдем т. пересечения с осями:

$P_1(0;1); P_2(0;-1)$

$P_3(1;0); P_4(-1;0)$

$$\mathrm{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Задача 1046(2).
Определить тип поверхности и написать её каноническое уравнение $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$

Решение: $2\mathrm{x}^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4yz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$

$(a_{11} = 2, a_{22} = 5, a_{33} = 2, a_{12} = -1, a_{13} = -2, a_{23} = 1, a_{44} = 1, a_{34} = -5, a_{34} = -1, a_{44} = -1)$

$$\mathrm{J}_5 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathrm{J}_2 : \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 9 + 9 - 0 = 18$$

$\mathrm{J}_1 = 2 + 5 + 2 = 9$

$\lambda x^2 + \lambda y^2 - \frac{108}{18} \Rightarrow 3x^2 + 6y^2 = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$

$$\mathrm{J}_3 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -54 + 0 - 54 = -108$$

$$\mathrm{J}(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda - 18\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 6 \end{cases}$$

$\mathrm{J}_4 = 0$
$Answer$: эллиптический цилиндр
$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$

Задача 1046(3).
Определить тип поверхности и написать её каноническое уравнение $7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$

Решение:
$7\mathrm{x}^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$
$(a_{11} = 7, a_{22} = 7, a_{33} = 16, a_{12} = -5, a_{13} = -4, a_{23} = -4, a_{14} = -8, a_{24} = -8, a_{34} = -4, a_{44} = 72)$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 7 & -5 & -4 \\ -5 & 7 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

$$J_4 = \begin{vmatrix} 7 & -5 & -4 & -8 \\ -5 & 7 & -4 & -8 \\ -4 & -4 & 16 & -4 \\ -8 & -8 & -4 & 72 \end{vmatrix} = -31104 < 0$$

$J(\lambda) = -\lambda^3 + 30\lambda^2 - 216\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 12, \lambda = 18$
$J_1 = 7 + 7 + 16 = 30$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -5 & -4 \\ -5 & 7-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 24 + 96 + 96 = 216$$

$12x^2 + 18y^2 = -2z\sqrt{\frac{-31104}{216}}$
$12x^2 + 18y^2 - 24z <=> 2x^2 + 3y^2 = -4z$
$2x^2 + 3y^2 + 4z = 0$
$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{2/3} + 2z' = 0$
Эллиптический параболоид
