Курганов Владислав Андреевич
st132903@student.spbu.ru
st132903

Homework Assignment 5

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.11.03

Задача 615.
Сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равна 1. Определить λ.

Решение: $2\mathrm{x}^3 - x^2 - 7x + \lambda = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} = 0$
$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$
$\gamma = -0,5; \alpha + \beta = 1; \alpha * \beta * \gamma = -\lambda$

$$\begin{cases} \alpha * \beta * \gamma = -\dfrac{\lambda}{2} \\ \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{1}{2} \\ \alpha * \beta + \beta * \gamma + \alpha * \gamma = -\dfrac{7}{2} \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} \alpha * \beta * \gamma = -\dfrac{\lambda}{2} \\ \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{1}{2} \\ \alpha * \beta + \gamma(\alpha + \beta) = -\dfrac{7}{2} \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} \alpha * \beta * \gamma = -\dfrac{\lambda}{2} \\ \alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{1}{2} \\ \alpha * \beta - 0,5 = -\dfrac{7}{2} \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} -3 * (-0,5) = -\dfrac{\lambda}{2} \\ \gamma = -0,5 \\ \alpha * \beta = -3 \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases}$$

$\lambda = 6 * (-0,5) = -3$
$2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$
$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$
$x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$
$x_3 = -\frac{1}{2}$
$x_1 + x_2 = 1$
$Answer: \lambda = -3$

Задача 618.
Решить уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0$, зная коэффициенты a_1 и a_2, и зная, что корни его образуют арифметическую прогрессию.

Решение:

Задача 621.
Составить уравнение 6-й степени, имеющее корни α, $\frac{1}{\alpha}$, $1-\alpha$, $\frac{1}{1-\alpha}$, $1-\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}$.

Решение: $\lambda : f(\lambda) = 0 => f(1-\lambda) = 0$
$(x-\lambda)(x-(1-\lambda)) = x^2$
$(x-\lambda)(x-(1-\lambda)) = x^2 - x - (\lambda^2 - \lambda) = (x^2 - x + 1) - (\lambda^2 - \lambda + 1)$
$f(\lambda) = 0 => f(\frac{1}{\lambda}) = 0$
$((\frac{1}{\lambda})^2 - \frac{\lambda}{\lambda} + 1) - (\lambda^2 - \lambda + 1) = \frac{1-\lambda+\lambda^2}{\lambda^2} - (\lambda^2 - \lambda + 1) = ((x^2-x+1)-a)((x^2-x+1)-b)((x^2-x+1)-c) =$
$f(x) = (x^2 - x + 1)^3 + g(x), deg_g(x) = 4$
$f(\frac{1}{\lambda}) = ((\frac{1}{\lambda})^2 - \lambda + 1)^3 + g(\frac{1}{x})$
$\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^6} + g(\frac{1}{\lambda}) = 0$

$$\begin{cases} (1-\lambda+\lambda^2)^3 + \lambda^6 * g(\dfrac{1}{\lambda}) \\ f(\lambda) = (1-\lambda+\lambda^2)^3 + g(\lambda) = 0 \end{cases}$$

$g(\lambda) = \lambda^6 * g(\frac{1}{\lambda})$
$a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e = e\lambda^6 + d\lambda^5 + c\lambda^4 + b\lambda^3 + a\lambda^2$
$=>$
$e = 0, d = 0, a = c$
$g(\lambda) = a\lambda^4 + b\lambda^3 + a\lambda^2$
$f(\lambda) = 0 => f(1-\lambda) = 0$
$((1-\lambda)^2 - (1-\lambda) + 1)^3 + g(1-\lambda) = 0$
$(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 + g(1-\lambda) = 0$
$=>$
$g(1-\lambda) = g(\lambda)$

$$\begin{cases} g(\lambda) = \lambda^2(a\lambda^2 + b\lambda + a) \\ g(\lambda) = g(1-\lambda) \end{cases}$$

$(1-\lambda)^2(a-(1-\lambda)^2 + b(1-\lambda) + a) = \lambda^2(a\lambda^2 + b\lambda + a)$
$g(\lambda) = a\lambda^2(1-\lambda)^2$
$f(x) = (\lambda^2 - \lambda + 1)^3 + ax^2(1-x)^2$
$f(\alpha) = 0 => (\alpha^3 - \alpha + 1)^3 + a\alpha^2(1-\alpha)^2 = 0 => a = -\frac{(\alpha^2-\alpha+1)^3}{\alpha^2(1-\alpha)^2}$
$Answer : f(x) = (x^2 - x + 1)^3 - \frac{(\alpha^2-\alpha+1)^3}{\alpha^2(1-\alpha)^2}x^2(1-x)^2$

Задача 552(а).

Пользуясь схемой Горнера, разложить $\dfrac{x^3-x+1}{(x-2)^5}$ на простейшие дроби.

Решение:
$\dfrac{x^3-1+1}{(x-2)^5} = \dfrac{(x-2)^3+A(x-2)^2+B(x-2)+C}{(x-2)^5} =$
..		1		0		-1		1
2		1		2		3..		7
2		1		4		11
2		1		6
2		1

$= \dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{6}{(x-2)^3} + \dfrac{11}{(x-2)^4} + \dfrac{7}{(x-2)^5}$

Задача 626(b).
Разложить на простейшие дроби над полем R: $\frac{x^2}{x^4-16}$

Решение:
$\frac{x^2}{x^4-16} = \frac{A+B+C}{(x^2+4)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x^2+4)}$

$A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + C(x-2)(x+2) = x^2$
$x^2 = (AX-2A)(x^2+4) + (BX-2B)(x^2+4) + (cX-2C)(x+2)$
$x^2 = Ax^3 + 2Ax^2 + 4Ax + 8A + Bx^3 - 2Bx^2 + 4Bx - 8B + Cx^2 - 4C$

$x^3 : A + B = 0 => A = -B => A = \frac{1}{8}$
$x^2 : 2A - 2B + C = 1 => C = 1 - 2A + 2B = 1 + 2B + 2B = 1 + 4B => 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$x^1 : 4A + 4B = 0$
$x^0 : 8A - 8B - 4C = 0 => -8B - 8B - 4 - 16B = -4 - 32B => B = -\frac{1}{8}$
$=> \frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}$

Answer: $\frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}$

Задача 627(b).
Разложить на простейшие дроби над полем R: $\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

Решение:
$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{dx+e}{(x^2+x+1)} + \frac{fx+g}{(x^2+x+1)^2}$
$= \frac{a(x+1)^2(x^2+x+1)^2+bx(x+1)(x^2+x+1)^2+cx(x^2+x+1)^2(dx+e)x(x+1)^2(x^2+x+1)+(fx+g)x(x+1)^2}{x(x+1)^2(x^2+x+1)}$
$a(x^6+4x^5+8x^4+10x^3+8x^2+4x+1)+b(x^6+3x^5+5x^4+5x^3+3x^2+x)+c(x^5+2x^4+3x^3+2x^2+x)+$
$d(x^6+3x^5+4x^4+3x^3+x^2)+e(x^5+3x^4+4x^3+3x^2+x)+f(x^4+2x^3+x^2)+g(x^3+2x^2+x) = 2x-1$

$x^6 : a + b + d = 0 => b = 1 - d$
$x^5 : 4a + 3b + c + 3d + e = 0 => -4 + 3 - 3d + c + 3d + e = -1 + c + e = c + e = 1$
$x^4 : 8a + 5b + 2c + 4d + 3e + f = 0 => -8 + 5b + 2c + 4d + 3e + f = 0$
$x^3 : 10a + 5b + 3c + 3d + 4e + 2f + g = 0 => -10 + 5b + 3c + 3d + 4e + 2f + g = 0$

$x^2 : 8a + 3b + 2c + d + 3e + f + 2g = 0 => -8 + 3b + 2c + d + 3e + f + 2g = 0$
$x^1 : 4a + b + c + e + g = 2 => -4 + b + c + e + g = 6$
$x^0 : a = -1$

$x^6 : d = 1 - b => d = -6$
$x^5 : c = 1 - e => c = 2 + 1 = 3$
$x^4 : b + 2c + 3e + f = 4 => b - 3 => b = 7$
$x^3 : 2b + 3c + 4e + 2f + g = 7 => 2b + 3 - 3e + 4e + 2f + g = 7 => 2b + e + 2f + g = 4 => e = -2$
$x^2 : 2b + 2c + 3e + f + 2g = 7 => 2c + 3e + f = -3$
$x^1 : b + c + e + g = 6 => b + g = 5 => 7 + g = 5 => g = -2$

$a = -1$
$b = 7$
$c = 3$
$d = -6$
$e = -2$
$f = -3$
$g = -2$

$Answer : \frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{7}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{6x+2}{x^2+x+1} - \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$

Задача 624(d).
Разложить на простейшие дроби над полем C: $\frac{x^2}{x^4-1}$.

Решение:
$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-i} + \frac{d}{x+i} = \frac{a(x+1)(x-i)(x+i)+b(x-1)(x-i)(x+i)+c(x-1)(x+1)(x+i)+d(x-1)(x+1)(x-i)}{(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)}$

$a(x+1)(x-i)(x+i) + b(x-1)(x-i)(x+i) + c(x-1)(x+1)(x+i) + d(x-1)(x+1)(x-i) = x^2$
$a(x^3 + x^2 + x + 1) + b(x^3 - x^2 + x - 1) + c(x^3 - x + (x^2 - 1)i) + d(x^3 - x + (-x^2 + 1)i) = x^2$
$ax^3 + ax^2 + ax + a + bx^3 - bx^2 + bx - b + cx^3 - cx + cx^2 i - ci + dx^3 - dx - dx^2 i + di = x^2$

$x^3 : a + b + c + d = 0^{(1)}$
$x^2 : a - b + c - d = 1^{(2)}$
$x^1 : a + b - c - d = 0^{(3)}$
$x^0 : a - b - c + d = 0^{(4)}$

$(2) - (4) : 2c - 2d = 1 => c - d = \frac{1}{2} => from(3) a + b - c - d = 0^{(3)} => a + b = \frac{1}{2}$
$d = -\frac{1}{2} - c => c - (-\frac{1}{2} - c) = 1 => 2c = \frac{1}{2} => c = \frac{1}{4}$
$d = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$
$(2) - (3) : -2b + 2c = 1 => -2b + \frac{1}{2} = 1 => b = -\frac{1}{4}$
$a = -b + c + d = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$a = \frac{1}{4}$
$b = -\frac{1}{4}$
$c = \frac{1}{4}$
$d = -\frac{1}{4}$

$Answer: \frac{x^2}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{i}{4(x-i)} + \frac{i}{4(x+i)}$

Задача 625(c).
Разложить на простейшие дроби над полем C: $\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$.

Решение: $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \dfrac{a}{(x-1)} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{(x-1)^3} + \dfrac{d}{(x+1)} + \dfrac{e}{(x+1)^2} + \dfrac{f}{(x-2)}$

$a(x-1)^2(x+1)^2(x-2) + b(x-1)(x+1)^2(x-2) + c(x+1)^2(x-2) + d(x-1)^3(x+1)(x-2) + e(x-1)^3(x-2) + f(x-1)^3(x+1)^2$

$a(x^5-2x^4-2x^3+4x^2+x-2) + b(x^4-x^3-3x^2+x+2) + c(x^3-3x-2) + d(x^5-4x^4+4x^3+2x^2-5x+2) + e(x^4-5x^3+9x^2-7x+2) + f(x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1)$
$x^5: a+d+f=0$
$x^4: -2a+b-4d+e-f=0$
$x^3: -2a-b+c+4d-5e-2f=0$
$x^2: 4a-3b+2d+9e+2f=5$
$x^1: a+b-3c-5d-7e+f=6$
$x^0: -2a+2b-2c+2d+2e-f=-23$
??????
