Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 13

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.05.12

Задача 1.

Найти общее уравнение линейного подпространства, если известен его базис $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 2, 1, 2)$.

Решение: Найдем базис L^* :

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = 0 \\ 2y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{базис } L^* = (1, 1, -1, -1)$$

уравнение $L : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$

Задача 2.

Найти базис сопряженного подпространства L^*, если линейное подпространство L определяется базисом $\mathbf{a}_1 = (0, 2, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 1, 0)$.

Решение: L:

$\mathrm{a}_1 = (0, 2, 0, 1)$
$a_2 = (2, 1, 0, 0)$
$a_3 = (0, 1, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$L^* : \begin{cases} 2y_2 + y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_1 \\ y_2 = -2y_1 \\ y_3 = 2y_1 \\ y_4 = 4y_1 \end{cases} \Rightarrow \text{базис } L^* = (1, -2, 2, 4)$$

Задача 3.

Найти базис суммы и базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \in R^4$, если L_1 определяется своим базисом $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 0)$, а L_2 системой уравнений $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

Решение: $\mathrm{L}_2 = \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 3x_4 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = 3x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = 3x_4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = 3x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = (1,0,1,0) \\ B_2 = (1,3,0,1) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{RANK} = 3 \Rightarrow$ ФСР : $(1,1,-1,1)$

$\alpha = 1, \alpha_2 = 1, \beta_1 = -1, \beta_2 = 1$

$C = a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = (2,3,1,1)$- базис пересечения

Базис суммы: $a_1 = (1,2,0,1); a_2 = (1,1,1,0); b_1 = (1,0,1,0); b_2 = (1,3,0,1)$

Задача 4.

L_1 имеет базис $\mathbf{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,1,1)$. L_2 задано системой уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Доказать, что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$ и представить $\mathbf{z} = (0,5,1,-1)$ в виде суммы векторов $\mathbf{x} \in L_1$ и $\mathbf{y} \in L_2$.

Решение: $\text{L}_1 : a_1 = (1,1,1,1), a_2 = (0,1,1,1)$

$$L_2 : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$z = x + y, z = (0,5,1,-1)$

$\alpha a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 = z$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

базис $\text{L}_2 : \begin{cases} B_1 = (0,0,0,0) \\ B_2 = (0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1) = (0,1,-1,3) \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1` & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Rang(A) = 3 < Rang(A|Z) = 4 \Rightarrow \neq Z$$
