Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 16

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.12.23

Задача 514.
Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-2, 3, 0)$ и через прямую $x = 1$, $y = 2 + t$, $z = 2 - t$. Система координат аффинная.

Решение:
Составим систему для прямой:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$
Составим систему по точке, которая принадлежит плоскости:
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$
составим направляющий вектор по уравнению прямой:
$\vec{p_1}(0; 1; -1)$
найдем направляющий вектор пересекающий прямую с прямой на плоскости:
$A - Al_1 = (-2 - 1; 3 - 2; 0 - 2) = (-3; 1; -2)$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

отсюда получим уравнение плоскости: x-3y-3z+11=0

Answer: x-3y-3z+11=0

Задача 518.
Написать уравнения биссектрисы тупого угла между прямой $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ y - 4z + 14 = 0 \end{cases}$ и её ортогональной проекцией на плоскость $x + y + 1 = 0$. Система координат прямоугольная.

Решение:
параметрическое уравнение биссектрисы
пусть {n, m, k }− координаты направляющего вектора
$$\begin{cases} x = x_0 + nt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + kt \end{cases}$$
найдем координаты точки пересечения (A) прямой с плоскостью $(x + y + 1 = 0)$

$$\begin{cases} (-y - 1) - 2y - 5 = 0 \\ y - 4z + 14 = 0 \end{cases} \quad => \begin{cases} y = -2 \\ z = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

A(1, -2, 3)

уравнение биссектрисы:
направляющий вектор биссектрисы - сумма нормированных векторов
$\frac{\vec{p_1}}{\vec{p_1}} + \frac{\vec{p_2}}{\vec{p_2}}$
$\vec{p_1} = (\vec{n_1}\ , \vec{n_2}) = (\{x_1, y_1, z_1\}, \{x_2, y_2, z_2\}) = (\{1, -2, 0\}, \{0, 1, -4\}) = \{8, 4, 1\}$
нормальный вектор плоскости x+y+1=0: $\vec{n}$= {1, 1, 0 }
найдем проекцию вектора $\vec{p_1}$
$\vec{p}_{pr} = \{6, 6, 0\}$
направляющий вектор проекции: $\vec{p_2} = \vec{p_1} - \vec{p}_{pr} = (8, 4, 1) - (6, 6, 0) = (2, -2, 1)$
найдем длину нормированных векторов :
$\begin{cases} |p_1| = 9 \\ |p_2| = 3 \end{cases}$
$\vec{p_1} = (\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}), \vec{p_2} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

$\vec{p_1} + \vec{p_2} = (\frac{14}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$

составим уравнение биссектрис
$\begin{cases} x = 1 + \frac{14}{9}t \\ y = -2 - \frac{2}{9}t \\ z = 3 + \frac{4}{9}t \end{cases}$

Задача 508.
Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, 2, 3)$ параллельной прямой $x = y = z$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки. Система координат аффинная.

Решение:
Найдем направляющий вектор по прямой x=y=z
$\vec{l}\{1, 1, 1\}$

По условию плоскость π отсекает на осях Ox и Oy равные отрезки,
тогда по точкам, принадлежащим этим осям
(т.M т.пересечения с Ox и т.N т.пересечения с Oy)найдем вектор $\vec{MN} = \{1, -1, 0\}$
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 => x + y - 2z + 3 = 0$$

Задача 569.
Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $(1, 2, 3)$ и $(4, 5, 7)$ и перпендикулярной к плоскости $x - y + 2z - 4 = 0$.

Решение: найдем вектор нормали из уравнения плоскости: $\vec{n} = \{1; -1; 2\}$

$A(1, 2, 3)$ и $B(4, 5, 7)$
найдем направляющий вектор путем вычитания координат одной точки из другой и получим AB:
$\vec{AB} = \{3; 3; 4\}$
π_1 перпендикулярна π_2
π_2 перпендикулярна $\vec{n_2}$
π_1 перпендикулярна $\vec{n_1}$

таким образом $\vec{n_1}$ перпендикулярен $\vec{n_2}$
$\vec{AB}$ перпендикулярен $\vec{n_2}$

$(\vec{AB}, \vec{n_2}) = 0$

$(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = 0$

$\begin{cases} A - B + 2C = 0 \\ 3A + 3B + 4C = 0 \end{cases}$
$A = B - 2C$
$3(B - 2C) + 3B + 4C = 0$
$6B - 2C = 0$
$B = \frac{1}{3}C => C = 3B$
$A = B - 2 - 3B => A = -5B$
$-5B - B + 6B = 0$
$\begin{cases} B = 1 \\ A = -5 \quad => \vec{n_1} = (-5; 1; 3) \\ C = 3 \end{cases}$
Зададим плоскость через $\vec{n_1}$и т.A:
$-5(x-1) + 1(y-2) + 3(z-3) = 0$
$-5x + y + 3z + 6 = 0$
$Answer : -5x + y + 3z + 6 = 0$
