Курганов Владислав Андреевич
st132903@student.spbu.ru
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 4

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.11.03

Задача 546(b).
Выполнить деление с остатком $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$.

Решение:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
x^3 - (2/3)x^2 + (1/3)x & (1/3)x-(7/9) \\ \hline
-(7/3)x^2 - (4/3)x - 1 & \\
-(7/3)x^2 - (14/9)x - (7/9) & \\ \hline
-(26/9)x-(2/9) &
\end{array}
$$

(1/3)x-(7/9); r=-(26/9)x-(2/9) => (1/9)*(3x-7); r=(1/9)*(-26x-2)

Answer = (1/9)*(3x-7); r=(1/9)*(-26x-2)

Задача 549(c).
Выполнить деление с остатком $4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$.

Решение:

$$
\begin{array}{r|l}
4x^3 + x^2 & x+1+i \\ \cline{2-2}
4x^3 + 4x^2 + 4x^2 i & 4x^2 - 3x - 4xi - 1 + 7i \\ \hline
-3x^2 - 4x^2 i & \\
-3x^2 - 3x - 3xi & \\ \hline
-4x^2 + 3x + 3xi & \\
-4x^2 - 4xi + 4xi^2 & \\ \hline
-x+7xi & \\
-x-1-i & \\ \hline
7xi+1+i & \\
7xi+7i-7 & \\ \hline
8-6i &
\end{array}
$$

(x+1+i)$(4x^2 - (3 + 4i)x + (-1 + 7i)) + 8 - 6i$

Задача 549(d).
Выполнить деление с остатком $x^3 - x^2 - x$ на $x - 1 + 2i$.

Решение:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -x & & x - 1 + 2i \\ \cline{5-5}
x^3 & -x^2 & +2x^2 i & & x^2 - 2xi - 5 - 2i \\ \cline{1-4}
-x & - & 2x^2 i & & \\
4x & - & 2x^2 i & +2xi & \\ \cline{1-4}
-2xi & - & 5x & & \\
-5x & +5 & -10i & & \\ \cline{1-4}
-2xi & -5 & +10i & & \\
-2xi & +4 & +2i & & \\ \cline{1-4}
 & & -9 + 8i & &
\end{array}
$$

(x-1+2i)$(x^2 - 2xi - 5 - 2i) - 9 + 8i$

Задача 557(e).
Определить наибольший общий делитель полиномов: $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ и x^5+x^2-x+1.

Решение:

$$\begin{array}{r|l}
x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5 & x^5+x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
x^6+0+0+x^3-x^2+x & x \\ \hline
2x^4-5x^3-2x^2+7x-5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2x^5+0x^4+0x^3+2x^2-2x+2 & 2x^4-5x^3-2x^2+7x-5 \\ \cline{2-2}
2x^5-5x^4-2x^3+7x^2-5x & x+5/2 \\ \hline
5x^4+2x^3-5x^2+3x+2 & \\
5x^4-25/2x^3-5x^2-5x^2+35/2x+25/2 & \\ \hline
29/2x^3+0-29/2x+29/2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2x^4-5x^3-2x^2+7x-5 & x^3-x+1 \\ \cline{2-2}
2x^4-0x^3-2x^2+2x & 2x\text{-}5 \\ \hline
-5x^3+0x^2+5x-5 & \\
-5x^3+0x^2+5x-5 & \\ \hline
0x^3+0x^2+0x+0 &
\end{array}$$

$$HOD=x^3-x+1$$

Задача 557(f).
Определить наибольший общий делитель полиномов: $x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12$ и $x^4+3x^3-6x^2-22x-12$.

Решение:

$$\begin{array}{r|l}
x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12 & x^4+3x^3-6x^2-22x-12 \\ \cline{2-2}
x^5+3x^4-6x^3-22x^2-12x & x \\ \hline
-6x^3-30x^2-40x-12 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^4+9x^3-18x^2-66x-36 & 3x^3+15x62+20x+6 \\ \cline{2-2}
3x^4+15x^3+20x^2+6x & x\text{-}2 \\ \hline
-6x^3-38x^2-72x-36 & \\
-6x^3-30x^2-40x-12 & \\ \hline
-8x^2-32x-24 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^3+15x^2+20x+6 & x^2+4x+3 \\ \cline{2-2}
3x^3+12x^2+9x & 3x+3 \\ \hline
3x^2+11x+6 & \\
3x^2+12x+9 & \\ \hline
-x-3 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+4x+3 & x+3 \\ \cline{2-2}
x^2+3x & x+1 \\ \cline{1-1}
x+3 & \\
x+3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

HOD=x+3

Задача 578(c).
Пользуясь алгоритмом Евклида, подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f_1(x)M_1(x)+f_2(x)M_2(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ – наибольший общий делитель полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$.
$f_1(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$,
$f_2(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$.

Решение:
$f_1(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$
$f_2(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 - 4x^5 + 11x64 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35 & x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25 \\ \cline{2-2}
x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 20x^3 + 10x^2 - 25x & x-1 \\ \cline{1-1}
-x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 27x^2 - 10x + 35 & \\
-x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 20x^2 - 10x + 25 & \\ \cline{1-1}
x^4 + 0x^3 + 7x^2 + 0x + 10 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25 & x^4 + 7x^2 + 10 \\ \cline{2-2}
x^5 + 0x^4 + 7x^3 + 0x^2 + 10x & x-3 \\ \cline{1-1}
-3x^4 + 0x^3 - 20x^2 + 0x - 25 & \\
-3x^4 + 0x^3 - 21x^2 + 0x - 25 & \\ \cline{1-1}
x^2 + 5 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + 7x^2 + 10 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2}
x^4 + 5x^2 & x^2 + 2 \\ \cline{1-1}
2x^2 + 10 & \\
2x^2 + 10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$q_1 = x - 1; r_1 = x^4 + 7x^2 + 10; M_1 = -q_2 = 3 - x$
$q_2 = x - 3; r_2 = x^2 + 5; M_2 = 1 + q_1 * q_2 = 1 + (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 4$
$Answer : (3 - x)f_1(x) + (x^2 - 4x + 4)f_2(x) = x^2 + 5$

Задача 578(d).
Пользуясь алгоритмом Евклида, подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f_1(x)M_1(x)+f_2(x)M_2(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ – наибольший общий делитель полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$.
$f_1(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4$,
$f_2(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2$.

Решение:

$f_1(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4$
$f_2(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4 & 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2 \\
3x^7 - 0x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 0x^3 - 6x^2 + 2x & \text{x+2} \\
\hline
6x^6 + 0x^5 - 3x^4 + 14x^3 + 0x^2 - 6x + 4 & \\
6x^6 + 0x^5 - 6x^4 + 14x^3 + 0x^2 - 12x + 4 & \\
\hline
3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 6x &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2 & 3x^4 + 6x \\
3x^6 + 0x^4 + 6x^3 & x^2 - 1 \\
\hline
-3x^4 + x^3 - 6x & \\
-3x^4 + 0x^3 - 6x & \\
\hline
x^3 - 0x + 2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4 + 6x & x^3 + 2 \\
3x^4 + 6x & 3x \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$q_1 = x + 2; r_1 = 3x^4; M_1 = -q_2 = 1 - x^2$
$q_2 = x^2 - 1; r_2 = x^3 + 2; M_2 = 1 + q_1 * q_2 = 1 + (x + 2)(x^2 - 1) = x^3 + 2x^2 - x - 1$
$Answer : (1 - x^2)f_1(x) + (x^3 + 2x^2 - x - 1)f_2(x) = x^3 + 2$

Задача 583(b).
Определить полином наименьшей степени, дающий в остатке $x^2 + x + 1$ при делении на $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7$ и $2x^2 - 3$ при делении на $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10$.

Решение:
