Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 3

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.03.17

Задача 807(2).
Определить тип линии $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$, написать её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат.

Решение: $\mathrm{a}_{11} = 5; a_{12} = 6; a_{22} = 0; a_{13} = -11; a_{23} = -6; a_{33} = -19;$

$J_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} ! = 0 =>$ можем решить системой

$$\begin{cases} 5x_0 + 6y_0 - 11 = 0 \\ 6x_0 - 6 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases} => O(1, 1)$$

$a_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = -11 * 1 - 6 * 1 - 19 = -36$

$\operatorname{ctg} 2\phi = \frac{5}{12} => \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \frac{5}{12} > 0$

$\frac{\cos^2(2\phi)}{\sin^2(2\phi)} = \frac{5^2}{12^2} = \frac{25}{144}$

$$\begin{cases} \cos^2(2\phi) = \frac{25}{169} \\ \sin^2(2\phi) = \frac{144}{169} \end{cases} => \begin{cases} \cos 2\phi = \frac{5}{13} \\ \sin 2\phi = \frac{12}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2\phi = \frac{\cos 2\phi + 1}{2} = \frac{9}{13} \\ \sin^2\phi = \frac{\sin 2\phi - 1}{2} = \frac{4}{13} \end{cases}$$

$\sin 2\phi > 0 : a_{11} = 5 * \frac{9}{13} + 2 * 6 * \frac{3}{\sqrt{13}} * \frac{2}{\sqrt{13}} + 0 = \frac{117}{13}$

$a_{22} = 5 * \frac{4}{13} - 2 * 6 * \frac{3}{\sqrt{13}} * \frac{2}{\sqrt{13}} + 0 = \frac{-52}{13}$

$\frac{117}{13} * x^2 - \frac{52}{13} * y^2 - 36 = 0$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

$Answer:$

гипербола

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

$O'(1, 1)$

$e_1' = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$

$e_2' = (-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$

Задача 807(3).
Определить тип линии $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$, написать её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат.

Решение: $\mathrm{a}_{11} = 1; a_{22} = 4; a_{12} = -2; a_{13} = 2; a_{23} = -\frac{3}{2}; a_{33} = -7$

$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\cot 2\phi = \frac{1-4}{-4} = \frac{3}{4}$

$\cos 2\phi = \frac{9}{25}; sin 2\phi = \frac{4}{5};$

$\cos\phi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\phi}{2}} = \sqrt{\frac{8}{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\phi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\phi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

проведем замену координат

$\begin{cases} x = x^{'}\cos\phi - y^{'}\sin\phi \\ y = x^{'}\sin\phi + y^{'}\cos\phi \end{cases}$
подставим ранее полученные sin и cos
$5y^{'2} + \sqrt{5}x^{'} - 2\sqrt{5}y^{'} - 7 = 0$

$5(\text{y}^{'} - \dfrac{1}{\sqrt{5}})^2 = 8 - \sqrt{5}x^{'}$
$\bar{y} = y^{'} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$
$5\bar{y}^2 = 8 - \sqrt{5}x^{'}$
$\bar{y}^2 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(x^{'} - \dfrac{8}{\sqrt{5}})$
$\bar{x} = x^{'} - \dfrac{8}{\sqrt{5}}$
$\bar{y} = y^{'} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$
$\bar{y}^2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\bar{x}$
Центр новой системы координат в $O'\bar{x}\bar{y}$: $O'(0,0)$
Выразим $(\text{x}^{'}y^{'})O^{'}x^{'}y^{'} : O'(\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$
Получим $O^{'}xy : O'(3,2)$
$\bar{e}_1^{'}, \bar{e}_2^{'}$:
$\bar{e}_1^{'} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\bar{e}_2^{'} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$
$Answer$:
парабола
$\bar{y}^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x}$
$O'(3,2)$
$\bar{e}_1^{'} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\bar{e}_2^{'} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

Задача 806.
Линия второго порядка определяется уравнением $x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0$. Определить тип линии, при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$, и найти её расположение относительно данной системы координат.

Решение:
$\text{x}^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0$
$x^2 - 2y + \lambda * y^2 - 2\lambda * x = 0$
$(a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = \lambda, a_{13} = -\lambda, a_{33} = 0)$
$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda$

$\text{x}^2 - 2y + \lambda * y^2 - 2\lambda * x = 0$
$x^2 - 2\lambda * x + \lambda * y^2 - 2y = 0$
$x : (x-\lambda)^2 - \lambda;$
$y : \lambda * y^2 - 2y = \lambda(y^2 - \frac{2}{\lambda}y)$
$* y^2 - 2y = \lambda(y^2 - \frac{2}{\lambda}y)$
$y^2 - \frac{2}{\lambda}y = (y - \frac{1}{\lambda})^2 - \frac{1}{\lambda^2}$
$\lambda(y - \frac{1}{\lambda})^2 - \frac{1}{\lambda} -$ подставим обратно:
$(x-\lambda)^2 - \lambda^2 + \lambda(y - \frac{1}{\lambda}) - \frac{1}{\lambda} = 0 <=> (x-\lambda)^2 + \lambda(y - \frac{1}{\lambda})^2 = \lambda^2 + \frac{1}{\lambda}$

$(x-\lambda)^2+\lambda(y-\frac{1}{\lambda})=\lambda^2+\frac{1}{\lambda}$

в каноническом виде: $\dfrac{(x-\lambda)^2}{\lambda^2-\frac{1}{\lambda}}-\dfrac{(y+\frac{1}{\lambda})^2}{\lambda-\frac{1}{\lambda^2}}=1;$

$\lambda=0$ парабола: $y=\dfrac{1}{\lambda^2}$

$\lambda>0:$ эллипс(1четверть): $\dfrac{(x-\lambda)^2}{\lambda^2-\frac{1}{\lambda}}-\dfrac{(y+\frac{1}{\lambda})^2}{\lambda-\frac{1}{\lambda^2}}=1;$

$\lambda<0:$ гипербола(3четверть): $\dfrac{(x-\lambda)^2}{\lambda^2-\frac{1}{\lambda}}-\dfrac{(y+\frac{1}{\lambda})^2}{\lambda-\frac{1}{\lambda^2}}=1;$

Задача 808.
Линия второго порядка определяется уравнением $x^2+2\alpha xy+y^2=1$. Определение тип линии при изменении α от $-\infty$ до $+\infty$, и найти её расположение относительно данной системы координат.

Решение: $\mathrm{x}^2+2\alpha*xy+y^2=1$
$(a_11=1;a_12=\alpha;a_22=1;a_13=0;a_23=0;a_33=-1)$
$I_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \alpha\alpha & 1\end{vmatrix}=1-\alpha^2$
$\begin{cases}x=x^{'}*\cos\phi-y^{'}*\sin\phi\\ y=x^{'}*\sin\phi-y^{'}*\cos\phi\end{cases}$
найдем $\phi:\cot 2\phi=\frac{1-1}{2\alpha}=0$
$2\phi=\pm\frac{\pi}{2}=>\phi=\pm\frac{\pi}{4}$
$\phi>0:\frac{\pi}{4}$
$(x^{'}*\frac{\sqrt{2}}{2}-y^{'}*\frac{\sqrt{2}}{2})^2+2\alpha(x^{'}*\frac{\sqrt{2}}{2}-y^{'}*\frac{\sqrt{2}}{2})(x^{'}*\frac{\sqrt{2}}{2}+y^{'}*\frac{\sqrt{2}}{2})+(x^{'}*\frac{\sqrt{2}}{2}+y^{'}*\frac{\sqrt{2}}{2})^2=1;$
после раскрытия скобок и приведения подобных:
$2(\alpha+1)x^{'2}+2(1-\alpha)y^{'2}=2$
в каноническом виде:
$\frac{x^{'2}}{\frac{1}{1+\alpha}}+\frac{y^{'2}}{\frac{1}{1-\alpha}}=1$
при $|\alpha|<1-$ эллипс, при $|\alpha|>1-$гипербола, при $|\alpha|=1$ парабола

Задача 807 (3, 15).
С помощью инвариантов определить тип линии
a) $3y^2-12x-6y+11=0,$
b) $4x^2-12xy+9y^2-20x+30y+16=0.$

Решение: 3) $3\mathrm{y}^2-12x-6y+11=0$
$a_{11}=0;a_{12}=0;a_{22}=3;a_{13}=-6;a_{23}=-3;a_{33}=11;$
$I_2=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=0$
$$\mathrm{I}_3=\begin{vmatrix}0 & 0 & -10\\ 0 & 3 & -3\\ -6 & -3 & 11\end{vmatrix}=-108$$
$\mathrm{I}_1=3$

3*$\mathrm{y}_2 + 2x\sqrt{\frac{108}{3}} = 3y^2 + 12x = 0$
$y^2 = -4x = 0 <=> y^2 = -4x$
$Answer : y^2 = -4x$
парабола
15) $4\mathrm{x}^2 - 12xy + 9y^2 - 20x + 30y + 16 = 0$
$a_{11} = 4; a_{12} = -6; a_{22} = 9; a_{13} = -10; a_{23} = 15; a_{33} = 16;$
$I_2 = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$
$\mathrm{I}_3 = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -10 \\ -6 & 9 & 15 \\ -10 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0$
$I_1 = 4 + 9 = 13$
$I_2{}^* = I_2 = \begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} + I_2 = \begin{vmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 16 \end{vmatrix} = -81 - 36 = -117$
$=> 13y^2 - \dfrac{117}{13} = 0$
$13y^2 - 9 = 0$
$Answer : y^2 = \dfrac{9}{13}$
параллельные прямые
