Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 8
Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.12.23

Задача 293.

Вычислить определитель порядка $2n$ $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a^2-b^2}{a} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2-b^2}{a} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2-b^2}{a} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} =$$
$$(\frac{a^2-b^2}{a})^n * a^n = (a^2-b^2)^n$$

Задача 296.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$(-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} A & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} A(-n)^{n-1} = (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} (1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\dots+\frac{n-1}{n})(-n)^{n-1} =$$
$$(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \frac{n+1}{2} n^{n-1}$$

Задача 297.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & n & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \frac{n+1}{2} & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot (-n)^{n-1}$$

Задача 374(b).

Вычислить определитель Δ посредством умножения на определитель δ

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Решение: $\begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -1+18-6-9 & 0-9-4+12 & 0+0-2+6 & 0+0+0+3 \\ -5-10+9+6 & 0+5+6-8 & 0+0+0-2 & 0+0+0-2 \\ -12+12+3-3 & 0-6+2+4 & 0+0+2+4 & 0+0+0+1 \\ 9+0-6-3 & 0+0-4+4 & 0+0-2+2 & 0+0+0+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 18$

Задача 391.
Доказать, что $\det\begin{pmatrix} E_m & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D - CB)$. Здесь B и C – произвольные $m \times n$- и $n \times m$-матрицы, D – квадратная матрица порядка n.

Решение: $\det\begin{pmatrix} E_m & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(E_m D - CB) = \det(E_m D - E_m CB) = \det(E_m)\det(D - CB) = \det(D - CB)$

Задача .

Решение:

Задача .

Решение:

Задача .

Решение:

Задача .

Решение:

Задача .

Решение:
