Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 19

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.12.22

Задача 535(c).
Преобразовать квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием: $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

Решение: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 28 - 39\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-7)$

$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 4 \\ \lambda = 7 \end{cases}$

$\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$ => $\mathrm{h}_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ => $|\mathrm{h}_1| = 3$

$\lambda = 4$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x_2 = x_1 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$ => $\mathrm{h}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ => $|\mathrm{h}_2| = 3$

$\lambda = 7$

$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$ => $\mathrm{h}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ => $|\mathrm{h}_3| = 3$

$f = y_1^2 + 4y_2^2 + 7y_3^2$

X=PY

P= $\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

Задача 535(d).

Преобразовать квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием: $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

Решение: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$ 10-21$\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

$\lambda = 10$

$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$=> h = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1:$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; b_1 = |h_1| = \sqrt{5}$

$b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Найдем λ

=> $(h_1, h1 + \lambda h_2) = 0$

$(b_1, \lambda b_1 + b_2) = \lambda(b_1, b_1) + (b_1, b_2) = 0 => \lambda = -\frac{(b_1,b_2)}{(b_1,b_1)} = \frac{4}{5}$

$h_2 = \frac{4}{5} + b_2 = (\frac{8}{5} - 2, -\frac{4}{5}, -1) = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -1)$

$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} & 0 \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}$

Задача 535(е).

Преобразовать квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием: $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

Решение:

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -28 - 3\lambda^2 - \lambda^3 + 24\lambda = -(\lambda-2)^2(\lambda+7)$

$\begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -7 \end{cases}$

$\lambda = -7$
$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
h= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $|h| = 3$
$\lambda = 2$
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b_1 = h_1 => |h_1| = \sqrt{5}$
$b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$(\mathrm{b}_1, b_2) \neq 0$
=>необходимо ортогонализовать
$(b_1, b_2 + \lambda b_1) = 0$
$(b_1, b_2) + \lambda(b_1, b_1) = 0$
$\lambda = -\frac{(b_1,b_2)}{(b_1,b_1)} = \frac{4}{5}$
$h_2 = b_2 + \frac{4}{5}b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $|h_2| = 3\sqrt{5}$
$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$
$X = PY$
$$P = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$