Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 17

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.05.24

Задача 1.

Выписать все вершины множества $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{RANK} = 3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq 1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \text{ не удовлетворяет}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \text{ не удовлетворяет}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 = 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 = 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 = 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \text{ не удовлетворяет}$$

$Answer$:$\mathrm{V}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Задача 2.

Выписать все возможные вершины и ребра множества $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1,3} \end{cases}$

Решение:

задача при заданных ограничениях по x решений не имеет

решил придумать новое ограничение, чтобы задача имела решение:
$0 \leq x_i \leq 2$
Вершины:

$$V_1:\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=6\\x_2=0\\x_1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=0\\x_3=2\end{cases}$$

$$V_2:\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=6\\x_2=2\\x_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=2\\x_3=1\end{cases}$$

$$V_3:\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=6\\x_1=2\\x_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=2\\x_3=0\end{cases}$$

$$V_4:\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=6\\x_1=0\\x_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=1\\x_3=2\end{cases}$$

Ребра:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=6\\x_1=0\\x_2\geq 0\\x_3\leq 2\end{cases}\Rightarrow V_2,V_4$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=6\\x_1\geq 0\\x_2\leq 0\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow \text{ не явл.}$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=6\\x_1\leq 2\\x_2\geq 0\\x_3=2\end{cases}\Rightarrow V_1,V_4$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=6\\x_2=0\\x_1\geq 0\\x_3\leq 2\end{cases}\Rightarrow \text{не явл.}$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=6\\x_2=2\\x_3\geq 0\\x_1\leq 2\end{cases}\Rightarrow V_2,V_3$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=6\\x_1=2\\x_2\geq 0\\x_3\leq 2\end{cases}\Rightarrow V_1,V_3$$

Задача 3.

Выписать все ребра $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1,\ x_i \geq 0, i = \overline{1,n}.$

Решение: ребро можно получить приведя систему к n-1 равенству Тогда:

$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \quad x_i = 0(i = \overline{1,n-1}) \quad x_n \geq 0$

$x_i \geq 0(i = \overline{1,n-1}) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_i \leq 1$ получим отрезок от 0 до 1 по OX

Задача 4.

Найти общее решение системы неравенств: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1| & 1 & 1 \\ 0| & -1 & 0 \\ 0| & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ФСР $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1, C_2$

$$M_0 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{V}_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$V_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_3 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0, x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ребра:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1, V_2 \\ V_1, V_3 \\ V_2, V_3 \end{cases}$$

Задача 5.

Найти общее решение системы неравенств: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 \leq 2 \\ x_2 - x_3 \leq 2 \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 \leq 2 \\ x_2 - x_3 \leq 2 \end{cases}$

a^1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; a^2 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; a^3 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} => \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} => , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

M: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 \leq 2 \\ x_2 - x_3 \leq 2 \end{cases}$

V$_1$: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} => \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$ – Вершина

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 \leq 0 \end{cases}$$

V_1- удовлетворяет:

b_1 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 \leq 2 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 \leq 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$ => V_1- удовлетворяет

b_2 $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X = \alpha V_1 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \gamma C_1 =>$

$$X = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$