Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 17

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.12.23

Задача 405.
Две параллельные прямые $2x - 5y + 6 = 0$ и $2x - 5y - 7 = 0$ делят плоскость на три области: полосу заключенную между этими прямыми и две области вне этой полосы. Установить каким областям принадлежат точки $A(2, 1)$, $B(3, 2)$, $C(1, 1)$, $D(2, 8)$, $E(7, 1)$, $F(-4, 6)$.

Решение:
2x-5y+6=0
2x-5y-7=0

составим нормированные уравнения $l_1 : \frac{-2x+5y-6}{\sqrt{29}} = 0$ $l_2 : \frac{2x-5y-7}{\sqrt{29}} = 0$
$\vec{n_1} = (-\frac{2}{\sqrt{29}}; \frac{5}{\sqrt{29}})$ $\vec{n_2} = (\frac{2}{\sqrt{29}}; -\frac{5}{\sqrt{29}})$
$\vec{n_1} = -\vec{n_2}$

$$\begin{cases} \delta(A, l_1) = \frac{-5}{\sqrt{29}} < 0 \\ \delta(A, l_2) = \frac{-8}{\sqrt{29}} < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \delta(B, l_1) = \frac{-2}{\sqrt{29}} < 0 \\ \delta(B, l_2) = \frac{-11}{\sqrt{29}} < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \delta(C, l_1) = \frac{-3}{\sqrt{29}} < 0 \\ \delta(C, l_2) = \frac{-10}{\sqrt{29}} < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \delta(D, l_1) = \frac{30}{\sqrt{29}} > 0 \\ \delta(D, l_2) = \frac{-43}{\sqrt{29}} < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \delta(E, l_1) = \frac{-22}{\sqrt{29}} < 0 \\ \delta(E, l_2) = \frac{2}{\sqrt{29}} > 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \delta(F, l_1) = \frac{32}{\sqrt{29}} > 0 \\ \delta(F, l_2) = \frac{-45}{\sqrt{29}} < 0 \end{cases}$$

Answer :
D,F принадлежат верхней плоскости
A,B,C принадлежат центральной плоскости
E принадлежат нижней плоскости

Задача 406.
Даны две точки $A(-3, 1)$ и $B(5, 4)$ и прямая $x - 2y + 1 = 0$. Установить, пересекает ли данная прямая отрезок AB или его продолжение за точку A или точку B.

Решение:
t: $\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$ => $\begin{cases} x = -3 + 8t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$
t=0 => A(-3, 1)
t=1 => B(5, 4)
t != [0,1] => точка пересечения за пределами

(-3+8t)-2(1+3t) = 0 => подставим x, y в ур-е прямой x-2y+1=0
-3+8t-2(1+3t)+1=0
$t = 2$
$t \notin [0, 1] t > 0$
$Answer:$ точка пересечения лежит за пределами точки B

Задача 411.
Дан треугольник ABC: $A(3, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(1, 0)$ и прямая $x - 7y + 5 = 0$. Установить, пересекает ли прямая стороны треугольника или их продолжение.

Решение: Составим параметрические уравнения

$$l_{AB} : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$
$$\mathrm{l}_{BC} : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - 4t \end{cases}$$
$$\mathrm{l}_{AC} : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

Подставим координаты x, y в уравнение прямой l_1 :

$l_{1AB} = (3 - 5t) - 7(1 + 3t) + 5 = 0$
$t = \frac{1}{26}$

$\mathrm{l}_{1BC} = (-2 + 3t) - 7(4 - 4t) + 5 = 0$
$t = \frac{25}{31}$

$l_{1AC} = (3 - 2t) - 7(1 + t) + 5 = 0$
$t = -\frac{1}{5}$

Answer: l_1 пересекает стороны BC, AB и продолжение стороны AC за точкой A

Задача 442.
Зная уравнение стороны треугольника $x + 7y - 6 = 0$ и уравнения биссектрис $x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$, выходящих из концов этой стороны, найти координаты вершины, противолежащей данной стороне.

Решение:
$\mathrm{l}_1 : x + 7y - 6 = 0$
$l_{\text{бисс.1}} : x + y - 2 = 0$
$l_{\text{бисс.2}} : x - 3y - 6 = 0$
Пусть A($\mathrm{x}_A; y_A) B(x_B; y_B;) - AB$

$Ax + By + C = 0$
$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

$x = 2 - y$
$2 - y - 3y - 6 = 0$
$-4 - 4y = 0$
=>
$l_{AC}: \alpha(x + 7y - 6) + \beta(x + y - 2) = 0$
$\lambda(x + 7y - 6) + x + y - 2 = 0$
$+\lambda 7y - \lambda 6 + x + y - 2 = x(\lambda + 1) + y(7\lambda + 1) - 2 - 6\lambda = 0$
$Q_1(2; 0) \in l_{AC}$
$d(Q_1, l_{AB}) = d(Q_1, l_{AM})$
$d(Q_1, l_{AB}) = \frac{|2+7*0-6|}{\sqrt{1^2+7^2}}$
$d(Q, lAM) = \frac{|\lambda(2+7*0-6)+2-2|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(7\lambda+1)^2}}$
$\frac{4}{\sqrt{50}} = \frac{4\lambda}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda+1+49\lambda^2+14\lambda+1}}$
$\sqrt{50}\lambda = \sqrt{50\lambda^2 + 16\lambda + 2}$
$50\lambda^2 = 50\lambda^2 + 16\lambda + 2$
$\lambda = -\frac{1}{8}$
$\frac{7}{8}x + \frac{1}{8}y - \frac{5}{4} = 0$
$l_{AC}: 7x + y - 10 = 0$

$l_{BC}: \alpha(x + 7y - 6) + \beta(x - 3y - 6) = 0$

$\lambda(x + 7y - 6) + x - 3y - 6 = 0$
$\lambda x + 7y\lambda - 6\lambda + x - 3y - 6 = 0$
$x(\lambda + 1) + y(7\lambda - 3) - 6 - 6\lambda = 0$
$Q_2(0; -2) \in l_{BC}$
$d(Q_2; l_{AB}) = d(Q_2, l_{AC})$
$d(Q_2; l_{AB}) = \frac{|0+7*(-2)-6|}{\sqrt{1^2+7^2}} = \frac{20}{\sqrt{50}}$
$d(Q_2; l_{AB}) = \frac{|\lambda(-20)|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(7\lambda-3)^2}} = \frac{20\lambda}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda+1+49\lambda^2-42\lambda+9}} = \frac{20\lambda}{\sqrt{50\lambda^2-40\lambda+10}}$
5x-5y-30=0
x-y-6=0
$\lambda\sqrt{50} = \sqrt{50\lambda^2 - 40\lambda + 10}$
$\lambda = \frac{1}{4}$
$\frac{5}{4}x - \frac{5}{4}y - \frac{30}{4}$
$5x - 5y - 30 = 0$
l_{BC}:$x - y - 6 = 0$
Найдем точку пересечения l_{BC} и l_{AC}
$$\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ 7x + y - 10 = 0 \end{cases}$$
$x = 2$, $y = -4$
$C(2; -4)$

Задача 559.
Даны две точки $A(-3, 1, 5)$ и $B(5, 4, 2)$ и плоскость $2x - 4y + z + 14 = 0$. Установить, пересекает ли данная плоскость отрезок AB, его продолжение за точкой A или за точкой B?

Решение:

Параметрическое уравнение $l_3 : \vec{AB} \in l_3$

$$\begin{cases} x = -3 + 8t \\ y = 1 + 3t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$$

Подставим в плоскость π координаты l_3

$2(-3 + 8t) - 4(1 + 3t) + (5 - 3t) + 14 = 0$

$-6 + 16t - 4 - 12t + 5 - 3t + 14 = 0$

$t = -9$

плоскость пересекает вектор AB за точкой A

Задача 608.
Составить уравнение биссекторных плоскостей двугранных углов между плоскостями $7x + y - 6 = 0$ и $3x + 5y - 4z + 1 = 0$.

Решение:

$\pi_1 : 7x + y - 6 = 0$

$\pi_2 : 3x + 5y - 4z + 1$

Возьмем точку Q на плоскости

π_3d(Q,π_1) $= d(Q, \pi_2) = \frac{|7x+y-6|}{\sqrt{7^2+1^2}} = \frac{|3x+5y-4z+1|}{\sqrt{3^2+5^2+(-4)^2}}$

1)

(7x+y-6)$\sqrt{50} = (3x + 5y - 4z + 1)\sqrt{50}$

$4x - 4y + 4z - 7 = 0$ - первое уравнение биссекторной плоскости

2)

$(7x + y - 6)\sqrt{50} = -(3x + 5y - 4z + 1)\sqrt{50}$

$10x + 6y - 4z - 5 = 0$ - второе уравнение биссекторной плоскости
