Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 12
Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.05.11

Задача 1.
Найти огибающую семейства кривых $x\cos\theta + y\sin\theta = R$ (параметр θ).

Решение:

$$\begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = R \\ (x\cos\theta + y\sin\theta = R)' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = R \\ -x\sin\theta + y\cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = R \\ y\cos\theta = x\sin\theta \end{cases}$$

$\cos\theta = \frac{x\sin\theta}{y}$

$\frac{x^2\sin\theta}{y} + y\sin\theta = R$

$\sin\theta\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right) = R$

$\begin{cases} \sin\theta = \frac{yR}{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \frac{xR}{x^2+y^2} \end{cases}$

по осн. тригонометрическому тождеству: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{xR}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{yR}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{R^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{R^2}{x^2+y^2} = 1$

огибающая

$x^2 + y^2 = R^2$

Задача 2.
Найти огибающую семейства кривых $(1 - C^2)x + 2Cy = a$ (параметр C, $a = const$).

Решение:

$$\begin{cases} (1-C^2)x + 2Cy = a \\ ((1-C^2)x + 2Cy = a)' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-C^2)x + 2Cy = a \\ -2Cx + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-C^2)x + 2Cy = a \\ 2Cx = 2y \end{cases} \Rightarrow y = Cx$$

$C = \dfrac{y}{x}$

подставим в первое уравнение:

$\left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)x + \dfrac{2y^2}{x} = a$

$x - \dfrac{y^2}{x} + \dfrac{2y^2}{x} = a$

$x + \dfrac{y^2}{x} = a$

$x^2 + y^2 = ax$

$x^2 + y^2 - ax = 0$

выделим полный квадрат:

$\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ – огибающая

Задача 3.
Рассмотрим окружность и точку A внутри неё. Проведем через точку A перпендикулярные прямые к всевозможным отрезкам, соединяющим эту точку с точками окружности. Что будет огибающей семейства перпендикулярных кривых?

Решение:
$\overrightarrow{AP} = (R\cos\theta - a, R\sin\theta)$
уравнение перпендикулярной прямой к отрезку:
$(R\cos\theta - a)(x-a) + R\sin\theta \cdot y = 0$

$$\begin{cases}(R\cos\theta - a)(x-a) + R\sin\theta y = 0\\ ((R\cos\theta - a)(x-a) + R\sin\theta y = 0)'\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(R\cos\theta - a)(x-a) + R\sin\theta y = 0\\ -R\sin\theta(x-a) + R\cos\theta y = 0\end{cases}$$

$\sin\theta = \frac{R\cos\theta\cdot y}{R(x-a)}$
$\cos\theta = \frac{a(x-a)^2}{R((x-a)^2+y^2)}$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{a(x-a)^2}{R((x-a)^2+y^2)}\right)^2 + \left(\frac{y(x-a)}{R((x-a)^2+y^2)}\right)^2 = 1$$

− получим уравнение эллипса

Задача 4.
Найти уравнение огибающей семейства прямых, на которых лежит отрезок постоянной длины a, если его концы скользят по осям прямоугольной системы координат.

Решение:
(a $\cos\theta, 0)$, $(0, a\sin\theta)$ − координаты точек концов отрезка
$\frac{x}{a\cos\theta} + \frac{y}{a\sin\theta} = 1$
$\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = a$
Для огибающей:

$$\begin{cases}\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = a\\ (\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = a)'\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = a\\ \frac{x\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{y\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = a\\ \frac{x\sin^3\theta - y\cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta} = 0\end{cases}$$

$x\sin^3\theta = y\cos^3\theta$
$y = x\tan^3\theta$

$$\frac{x}{\cos\theta} + \frac{x\tan^3\theta}{\sin\theta} = a \Rightarrow \begin{cases}x = a\cos^3\theta\\ y = a\sin^3\theta\end{cases}$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ − образующая

Задача 5.
Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на фокальных радисах-векторах данной параболы.

Решение:
Огибающей для семейства окружностей является парабола, окружности по мере увеличения своего радиуса будут касаться параболы в её начале
$y^2 = 2px$,

Задача 6.
Найти эволюту кривой, заданной в полярной системе координат $\rho = 1 + \cos\varphi$.

Решение:
переведем в декартовые координаты
$$\begin{cases} x = \cos\varphi + \cos^2\varphi \\ y = \sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} x' = -\sin\varphi + 2\cos\varphi\cdot(-\sin\varphi) = -\sin\varphi - \sin 2\varphi \\ y' = \cos\varphi + \cos 2\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = -\cos\varphi - 2\cos 2\varphi \\ y'' = -\sin\varphi - 2\sin 2\varphi \end{cases}$$
подставим в формулы эволюты:
$$\begin{cases} X = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \\ Y = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \end{cases}$$
$$X = \cos\varphi + \cos^2\varphi - \frac{2(\cos\varphi+\cos 2\varphi)(1+\cos\varphi)}{(-\sin\varphi-\sin 2\varphi)(-\sin\varphi-2\sin 2\varphi)-(\cos\varphi+\cos 2\varphi)(-\cos\varphi-2\cos 2\varphi)} = \cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2}$$
$$Y = \sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi + \frac{2(-\sin\varphi-\sin 2\varphi)(1+\cos\varphi)}{(-\sin\varphi-\sin 2\varphi)(-\sin\varphi-2\sin 2\varphi)-(\cos\varphi+\cos 2\varphi)(-\cos\varphi-2\cos 2\varphi)} = \sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

Задача 7.
Найти эволюту циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

Решение:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$
найдем производные
$$\begin{cases} x' = 1 - \cos t \\ y' = \sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = \sin t \\ y'' = \cos t \end{cases}$$
подставим в формулы эволюты
$$\begin{cases} X = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \\ Y = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \end{cases}$$
$$X = t - \sin t - \frac{\sin t\cdot 2(1-\cos t)}{\cos t - 1} = t + \sin t$$
$$Y = 1 - \cos t + \frac{(1-\cos t)\cdot 2(1-\cos t)}{\cos t - 1} = -1 + \cos t$$

Задача 8.
Найти эволюту кардиоиды $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

Решение:
$$\begin{cases} \text{x} = \text{2a}\ \cos t - a\cos 2t \\ \text{y}= \text{2asin}\, t - a\sin 2t \end{cases}$$

найдем производные
$$\begin{cases} x' = -2a\sin t + 2a\sin 2t \\ y' = 2a\cos t - 2a\cos 2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = -2a\cos t + 4a\cos 2t \\ y'' = -2a\sin t + 4a\sin 2t \end{cases}$$
$$\begin{cases} X = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \\ Y = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \end{cases}$$

$\mathrm{X} = 2\mathrm{a}\ \cos t - a\cos 2t - \frac{(2a\cos t - 2a\cos 2t)\left((-2a\sin t+2a\sin 2t)^2+(2a\cos t-2a\cos 2t)^2\right)}{(-2a\sin t+2a\sin 2t)(-2a\sin t+4a\sin 2t)-(-2a\cos t+4a\cos 2t)(2a\cos t-2a\cos 2t)} = 2a\cos t - a$

$Y = (2a\sin t - a\sin 2t) + \frac{(-2a\sin t+2a\sin 2t)\left((-2a\sin t+2a\sin 2t)^2+(2a\cos t-2a\cos 2t)^2\right)}{(-2a\sin t+2a\sin 2t)(-2a\sin t+4a\sin 2t)-(-2a\cos t+4a\cos 2t)(2a\cos t-2a\cos 2t)} = 2a\sin t$

Задача 9.
Определить неявное уравнение эволюты гиперболы $y = \frac{1}{x}$.

Решение:
параметризуем по t

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$$

найдем производные

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = -\frac{1}{t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = \frac{2}{t^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \\ Y = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = t - \dfrac{\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\left(1+\left(\dfrac{1}{t^2}\right)^2\right)}{\dfrac{2}{t^3}} = \dfrac{3t}{2} + \dfrac{1}{2t^3} \\ Y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1+\dfrac{1}{t^4}}{\dfrac{2}{t^3}} = \dfrac{3}{2t} + \dfrac{t^3}{2} \end{cases}$$

тогда неявное уравнение:
$27\mathrm{X}^3Y^3 - 81X^2Y^2 + 81XY - 32 = 0$
