Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 2

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.03.12

Задача 750.
Написать уравнение равносторонней гиперболы, одна из вершин которой находится в точке $(2, 2)$, действительная ось параллельна оси Oy при условии, что на оси Ox гипербола высекает хорду длины 8.

Решение:
каноническое уравнение относительно (0;0)
$y^2 - x^2 = a^2$
уравнение гиперболы $(y - y_0)^2 - (x - 2)^2 = a^2$
т.пересечения с 0x: $C_1(-2, 0)$ $C_1(6, 0)(0 - y_0)^2 - (x - 2)^2 = a^2 \Rightarrow y_0^2 - a^2 = (x - 2)^2$
т. пересечения на 0x: $x=x_0 + -\sqrt{y_0^2 - a^2}$
l хорды: $2\sqrt{y_0^2 - a^2}$
т.обр: $2\sqrt{y_0^2 - a^2} = 8 => y_0^2 - a^2 = 16$
$2\sqrt{y_0^2 - a^2} = 8 \Rightarrow y_0^2 - a^2 = 16$
$$\begin{cases} (y - y_0)^2 - (x - 2)^2 = a^2 \\ y_0^2 - \frac{16}{a^2} = 1 \end{cases}$$
подставим (2;2) =>
$$\begin{cases} (2 - y_0)^2 = a^2 \\ y_0^2 - 16 = a^2 \end{cases} => \begin{cases} 4y - 4y_0 y_0^2 = a^2 \\ y_0^2 - 16 = a^2 \end{cases} => \begin{cases} y_0^2 - 16 = y_0^2 - 4y_0 + 4 \\ y_0^2 = 5 \end{cases}$$
$a^2 = 25 - 16 = 9 => a = 3$

$\frac{(y-5)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$

Задача 752.
Написать уравнение параболы, осью которого служит прямая $x + y + 1 = 0$ и которая проходит через точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$.

Решение:
$y^2 = 2px;$
ось:$x + y + 1 = 0$

$$x + y + 1 = 0 => y = -x - 1 => k = -1 => \operatorname{tg} \phi = -1; \phi = \frac{\pi}{4}$$
$$\begin{cases} x = x' \cos \phi - y' \sin \phi \\ y = x' \sin \phi + y' \cos \phi \end{cases} => \begin{cases} x = x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
получим уравнение в новой Oxy

$x + y + 1 = 0$
$$x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2} + x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 0$$
$$x'_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Параллельный перенос для x

$x^{''} = x^{'} - x_0^{'} = x^{'} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

подставим точку (0,1) и найдем новые x и y после поворота:

$$\begin{cases} 0 = x^{'}\frac{\sqrt{2}}{2} - y^{'}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 = x^{'}\frac{\sqrt{2}}{2} + y^{'}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} => \begin{cases} x^{'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y^{'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Проведем параллельный перенос:

Для (0,0): $y^{''} = 0 : x^{''} = x^{'} + \frac{\sqrt{2}}{2} : (\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$

Для (0,1): $x^{''} = x^{'} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} : (\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2})$

подставим т. с новыми координатами в уравнение параболы: $y^{'} = ax^{''2} + m$

$$\begin{cases} 0 = a * \frac{2}{4} + m \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = a * (\sqrt{2})^2 + m \end{cases} => \begin{cases} m = \frac{-a}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 2a - \frac{a}{2} \end{cases} => \begin{cases} m = \frac{-a}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ a = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

подставим в уравнение параболы:

$$y^{'} = \frac{\sqrt{2}}{3}x^{''2} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{y'} = \frac{\sqrt{2}}{3}(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\begin{cases} x = x^{'}\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$x + y = x'\sqrt{2}$

$x' = \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{2}}$

$y - x = y'\sqrt{2}$

$y' = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$

Подставим в уравнение параболы:

$y' = \frac{\sqrt{2}}{3}(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{6}$

$\frac{y-x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{6}$

Answer: $x^2 + 2xy + y^2 + 5x - y = 0$

Задача 771.
Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами есть среднее арифметическое длин осей.

Решение:

$\xi = \frac{c}{a}$

c $= \sqrt{a^2 - b^2}$

2c $= \frac{2a + 2b}{2} = a + b$

2c = a+b;

a = 2c - b;   b = -a + 2c
(2c - b)$^2 = c^2 + b^2$
4c$^2 - 4cb + b^2 = c^2 + b^2$
3c$^2 - 4cb = 0$
c(3c-4b) = 0 $\Rightarrow c = 0 || 3c - 4b = 0$
$3c - 4(-a + 2c) = 0$
   3c + 4a - 8c = 0
4a - 5c = 0
$\xi = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$
$Answer : \dfrac{4}{5}$

Задача 776.
Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = a^2$. Написать уравнение эллипса, имеющего с этой гиперболой общие фокальные хорды.

Решение:
уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$
Эксцентриситет эллипса: c$^2 = a^2 - b^2$.
Фокусы эллипса: F$_1(a\sqrt{2}, 0)$, $F_2(-a\sqrt{2}, 0)$
L фокальной хорды по уравнению эллипса: $\dfrac{c_e^2}{a_e^2} - \dfrac{y_e^2}{b_e^2} = 1 => y = \pm\sqrt{b_e^2(1 - \dfrac{c_e^2}{a_e^2})} = \pm\dfrac{b^2}{a}; 2\dfrac{b_e^2}{a_e^2}$
L по уравнению гиперболы: L$_g = 2a_g$
$L_g = 2a_g$
$\Rightarrow 2\frac{b_e^2}{a_e} = 2a_g \Rightarrow b_e^2 = a_e * a_g$
Тогда:
$2a_g - a_e^2 + a_e * a_g = 0.$
$D = a_g^2 + 8a_g^2 = 9a_g^2;$
$a_g > 0 \Rightarrow \frac{a_g + 3a_g}{2} = 2a_g$
отсюда: $b_e = a_g\sqrt{2}$

$Answer : \dfrac{x^2}{4a_g^2} + \dfrac{y^2}{2a_g^2} = 1$

Задача 798.
Составить каноническое уравнение гиперболы, если дано ее уравнение в полярных координатах $\rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$.

Решение:
$\rho = \dfrac{9}{4 - 5\cos\phi} <=> \dfrac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{5}{4}\cos\phi}$
$\xi = \dfrac{5}{4} => c = 5; a = 4;$
$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$
$Answer : \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1;$

Задача 799.
Составить уравнение параболы $y^2 = 8x$ в полярных координатах.

Решение:
$\mathrm{y}^2 = 8x$
$y^2 = 2px \Rightarrow p = 4$
$\rho = \dfrac{p}{1 - \xi\cos\phi}; \xi = 1$парабола
$\rho = \dfrac{4}{1 - \cos\phi}$