Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 11

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.12.24

Задача 1032(j).

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

Решение: $\det(\text{A-}\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & -6 \\ 4 & 6-\lambda & -9 \\ 3 & 6 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 = -(\lambda - 1) * (\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, \\ \lambda_3 = \frac{-i\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 4 & 5 & -9 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -9 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =>$$

$-x_1 + x_3 = -x_3 + x_2 = -x_1 + x_2 = 0 =>$

$x_1 = x_2 \; x_1 = x_3 => \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{5-i\sqrt{3}}{2} & 5 & -6 \\ 4 & \frac{13-i\sqrt{3}}{2} & -9 \\ 3 & 6 & \frac{-15-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{5i\sqrt{3}+25}{14} & \frac{-3i\sqrt{3}-15}{7} \\ 0 & \frac{-27i\sqrt{3}-9}{14} & \frac{12i\sqrt{3}-3}{7} \\ 3 & 6 & \frac{-15-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{5i\sqrt{3}+25}{14} & \frac{-3i\sqrt{3}-15}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-i\sqrt{3}-5}{6} \\ 0 & \frac{-15i\sqrt{3}+9}{14} & \frac{11i\sqrt{3}-15}{14} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i\sqrt{3}-5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{-i\sqrt{3}-5}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =>$$

$x_1 + \frac{i\sqrt{3}-5}{6}x_3 = x_2 - \frac{i\sqrt{3}+5}{6}x_3 = 0 => \gamma \begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{3}+5}{6} \\ \frac{i\sqrt{3}+5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = \frac{-i\sqrt{3}-1}{2}$ является обратным к $\lambda_2 = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$

$\gamma \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}+5}{6} \\ \frac{-i\sqrt{3}+5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$

Задача 1032(h).

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Решение:

$\det(\text{A-}\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 3 \\ -1 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \text{-}\lambda^3 - 14\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 14)$

$$\begin{cases} 0, \\ i\sqrt{14}, \\ -i\sqrt{14} \end{cases}$$

$\lambda = i\sqrt{14}:$

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{14} & 2 & 1 \\ -2 & -i\sqrt{14} & 3 \\ -1 & -3 & -i\sqrt{14} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2+3i\sqrt{14} & -13 \\ 0 & 6-i\sqrt{14} & 3+2i\sqrt{14} \\ -1 & -3 & -i\sqrt{14} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2+3i\sqrt{14} & -13 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -i\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

$$=> \begin{cases} (2+3i\sqrt{14})x_2 - 13x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - i\sqrt{14} = 0 \end{cases} => \begin{matrix} x_3 = \frac{2+3i\sqrt{14}}{13}x_2 \\ x_1 = \frac{3-2i\sqrt{14}}{13}x_2 \end{matrix} => \gamma \begin{pmatrix} 3-2i\sqrt{14} \\ 13 \\ 2+3i\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

$\lambda = -i\sqrt{14}:$

$$\begin{pmatrix} i\sqrt{14} & 2 & 1 \\ -2 & i\sqrt{14} & 3 \\ -1 & -3 & i\sqrt{14} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2-3i\sqrt{14} & -13 \\ 0 & 6+i\sqrt{14} & 3-2i\sqrt{14} \\ -1 & -3 & i\sqrt{14} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2-3i\sqrt{14} & -13 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & i\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

$$=> \begin{cases} (2-3i\sqrt{14})x_2 - 13x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + i\sqrt{14} = 0 \end{cases} \begin{matrix} x_3 = \frac{2-3i\sqrt{14}}{13}x_2 \\ x_1 = \frac{3+2i\sqrt{14}}{13}x_2 \end{matrix} => \gamma \begin{pmatrix} 3+2i\sqrt{14} \\ 13 \\ 2-i\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0:$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=> \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} => \gamma \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Задача . $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\det(\text{A-}\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$=> \gamma_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & -1 \end{array}\right) => \gamma_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Задача 1033.b.
Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

Задача 1034.
Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

Задача 1035.
Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:
