Курганов Владислав Андреевич
st132903
st132903@student.spbu.ru

Homework Assignment 15

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2025.05.25

Задача 1.

В R^4 заданы гиперплоскость $5x_1+7x_2+9x_3+2x_4 = 20$ и прямая $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$

Определить их взаимное расположение.

Решение:

$$\mathrm{A}_1|A_2 : \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 2 & | & 20 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & | & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & -3 & | & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{3}{2} & | & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{3}{2} & | & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang}(\mathrm{A}_1|A_2) = 3$

$rang(A_1) = 3$

$\Rightarrow$ Плоскость параллельна прямой.

Задача 2.

Дана прямая $\begin{cases} x_1 = 1 + 2\tau, \\ x_2 = 2 + 3\tau, \\ x_3 = 3 + 4\tau, \\ x_4 = 4 + 5\tau, \end{cases}$ и плоскость $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

Показать, что прямая и плоскость не пересекаются, и написать уравнения параллельных гиперплоскостей, проходящих через данную прямую и данную плоскость.

Решение: $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(a_1, a_2, b) = \mathrm{rank}(a_1, a_2, b, \overrightarrow{AB}) = 3$

плоскости параллельны

Гиперплоскоть, проходящая через прямую:

A(1,2,3,4)

$\mathrm{q}_1 = \{2, 3, 4, 5\}$

$X_1 = A + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in (-\infty, +\infty)$

Гиперплоскоть, проходящая через плоскость:

$B(0, 0, 1, 0)$

$m_1 = \{1, 1, 0, 0\}$

$m_2 = \{0, 0, 1, 1\}$

$X_2 = B + \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in (-\infty, +\infty)$

$m_1 = \{2,3,4,5\}$
$m_2 = \{1,1,0,0\}$
$m_3 = \{0,0,1,1\}$
Answer:
$A(1,2,3,4)$
$B(0,0,1,0)$
$q_1 = \{2,3,4,5\}$
$q_2 = \{1,1,0,0\}$
$q_3 = \{0,0,1,1\}$
$X_1 = A + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3 X_2 = B + \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in (-\infty, +\infty)$

Задача 3.

Установить взаимное расположение плоскостей π_1, $\pi_2 \in R^5$ и написать уравнение плоскости, проходящей через обе указанные плоскости, если π_1 проходит через точку $B(0,-1,-1,-2,0)$ в направлении подпространства с базисом

$\mathbf{b}_1 = (1,1,1,0,0)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1,1,1,0)$, а $\pi_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 4. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$A(0,1,1,0,0)$
$a_1 = (1,-1,0,-2,0)$
$a_2 = (2,1,-4,0,-3)$
AB = {0,2,2,2,0}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} RANK(A) = RANK(A|B) -$$

пересекаются
A $\in \pi_1, \pi_2$
C = A = (0,1,1,0,0)
q$_1 = \{1,1,1,0,0\}$
$q_2 = \{0,1,1,1,0\}$
$q_3 = \{1,-1,0,-2,0\}$
$q_4 = \{2,1,-4,0,-3\}$
$X = C + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3 + \lambda_4 q_4$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in (-\infty, +\infty)$

Задача 4.

Через прямую $\pi_1 : \begin{cases} x_1 = 1 + \tau, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1 + 2\tau, \\ x_4 = -\tau \end{cases}$ провести плоскость минимальной размерности параллельную плоскости $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

Решение: $\pi_1 :$
$(\cdot)B(1, 2, -1, 0)$
$b_1 = (1, 0, 2, -1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\pi_2 :$
$(\cdot)A(1, -1, 0, 0)$
$a_1 = (1, 1, -1, 0)$
$a_2 = (1, -1, 0, -1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \text{-ЛНЗ векторы}$$

Answer:
$(\cdot)C(1, 2, -1, 0)$
$c_1 = (1, 1, -1, 0)$
$c_2 = (1, -1, 0, -1)$
$c_3 = (1, 0, 2, -1)$
