TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

5. Übungsblatt für die Woche 06.05. - 12.05.2019

Differenzierbarkeit von Funktionen, Monotonie, Extrema

Ü25 Verwenden Sie den Zwischenwertsatz um zu zeigen, dass die Funktion $f(x) = e^x + x$ eine Nullstelle besitzt.

Ü26 (a) Beweisen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x - 5$, an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist. Geben Sie die Ableitung von f für alle $x \in \mathbb{R}$ an.

(b) Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ haben die Funktionen f und g mit $f(x) = \ln(x+1)$ und $g(x) = x$ an der Stelle x die gleichen Tangenten?
Zeigen Sie, dass $f(x) < g(x)$ für alle $x > 0$ gilt. Nutzen Sie dafür die Ableitung der Funktion $h(x) = g(x) - f(x)$.

(c) Es werden die Funktionen f und g mit $f(x) = x^2 + 4x$ und $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$ betrachtet.
Skizzieren Sie die Funktionskurven, und finden Sie alle diejenigen Werte $x \in \mathbb{R}$, so dass die Tangenten an die Funktionskurven von f bzw. g an der Stelle x parallel sind.

Ü27 (a) Bestimmen Sie für die reellen Funktionen f, definiert durch

$$\text{(i)}\quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}, \qquad \text{(ii)}\quad f(x) = x \cdot (\ln x)^2 \qquad \text{(iii)}\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{5-x}}$$

jeweils

- die Ableitung f', den Definitionsbereich von f' und die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 1$,
- alle größtmöglichen Intervalle, in denen die Funktion streng monoton ist und
- alle Extrema (Minima und Maxima) der Funktion.

(b) Verwenden Sie die Ableitungen des Sinus und Cosinus, um die Ableitung von $\cot(x)$ zu berechnen.

(c) Verwenden Sie die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion, um die Ableitung von $\operatorname{arccot}(x)$ zu berechnen.

(d) Stellen Sie eine Formel für die n-te Ableitung der Funktion $f(x) = 2^x \cdot e^{2x}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ auf und beweisen Sie deren Gültigkeit mit vollständiger Induktion.

H28 $\boxed{\textbf{A}}$ Betrachtet wird die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(a) Zeigen Sie, dass für die Ableitungsfunktion von f die Formel

$$f'(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

gilt. (Zeigen Sie dabei, welche Ableitungsregeln Sie nutzen, und geben Sie Zwischenschritte nachvollziehbar an!)

(b) Bestimmen Sie alle größtmöglichen Intervalle, in denen die Funktion streng monoton wächst bzw. fällt und alle Extrema (Minima und Maxima) der Funktion f. ('Bestimmen' heißt, dass Begründungen erwartet werden!)

H29 Verwenden Sie den Zwischenwertsatz um zu zeigen, dass die Funktionsgraphen der Funktionen $f(x) = e^x - x$ und $g(x) = 2 - x^2$ genau zwei Schnittpunkte haben.

H30 (a) Wo sind folgende Funktionen differenzierbar, und wie lautet jeweils ihre Ableitung:

(i) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x-2}\right)$, (ii) $f(x) = \arcsin\big((x-1)(x+1)^{-1}\big)$,

(iii) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + \sin x \cdot \sqrt{1-x^2}$.

(b) Berechnen Sie die n-te Ableitung (für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) für die Funktion $g(x) = \ln(x+1)$.

(c) Aus einem Draht der Länge l sollen ein Kreis und ein Quadrat so geformt werden (ohne dass ein Stück des Drahtes übrigbleibt), dass die Summe der Flächeninhalte möglichst groß bzw. möglichst klein wird. Berechnen Sie die Flächeninhalte des Kreises und des Quadrates.

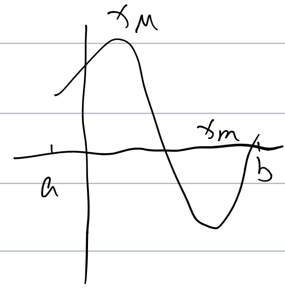
Zwischenwertsatz (ZWS)

ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig,

x_m ... Minimalstelle in $[a,b]$

x_M .. Maxi - - - - - .

$\forall y \in [f(x_m), f(x_M)] \quad \exists x \in [a,b] \quad f(x)=y$



Nullstellensatz: $f(a)f(b)<0$

$\Rightarrow \exists x \in (a,b) \quad f(x)=0$

Ü25

$f(x)=e^x+x$ $\quad$ f ist auf $\mathbb{R}$ stetig

Nullstelle $\quad e^x+x=0$ nicht nach x auflösbar

$$\left.\begin{array}{l} \text{z.B. } f(-1)=e^{-1}-1<0 \\ f(1)=e+1>0 \end{array}\right\} \overset{ZWS}{\Rightarrow} \exists x \in (-1,1) \quad f(x)=0$$

$f(x)$ ist smw $\Rightarrow$ genau eine Nullstellen.

Numerische Berechnung: ◦ Bisektion

◦ Newton-Verfahren

Ü26

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2+x-5$ $\quad (f'(x_0)=2x_0+1)$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} \frac{x^2+x-5-x_0^2-x_0+5}{x-x_0}$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} \frac{(x+x_0)(x-x_0)+(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} x+x_0 + \lim_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} 1$$

$$= 2x_0 + 1$$

Ableitungsregeln

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

b) $T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Tangentengleichungen: bei $x_0 > -1$

$$T_f(x) = \frac{1}{x_0+1}(x - x_0) + \ln(x_0+1)$$

$$T_g(x) = (x - x_0) + x_0 \qquad T_f(x) = T_g(x) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_0+1}(x - x_0) + \ln(x_0+1) = x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{x_0+1} - 1\right) \cdot x}_{=0} \underbrace{- \frac{x_0}{x_0+1} + \ln(x_0+1)}_{=0} = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x_0+1} - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \\ -\frac{x_0}{x_0+1} + \ln(x_0+1) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \end{cases}$$

Ü27

a) (i) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}$, $D(f) = \mathbb{R}$ (Nenner hat keine reellen Nullstellen -pq-Formel!)

$$f'(x) = \frac{0 - (2x - 6)}{(x^2 - 6x + 10)^2} = \frac{6 - 2x}{(x^2 - 6x + 10)^2}$$

Extrema:

$f'(1) = \frac{0-2}{(1-6+10)^2} = \frac{4}{25}$

$g(x) = x^2 - 6x + 10 > 0$ auf $\mathbb{R}$

$\Rightarrow g^2(x) > 0$ auf $\mathbb{R}$

$D(f') = \mathbb{R}$

- notwendig $f'(x) = 0$
- 1 weg

$f''(x) < 0$ Max

$f''(x) > 0$ Min

2 weg

f' genauer betrachten

$T_f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$\Rightarrow T_{f(1)} = \frac{4}{25}(x-1) + \frac{1}{5} = \frac{4}{25}x + \frac{1}{25}$

Extrema: $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

Tangentengleichung bei $x=1$

$T(x) = \frac{4}{25}x + \frac{1}{25}$

2 weg: f' stetig auf $\mathbb{R}$, nur eine Nullstelle

$f'(2) = -\frac{4-6}{N} > 0 \qquad f'(4) = -\frac{8-6}{N} < 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ für alle $x < 3 \Rightarrow f$ ist smw in $(-\infty, 3)$

$f'(x) < 0$ für $x > 3 \Rightarrow f$ ist smf in $(3, \infty)$

$\Rightarrow x = 3$ ist Maximum.

1 weg: $f''(x) = -\frac{2 \cdot N(x) - (2x-6)N'(x)}{N(x)^2}$

$\Rightarrow f''(3) = -\frac{2N(3)}{N(3)^2} < 0 \Rightarrow$ Max.

ii) $f(x) = x(\ln(x))^2$ $\quad g(x) = (\ln x)^2 = \ln x \cdot \ln x$

$$f'(x) = (x)' g(x) + x \cdot g'(x) = g(x) + x g'(x)$$

$$g'(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

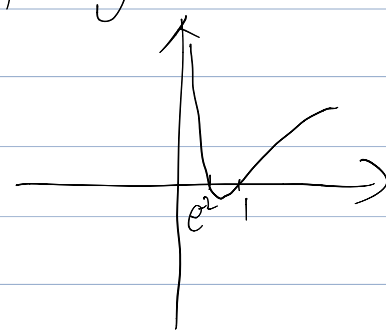
$$\Rightarrow f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$$

$$D(f'(x)) = \mathbb{R}_+$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow (\ln x)^2 + 2\ln x = 0 \Rightarrow x = 1, \ x = e^{-2}$$

$$T(x) = f'(1)(x-1) + f(1) = 0$$

Skizze $g'(x)$



$$g''(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2\ln x + 2}{x}$$

$$g''(e^{-2}) = \frac{-2}{e^{-2}} < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$g''(1) = \frac{2}{1} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$g(x)$ ist auf $(0, e^{-2})$, $(1, +\infty)$ smw
auf $(e^{-2}, 1)$ smf.

b) $f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$$

c) $\operatorname{arccot}(\cot(x)) = x$

$\operatorname{arccot}'(y) \cdot \cot'(x) = 1$

$$\operatorname{arccot}'(y) = \frac{1}{\cot'(x)} = \frac{1}{-1-\cot^2(x)} = \frac{1}{-1-y^2} = -\frac{1}{1+y^2}$$

27 a iii) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5-x}}$ $\quad f'(x) = \frac{\sqrt{5-x} + \frac{x}{2\sqrt{5-x}}}{5-x}$

$$= \frac{\frac{2(5-x)+x}{2\sqrt{5-x}}}{5-x}$$

$$= \frac{\frac{10-x}{2\sqrt{5-x}}}{5-x}$$

$D(f') = (-\infty, 5)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 10 - x = 0 \Rightarrow x = 10$

Weil $x \in (-\infty, 5) \Rightarrow f'(x) = 0$ ex. nicht

$\Rightarrow \forall x \in (-\infty, 5)$, $f'(x) > 0$

$\Rightarrow f(x)$ ist auf $(-\infty, 5)$ smW

Keine Minimala und Max.

$T(x) = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= \frac{9}{16}x - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}x - \frac{1}{16}$