TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

10. Übungsblatt für die Woche 10.12. - 16.12.2018

lineare Abbildung

Vorbereitungsaufgabe:

- Definieren Sie den Begriff der linearen Abbildung $f : V \to W$ für K-Vektorräume V und W.
- Für $v, w \in \mathbb{R}^2$ gibt $S = \{v + t(w - v) \mid t \in [0, 1]\}$ die Menge aller derjenigen Punkte der euklidischen Ebene an, die auf der Strecke zwischen v und w liegen. Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Strecke S auf die Strecke zwischen den Bildpunkten $f(v)$ und $f(w)$ abbildet.

Ü55 (a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear:

$$\begin{aligned}
&f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} && \text{mit} \quad f_1(x) = 3x - 2,\\
&f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 && \text{mit} \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ x_1 - x_3,\ 5x_2,\ -2x_1 + x_2 - 4x_3),\\
&f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 && \text{mit} \quad f_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2).
\end{aligned}$$

(Die Elemente aus $\mathbb{R}^n$ werden hier in Zeilen geschrieben.)

Ü56 (a) Es seien V und W K-Vektorräume, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Die Bilder der Basisvektoren seien $w_i := f(b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
Zeigen sie:

- f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ist linear unabhängig.
- f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Span}(\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}) = W$.
- f ist bijektiv $\Longleftrightarrow$ $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ist eine Basis von W.

(b) Betrachtet wird die lineare Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y - z \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie die Aussagen aus (a), um f auf Injektivität und Surjektivität zu untersuchen.

Ü57 (a) Es wird die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2,\ -3x_1 + 3x_2)$$

betrachtet.
Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.
Ermitteln Sie Bild und Kern von f, und skizzieren Sie beide Mengen.
Zeichnen Sie das Bild des Einheitsquadrates unter der Abbildung f.

(b) Stellen Sie eine Matrix A so auf, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ das Einheitsquadrat um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn dreht.

(c) Zeichnen Sie für jede der Abbildungen $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto A_k x$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ mit den reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das Bild des Einheitsquadrates. Was ist die Wirkung dieser Abbildungen?
Wie hängt der Flächeninhalt des Bildes mit der Determinante von A_k zusammen?

$f: V \to W$

$\forall v_1, v_2 \in V, \forall k \in K$

(1) $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$ Daraus folgt u.a $f(0)=0$

(2) $f(kv_1) = k f(v_1)$

55) · f_1 ist nicht linear denn $f(0) \neq 0$

· f_2 ist linear. denn $f_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&-1\\0&5&0\\-2&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

f_2 ist linear, da f für alle $f: K^n \to K^m$ der Form $f(x) = Ax$ linear ist

· f_3 $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$f(v_1+v_2) \cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$f(v_1)+f(v_2) = \begin{pmatrix}1+0\\1\cdot 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0+1\\0\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$\Big\}$ $f(v_1+v_2) \neq f(v_1)+f(v_2) \Rightarrow f_3$ nicht linear

injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

surjektiv: $\forall y \quad \exists x \Rightarrow y = f(x)$

56) (i) f inj. $\Leftrightarrow \{w_1 \dots w_n\}$ l.u

(ii) f sur $\Leftrightarrow \mathrm{Span}\{w_1 \dots w_n\} = W$

(iii) f bij $\Leftrightarrow \{w_1 \dots w_n\}$ Basis von W

(i) „$\Rightarrow$"

Sei f injektiv

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_n$ so gegeben, dass $\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = 0$

f linear

$f(0) = 0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right)$

f injektiv $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$

$\{b_1 \dots b_n\}$ l.u. $\Rightarrow \lambda_i = 0 \Rightarrow w_i$ l.u.

„$\Leftarrow$" Seien $\{w_1 \dots w_n\}$ l.u.

Seien $u, v \in V$ mit $f(u) = f(v)$ gegeben

$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \quad v = \sum_{i=1}^n \mu_i b_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i \Rightarrow \lambda_i - \mu_i = 0 \Rightarrow u = v \Rightarrow f$ injektiv

(ii) „$\Rightarrow$" Sei f surjektiv

Angenommen $\mathrm{Span}(\{w_1 \dots w_n\}) \subsetneq W$ Dann ex. ein $w \in W \setminus \mathrm{Span}\{w_1 \dots w_n\}$

f surjektiv $\exists v \in V$ mit $f(v) = w$.

Es gibt $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ mit Linearität.

$w = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \in \mathrm{Span}(\{w_1 \dots w_n\})$ Widerspruch!

$\Rightarrow \mathrm{Span}(\{w_1 \dots w_n\}) = W$

„$\Leftarrow$" sei $w \in \mathrm{Span}\{w_1 \dots w_n\}$ beliebig.

Dann ist $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i) \overset{f \text{ lin}}{=\!=} f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = f(v)$

mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \Rightarrow f$ surjektiv

iii) folgt aus (i) und (ii)

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x+y+z\\x-y-z\end{pmatrix}$

$f(x) = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix} \to \dots$

$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \; b_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\{w_1, w_2, w_3\}$ l.a. $\Rightarrow f$ ist nicht injektiv

f ist surjektiv, da w_1 und w_2 ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$ ist

57) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

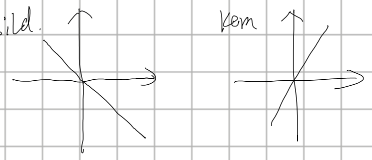
$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\-3x_1+3x_2\end{pmatrix}$

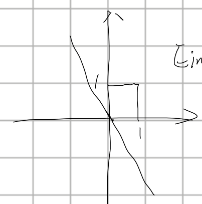
$A = \begin{pmatrix}1&-1\\-3&3\end{pmatrix} = \big(f(e_1)\, f(e_2)\big)$ mit $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}(A) = 1$, $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right\}$

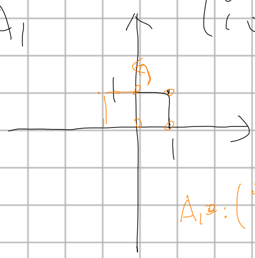
$\mathrm{Ker}(A)$ $\begin{pmatrix}1&-1\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$



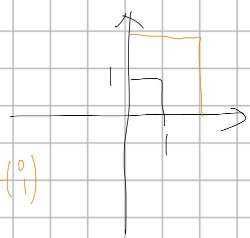


A_1 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

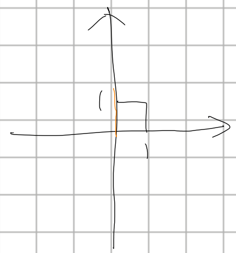


$A_1 e_1: \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

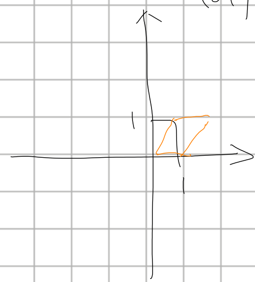
A_2 $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$



A_3 $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$



H58 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

vollständig festgelegt. Begründen Sie, warum.
Ermitteln Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.
Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Begründen Sie, dass aus

$$g(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

folgt, dass g keine lineare Abbildung ist.

(b) Es ist folgende lineare Abbildung gegeben:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ -x + 2y + z \\ x + 3y + 2z \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob f injektiv und ob f surjektiv ist. Begründen Sie beide Antworten.
Bestimmen Sie eine Basis des Bildes $\mathrm{Im}(f)$.

H59 Es sei V der Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad kleiner 4 und $f : V \to V$ durch

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = 3b - d + (2a - c)x + (a + b + c + d)x^3$$

definiert. Zeigen Sie, dass f linear ist. Untersuchen Sie, ob f injektiv ist und ob f surjektiv ist.

H60 Betrachtet wird die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_2 + 10x_3,\ -x_1 - 2x_3,\ 3x_1 - x_2 + 3x_3).$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasen.
(b) Stellen Sie das Bild $\mathrm{Im}(f)$ als Spannraum mit einem minimalen Erzeugendensystem dar.
(c) Bestimmen Sie den Kern von f.
(d) Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Begründen Sie!
(e) Bestimmen Sie für den Untervektorraum

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2t + s \\ 3t \\ -t - s \end{pmatrix} \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

seine Bildmenge $f(U)$. Ist $f(U)$ wieder ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?