TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann**

# Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
# Sommersemester 2019

3. Übungsblatt für die Woche 22.04. - 28.04.2019

*Reihen, Partialsumme, Konvergenzkriterien*

Ü13 (a) Die rekursiv definierte Zahlenfolge

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}),\ x_0 = c, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

mit reellem Parameter $c > 0$ ist konvergent. Berechnen Sie den Grenzwert.

(b) Es wird die rekursiv definierte Zahlenfolge

$$x_{n+1} := \frac{1}{3}(x_n + 1),\ x_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

betrachtet.

- Die Folge ist durch $x_n < \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt und wächst streng monoton. Berechnen Sie den Grenzwert.
- Ermitteln Sie eine explizite Darstellung $x_n = f(n), n \in \mathbb{N}$.

Ü14 Welche der angegebenen Reihen sind konvergent? Verwenden Sie das Nullfolgenkriterium (Hauptkriterium), bekannte Werte von Reihen oder geeignete Rechenregeln.

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2+3^{k+1}}{5^k}$, (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}+7(-5)^n}{9^n}$, (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{10^{\frac{n}{2}}+1}{3^n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n - 1\right)$, (e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{k^2} + \frac{\pi\sqrt{42}}{2^k}\right)$.

Ü15 (a) Verwenden Sie geeignete Konvergenzkriterien, um die folgenden Reihen auf Konvergenz zu untersuchen. Bei welchen dieser Reihen können Sie sogar auf absolute Konvergenz schließen?

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k \cdot 4^k}$, (2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{7(k-1)!}$, (3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2\sqrt{k}-1}$ ,

(4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)^2}{2^k}$, (5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(2 - \ln(e^2 - \frac{1}{k^2})\right)$, (6) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}$.

(b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ auf Konvergenz.

Überlegen Sie sich, ob Ihr Ergebnis allgemein auf Reihen der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ für ein festes $x \in \mathbb{R}$ zutrifft. Sind zusätzliche Forderungen an $x$ nötig? Wenn ja, wie müssten solche Forderungen vermutlich aussehen? Begründen Sie Ihren Vorschlag!

H16 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 7^{k+1} - 2^{k-2}}{8^k}$, indem Sie die Reihe auf geometrische Reihen zurückführen.

(b) Nutzen Sie geeignete Konvergenzkriterien, um die folgenden zwei Reihen auf Konvergenz zu untersuchen:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2}\left(4 - \frac{3}{k}\right)^{-k}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$.

---

H17 (a) Untersuchen Sie anhand des Nullfolgenkriteriums (Hauptkriteriums) für die zwei Reihen

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n - 1\right)$,

ob sie einen reellen Reihenwert haben können.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen mittels geeigneter Kriterien auf Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k)^2}{2 \cdot 3^k}$, (ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k - \sqrt{k}}$, (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (k+1)!}{k^k}$.

Welche dieser Reihen konvergieren absolut?

H18* Am Anfang eines 1 km langen Zaubergummibandes sitzt eine Schnecke. Jeden Tag kriecht sie 1 m voran. Nachts, wenn sie schläft, dehnt sich das Band gleichmäßig aus, so dass es im Verlaufe der Nacht um 1 km länger wird. Die Schnecke ist unsterblich, das Band unbegrenzt dehnbar.

Schafft es die Schnecke, das Ende des Bandes in endlicher Zeit zu erreichen?

Grenzwerte rekursiv def. Folgen

ÜB a) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$, $x_0 = c > 0$

bekannt $\lim_{n\to\infty} x_n =: x \in \mathbb{R}$

Umformung (da möglicherweise $x = 0$)

$$x_n \cdot x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n^2 + c\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot x_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n^2 + c\right)$$

Grenzwertsätze

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 + c\right)$$

$$\Rightarrow x \cdot x = \frac{1}{2}\left(x^2 + c\right)$$

$$x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow x \in \{\sqrt{c}, -\sqrt{c}\}$$

Es gilt $x_n > 0$ für alle $n$ (vollst. Induktion)

$$\Rightarrow x = \sqrt{c}$$

b) $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n + 1\right)$, $x_0 = 0$ $x_n < \frac{1}{2}$, $(x_n)$ smw

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n =: x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(x_n + 1\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

explizite Darstellung: $x_n = f(n)$

$$x_n = \frac{1}{3}(x_{n-1}+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x_{n-2}+1)+1\right)$$
$$= \frac{1}{3^2}x_{n-2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3^2}\,\frac{1}{3}(x_{n-3}+1) + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3}$$
$$= \dots$$
$$= \frac{1}{3^n}x_0 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots + \frac{1}{3}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

geometrische Reihe
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$$

Unendliche Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{S_n}$$ n-te Partialsumme

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$ für $|q|<1$

- Nullfolgenkriterien.

$$\sum a_k \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_k = 0$$

- Rechenregeln & bekannte Grenzwerte

Ü14 a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+3^{k+1}}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(2\cdot\underbrace{\left(\tfrac{1}{5}\right)}_{\in(-1,1)}^k + 3\underbrace{\left(\tfrac{3}{5}\right)}_{\in(-1,1)}^k\Big)$$

$$= 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{5}\right)^k + 3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{3}{5}\right)^k = 2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} + 3\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = 10$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n-1}+7(-5)^n}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{9^n} + 7\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^n}{9^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{3^{2n}} + 7\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(-\tfrac{5}{9}\right)}_{\in(-1,1)}^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}} + 7\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{5}{9}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + 7\,\frac{1}{1+\frac{5}{9}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$$

c) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^{\frac{n}{2}}+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(10^{\frac{1}{2}})^n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} > \sqrt{9} = 3$$

$\Rightarrow$ nicht Konvergent

d) $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(1+\tfrac{1}{5n}\right)^n-1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{5}}{n}\right)^n - 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{5}}{n}\right)^n - 1 = e^{\frac{1}{5}} - 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Reihe ist divergent

Ü15 Konvergenzkriterien (Leibniz-, Quotienten-, Wurzelkrit)

Leibniz-Krit. a)(3) (5) (6)

a) 3)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2\sqrt{k}-1} \quad \left(= -\sum(-1)^k\frac{1}{2\sqrt{k}-1}\right) \quad a_k = \frac{1}{2\sqrt{k}-1}$$

mit LK: $\circ\ a_k > 0$ für $k \geq 1$

$\circ\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}-1}$

$\frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\qquad \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{\frac{1}{k}} = \sqrt{\lim \frac{1}{k}} = \sqrt{0} = 0$

↑ Steitigkeit der $\sqrt{\ }$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}} = 0$ (analog) $\xRightarrow{QL} \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

$\circ$ Monotonie

$x_k := \sqrt{k}$ smw $\Rightarrow y_k = 2x_k - 1$ smw $\Rightarrow (a_k)$ smf.

$\Rightarrow$ konvergent.

a) 1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k \cdot 4^k}$ $\qquad a_k := \frac{(k+1)^2}{k \cdot 4^k}$

mit QK: $\lim\limits_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{(k+2)^2}{(k+1)\,4^{k+1}}}{\frac{(k+1)^2}{k \cdot 4^k}} \right| = \left| \frac{(k+2)^2}{(k+1)\cdot \cancel{4^{k+1}}\cdot 4} \cdot \frac{k \cdot \cancel{4^k}}{(k+1)^2} \right|$

$= \frac{1}{4} \lim \left| \frac{k^3+4k^2+4k}{k^3+3k^2+3k+1} \right| = \frac{1}{4} \lim\limits_{k\to\infty} \left| \frac{1+\frac{4}{k}+\frac{4}{k^2}}{1+\frac{3}{k}+\frac{3}{k^2}+\frac{1}{k^3}} \right|$

$= \frac{1}{4} \lim \left| \frac{1+0+0}{1+0+0+0} \right| = \frac{1}{4} < 1$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

ii mit WK:

(2) mit QK

(4) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)^2}{2^k}$ mit WK:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{(4k)^2}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{4k} \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{4k} \cdot \lim \sqrt[k]{\left(\tfrac{1}{2}\right)^k}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent