Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/∼baumann

22.10.2018

Zusammenfassung / Ausblick

Die Menge der komplexen Zahlen bildet einen Körper $(\mathbb{C};+,\cdot)$.

- Addition und Multiplikation erfüllen die Körperaxiome.
- Jedes Polynom n-ten Grades über $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

. . . .

Körper werden in der Vorlesung Diskrete Strukturen als algebraische Strukturen formal eingeführt.

In der Linearen Algebra verwenden wir vorab folgende Beispiele für Körper:

GF

Galois Field

- Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen
- Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen
- Körper GF(2) – endlicher Körper mit 2 Elementen 0, 1

$(\{0,1\},+,\cdot)$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

3. Vorlesung

- Lineare Gleichungssysteme (LGS) über K mit m Gleichungen in n Unbekannten
  - Lösungsmenge
  - homogene und inhomogene LGS
- $m \times n$-Matrizen über K
  - Rechnen mit Matrizen
    (Transponieren, Skalarmultiplikation, Addition, Multiplikation)
  - Rechenregeln
- Matrixschreibweise für LGS
- Beispiel aus der Codierungstheorie

LGS über K mit m Gleichungen in n Unbekannten

- LGS mit m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ über einem Körper K:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

  $a_{ij} \in K \ (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$
  sind die Koeffizienten.

  $b_i \in K \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ sind die Absolutglieder.

- Kurzform:

(*) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Lösungen, Lösungsmenge eines LGS

- $\overbrace{(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)}^{n\text{-Tupel}}$ $\quad (\ell_j \in K$ für $j = 1, 2, \ldots, n)$ wird eine Lösung des LGS genannt, wenn

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ell_j = b_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

  erfüllt ist.

- Die Menge L aller Lösungen von (*) des LGS heißt Lösungsmenge dieses LGS. Von (*)

homogene LGS, inhomogene LGS

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ heißt homogenes LGS.

  Jedes homogene LGS hat mindestens eine Lösung, nämlich $(0, 0, \ldots, 0)$. $\in K^n$

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ heißt inhomogenes LGS, wenn für ein $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt:

  $$\boxed{b_i \neq 0}$$ min. 1

  $(0, 0, \ldots, 0)$ ist nicht in der Lösungsmenge eines inhomogenen LGS enthalten.

$m \times n$-Matrizen über K

- Eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K ist eine Abbildung

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K : (i,j) \mapsto a_{ij}$$

- Spalte

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zeile

$A \in K^{m\times n}$

Hauptdiagonale

Kurzform: $A = (a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$

- $K^{m\times n}$ bezeichnet die Menge aller $m \times n$-Matrizen über dem Körper K.

Def: Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei K ein Körper.
Eine $m \times n$-Matrix über K ist eine Abb.

$$A: \underbrace{\{1, 2, \dots, m\}}_{Z} \times \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{S} \to K: (i, j) \mapsto a_{ij}$$

Zeile index

Spalten index

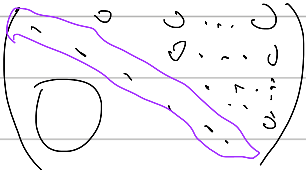
Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K wird mit $K^{m \times n}$ berechnet

Siehe $\leftarrow$

- Diagonalematrix $m=n$

$$D = (d_{ij})_{n\times n}$$

mit $d_{ij}=0$ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ und $i \neq j$



Spezielle Matrizen

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle i, j heißt $m \times n$-Nullmatrix; Bezeichnung: $0_{m \times n}$
- Eine $m \times n$-Matrix mit $m = n$ heißt quadratische Matrix.
- Für die quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{n \times n}$ bilden die Elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ die Hauptdiagonale.
- Ist $A = (a_{ij})$ eine quadratische Matrix mit $a_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i \neq j$, dann nennt man A eine Diagonalmatrix.
- Die $n \times n$-Matrix $E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ heißt Einheitsmatrix.

Rechnen mit Matrizen (1)

- Transponieren:

  Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$. Dann wird $A^T := (a_{ij}^T) \in K^{n \times m}$ mit $a_{ij}^T := a_{ji}$ die zu A transponierte Matrix genannt.

Def: $\left(\begin{array}{l} A \in K^{m_1 \times n_1},\ B = K^{m_2 \times n_2} \\ A = B :\Longleftrightarrow m_1 = m_2 \wedge n_1 = n_2 \wedge A_{ij} = B_{ij} \\ \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\} \\ \qquad\qquad\ \ j \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right)$

- Skalarmultiplikation:

  Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $k \in K$.

  $kA := (ka_{ij}) \in K^{m \times n}$

- Addition:

  Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Elemente von $K^{m \times n}$.

  $A \underline{+} B := (a_{ij} \underline{+} b_{ij}) \in K^{m \times n}$

  Add. in $K^{m \times n}$ — Addition in K

- Subtraktion:

  Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Elemente von $K^{m \times n}$.

  $A - B := A + (-1)B$

Rechnen mit Matrizen (2)

- Es sei $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times p}$.
  Man nennt die Matrix $C = (c_{ij}) \in K^{m \times p}$ mit

$$\boxed{c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

  das Produkt von A und B.

Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$A \cdot B$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & a & b \\ & & & c & d \\ & & & e & f \\ \hline 1 & 2 & 3 & \boxdot & \odot \\ 4 & 5 & 6 & & \end{array}$$

$\boxdot$ $a + 2c + 3e$

$\odot$ $b + 2d + 3f$.

Bemerkung: Es gilt

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Rechenregeln für Matrizen (1)

- Wenn für Matrizen A, B, C die Produkte AB und BC definiert sind, dann sind auch die Produkte $(AB)C$ und $A(BC)$ definiert und es gilt:

$$(AB)C = A(BC)$$

Im Allgemein: $A \cdot B \neq B \cdot A$

z.B $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Es gilt

$$A(B + C) = AB + AC \text{ und } (A + B)C = AC + BC,$$

falls die entsprechenden Summen und Produkte definiert sind.

- Für jede quadratischen Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt:

$$AE_n = E_nA = A$$

Rechenregeln für Matrizen (2)

Es gilt

- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$,

falls die entsprechenden Summen und Produkte definiert sind.

Matrixschreibweise für LGS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

Kurzform: $\boxed{Ax = b}$