Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

13. Übungsblatt für die Woche 08.07. - 14.07.2019

Funktionen zweier Veränderlicher

Ü73 (a) Betrachtet wird die Funktion $f(x,y) = \frac{y}{2}e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Höhenlinien von f als Kurven $\varphi(t) = (x(t), y(t))^T = (t, y(t))^T$.
- Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ in einem beliebigen Punkt $P(x;y)$
- Zeigen Sie, dass $\nabla f(x,y)$ senkrecht auf der durch diesen Punkt verlaufenden Höhenlinie steht.

  (Tipp: Die Ableitung $\varphi'(t) = (x'(t), y'(t))$ ist Richtungsvektor an der Höhenlinie im Punkt $P(x;y)$.)

(b) Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = 10 - \sqrt{x^2+y^2}$. (s. auch Übung 12).

Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$, und prüfen Sie nach, dass $\nabla f(x,y)$ in jedem Punkt $P(x;y)$ senkrecht auf der durch $P(x;y)$ verlaufenden Höhenlinie steht. Verwenden Sie dazu Polarkoordinaten.

Ü74 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen

(i) $f(x,y) = \dfrac{y}{x+1} - e^{2x} + 2(y+1)$, (ii) $z = f(x,y) = x^2 - y^2$

(1) das Taylorpolynom 2. Ordnung an der Stelle $P(0;1)$,

(2) die Gleichung der Tangentialebene an $P(0;1)$.

(3) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung aus (a) mit Hilfe des Gradienten und der Hessematrix an der Stelle $P(0;1)$ dar.

Ü75 Die Gleichung $F(x,y) = e^y - y^2 - 1 + (x+y)\ln x = 0$ bestimmt implizit eine Funktion $y = f(x)$. Berechnen Sie die Tangente an f im Punkt $x = 1$ durch implizites Differenzieren.

H76 Betrachtet wird die Funktion $f(x,y) = y^2 \sin(x+y)$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion an einem beliebigen Punkt $P(x;y)$.

(b) Bestimmen Sie an der Stelle $P(0;\frac{\pi}{2})$ die Tangentialebene von f und und das Taylorpolynom 2. Ordnung.

H77 Betrachtet werden die Funktionen

(i) $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 3$, (ii) $f(x,y) = e^{x(y+1)}$.

Bestimmen Sie jeweils die Höhenlinien von f zu beliebiger fester Höhe c, und geben Sie diese als Kurve in geeigneter Parameterdarstellung $\varphi_c(t) = (x(t), y(t))^T$ an.

Zeigen Sie, dass der Gradient von f in jedem Punkt $P(x;y)$ senkrecht auf der durch $P(x;y)$ verlaufenden Höhenlinie steht.

H78 Durch $F(x,y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) - \frac{\pi}{4} + \ln(x^y) = 0$ ist implizit eine Funktion $y = f(x)$ gegeben. Stellen Sie die Gleichung der Tangente von $f(x)$ im Punkt $x_0 = 1$ auf.

Höhenlinien

$f(x,y) = C$ Konst.

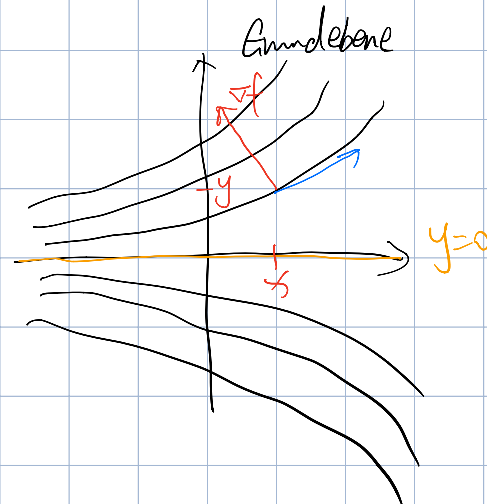
Gradient

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

73)

a) $f(x,y) = \frac{y}{2} e^{-x}$

- Höhenlinien $\frac{y}{2} e^{-x} = C \rightarrow y = e^{x} \cdot 2C$



- Gradient

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} e^{-x} \\ \frac{1}{2} e^{-x} \end{pmatrix}$$

- Höhenlinien in Parameterdarstellung

$x(t) = t$

$y(t) = 2Ce^{t}$ $\qquad \varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

- Tangentenvektor: $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2ce^t \end{pmatrix}$

- ∇f auf der Höhenlinien: $\nabla f(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} \frac{-2ce^t e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -c \\ \frac{1}{2} e^{-t} \end{pmatrix}$$

- senkrecht?

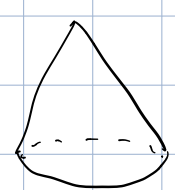
$$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot \varphi'(t)$$
$$= 1 \cdot (-c) + 2ce^t \cdot \tfrac{1}{2} e^{-t}$$
$$= -c + c = 0$$
$\Rightarrow$ senkrecht

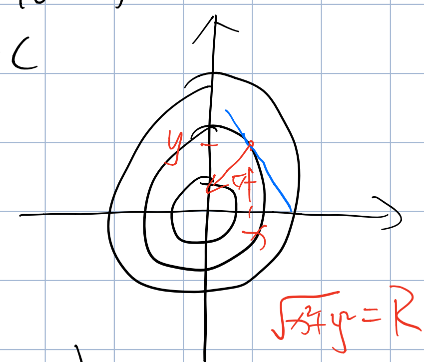
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

b) $f(x,y) = 10 - \sqrt{x^2+y^2}$

- Höhenlinien: Kreise $x^2+y^2 = (10-c)^2$

$R = 10 - c$





- Gradient $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$

- Höhenlinien im Polarkoordinaten:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}$$

- Tangentenvektor:

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$$

- ∇f auf der Höhenlinie:

$$\nabla f(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} -\frac{x(t)}{R} \\ -\frac{y(t)}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

- Senkrecht?

$$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot \varphi'(t) = -\cos(t) \cdot (-R\sin(t)) + (-\sin(t)) \cdot R\cos(t)$$
$$= R\sin t\cos t - R\sin t\cos t = 0$$

$\Rightarrow$ senkrecht

Taylorpolynom 2 Ordnung an der Stelle $P(x_0, y_0)$:

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{= t_1(x,y) \quad 1\text{ Ordnung}}$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(y-y_0)(x-x_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)$$

2. Ordnung

$$= f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

74) 1) $f(x,y) = \dfrac{y}{x+1} - e^{2x} + 2(y+1)$ $\qquad P(0,1)$

$$f(0,1) = 1 - 1 + 4 = 4$$

$f_x(x,y) = -y(x+1)^{-2} - 2e^{2x}$ $\qquad f_x(0,1) = -3$

$f_y(x,y) = \dfrac{1}{x+1} + 2$ $\qquad f_y(0,1) = 3$

$f_{xx}(x,y) = 2y(x+1)^{-3} - 4e^{2x}$ $\qquad f_{xx}(0,1) = -2$

$f_{xy} = f_{yx} = -(x+1)^{-2}$ $\qquad f_{xy}(0,1) = -1$

$f_{yy} = 0$ $\qquad f_{yy}(0,1) = 0$

$\Rightarrow t_2(x,y) = 4 + (-3)x + 3(y-1)$ $\qquad 4 - 3x + 3y - 3$

$\quad + \dfrac{1}{2!}\left((-2)x^2 + (-2)x(y-1) + 0\right)$ $\qquad -x^2 - xy + x$

$\quad = -x^2 - 2x - xy + 3y + 1$

2) Tangentialebene $\qquad z = t_1(x,y)$

$$z = 4 - 3x + 3(y-1)$$

$3x - 3y + z = 1$ $\qquad$ Normale $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $t_2(x,y) = 4 + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$

ii) $f(x,y) = x^2 - y^2 = t_2(x,y)$ $\qquad$ da $f(x,y)$ Polynom 2. Grades in x und y

Tangentialebene an $P(0,1)$ $\qquad 2y + z = 1$

Impliziten Differenzieren:

$F(x,y) = 0$

Satz: Wenn $F_y(x_0, y_0) \neq 0 \rightarrow y = f(x)$ existiert in Umgebung von (x_0, y_0)

$F(x, f(x)) = 0$ Höhenlinien von F der Höhe 0

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = F_x(x, f(x)) \frac{dx}{dx} + F_y(x, f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

75) $F(x,y) = e^y - y^2 - 1 + (x+y)\ln x = 0$

$f'(1)$?

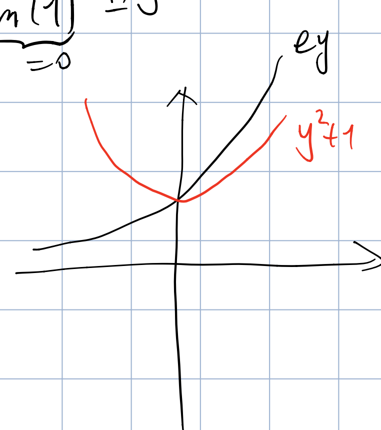
$$f'(1) = -\frac{F_x(1, f(1))}{F_y(1, f(1))}$$

?

$$F(1, \underbrace{f(1)}_{y}) = e^y - y^2 - 1 + (1+y) \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow e^y = y^2 + 1$$

$$\Rightarrow y = f(1) = 1$$



$$f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$$