TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann**

# Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
# Sommersemester 2019

12. Übungsblatt für die Woche 01.07. - 07.07.2019

*Funktionen zweier Veränderlicher*

Ü67 (a) Bestimmen und skizzieren Sie für die folgenden reellwertigen Funktionen $f$ zweier Veränderlicher den Definitionsbereich $D(f) \subset \mathbb{R}^2$:

(i) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, (ii) $f(x,y) = \ln\left(\frac{1}{4}x^2 + y^2 - 9\right)$.

(b) Bestimmen Sie für folgende Funktionen $f$ die Höhenlinien, und skizzieren Sie einige davon. Schließen Sie daraus auf die Gestalt der Fläche $z = f(x,y)$.

(i) $f(x,y) = 10 - \sqrt{x^2 + y^2}$, (ii) $f(x,y) = \sqrt{1 - y^2}$, $|y| \leq 1$.

Ü68 (a) Hat die Funktion $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$ im Punkt $P(0;0)$ einen Grenzwert? Untersuchen Sie dazu das Verhalten von $f$, wenn sich $(x,y)$ dem Punkt $P(0;0)$

1. längs der Geraden $y = x$,
2. längs der Geraden $y = 2x$

nähert. Geben Sie den Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ an, falls er existiert.

(b) Stellen Sie folgende Flächen $z = f(x,y)$ in Polarkoordinaten $(x(r,\varphi), y(r,\varphi), z(r,\varphi))^T$ dar:

(i) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, (ii) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, (iii) $f(x,y) = \dfrac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Nutzen Sie diese Darstellung, um für die Funktionen aus (ii) und (iii) zu untersuchen, ob der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert. Berechnen Sie diesen Grenzwert gegebenenfalls.

Ü69 Bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x,y) = y \ln(x^2 + 1) + x$$

definiert ist. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Satzes von Schwarz für diese Funktion.

H70 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Bestimmen Sie für die folgenden reellwertigen Funktionen $f$:

(i) $f(x,y) = \dfrac{y - x + 1}{y + 1}$ (ii) $f(x,y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$

jeweils den Definitionsbereich $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ und die Höhenlinien.

(b) Gegeben ist die reellwertige Funktion

$$f(x,y) = 2y + (x^2 + y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller Paare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ ist, und skizzieren Sie diese Menge in der xy-Ebene.

H71 Verwenden Sie Polarkoordinaten, um zu zeigen, dass die Funktion

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(y^2-x^2)}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

H72 Berechnen Sie alle Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $f(x,y) = ax^2y + \ln(xy)$ Lösung folgender Gleichung (Differentialgleichung) ist:

$$x\,f_x - yf_y = y(f_{xy})^2.$$

$f: D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$
$\subseteq \mathbb{R}^2$

$z = f(x,y)$ „Höhe"

**Definitionsbereich:**

67) a)

$f(x,y) = \sqrt{\underbrace{x^2-y^2}_{\geq 0}}$

$x^2 \geq y^2$

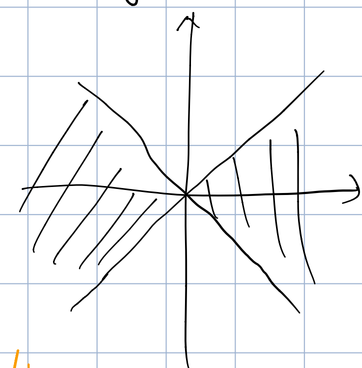
$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \geq y^2\}$

$\Leftrightarrow |x| \geq |y|$

z.B. in II Quadranten;

$y \geq 0,\ x \leq 0$

$|x| \geq |y| \Leftrightarrow -x \geq y$



Randkurve: $y = -x$

$f(x,y) = \ln(\underbrace{\tfrac{1}{4}x^2 + y^2 - 9}_{>0})$

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{1}{4}x^2 + y^2 - 9 > 0\}$

$\tfrac{1}{4}x^2 + y^2 > 9$

Randkurve: $\tfrac{1}{4}x^2 + y^2 = 9$

$\Rightarrow (\tfrac{x}{2})^2 + y^2 = 3^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

Formelsammlung

Ellipsengleichung

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) Höhen Linien $z = f(x,y) = C$ konst

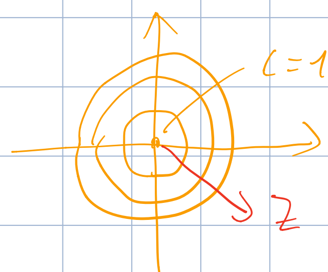
i) $f(x,y) = 10 - \sqrt{x^2+y^2} = C \Rightarrow C_{max} = 10$

ii) $f(x,y) = \sqrt{\underbrace{1-y^2}_{\geq 0}} = C \qquad C_{max} = 1 \qquad C_{min} = 0$

i) $10 - C = \sqrt{x^2+y^2} \qquad |\,^2 \qquad C \leq 10$

$(10-C)^2 = x^2 + y^2$

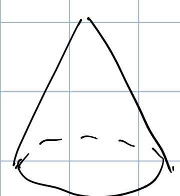
Kreise mit Radius $r = 10 - C$
um $P(0,0)$

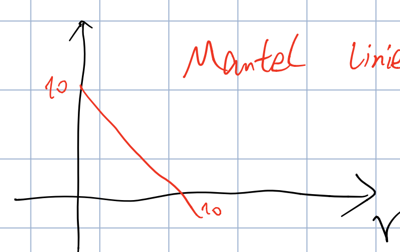



$\Rightarrow$ z als Funktion von r

$z = C = 10 - r$

Kreiskegel






ii) $f(x,y) = \sqrt{\underbrace{1-y^2}_{\geq 0}} = C \qquad C_{max} = 1 \qquad C_{min} = 0$

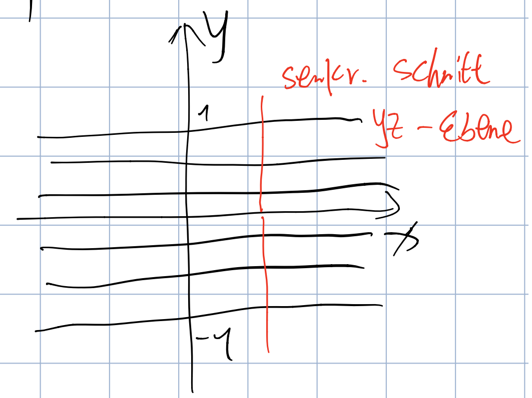
$\sqrt{1-y^2} = C$ keine Abhängigkeit von $x$

$\Rightarrow$ Höhenlinien sind horizontale Geraden (parallel zur $x$-Achse)

$1-y^2=c^2$ und $0 \le c \le 1$

$\Leftrightarrow \quad 1-c^2=y^2$

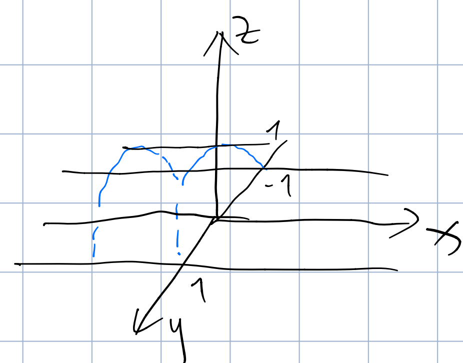
$y = \pm\sqrt{1-c^2}$




$z=\sqrt{1-y^2} \quad |\,^2 \qquad z \ge 0$

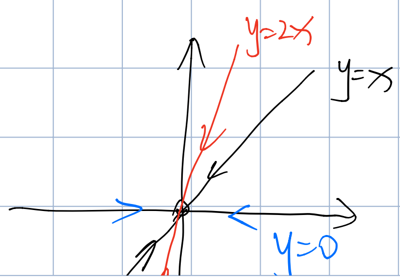
$z^2=1-y^2 \qquad z \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad y^2+z^2=1 \qquad$ halbkreis




68

a) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$, $D(f)=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$



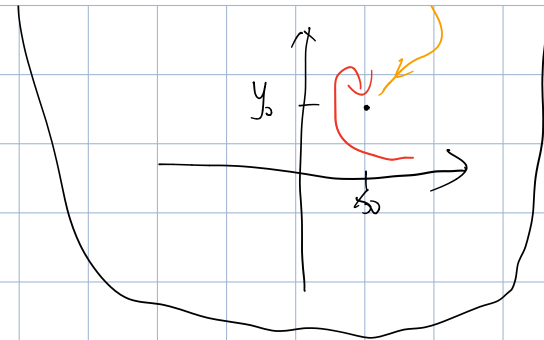

Grenzwert

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g$

$:\Leftrightarrow \forall$ Wege $(x(t),y(t)) \xrightarrow[t\to t_0]{} (x_0,y_0)$

$\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t),y(t)) = g$

Grenzwert 0




Weg 1: $y=x$ $\quad x(t)=t$

$y(t)=t$

$$\lim_{t\to 0} f(x(t),y(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^2)}{2t^2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \frac{2t\cos(t^2)}{4t} \quad \Big| \text{ Regel von L'Hospital}$$

$$\cancel{\boxed{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \frac{-4t^2\sin(t^2)}{4} = 0}} = \frac{\cos(t^2)}{2} = \frac{1}{2}$$

Weg 2: $y=2x$ $\quad x(t)=t$

$y(t)=2t$

$$\lim_{t\to 0} f(x(t),y(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(2t^2)}{5t^2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{4t\cos(2t^2)}{10t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\cos(2t^2)}{5} = \frac{2}{5}$$

auf verschiedenen Wegen verschiedene Grenzwerte

$\rightsquigarrow$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ex. nicht

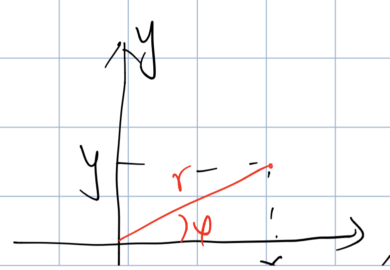
b) Polarkoordinaten $\quad x(r,\varphi) = r\cos\varphi$

$y(r,\varphi) = r\sin\varphi$

i) $z=f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

$= 4 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2$

$= 4 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi$



$= 4 - r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$

$= 4 - r^2$ Parabel

Paraboloid

ii) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\varphi}{r} = \cos\varphi$

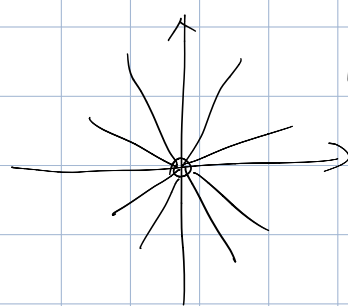
$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

iii) $f(x,y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sin r}{r}$ $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0$

ii) Höhenlinien

$\cos\varphi = C$



Höhenlinien als Wege wählen mit $r \to 0$ auf verschiedenen Höhenlinien

Grenzwert $\cos\varphi$ verschieden

$\to \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ex. nicht

iii) unabh. von $f$ !

$\lim f(x,y) = \lim \frac{\sin r}{r} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim \frac{\cos r}{1} = 1$

$(x,y)\to(0,0) \quad r\to 0 \quad r\to 0 \quad 1$

69) $f(x,y) = y\ln(x^2+1)+x$

$f_x(x,y) = y\dfrac{2x}{x^2+1}+1$

$f_y(x,y) = \ln(x^2+1)$

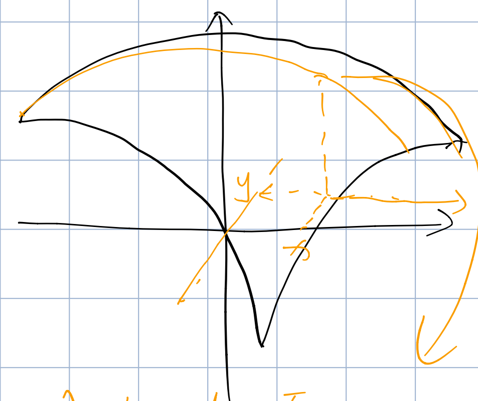
$f_{xx}(x,y) = y\dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}$

$f_{xy}(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$f_{yy}(x,y) = 0$

$f_{yx}(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$f_{xy}(x,y) \overset{\text{S.v. Schwarz}}{=} f_{yx}(x,y)$




Anstieg der Tangente in x-Richtung $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f_x(x,y)$

$f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$