TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

7. Übungsblatt für die Woche 20.05. - 26.05.2019

Taylorentwicklung, Regel von L'Hospital

Ü37 Betrachtet wird die Funktion f, die durch $f(x) = \sqrt{1+2x}$ definiert ist.

(a) Stellen Sie alle Taylorpolynome bis zum Grad 2 mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ auf, und geben Sie jeweils den Approximationsfehler durch das zugehörige Restglied in Lagrangeform an.

(b) Schätzen Sie den Approximationsfehler zwischen f und dem Taylorpolynom 2. Grades mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ geeignet ab, um Werte $x > 0$ zu bestimmen, für die dieser Fehler kleiner als 10^{-6} ist.

(c) Wie lautet die lineare Approximation von f in der Umgebung von x_0?

Ü38 Stellen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen f mit der Entwicklungsstelle x_0 auf:

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad x_0 = -1, \qquad\qquad \text{(b) } f(x) = \cos(x), \quad x_0 = 0\,.$$

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der Taylorreihe.

Ü39 (a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i) } \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2+x-6}, \qquad \text{(ii) } \lim_{x\to 0+0} x(\ln(x))^2, \qquad \text{(iii) } \lim_{x\to\infty} \frac{1-4x^3}{3-x+2x^3},$$

$$\text{(iv) } \lim_{x\to 1+0} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}, \qquad \text{(v) } \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

(b) Es sei $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ eine reelle Polynomfunktion.
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x}$.

H40 $\boxed{\textbf{A}}$ **(Pro Teilaufgabe wird bei richtiger Lösung 1 Punkt vergeben.)**

Es ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto xe^{(1-x)}$ gegeben.

(a) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ auf, und geben Sie den Approximationsfehler durch das zugehörige Restglied in Lagrangeform an.

(b) Bestimmen Sie die n-te Ableitung von f für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die gefundene Formel mit vollständiger Induktion.

(c) Stellen Sie die Taylorreihe der Funktion f mit Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ auf, und berechnen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

H41 Bestimmen Sie Mittelpunkt und Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5k^2}{(k+1)^3}(x+\tfrac{1}{2})^k$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^k}(x-\tfrac{1}{3})^k$, (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k(k+1)}\, x^k$.

H42 Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1-6x^2}{2+4x-3x^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-3}\sin(5x^3)$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2+2x-4}{2x^3-4x^2-x+2}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

Taylorpolynom n-ten Grades für f bzgl. $x_0 \in D(f)$

$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$f(x) = P_n(x) + \underbrace{R_n(x,x_0)}_{\text{Restglied}}$

Taylorreihe : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Approximationsfehler $|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x, x_0)|$

$= \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right|$ für ein $z = z(x)$ zwischen x und x_0.

Ü37) $f(x) = \sqrt{1+2x}$, $x_0 = 0$ $f(x_0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -(1+2x)^{-\frac{3}{2}}$ $f''(0) = -1$

(c) Lin Approximation (Tangentengleichung)

$P_0(x) = f(x_0) = 1$

$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 1 + x$ $= P_0(x) + f'(0)(x-x_0)$

$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2$ $= P_1(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x-x_0)^2$

b)

Approximationsfehler

$$|f(x) - p_2(x)| = |R_2(x,0)| = \left| \frac{\frac{3}{(1+2z)^{5/2}}}{3!} x^3 \right|$$

$x>0$ gesucht, so dass

$$|R_2(x,0)| < 10^{-6} \qquad z \in [0,x]$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1+2z}^5}}_{=g(z)} \cdot x^3 < 10^{-6}$$

Maximum für $z \in [0,x]$

Suchen $x>0$ mit

$$\frac{1}{2\sqrt{1+2\cdot 0}^5} x^3 = \frac{x^3}{2} < 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow x^3 < \frac{2}{(10^2)^3} \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt[3]{2}}{10^2} < 0{,}0126$$

38)

a) Taylorreihe für $f(x) = \frac{x}{1-x} = -\frac{x}{x-1} = -1 - \frac{1}{x-1}$

$x_0 = -1$

$$f'(x) = (x-1)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(-1) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = -2(x-1)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad f''(-1) = \frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = (-2)\cdot(-3)(x-1)^{-4} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} k!\,(x-1)^{-(k+1)} = \left(\frac{-1}{x-1}\right)^{k+1} \cdot k! = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

$\Rightarrow$ für $x_0 = -1$ $\quad f^{(k)}(-1) = \frac{k!}{2^{k+1}}$ für $n \geq 1$

$f(-1) = -\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!} |x+1|^k$$

$$= -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{k!}{2^{k+1}}}{k!} (x+1)^k = \frac{1}{-2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} (x+1)^k$$

Konvergenzradius berechnen: QK / WK oder Formeln aus FS.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^{k+1}} (x+1)^k} = |x+1| \sqrt[k]{\frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2}} = |x+1| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{1}{2}\right)^k} \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2}}$$

$$= |x+1| \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 < 1$$

$$\frac{1}{2} |x+1| < 1$$

$$|x+1| < 2$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius ist 2

$x \in (-3, 1)$ abs konv.

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{2^{k+1}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k$$

geometrische Reihe

b) $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1) \frac{(x^2)^k}{(2k)!} \rightarrow r = \infty$

Regel von L'Hospital

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$? $\quad$ Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty \quad \text{oder}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) \overset{\text{"}0\cdot\infty\text{"}}{=} , \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} , \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}$$

39)

a) i) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{3x^2}{2x+1} = \frac{12}{5}$

oder $x-2$ ausklammern in Zähler & Nenner, oder Polynomdivision.

ii) $\lim_{x \to 0^+} x \cdot (\ln x)^2 \overset{\text{"}0\cdot\infty\text{"}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{2\ln x \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$= \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} 2x = 0$$

iii) $\lim_{x \to \infty} \frac{1 - 4x^3}{3 - x + 2x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3} \frac{\frac{1}{x^3} - 4}{\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{-4}{2} = -2$

iv) $\lim_{x \to 1+0} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to 1+0} \frac{\cos(x-1)}{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x-2}} \cdot (2x+1)} = 0$

v) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

$$\overset{\text{stetig}}{=} e^{\lim_{x \to \infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{\lim_{x \to \infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\overset{\text{"}0\cdot\infty\text{"}}{=} e^{\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} e^{\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}}$$

$$= \dots 1$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\quad}{1+\frac{1}{x}}} = e^1 = e$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

b) $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} \; ?$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim \frac{n!}{e^x} = 0$$