TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

8. Übungsblatt für die Woche 27.05. - 02.06.2019

Integralrechnung

Ü43 (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des ebenen Bereiches, der durch die Parabel $x = \frac{1}{4}y^2$ und die Gerade $y = 2(x-2)$ begrenzt wird. Fertigen Sie dazu eine Skizze des Bereiches an.

(b) Stellen Sie ein Integral auf, mit dem man den Flächeninhalt einer Kreisfläche mit Radius $r > 0$ berechnen kann.

(c) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale:

(i) $$\int_{-1}^{1} \frac{x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$ (ii) $$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Ü44 (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = e^{-x}(x^2+4x+1)$ eine Stammfunktion der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = e^{-x}(3 - 2x - x^2).$$
ist. Geben Sie eine weitere Stammfunktion von f an.

Berechnen Sie den Flächeninhalt A zwischen der Funktionskurve von f und der x-Achse im Intervall $[-6, 2]$.

(b) Welche der Funktionen $F_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1,2,3$, definiert durch
$$F_1(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \qquad F_2(x) = \operatorname{arsinh}(x), \qquad F_3(x) = \sqrt{1+x^2}$$
sind Stammfunktionen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$?

Ü45 (a) Ermitteln Sie das unbestimmte Integral $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x$, indem Sie die Potenzreihendarstellung der Funktion $\sin(x)$ verwenden.

(b) Die Funktion e^{-x^2} lässt sich nicht geschlossen integrieren. Finden Sie einen Weg, um das bestimmte Integral $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ zu berechnen!

H46 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Gegeben ist die Funktion $F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto c(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x^3})$ mit Parameter $c \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie denjenigen Wert $c \in \mathbb{R}$, für den die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ ist.

(b) Ermitteln Sie den Flächeninhalt desjenigen ebenen Bereiches B, der durch die Funktionskurven $y = \frac{10}{3}x - x^2$ und $y = |x-1| - 1$ begrenzt wird. Fertigen Sie eine Skizze dieses Bereiches an.

H47 Die Kurven $y = \frac{2}{x-1}\,(x > 1)$, $y = 2e^{x-2}$ und die drei Geraden $x = -1$, $x = 3$ und $y = 0$ begrenzen ein Flächenstück F.

- Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.
- Wie lassen sich die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes der Fläche F berechnen? (siehe Formelsammlung)

H48 Betrachtet wird die Klothoide, eine ebene Kurve, die in Parameterdarstellung $(x(t), y(t))$ durch

$$x(t) = \sqrt{\pi}\int_0^t \cos(\tfrac{\pi\tau^2}{2})\mathrm{d}\tau, \quad y(t) = \sqrt{\pi}\int_0^t \sin(\tfrac{\pi\tau^2}{2})\mathrm{d}\tau \qquad \text{für } t \in [0, 2].$$

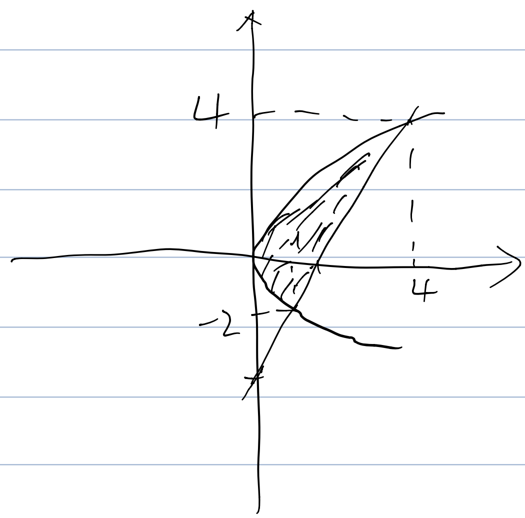
gegeben ist.

(a) Verwenden Sie Potenzreihendarstellungen von sin und cos, um $x(t)$ und $y(t)$ als konvergente Potenzreihen zu schreiben (und auf diese Weise die Kurve beliebig genau zeichnen zu können).

(*b) Geben Sie einen Bereich der xy-Ebene an, in dem die gesamte Kurve liegt, indem Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung nutzen.

43) a) Parabel: $x = \frac{1}{4} y^2$

Gerade: $y = 2(x-2)$



$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} y^2 = f(y) \\ 2x - 4 = y \Rightarrow x = \frac{1}{2}y + 2 = g(y) \end{cases}$$

$\Rightarrow 4 = \frac{1}{2} y^2 - y$

$\Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0$

$\Rightarrow y_1 = 4 \quad y_2 = -2$

$x_1 = 4 \quad x_2 = 1$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} y^2 \\ x = \frac{4+y}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{4} \left(2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2\right) dy$$

$$= \left[2y\right]_{-2}^{4} + \left[\frac{1}{4}y^2\right]_{-2}^{4} - \left[\frac{1}{12}y^3\right]_{-2}^{4}$$

$$= (8+4) + (4-1) - \left(\frac{16}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= 9$$

Flächeninhalt:

1 Weg: $A = \int_0^1 \left(2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x})\right) dx + \int_1^4 \left(2\sqrt{x} - 2(x-2)\right) dx$

$$= 4 \int_0^1 \sqrt{x}\, dx + 2 \int_1^4 \sqrt{x}\, dx - 2 \int_1^4 (x-2)\, dx$$

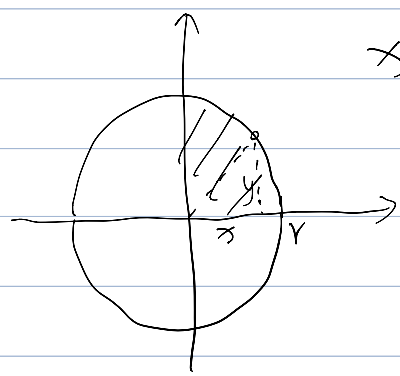
2weg: $\int_{-2}^{4} (g(y) - f(y))\,dy = \int_{-2}^{4} \left(\frac{1}{2}y + 2 - \frac{1}{4}y^2\right) dy$

$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\,dy + 2\int_{-2}^{4} dy - \frac{1}{4}\int_{-2}^{4} y^2\,dy$

$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-2}^{4} + 2\left[y\right]_{-2}^{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{4}$

$= \frac{1}{4}\left(4^2 - (-2)^2\right) + 2\left(4 - (-2)\right) - \frac{1}{12}\left(4^3 - (-2)^3\right) = 9$

b)



$x^2 + y^2 = r^2$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ da, $y \geq 0$

$\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

$= \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$ z.B Substitution $x = r\cos u$

c) (1) $\int_{-1}^{1} \frac{x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 1}{x^2 + 1}\,dx$

$x^4 - 6x^2 + 9$

$x^2 + 1 \,/\, x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 1$

$x^6 + x^4$

$\cancel{-6x^4} + 3x^2 - 1$

$\cancel{-6x^4} - 6x^2$

$$9x^2 + 9$$
$$-10$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^4 - 6x^2 + 9)\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{10}{x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} - \left[2x^3\right]_{-1}^{1} + \left[9x\right]_{-1}^{1} - 10\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 14.4 - 5\pi$$

$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\, dx = 0$, da $f(x) = x^2 \sin(x)$ Punktsymm. (ungerade)

d.h $f(-x) = -f(x)$

Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

$\int f(x)\,dx$ Menge aller Stammfunktionen
$= F(x) + C$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

44) a) $F(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1)$,
$f(x) = e^{-x}(3 - 2x - x^2)$

- F ist Stammfunktion von f, denn.

$$F'(x) = -e^{-x}(x^2+4x+1) + e^{-x}(2x+4)$$
$$= e^{-x}(-x^2 - 2x + 3) = f(x)$$

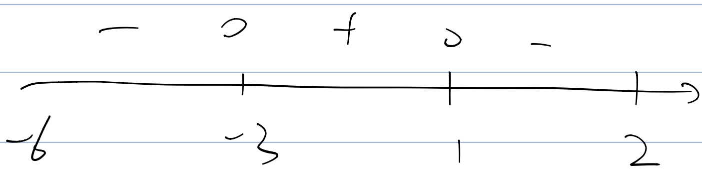
$$f'(x) = -e^{-x}(3-2x-x^2) + e^{-x}(-2x-2)$$
$$= e^{-x}(x^2-5) = g(x)$$

$f(x)$ ist die Stammfunktion von $g(x)$

$$f(x)=0 \Rightarrow e^{-x}(-x^2-2x+3)=0$$
$$\Rightarrow (x^2+2x-3)=0$$
$$(x+3)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=-3,\quad x_2=1$$

$$A = \left| \int_{-6}^{-3} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{-3}^{1} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{1}^{2} f(x)\,dx \right|$$

oder



z.B $f(0)=3>0$

$$= -\int_{-6}^{-3} f(x)\,dx + \int_{-3}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx$$

$$= -(F(-3)-F(-6)) + (F(1)-F(-3)) - (F(2)-F(1))$$
$$= -2F(-3)+F(-6)+2F(1)-F(2)$$
$$= -2e^{3}\cdot(-2) + 13\cdot e^{6} + 2e^{-1}\cdot 6 - e^{-2}\cdot 13$$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$F_1(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$F_1'(x) = \frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$$

$F_2(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$

$F_1(x) = F_u(x)$

$F_3(x) = \sqrt{1+x^2}$

$F_3'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \neq f(x)$

45 b)

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$$

Stammfunktion nicht als geschlossene Formel schreibbar

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \int_{-1}^{1} x^{2k}\,dx$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$z = -x^2$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \underbrace{\left[\frac{1}{2k+1} x^{2k+1}\right]_{-1}^{1}}_{\frac{1-(-1)}{2k+1}}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+1}$$ beliebig genau berechenbar.