TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

1. Übungsblatt für die Woche 08.10. - 14.10.2018

Komplexe Zahlen

Hinweis: Es ist jede Woche eine Hausaufgabe zur Abgabe bestimmt. Diese ist mit einem $\boxed{\textbf{A}}$ gekennzeichnet. Weitere Hausaufgaben dienen zum selbstständigen Nacharbeiten des Stoffes. Aufgaben mit $*$ sind etwas zum Knobeln!

Ü1 (a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 3\,\mathrm{i}$ und $z_3 = 1 - \mathrm{i}$.
Zeichnen Sie z_1, z_2 und z_3 in der Gaußschen Zahlenebene ein. Geben Sie sie in trigonometrischer und exponentieller Form an und berechnen Sie ihren Betrag.
Berechnen Sie weiterhin Realteil und Imaginärteil der Zahlen

$$z_2 \cdot z_1, \quad z_2^{-1}, \quad z_1^{-1}, \quad z_1 + z_3, \quad z_1 - z_3, \quad z_1 \cdot z_3, \quad \frac{z_1}{z_3}\ .$$

(b) Verwenden Sie (a), um allgemeine Regeln für den Zusammenhang zwischen einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ und ihrer konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ aufzustellen. Beweisen Sie diese Regeln!

Ü2 (a) Welche komplexe Zahl ist das Spiegelbild von $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, bei Spiegelung

- am Ursprung,
- an der reellen Achse,
- an der imaginären Achse,
- an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten?

(b) Welche Werte kann i^n für natürliche Zahlen n annehmen? Berechnen Sie i^{2018}.

Ü3 (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

(b) Finden Sie für jede der folgenden Bedingungen die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die diese Bedingung erfüllen, und skizzieren Sie diese Menge in der Gaußschen Zahlenebene:

(i) $|z| = 2$ (ii) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ (iii) $|z + 4 - \mathrm{i}| \leq 1$

H4 $\boxed{\textbf{A}}$ (Hinweis: Denken Sie daran, den Lösungsweg detailliert aufzuschreiben!)

(a) Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil folgender komplexer Zahlen

$$z_1 = (2 + \mathrm{i}^5) \cdot \overline{3 + 5\mathrm{i}} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{2 + \mathrm{i}}{1 + 3\mathrm{i}}.$$

(b) Bestimmen Sie für die komplexe Zahl $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ ihre exponentielle Form.

H5 (a) Berechnen Sie den Betrag und das Argument der folgenden komplexen Zahlen, und geben Sie die trigonometrische und die exponentielle Form an:

(i) $z = 2\,\mathrm{i}(1-\mathrm{i})$, (ii) $z = \mathrm{i} + \dfrac{1+\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$, (iii) $z = \dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{1+\mathrm{i}}$.

(b) Wo liegen in der komplexen Zahlenebene alle z, die folgende Bedingungen erfüllen?
(i) $\mathrm{Re}(z) \geq -1$ (ii) $\mathrm{Arg}(z) \geq \frac{3}{2}\pi$ (iii) $|z+4| \leq 2$

H6 (a) Welche Werte kann $\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^n$ für natürliche Zahlen n annehmen? Berechnen Sie $(\frac{1}{i})^{1234}$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ und $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$.

(*c) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Tipp: Betrachten Sie die Quadrate beider Seiten und benutzen Sie die kartesische Darstellung. Alternativ können Sie den Zusammenhang $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ verwenden.

Warum heißt diese Ungleichung "Dreiecksungleichung"?