Einführung in die Mathematik für Informatiker

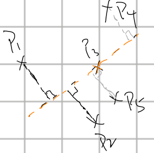
Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/∼baumann

14.1.2018

- Orthogonale Vektoren
- Orthogonalraum (Orthogonales Komplement)
- Orthogonalbasis, Orthonormalbasis
- Orthogonale Projektion



ges: Gleichung einer geraden, die durch die Punkte P_i $(i=1,\dots,5)$

$P_i=(x_i, y_i)$

$y = mx + n$

LGS Lösen:

P_i Vektoren aus V — $y_i = mx_i + n \ (i=1,\dots,5)$

$L=\emptyset$

Untervektorraum von $\mathbb{R}$-VR V

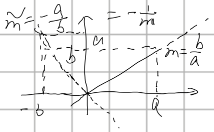
ges: bestmögliche Näherungslösung

bestmögliche Approximation der Punkte P_i $(i=1,\dots,5)$ durch eine Gerade mit der Gleichung $y=\tilde{m}x+\tilde{n}$

Abstände müssen insgesamt kleinstmöglich sein. ← orthogonale Projektion

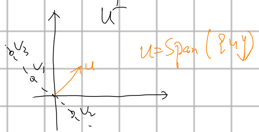
Bem: $u, v \in V$ (V euklid $\mathbb{R}$-VR)

$u \perp v \iff u \cdot v = 0$



Bsp: $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ dann $(2) \cdot (-4) + 4 \cdot 2 = 0$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, dann $-ab + ab = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0$



Winkelmessung

Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\bullet$.

- Seien $u, v \in \{0_V\}$.
  Das eindeutig bestimmte $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{u \bullet v}{||u|| \cdot ||v||}$$

  heißt Winkel zwischen u und v.

- Seien $u, v \in V$.
  Die Vektoren u und v heißen zueinander orthogonal, wenn $u \bullet v = 0$ gilt;
  Bezeichnung: $u \perp v$

- Seien $u, v \in V$. Dann gilt:

$$u \perp v \iff ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Orthogonalraum (Orthogonales Komplement)

- Sei U ein Untervektorraum des euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraums V.

  Die Menge aller Vektoren aus V, die orthogonal zu jedem Vektor $u \in U$ sind, heißt Orthogonalraum (orthogonales Komplement) $U^\perp$ von U in V.

- $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.

- $v \in \mathrm{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\})^\perp$ gilt genau dann, wenn v orthogonal zu $v_1, \ldots, v_k$ ist.

- Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt:

$$\mathrm{Row}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A) \quad \text{und} \quad \mathrm{Col}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^T)$$

Beweis

(1) $0_V \in U^\perp$, dann $0_V \in V^\vee$

$$\underbrace{0_V \circ u}_{\in \mathbb{R}} = (0_V + 0_V) \circ u = \underbrace{0_V \circ u}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{0_V \circ u}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow 0 = 0_V \circ u$$ für alle $u \in U$

(2) $u_1, u_2 \in U^\perp \Rightarrow u_1 + u_2 \in U^\perp$, dann:

$u_1 + u_2 \in V^\vee$

$(u_1 + u_2) \circ u = \underbrace{u_1 \circ u}_{0} + \underbrace{u_2 \circ u}_{0} = 0$ für alle $u \in U$

(3) $v \in U^\perp$, $r \in \mathbb{R} \Rightarrow r \cdot v \in U^\perp$, dann:

$r \cdot v \in V$

$r \cdot v \circ u = r(v \circ u)$ für alle $u \in U$

U VR, U, $U^\perp$ UVR.

Eig von $\circ$

$v \circ v \geq 0$

$v \circ v = 0 \iff v = 0_U$

Bem.

$U \cap U^\perp = \{0_V\}$, denn, sei $v \in U \cap U^\perp \Rightarrow v \in U \wedge v \in U^\perp$

$\Rightarrow v \circ v = 0 \Rightarrow v = 0_V$

Bem: $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$

Bsp: $V = \mathbb{R}^3$

$U = \mathrm{Span}(\{u_1, u_2\})$

$U^\perp = \mathrm{Span}(\{u_3\})$

geg. U UVR von $\mathbb{R}^n$ Berechnung von $U^\perp$

geg. durch eine Basis.

Bem. Sei $U = \text{Span}(\{b_1, b_2, \dots, b_k\})$, Sei $v \circ b_1 = \dots = v \circ b_k = 0$

Dann, $v \circ (r_1 b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_k b_k) = v \circ r_1 b_1 + v \circ r_2 b_2 + \dots + v \circ r_k b_k$

$= r_1 (v \circ b_1) + \dots + r_k (v \circ b_k) = 0 + \dots + 0 = 0$

für alle $r_1 \dots r_k \in \mathbb{R}$

Bsp. $U = \text{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}\right)$ UVR von $\mathbb{R}^3$, ges: $U^\perp$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U^\perp \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1, 2, 3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

A

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$x = z$

$y = -2z$

$U^\perp = \boxed{\text{Ker}(A) = \text{Row}(A)^\perp}$

$\text{Ker}(A)$ berechnen mit Gauss/Jordan

$\dim \text{Ker}(A) + 2 = 3 \qquad \text{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$

$\text{Ker}(A^T) = \text{Row}(A^T)^\perp$

$\text{Ker}(A^T) = \text{Col}(A)^\perp$

Orthogonalbasis

- Ist $\{v_1, \ldots, v_k\}$ eine Menge von k Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ mit $v_i \bullet v_j = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$, dann ist $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig und somit eine Basis eines Untervektorraums von $\mathbb{R}^n$.

- Eine Basis $(b_1, \ldots, b_k)$ eines Untervektorraums W von $\mathbb{R}^n$ wird eine Orthogonalbasis von W genannt, wenn

$$b_i \bullet b_j = 0$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$ gilt.

Def. Sei V eukl. $\mathbb{R}$-UR und $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Basis von V.
$\{b_1, \dots, b_k\}$ heißt Orthogonalbasis, wenn gilt: $b_i \circ b_j = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ und $i \neq j$

BSP (1) Standardbasis ist eine Orthogonalbasis

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$

Satz: Sei $\{b_1, \dots, b_k\}$ ~~Orthogonalbasis~~ Orthonormalbasis von V, $v \in V$. Dann gilt:

$v = r_1 b_1 + \dots + r_i b_i + \dots + r_k b_k$ mit $r_i = \dfrac{v \circ b_i}{b_i \circ b_i}$ $(i = 1, \dots, k)$

$r_i = v \circ b_i$

$b_i \circ b_i = \|b_i\|^2 = 1^2 = 1$

(*) mit b_i mult. bzgl. Skalarprod.

$v \circ b_i = (r_1 b_1 + \dots + r_i b_i + \dots + r_k b_k) \circ b_i$

$= r_1 \underbrace{b_1 \circ b_i}_{0} + \dots + r_i b_i \circ b_i + \dots + r_k \underbrace{b_k \circ b_i}_{0} \Rightarrow \underbrace{v \circ b_i}_{\in \mathbb{R}} = r_i \underbrace{(b_i \circ b_i)}_{\in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

BSP. (Fortsetzung) $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \dfrac{8}{2} = 4$
- $\dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \dfrac{-8}{2} = -4$
- $\dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \dfrac{15}{1} = 15$

Orthonormalbasis

von V

- Eine Orthogonalbasis $(b_1, \ldots, b_k)$ eines Untervektorraums W von $\mathbb{R}^n$ wird eine Orthonormalbasis von W genannt, wenn

$$||b_i|| = 1$$

für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt.

- Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

  Die Spaltenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis des Spaltenraums $\mathrm{Col}(A)$ von A genau dann, wenn

$$A^T A = E_n$$

gilt.

Bsp.

(1) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ ist eine Orthonormalbasis, $\|e_i\|=1$ $(i=1,2,3)$

(2) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ in eine Orthonormalbasis

dann $\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0)} = 1$

Orthogonalbasis $\longrightarrow$ Orthonormalbasis

$\{b_1, \dots, b_k\}$ $\qquad$ $\left\{ \frac{b_1}{\|b_1\|}, \dots, \frac{b_k}{\|b_k\|} \right\}$

Bem. $\left\| \frac{b_i}{\|b_i\|} \right\| = \sqrt{\frac{b_i}{\|b_i\|} \circ \frac{b_i}{\|b_i\|}} = \sqrt{\frac{1}{\|b_i\|^2}\, b_i \circ b_i} = \frac{1}{\|b_i\|}\sqrt{b_i \circ b_i} = \frac{1}{\|b_i\|}\|b_i\| = 1$

Allgemein:

$v \in V \xrightarrow{\text{NORMIEREN}} \frac{v}{\|v\|}$

$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$

Orthogonale Projektion

- Es sei $(b_1, \ldots, b_k)$ eine Orthogonalbasis für einen Untervektorraum W von $\mathbb{R}^n$ und

  $$v = r_1 b_1 + \cdots + r_k b_k$$

  mit $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

  $$r_i = \frac{v \bullet b_i}{b_i \bullet b_i} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

- Es sei $v \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei $u \in \mathbb{R}^n$ und

  $$v = \hat{v} + w$$

  mit $\hat{v} = ru$ für ein $r \in \mathbb{R}$ und $u \bullet w = 0$ und $U := \mathrm{Span}(\{u\})$. Dann gilt:

  $$\hat{v} = \mathrm{proj}_U v = \frac{v \bullet u}{u \bullet u} u$$

  $\hat{v}$ wird orthogonale Projektion von v auf U genannt.