TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra
Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Mengen, Relationen

$\boxed{\text{V.}}$ Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen A, B einer festen Menge M gilt:

- $A \cap \overline{B} = A \setminus B$;
  $\forall x: x \in A \cap \overline{B} \Leftrightarrow \forall x: (x \in A) \wedge (x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg (x \in B)$
  $\Leftrightarrow \forall x: x \in A \setminus B$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
  $\forall x: x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow \neg (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg ((x \in A) \wedge (x \in B))$
  $\Leftrightarrow \neg (x \in A) \cup \neg (x \in B) \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$
  $\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

Ü7. Überprüfen Sie für jede der folgenden Gleichungen, ob Sie für beliebige Teilmengen A, B, C einer festen Menge M richtig oder falsch sind. Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

$A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap \overline{C}) = (A \cap B) \cap \overline{C}$
$= (A \cap B) \setminus C$

(i) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;

$(A \setminus B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B \cap M$
$= A \cup B$

(ii) $(A \cup B) \setminus B = (A \setminus B) \cup B$;

$(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \cup \emptyset = A \setminus B$

(iii) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

$= A \setminus (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$
$= A \cap B$

Ü8. (a) Geben Sie Beispiele für Relationen an, die zwei der Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllen, aber nicht die dritte.

(b) Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer vier- bzw. einer fünfelementigen Menge?

<u>Hinweis:</u> Sie können in (b) ausnutzen, dass sich jede Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ durch ihre Äquivalenzklassen beschreiben lässt. Die Menge der Äquivalenzklassen $M/R = \{[m]_R \mid m \in M\}$ bildet eine Partition von M.

Ü9. Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R auf der jeweiligen Grundmenge A Äquivalenzrelationen sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen.

(a) $A = \{1,2,3,4,5,6\}, R = \{(1,6),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(4,2),(4,3),(6,1)\} \cup \Delta_A$;

(b) $A = \mathbb{R}, R = \{(x,y) \mid \exists k \in \mathbb{Z}: x = y + 2k\pi\}$;
$(x,x) \in R$, $x = x + 2k\pi$, $k = 0$ ✓
$(x,y) \in R \Rightarrow x = y + 2k\pi$, aber auch $y = x + 2(-k)\pi \Rightarrow (y,x) \in R$ ✓
$(x,y) \in R$ $(y,z) \in R$ $\quad x = y + 2k\pi$, $y = z + 2l\pi \Rightarrow x = z + 2\pi(k+l)$
$(x,z) \in R$

(c) $A = \mathbb{R}, R = \{(x,y) \mid |x-y| < \pi\}$;

(d) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), R = \{((a,b),(c,d)) \mid ad = bc\}$.

<u>Hinweis:</u> Die Relation $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ bezeichnet die *identische Relation* auf A.

A10. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 3. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**

(a) Beweisen Sie, dass für beliebige Teilmengen A, B, C einer festen Menge M gilt:

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C).$$

(b) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt zweier Äquivalenzrelationen auf einer festen Menge M wieder eine Äquivalenzrelation auf M ist.

H11. (a) Es sei $A = \{a, b\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, und $C = \mathcal{P}(B)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $\{a\} \in A$, (ii) $\{a\} \in B$, (iii) $\{a\} \in C$, (iv) $\{\{a\}\} \subseteq B$,
(v) $\{\{a\}\} \in C$, (vi) $\{\emptyset\} \subseteq A$, (vii) $\{\emptyset\} \subseteq B$, (viii) $\{\emptyset\} \subseteq C$.

(b) Beweisen Sie, dass die folgenden Beziehungen

(i) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$,

(ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

für beliebige Teilmengen A, B einer festen Menge M gelten. Gilt sogar Gleichheit? Begründen Sie!

H12. Seien A, B, C Teilmengen einer festen Menge M.

(a) Überprüfen Sie, ob die Differenz $\setminus$ eine assoziative Mengenoperation ist, d.h. ob gilt:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

(b) Überprüfen Sie, ob die *symmetrische Differenz* $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ eine assoziative Mengenoperation ist, d.h. ob gilt:

$$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C.$$