TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

6. Übungsblatt für die Woche 13.05. - 19.05.2019

Potenzreihen, Taylorentwicklung

Ü31 Gegeben ist die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Potenzreihe für alle $x \in (0,2)$ absolut konvergent ist.

(b) Bestimmen Sie für die Funktion $f\colon (0,2) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$ ihre Ableitung.

Ü32 (a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

(i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k^k}(x+2)^k$, (ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{5k^{2k}}\Big(x-3\Big)^k$.

Sind die Reihen im Punkt $x = 1$ konvergent? Begründen Sie!

(b) Von der Potenzreihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k\,(k-1)}(x+\frac{1}{2})^k$ ist bekannt, dass ihr Konvergenzradius $r = 2$ beträgt. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert.

Ü33 (a) Bestimmen Sie die Ableitungen der reellen Funktionen f mit

(i) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}\right)$, (ii) $f(x) = \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x^2+1}$.

(b) Stellen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ eine Formel für die n-te Ableitung der reellen Funktion f mit $f(x) = 1 + \ln(x)$ auf, und beweisen Sie deren Gültigkeit mit vollständiger Induktion.

(c) Betrachtet werden folgende Funktionen f und Werte $x_0 \in \mathbb{R}$:

(i) $f(x) = 1 + \ln(x)$, $x_0 = 1$, (ii) $f(x) = x\sin(2x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

(1) Stellen Sie für die Funktionen jeweils die Taylorpolynome bis zum 3. Grad mit Entwicklungsstelle x_0 auf.

(2) Wie lautet die lineare Approximation von f in der Umgebung von x_0 ?

H34 $\boxed{\textbf{A}}$ **Hinweis:** In der Lösung zu dieser Aufgabe muss bei der Berechnung von Grenzwerten klar ersichtlich sein, welche Rechenregeln und bekannten Grenzwerte Sie an welcher Stelle anwenden!

Gegeben ist die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k\sqrt{k}}(x-1)^k$.

(a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt x_0 und den Konvergenzradius r. Ist die Reihe im Punkt $x = -1$ konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den Randpunkten $x_0 \pm r$ des Konvergenzintervalls.

H35 (a) Geben Sie für die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{(k-1)\,!}(x-3)^k$ den Mittelpunkt an, und berechnen Sie den Konvergenzradius.

(b) Von einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist bekannt, dass sie an der Stelle $x = 0$ konvergent ist und an den Stellen $x = -4$ und $x = 2$ divergent. Wie groß kann der Konvergenzradius dieser Potenzreihe höchstens sein?

H36 Bestimmen Sie die Reihensumme für alle Werte x, in denen folgende Potenzreihen existieren, indem Sie die Reihen auf passende geometrische Reihen zurückführen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{3^n} \cdot (x-1)^n,$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n-1}} \cdot x^{n+1}.$

Geben Sie für beide Reihen ihren Konvergenzradius an!

Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots$

Ü3) Mittelpunkt

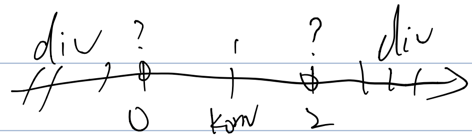
$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k}_{:=a_k}$ zu zeigen für alle $x \in (0,2)$ abs konv.

WK: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \overset{!}{<} 1$

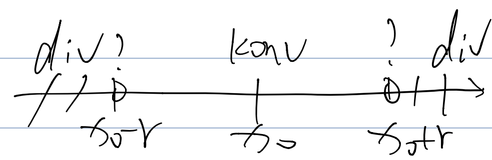
$\iff \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k}\right| |(x-1)^k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k}\right|} \cdot \sqrt[k]{|x-1|^k} = |x-1| < 1$

$\iff x \in (1-1, 1+1) = (0,2)$

Konvergenzradius



allgemein:



b) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \in \mathbb{R}$ für $x \in (0,2)$

Laut VL: in $(0,2)$ beliebig oft differenzierbar

$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot k (x-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (x-1)^{k-1}$

$n = k-1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-x+1)^n}_{q} = \frac{1}{1-(-x+1)} = \frac{1}{x}$

32) Konvergenzradius und Mittelpunkt

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(k+1)!}{k^k}(x+2)^k}_{a_k}$, (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-2)^k}{5k^{2k}}\left(x-3\right)^k}_{a_k}$.

Mittelpunkt : $x_0 = -2$

mit QK:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{(k+2)!}{(k+1)^{k+1}}(x+2)^{k+1}}{\frac{(k+1)!}{k^k}\cancel{(x+2)^k}}\right|$$

$$= |x+2| \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+2)\cancel{(k+1)!}\cdot k^k}{(k+1)^k\cdot(k+1)\cdot\cancel{(k+1)!}}\right|$$

$$= |x+2| \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}\right|^k \cdot \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+2}{k+1}\right|$$

$$= |x+2| \lim_{k\to\infty}\left|\underbrace{\frac{k}{k+1}}_{<1}\right|^k \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{1}{k}}\right|$$

QK: $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \overset{!}{<} 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(k+2)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{(k+1)!}{k^k}}\cdot\frac{(x+2)^{k+1}}{(x+2)^k}\right| = |x+2| \lim \frac{(k+2)!\cdot k^k}{(k+1)!\,(k+1)^{k+1}}$$

$$= |x+2| \lim_{k\to\infty}\frac{(k+2)\cdot k^k}{(k+1)^{k+1}} = |x+2| \lim_{k\to\infty}\frac{k+2}{k+1}\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^k < 1$$

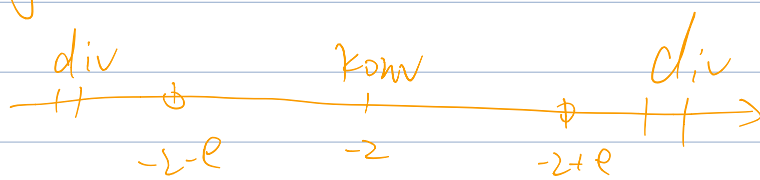
$$= |x+2| \cdot \lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{1}{k}}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^k < 1$$

$$= |x+2| \, \frac{1+\lim\frac{1}{k}}{1+\lim\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} < 1$$

$$= |x+2| \cdot \frac{1+0}{1+0} \cdot \frac{1}{e^1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad |x+2| < e \longrightarrow r$$

Konvergenzradius $r = e$



in $x=1$ nicht konv, da $1 > -2+e$

ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{5k^{2k}} (x-3)^k \qquad x_0 = 3$

mit WK:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{5k^{2k}}\right| |x-3|^k}$$

$$= |x-3| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{5k^{2k}}\right|}$$

$$= |x-3| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{5}\left|\frac{2}{k}\right|^k \cdot \left|\frac{1}{k}\right|^k} = |x-3| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{5}} \sqrt[k]{\left|\frac{2}{k}\right|^k} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k}\right|^k}$$

$$= |x-3| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{2}{k}\right| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{k}\right| = 0$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ gilt, $a_k < 1$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \overset{!}{<} 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{(-2)^k}{5\cdot k^{2k}}} \cdot |x-3| < 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{\sqrt[k]{5}\cdot k^2}\, |x-3| = 2|x-3| \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{5}} \left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\right)^2 < 1$$

$$2|x-3|\cdot 0^2 < 1 \iff 0 < 1$$

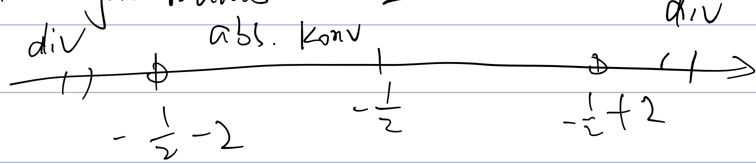
für alle x

$\Rightarrow r = +\infty$

$\Rightarrow$ bei $x=1$ konv.

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k(k-1)} (x+\frac{1}{2})^k \qquad x_0 = -\frac{1}{2}$ (Mittelpunkt)

Konvergenzradius $r = 2$



absolut konv in $(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

divergent für $x < -\frac{5}{2}$ und $x > \frac{3}{2}$

Randpunkte einsetzen: QK & WK funktionieren nicht bleibt nur LK oder bekannte Reihen (oder VK)

$x_1 = -\frac{5}{2}$,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k(k-1)} \underbrace{\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)}_{x_0-r-x_0-r}^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k(k-1)} (-2)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k(k-1)}\, 2^k$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k-1}$$

LK: $a_k = \frac{1}{k-1}$ $\quad \lim \frac{1}{k-1} = 0$ und (a_k) smf.

$\Rightarrow$ konv

$x_2 = \frac{3}{2}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k(k-1)} 2^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ harmon. Reihe

$\Rightarrow$ divergent.

33

a) i) $f(x) = \ln \sqrt{1+\sin^2(x)}$ $\quad t = \sqrt{1+\sin^2(x)}$ $\quad s = \sin^2(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{t} t' = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(x)}} \quad \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} s'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(x)}} \cdot \frac{1}{2} (1+\sin^2(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\sin(x) \cdot \cos x$$

$$= \frac{\cancel{2}\sin^2(x) \cos x}{\cancel{2}\sqrt{1+\sin^2(x)} \cdot \sqrt{1+\sin^2(x)}} = \frac{\sin(x) \cos x}{1+\sin^2(x)}$$

ii) $f(x) = \frac{x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(x^2+1)^2}$$

b) $f(x) = -1 + \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$$f^{(4)}(x) = \frac{2\cdot 3}{x^4}$$

Behauptung: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$, für $n \geq 1$

Beweis

IA: $n=1$: $f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^2 \frac{(1-1)!}{x}$

IS: z.zg: $\forall n \geq 1: f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ } IV

$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2} \frac{n!}{x^{n+1}}$

Beweis: $f^{(n+1)}(x) = (f^{n}(x))' = \left((-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}\right)'$

$= (-1)^{n+1} (n-1)! \left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)'$

$= (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (-n)(x)^{-n-1}$

$= (-1)^{n+2} \cdot n! \frac{1}{x^{n+1}}$

H34 $\boxed{\text{A}}$ **Hinweis:** In der Lösung zu dieser Aufgabe muss bei der Berechnung von Grenzwerten klar ersichtlich sein, welche Rechenregeln und bekannten Grenzwerte Sie an welcher Stelle anwenden!

Gegeben ist die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k\sqrt{k}}(x-1)^k$.

(a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt x_0 und den Konvergenzradius r. Ist die Reihe im Punkt $x=-1$ konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den Randpunkten $x_0 \pm r$ des Konvergenzintervalls.

$x_0 = 1$ $\qquad a_k := \frac{1}{3^k\sqrt{k}}(x-1)^k$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{3^k\sqrt{k}}(x-1)^k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{3^k\sqrt{k}}} \cdot |x-1|$$

$$= |x-1| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3} \sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{1}{3}|x-1| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sqrt{\frac{1}{k}}}$$

$$= \frac{1}{3}|x-1| \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{3}|x-1| \sqrt{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{3}|x-1| < 1$$