Erwarmung.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad B = (b_1, b_2)$ $\quad e = (w_1, w_2, w_3)$

Linear. $\quad$ Basis in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$

$f(b_1) = w_1 + w_3 \qquad f(b_2) = 2w_2 - w_3$

w oder f ?

(1) $f(b_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ f denn $f(b_1)_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\{f(b_1), f(b_2)\}$ Basis von $\mathbb{R}^2$ f. denn ist Teilmenge von $\mathbb{R}^3$

(3) $\{f(b_1), f(b_2)\}$ Basis von $\operatorname{Im}(f)$ w. $f(b_1), f(b_2)$ l.u.

(4) f vollständig festgelegt. w. $f(v) = f(k_1 b_1 + k_2 b_2) = k_1 f(b_1) + k_2 f(b_2)$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Darstellungsmatrix von f bzgl. dieser Basen ist $A_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. $f(v) = A_{BC} v_B$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

11. Übungsblatt für die Woche 17.12. - 21.12.2018

Lineare Abbildungen, Basiswechsel, Determinante

Ü61 (a) Es sei V der Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad kleiner 3 und $f : V \to V$ mit

$$f(a + bx + cx^2) = 2b + (a - b + c)x + (2a - 3c)x^2.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bzgl. der (geordneten) Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

(b) In $\mathbb{R}^2$ sind die (geordneten) Basen $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ und $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)$ gegeben.

- Stellen Sie diejenige Matrix M auf, für die $v_{\mathcal{C}} = M \cdot v_{\mathcal{B}}$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt.
- Berechnen Sie die Koordinaten von $v_1 = (3, 1)^T$ und $v_2 = (1, -2)^T$ bzgl. der Basis C.
- Gegeben ist lineare Abbildung:
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$
Stellen Sie die Darstellungsmatrizen $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, $A_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ und $A_{\mathcal{C}\mathcal{C}}$ auf. Wie lauten die Koordinaten der Bildvektoren $f(v_1)$, $f(v_2)$ bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$?

Ü62 Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{=2}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$= 3(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 3$

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A_1, A_2 und A_3.
Was können Sie daraus für die Spalten der Matrizen schlussfolgern?

(b) Berechnen Sie die Determinanten von A_1^T, A_1^2, $2A_3$ und $(A_1A_3)^{-1}$.

(c) Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch $f(v) = A_3v$ definiert ist und Q_3 der dreidimensionale Einheitswürfel.
Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Wie groß ist das Volumen des Bildes $f(Q_3)$?

Ü63 (a) Gegeben sind die reellen Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(B)$ und $\det(C)$ einerseits mittels elementarer Zeilenumformungen und Überführung in eine obere Dreiecksmatrix, andererseits mittels des Entwicklungssatzes.

(b) Gibt es Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AA = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $BB^T = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. Geben Sie Beispiele an bzw. begründen Sie, warum derartige Matrizen nicht existieren.

Ü61 a)

$f(a+bx+cx^2) = 2b + (a-b+c)x + (2a-3c)x^2$

$B = (1, x, x^2) \qquad P(x)_B = (a+bx+cx^2)_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

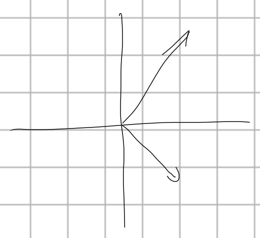
$f(P(x))_B = \begin{pmatrix} 2b \\ a-b+c \\ 2a-3c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{Dar.}} P(x)_B$

b) $\mathbb{R}^2 \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b_2} \right)$

ges: M mit $v_C = M \cdot v_B \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

$v_B = v = x_1 e_1 + x_2 e_2 = y_1 b_1 + y_2 b_2$ und $v_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (b_1 \; b_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow M = (b_1 \; b_2)^{-1}$



$M = \frac{1}{3-(-4)} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Basiswechselmatrix von B zu C

$v_C = M v_B$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{v_B} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$

speziell $v = b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot (-2) \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} (-2) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 2 + a_{12} \cdot 3 \\ a_{21} \cdot 2 + a_{22} \cdot 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

- $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

  $v_{1C} = M \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_{2C} = M \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} \qquad A_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$f(v)_B = A_{BB} v_B$

$f(v)_C = A_{BC} v_B = (f(e_1), f(e_2))_C \qquad f(v_C) = M f(v_B) = \overbrace{M \cdot A_{BB}}^{A_{BC}} \cdot v_B = \underbrace{M A_{BB} M^{-1}}_{A_{CC}} v_C$

$A_{BC} = M A_{BB} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{CC} = M A_{BB} M^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -11 & 13 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

$f(v_1)_B = A_{BB} v_{1B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$f(v_1)_C = A_{BC} v_{1B} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}$

$f(v_2)_B = A_{BB} v_{2B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$f(v_2)_C = A_{BC} v_{2B} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}$

63)

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 10 - 6 = 4$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow -3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -3 (1 - 9) = 24$

b2 $\det(A_1^T) = \det(A_1) = 2.$

$\det(A_1^2) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 10 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[-IZ]{IS \Rightarrow IS} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 10 & 2 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & -18 \\ 0 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

$f(V) = A_3 \cdot V$: bewirkt Drehung des Einheitswürfels um die z.-Achse um α in math. Pos. drehsinn streckung mit Faktor 3 in z-Richtung

$$\mathrm{Vol}\, f(R_3) = |\det(A_3) \mathrm{Vol}(R_3)| = 3 \cdot 1 = 3$$

H64 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Berechnen Sie die Determinante der reellen Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & k \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 & k \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit vom Parameter k. Für welche $k \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix eine inverse Matrix?

(b) Berechnen Sie eine geeignete Determinante, um zu prüfen, ob folgende Vektoren aus $\mathbb{R}^{3\times 1}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

H65 (a) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix über dem Körper $\mathbb{Z}_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schlussfolgern Sie anhand ihres Ergebnisses, ob die lineare Abbildung $f : (\mathbb{Z}_3)^4 \to (\mathbb{Z}_3)^4$, die durch $f(x) = Ax$ definiert ist, die Eigenschaften injektiv, surjektiv bzw. bijektiv besitzt.

(b) Betrachtet wird die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z \cdot i$.

(1) Zeigen Sie, dass f eine bijektive lineare Abbildung ist.

(2) Die komplexen Zahlen $e_1 := 1$ und $e_2 := i$ bilden eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ (warum?). Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{BB}}$ von f.

(3) Die komplexen Zahlen $u_1 := 1 + i$ und $u_2 := 2 - 2i$ bilden auch eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{C}$ (warum?). Wie lautet die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{CC}}$ von f?

(4) Es sei $z := 5 + i$. Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren von z und von $f(z)$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

H66 (a) Gegeben ist folgende lineare Abbildung f:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ -6x_2 + 12x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A_{\mathcal{BC}}$ bzgl. der folgenden Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des $\mathbb{R}^3$:

(1) $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ sind die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$,

(2) $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

(b) Schreiben Sie ein Programm, das einen durch eine Reihe von Vielecken dargestellten Schriftzug in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) kursiv setzt, indem Sie die Eckpunkte mit einer geeigneten 2×2-Matrix multiplizieren. Erfreuen Sie sich z.B. an einem kursiven

Frohe Weihnachten!