Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/∼baumann

19.11.2018

7. Vorlesung

- Struktur der Lösungsmenge von LGS
  - Untervektorraum, Basis, Dimension
  - affiner Teilraum
- Kern einer Matrix
- Rang einer Matrix
  - Zeilenraum
  - Spaltenraum
  - Lösbarkeitskriterium für LGS

$Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow$ $\boxed{\ldots}$

$A \in K^{m\times n}$ $\underbrace{x \in K^{n\times 1}}_{K^n}$ $\underbrace{b \in K^{m\times 1}}_{K^m}$

Homogene. LGS $Ax = 0_{K^m}$

Lösungsmenge $L_K = \{x \in K^n \mid Ax = 0_{K^m}\} \subseteq K^n$

L_K ist ein UVR von K^n, denn:

(1) $0_{K^n} \in L_K$, denn $0_{K^n} \in K^n$, $A \cdot 0_{K^n} = 0_{K^m}$

(2) $x_1, x_2 \in L_K$, denn: $x_1 + x_2 \in K^n$, $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow x_1 + x_2 \in L_K$

(3) $x \in L_K$, $k \in K \Rightarrow kx \in L_K$, denn: $kx \in K^n$ und $A(kx) = kAx = k \cdot 0_{K^m} = 0_{K^m}$

Rückblick (1): LGS mit m Gleichungen in n Unbekannten

- $$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

- Kurzform: $\boxed{Ax = b}$

Rückblick (2): LGS mit m Gleichungen in n Unbekannten

- $$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- $$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Kurzform: $\boxed{Ax = b}$

$A = (s_1 | s_2 | \dots | s_n)$
Spaltenvektoren von A

Struktur der Lösungsmenge homogener LGS

Es sei $A_{m\times \underline{n}}x_{\underline{n}\times 1} = 0_{m\times 1}$ ein homogenes LGS über dem Körper K.

- $0_{n\times 1}$ ist eine Lösung.

  Sind $x_1 \in K^n$ und $x_2 \in K^n$ Lösungen,
  dann ist auch $x_1 + x_2 \in K^n$ eine Lösung dieses LGS.

  Ist $x_1 \in K^n$ eine Lösung und $k \in K$, dann ist auch $kx \in K^n$ eine Lösung dieses LGS.

- Die Menge der Lösungen eines homogenen LGS $Ax = 0$ mit einer $\underline{m \times n\text{-Koeffizientenmatrix}}$ A über K bildet einen $\underline{\text{Untervektorraum}}$ von K^n.

- Die Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$ wird Kern der Matrix A genannt:

$$\underline{\mathrm{Ker}(A) := \{x \in K^n \mid Ax = 0\}}$$

Bem. Der Kern einer Matrix A ist die Lösungsmenge des hom. LGS mit der Koeffizientenmatrix A

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3} \xrightarrow{\text{hom LGS}} \ker(A) = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

$\ker(A) = 1$, 2 Zeilen in der ZSF

Struktur der Lösungsmenge inhomogener LGS

Es sei $Ax = b$ ein inhomogenes LGS über K und $Ax = 0$ das zugehörige homogene LGS. L in kein UVR von K^n, denn $0_{K^n} \notin L$

$L = \{x \in K^n \mid Ax = b\} \subseteq K^n$

- Ist x_1 eine spezielle Lösung von $Ax = b$ und x^* eine Lösung von $Ax = 0$, dann ist $x_1 + x^*$ eine Lösung von $Ax = b$.

- Sind x_1 und x_2 Lösungen von $Ax = b$, dann ist $x_2 - x_1$ eine Lösung x^* des homogenen LGS $Ax = 0$.

- Ist L^* die Lösungsmenge von $Ax = 0$ und x_1 eine spezielle Lösung von $Ax = b$, dann ist

$$x_1 + L^* = \{x_1 + x^* \mid x^* \in L^*\}$$

die Lösungsmenge von $Ax = b$.

Bem. (1) $\underset{\text{fest}}{x_1}, \underset{\text{bel.}}{x_2} \in L \Rightarrow x_2 - x_1 \in L_k \mid x_2 \in \underbrace{x_1 + L_k}_{\{x_1 + x_h \mid x_h \in L_h\}}$

bzw. $L \subseteq x_1 + L_k$

(2) Sogar:

$x_1 \in L,\ x_h \in L_h \Rightarrow x_1 + x_h \in L \Rightarrow \underline{L \supseteq x_1 + L_h}$

Bem. $L = x_1 + L_h$ — Lösungsmenge von $Ax = 0$

L: Lösungsmenge von $Ax = b$

x_1: eine spezielle Lösung von $Ax = b$

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Bsp. $L = \left\{ \begin{pmatrix} 2+3s-4t \\ s+2t \\ -1-t \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist eine spezielle Lösung des inhom. Systems. $L_h = \operatorname{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right)$

Affine Teilräume

- Es sei V ein K-Vektorraum.

  Ist U ein Untervektorraum von V und $v \in V$, dann wird

  $$T := v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

  ein affiner Teilraum von V genannt.

  $\dim(T) := \dim(U)$ heißt Dimension des affinen Teilraums T.

  $v + U$

- Die Lösungsmenge jedes LGS über einem Körper K bildet einen affinen Teilraum von K^n.

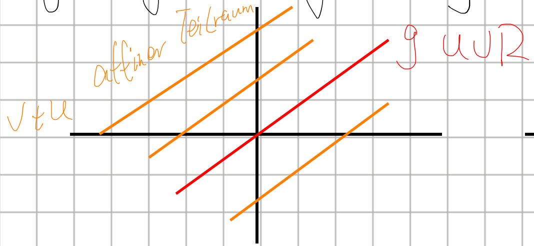
  Dieser affine Teilraum ist genau dann ein Untervektorraum von K^n, wenn des LGS homogen ist.

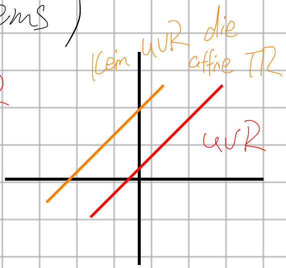
Bem. $v+U$ UVR von $V \iff v \in U$

Anderfalls enthält $v+U$ nicht der Nullvektor von V.

Bsp: (1) Lösungsmengen von inhomogen. LGS sind affine Teilräume (zum UVR der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems)

(2)





Bem. V K-VR $\dim V = n$

- 0-dimensionale affine Teilräume heißen Punkte
- 1- Geraden
- 2- Ebenen
- $(n-1)$- Hyperebenen.

Zeilenraum und Spaltenraum

- Ist $A = (s_1, s_2, \ldots, s_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_m)^T$ eine $m \times n$-Matrix über einem Körper K mit den **Spaltenvektoren** $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und den **Zeilenvektoren** $z_1, z_2, \ldots, z_m$, dann wird

  column $$\mathrm{Col}(A) := \mathrm{Span}(\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}) \subseteq K^m$$

  der **Spaltenraum von A** und

  $$\mathrm{Row}(A) := \mathrm{Span}(\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}) \subseteq K^n$$

  der **Zeilenraum** von A genannt.

  $\{k_1 s_1 + \ldots + k_n s_n \mid k_1 \ldots k_n \in K\} = \{b \in K^m \mid \exists k_1 \ldots k_n \in K : b = k_1 s_1 + \ldots + k_n s_n\}$

- $\mathrm{Col}(A) = \{b \in K^m \mid \text{Es gibt ein } x \in K^n \text{ mit } Ax = b.\}$

- $\mathrm{Col}(A) = K^m$ gilt genau dann, wenn $Ax = b$ für jedes $b \in K^m$ eine Lösung hat.

- $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Col}(A^T)$

  Spaltenrang Zeilenrang

- Für jede Matrix A gilt: $\dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Row}(A)$

Die Dimension von $Col(A)$ heißt Spaltenrang von A.

Bsp. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Spaltenrang 2.

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 〃 〃 1

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 〃 〃 3

Die Dimension von Row(A) heißt Zeilenrang von A.

Bsp. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Zeilenrang 2.

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 〃 1

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 〃 3

Rang einer Matrix

- Für jede Matrix A gilt $\dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Row}(A)$.

- Der Rang $\mathrm{rg}(A)$ einer Matrix A ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{rg}(A) := \dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Row}(A)$$

- Lösbarkeitskriterium für LGS: $Ax=b$

  Ein LGS mit der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ ist genau dann lösbar, wenn

$$Ax=b \text{ lösbar} \Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{rg}(A)}_{\text{Maximalzahl linear unabhängig. Spaltenvektor / Zeilenvektor}} = \underbrace{\mathrm{rg}(A \mid b)}_{\text{in } A \mid b \text{ (von } A)}$$

$b \in \mathrm{Col}(A)$ gilt.

Bsp.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rg}(A) = 1$$

$$\mathrm{rg}(A|b) = 2$$

$\Rightarrow$ LGS ist nicht lösbar

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 1 = \mathrm{rg}(A|b)$$

$\Rightarrow$ LGS ist lösbar.