TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120-2
Wintersemester 2019/20

17. Übungsblatt für die Woche 04.11. - 10.11.2019

Algebraische Strukturen: Kongruenzrelationen, Faktorstrukturen, Homomorphismen

Ü97 Auf der Menge $\mathbb{Z}_9$ ist durch $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9 \mid a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 3)\}$ eine Äquivalenzrelation definiert.

(a) Geben Sie alle Elemente der Faktormenge $\mathbb{Z}_9/R$ an.

(b) Zeigen Sie, dass R eine Kongruenzrelation auf der Halbgruppe $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$ ist. Stellen Sie dazu die Verknüpfungstafel von $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$ sortiert nach Äquivalenzklassen auf und anschließend die Verknüpfungstafel der Faktorhalbgruppe $(\mathbb{Z}_9/R, \cdot_R)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $h : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_3$, $h(a) = a$ (mod 3), ein Homomorphismus von der Halbgruppe $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$ auf die Halbgruppe $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$ ist.

Ü98 Es werden die Menge $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ und folgende Relation R auf A betrachtet:

$$R = \left\{ \big((a,b),(c,d)\big) \in A \times A \;\middle|\; a \cdot d = b \cdot c \right\}.$$

(a) Machen Sie sich klar, dass R eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie die Äquivalenzklasse $[(1,2)]_R$ in Mengenschreibweise an.

(b) Für $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist R keine Äquivalenzrelation. Warum?

(c) Zeigen Sie, dass R eine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), \cdot)$ ist.

Ü99 (a) Es sei $h : H_1 \to H_2$ ein Homomorphismus der Halbgruppe $(H_1, \circ_1)$ in die Halbgruppe $(H_2, \circ_2)$. Beweisen Sie: Für jede Unterhalbgruppe U von H_1 bildet die Menge $h(U)$ eine Unterhalbgruppe von H_2.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) = 3x + y$$

ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ ist. Handelt es sich bei f sogar um einen Isomorphismus?

H100 $\boxed{\mathbf{A}}$ Auf der Menge $\mathbb{Z}$ wird folgende Relation R betrachtet:

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists\, k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x^k = y^l \right\},$$

(a) Beweisen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Beweisen Sie, dass R *keine* Kongruenzrelation auf der Halbgruppe $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.

H101 Zeigen Sie, dass die Relation $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a - b \text{ ist gerade}\}$ eine Kongruenzrelation auf der Halbgruppe $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.
Geben Sie alle Elemente der Faktorhalbgruppe $\mathbb{Z}/R$ an, und stellen Sie die Verknüpfungstafel der zugehörigen Operation $\cdot_R$ auf.

H102 Untersuchen Sie für die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, ob die Relation $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, die für beliebige $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch

$$(A, B) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \min(A) = \min(B)$$

definiert ist, eine Kongruenzrelation auf der Halbgruppe $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup)$ bildet.

$R \subseteq H \times H$ auf Halbgruppe $(H, \circ)$ ist Kongruenzrelation:

1) R ist Äquivalenzrelation (refl. symm, trans.)

für $a \in H$:

$$[a]_R = \{b \in H \mid (a,b) \in R\}$$

2) Verträglichkeit mit $\circ$

$\forall a, b, c, d \in H$. mit $c \in [a]_R$, $d \in [b]_R$.

$$c \circ d \in [a \circ b]_R$$

Faktorhalbgruppe

$$H/R = \{[a]_R \mid a \in H\}$$

$$[a]_R \circ_R [b]_R = [a \circ b]_R$$

97) $\mathbb{Z}_9 = \{0, \dots, 8\}$, $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9 \mid a \equiv b \pmod 3\}$

a) $\mathbb{Z}_9 / R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$ $\quad$ R ÄR.

$[0]_R = \{0, 3, 6\} = [3]_R = [6]_R$

$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$

$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$

b) $(\mathbb{Z}_9, \circ)$ Halbgruppe (sogar Monoid)

	0	3	6	1	4	7	2	5	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	3	3	3	6	6	6
6	0	0	0	6	6	6	3	3	3
1	0	3	6	1	4	7	2	5	8
4	0	3	6	4	7	1	8	2	5
7	0	3	6	7	1	4	5	8	2
2	0	6	3	2	8	5	4	1	7
5	0	6	3	5	2	8	1	7	4
8	0	6	3	8	5	2	7	4	1

$\cdot_R$	$[0]_R$	$[1]_R$	$[2]_R$
$[0]_R$	$[0]_R$	$[0]_R$	$[0]_R$
$[1]_R$	$[0]_R$	$[1]_R$	$[2]_R$
$[2]_R$	$[0]_R$	$[2]_R$	$[1]_R$

$\cong (\mathbb{Z}_3, \cdot)$

Blockbildung gemäß ÄK $\Rightarrow$ Kongruenzrelation.

Bsp.

$(\mathbb{Z}_7, \cdot)$ und dasselbe R.

$[0]_R = \{0, 3, 6\}$

$[1]_R = \{1, 4\}$
$[2]_R = \{2, 5\}$

	0	3	6	1	4	2	5
0	0	0	0				
3	0	$\boxed{2}$					
6	0						
1							
4							
2							
5							

Homomorphismus: $h: H_1 \to H_2$ für HG $(H_1, \circ_1)$ und $(H_2, \circ_2)$

$\forall a, b \in H_1: \; h(a \circ_1 b) = h(a) \circ_2 h(b)$

c) $h: \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_3$, $h(a) := a \pmod 3$

z.zg: $\forall a, b \in \mathbb{Z}_9$: $h(a \cdot b \bmod 9)$
$= h(a) \cdot h(b) \bmod 3$

Beweis:

Seien $a, b \in \mathbb{Z}_9$ beliebig.

$h(a \cdot b \bmod 9) \overset{\text{Def}}{=} (a \cdot b \bmod 9) \bmod 3$

$a \cdot b - (a \cdot b) \bmod 9 = k \cdot 9$

$(a \cdot b) \bmod 9 = a \cdot b - k9$

für ein $k \in \mathbb{Z}$

$= (a \cdot b - k \cdot 9) \bmod 3 = a \cdot b \pmod 3$

$= (a \bmod 3)(b \bmod 3) \bmod 3$

$$\overset{\text{Def}}{=} h(a) \circ h(b) \mod 3$$

Homomorphie Eigenschaft von h entspricht der Verträglichkeit von R

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}_9, \cdot) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "nat_R"'] & & (\mathbb{Z}_3, \cdot) \\
& \mathbb{Z}_9/R \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

98) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $R = \{((a,b),(c,d)) \in A \times A \mid a \cdot d = b \cdot c\}$

a) R ist ÄR

- reflexiv: $\forall (a,b) \in A.\ a \cdot b = b \cdot a$, d.h. $((a,b),(a,b)) \in R$
- Symmetrisch: $\forall (a,b),(c,d) \in A$: $((a,b),(c,d)) \in R \Rightarrow ((c,d),(a,b)) \in R$

denn $a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow c \cdot b = d \cdot a$
$\Leftrightarrow ((c,d),(a,b)) \in R$

- transitiv, $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in A$
$((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(e,f)) \in R$
$\Rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$

$a \cdot d = b \cdot c \wedge c \cdot f = d \cdot e$

(in $\mathbb{Z}$ Nicht dividieren)

$\Rightarrow a \cdot d \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot d \cdot e$

1\. Fall: $c = 0 \overset{d \neq 0}{\Rightarrow} a = 0, e = 0$

$\Rightarrow 0 \cdot f = b \cdot 0$

2 Fall $c \neq 0 \overset{d \neq 0}{\Rightarrow} a \cdot f = b \cdot e$

$\Rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$

ÄK $[(1,2)]_R = \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

b) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ R ist nicht transitiv.

denn $((1,0),(0,0)) \wedge ((0,0),(0,2)) \in R$.

aber $((1,0),(0,2)) \notin R$

c) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}), \cdot)$

$(a,b) \cdot (c,d) := (a \cdot c, b \cdot d)$

z.zg.

Seien $(a,b), (c,d), (e,f), (g,h) \in A$ mit

$(e,f) \in [(a,b)]_R$, $(g,h) \in [(c,d)]_R$

dann gilt $(e,f) \cdot (g,h) \in [(a,b) \cdot (c,d)]_R$

Beweis: Wir haben

$(e,f) \in [(a,b)]_R$, d.h. $a \cdot f = b \cdot e$ (1)

$(g,h) \in [(c,d)]_R$, d.h. $c \cdot h = d \cdot g$ (2)

d.h. $(e \cdot g, f \cdot h) \in [(a \cdot c, b \cdot d)]$, d.h.

$(a \cdot c) \cdot (f \cdot h) = (b \cdot d) \cdot (e \cdot g)$

$(1) \cdot (2) \Rightarrow (a \cdot f) \cdot (c \cdot h) = (b \cdot e)(d \cdot g)$

$\Rightarrow (a \cdot c) \cdot (f \cdot h) = (b \cdot d) \cdot (e \cdot g)$ $\square$

Bsp. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\quad (a,b)+(c,d) = (ad+bc, bd)$

99)

b) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f((x,y)) = 3x + y$

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$

z.zg: $f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f((x_1, x_2)) + f((y_1, y_2))$

für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Beweis: $f((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$

$= f((x_1 + y_1, x_2 + y_2))$

$\overset{\text{Def}}{=} 3(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 3x_1 + x_2 + 3y_1 + y_2$

$= (1) + (2)$

$f((x_1, x_2)) = 3x_1 + x_2 \quad (1) \quad = f((x_1, x_2)) + f((y_1, y_2))$

$f((y_1, y_2)) = 3y_1 + y_2 \quad (2)$