Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/∼baumann

3.12.2018

9. Vorlesung

- Eigenschaften linearer Abbildungen
- Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen

. . . .

- Eigenschaften von Determinanten
- Berechnung von Determinanten
  für 2-reihige und 3-reihige Matrizen

Lineare Abbildung.

$f: V \to W$ $\qquad k_1 v_1 + k_2 v_2 \mapsto k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2)$.

K-VR $\quad$ K-VR

Bsp. (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to ax$. ($a \in \mathbb{R}$, a fest)

(2) $f: K^n \to K^m$ $\quad v \to A \cdot v$ ($A \in K^{m \times n}$, A fest)

ist eine lineare Abbildung; denn:

$f(k_1 v_1 + k_2 v_2) = A(k_1 v_1 + k_2 v_2) = A k_1 v_1 + A k_2 v_2$

$k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) = k_1 A v_1 + k_2 A v_2$ $\quad$ //

(3) ... : $f \to f'$ (Ableitung) linear, denn: $(r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x))' = (r_1 f_1(x))' + (r_2 f_2(x))' = r_1 f_1'(x) + r_2 f_2'(x)$.

Bem. Jede Lin. Abb $f: V \to W$ ist durch die Bilder der Vektoren einer Basis von V eindeutig bestimmt.

$\longrightarrow$ Nächste Seite

Eigenschaften linearer Abbildungen

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ sei eine Basis von V.

$w_i := f(b_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ seien die Bilder der Basisvektoren.

1. f ist injektiv $\iff$ $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ist linear unabhängig
2. f ist surjektiv $\iff$ $\text{Span}(\{w_1, w_2, \dots, w_n\}) = W$
3. f ist bijektiv $\iff$ $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ist eine Basis von W

gesucht: $f(v)$ für $v \in V$

beliebig.

Dann: $f(v) = f(k_1 b_1 + \dots + k_n b_n) = k_1 f(b_1) + \dots + k_n f(b_n)$

$\underset{\sim}{v_B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff v = k_1 b_1 + \dots + k_n b_n$

Koordinatenvektor von v bzgl. B

BSP: $f: \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{Basis}} \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+2c \\ a+b \end{pmatrix}$, gegeben $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = f\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = af\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + bf\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + cf\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c \\ a+b \end{pmatrix}$$

f injektiv $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_V\}$ $(\Leftrightarrow |\ker(f)| = 1)$

$f: V \to W$ $\quad \ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subseteq V$

$(\Rightarrow)$ Voraus. f injektiv.

Beh. $\ker(f) = \{0_V\}$. z.z. $0_V \in \ker(f)$

$v \in \ker(f) \Rightarrow v = 0_V$

· $0_V \in \ker(f)$ siehe letzte Vorlesung.

$v \in \ker(f) \Rightarrow f(v) = 0_W = f(0_V)$

$\underset{f \text{ inj}}{\Rightarrow} v = 0_V$

$(\Leftarrow)$ Vorauss. $\ker(f) = \{0_V\}$

Beh. f injektiv. z.z. $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$

Bew. $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow \underbrace{f(v_1) + (-1)f(v_2)}_{f(1 \cdot v_1 + (-1)v_2)} = \underbrace{f(v_2) + (-1)f(v_2)}_{0_V}$

$\Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0_V \Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2$

Lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Av$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Die identische Abbildung bildet jeden Vektor auf sich selbst ab.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Die Nullabbildung bildet jeden Vektor auf den Nullvektor ab.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Jeder Vektor (a, b) wird auf den doppelten Vektor $(2a, 2b)$ abgebildet.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Senkrechte Projektion auf die x-Achse

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Senkrechte Projektion auf die Winkelhalbierende des ersten Quadranten

$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ Linksdrehung um den Koodinatenursprung um den Winkel φ

$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ Spiegelung an der Geraden, die gegen die x-Achse mit dem Winkel $\frac{\varphi}{2}$ geneigt ist

Lineare Abbildungen $f_A : v \mapsto Av$

- Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ induziert eine lineare Abbildung f_A vom K-Vektorraum K^n in den K-Vektorraum K^m:

$$f_A : K^n \to K^m : v \mapsto Av$$

- Jede lineare Abbildung aus einem n-dimensionalen K-Vektorraum in einen m-dimensionalen K-Vektorraum lässt sich mit einer geeigneten Matrix $A \in K^{m \times n}$ in der Form $v \mapsto Av$ darstellen.

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+2c \\ a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} c = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Basis von $\mathbb{R}^3$ e_1, e_2, e_3.

Basis von $\mathbb{R}^2$ e_1, e_2.

$f: K^n \to K^m$ linear. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$

Basis $\quad$ Basis

$e_1 \dots e_n \quad e_1 \dots e_m$

$$f(v) = f(v_1 e_1 + \dots + v_n e_n) \overset{f \text{ linear}}{=} \underbrace{f(e_1)}_{\in K^m} v_1 + \dots + \underbrace{f(e_n)}_{\in K^m} v_n = \underbrace{\begin{array}{ccc} f(e_1) & & f(e_n) \\ \hline \Big| & \cdots & \Big| \end{array}}_{A} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Av$$

Darstellung linearer Abbildungen bezüglich der Standardbasen

Es sei $f : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung,
$v = (v_1, \dots, v_n)^T \in K^n$
und $(e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von K^n.

$$\begin{aligned}
f(v) &= f(v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) \\
&= v_1 f(e_1) + \cdots + v_n f(e_n) \\
&= \underbrace{(f(e_1), \dots, f(e_n))}_{=:\, A} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= Av \\
&= f_A(v)
\end{aligned}$$

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung eines K-Vektorraums V mit $\dim(V) = n$ in einen K-Vektorraum W mit $\dim(W) = m$.

$B = (b_1, \ldots, b_n)$ sei eine geordnete Basis von V.

$C = (c_1, \ldots, c_m)$ sei eine geordnete Basis von W.

- Man nennt die Matrix

  $$A_{BC} := (f(b_1)_C, \ldots, f(b_n)_C)$$

  die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basen B und C.

  Die i-te Spalte von A_{BC} ist der Koordinatenvektor bezüglich der Basis C des Bildes des i-ten Basisvektors aus der Basis B.

- Der Koordinatenvektor $f(v)_C$ von $f(v)$ bezüglich C ist das Produkt der Darstellungsmatrix mit dem Koordinatenvektor v_B von v bezüglich B:

  $$f(v)_C = A_{BC} \cdot v_B$$

BSP: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-y+z \\ -x+2y+3z \end{pmatrix}$

Basis $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Basis $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

ges. $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}\right)$

$$A_{BC} = \Big(\underbrace{\boxed{\;\;}}_{f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_C} \ \boxed{\;\;} \ \boxed{\;\;} \Big)$$

$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = (-3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ges. $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} =$

$v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_B = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$

$A_{BC} v_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\12\end{pmatrix} = f(v)_C$

$f(v) = f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = (-10)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$

Hintereinanderausführung linearer Abbildungen

Es sei $f_1 : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung des K-Vektorraums V_1 in den K-Vektorraum V_2 und $f_2 : V_2 \to V_3$ eine lineare Abbildung des K-Vektorraums V_2 in den K-Vektorraum V_3. Dann gilt:

- $f_2 \circ f_1 : V_1 \to V_3$ eine lineare Abbildung.

- B_i sei eine geordnete Basis von V_i für $i = 1, 2, 3$.

  $A_{B_1 B_2}$ sei die Darstellungsmatrix von f_1 bezüglich der Basen B_1 und B_2.

  $A_{B_2 B_3}$ sei die Darstellungsmatrix von f_2 bezüglich der Basen B_2 und B_3.

  Dann ist

  $$A_{B_2 B_3} \cdot A_{B_1 B_2}$$

  die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f_2 \circ f_1$ bezüglich der Basen B_1 und B_3.

Bijektive lineare Abbildungen

- Ist $f : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung, so ist auch $f^{-1} : W \to V$ eine bijektive lineare Abbildung.
- Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung kann man bezüglich beliebiger Basen bilden.
- Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ eines K-Vektorraums V ist genau dann bijektiv, wenn die Darstellungsmatrizen für f invertierbar sind.

Eigenschaften von Determinanten

$\det : K^{n\times n} \to K : A \mapsto \det(A)$

Die Determinante ist eine Abbildung det, die durch folgende Eigenschaften festgelegt ist:

- det ist multilinear,
  d.h. $\det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + kz_i^* \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + k\det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i^* \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

- det ist alternierend,
  d.h. hat A zwei gleiche Zeilen, dann gilt $\det(A) = 0$.

- det ist normiert,
  d.h. $\det(E_n) = 1$.

Determinante einer 2×2-Matrix

- Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$, so wird

$$\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in K$$

die Determinante von A genannt.

- Sind $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$,

so bilden die Punkte

$$0,\ v,\ w,\ v+w$$

die Ecken eines Parallelogramms mit dem Flächeninhalt F:

$$F = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \right|$$

Determinante einer 3×3-Matrix

- Regel von Sarrus:

  Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$, so wird

  $\det(A) := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$

  die Determinante von A genannt.

- Es gilt

  $\det(A) = a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$