Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/$\sim$baumann

7.1.2019

12. Vorlesung

mit Hilfe von EV EW

- Anwendungen $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ $(n>0)$ rekursive Def
  - Fibonacci-Zahlen $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ $(n \geq 0)$ explizite Formel
  - Diagonalisieren von Matrizen
  - Schnelles Potenzieren von Matrizen

- Skalarprodukt
  - Definition und Eigenschaften im $\mathbb{R}^n$
  - Verallgemeinerung: Euklidische $\mathbb{R}$-Vektorräume
  - Längenmessung, Winkelmessung

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

EW von A: $\det(A - kE) = 0$

charakt. Polynom

$$= \det \begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} = (1-k)(-k) - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 - k - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Eigenvektor zu k

Eigenraum von A zum EW k: $\ker(A - kE)$

Nullvektor

BSP.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ hat die Eigenvektoren } \underbrace{\overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_4}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Eigenvektorbasis: Basis der $\mathbb{R}^4$ die aus Eigenvektoren von A besteht

$Av_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3v_1 \Rightarrow 3$ EW von A, v_1 EV zum EW 3

$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 v_2 \Rightarrow -1$ $\quad v_2 \quad -1$

$Av_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 v_3 \Rightarrow -1$ $\quad v_3 \quad -1$

$Av_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 v_4 \Rightarrow -1$ $\quad v_4 \quad -1$

A hat 4 EW

$3, \underbrace{-1, -1, -1}$

-1 ist dreifacher EW

$v_1\, v_2\, v_3\, v_4$ sind l.u.

Bemerkung Sei v_1 EV zum EW k_1, v_2 EV zum EW k_2, $k_1 \neq k_2$ $\overset{*}{\Rightarrow}$ v_1, v_2 sind l.u.

Allgemein: EV zu paarweise verschiedenen EW sind l.u.

Beweis * v_1, v_2 l.u.

Sei $\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0}$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 k_1 v_1 + \alpha_2 k_2 v_2 = 0$ $\Rightarrow \alpha_2 k_2 v_2 = \alpha_2 k_1 v_2$

mit A multipl. mit k_1 mul. $\alpha_1 k_1 v_1 + \alpha_2 k_1 v_2 = 0$ $\Rightarrow \alpha_2 v_2 (k_2 - k_1) = 0$

v_2 ist EV $\Rightarrow$ $v_2 \neq 0$ $k_2 \neq k_1$ $\Rightarrow$ $k_2 - k_1 \neq 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = 0$ $\Rightarrow \alpha_1 = 0$

Diagonalisierbare Matrizen

- Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$ gibt, so dass

$$D = S^{-1}AS$$

eine Diagonalmatrix ist.

- Für jede Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

und $\ell \in \mathbb{N}$ gilt:

$$D^\ell = \begin{pmatrix} (d_1)^\ell & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (d_n)^\ell \end{pmatrix}$$

Kriterium für die Diagonalisierbarkeit

- Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis B des K^n gibt, die aus Eigenvektoren der Matrix A besteht.

- Ist $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ eine Basis des K^n aus Eigenvektoren der Matrix A, so ist die Matrix $D = S^{-1}AS$ mit $S = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} k_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & k_n \end{pmatrix};$$

dabei sind $k_1, \ldots, k_n$ die Eigenwerte von A und es gilt $Ab_i = kb_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Schnelles Potenzieren von Matrizen

Es sei A eine diagonalisierbare Matrix und $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$ eine Diagonalmatrix.

Dann gilt $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$ und

$$A^k = (S \cdot D \cdot S^{-1})^k = S \cdot D^k \cdot S^{-1}$$

BSP (Fortsetzung)

Konstruktion von S: $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underbrace{S^{-1}AS}_{D} = \begin{pmatrix} 3 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ ges: A^{1000}

$A^{1000} = S \begin{pmatrix} 3^{1000} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$

Satz: Sei $A \in K^{n \times n}$

A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es ex. n l.u. EV von A.

Bem.: A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es ex eine Eigenwertbasis des K^n, die aus EV von A besteht.

Beweis "$\Leftarrow$": Sei $v_1, \dots, v_n$ eine EV-Basis von A, $Av_1 = k_1 v_1, \dots, Av_n = k v_n$

$S := (v_1, \dots, v_n)$

$A \cdot S = (Av_1, \dots, Av_n) = (k_1 v_1, \dots, k_n v_n) = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} k_1 v_{11} & \dots & k_n v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_1 v_{n1} & \dots & k_n v_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren von $A \in K^{n \times n}$ (1) Finde eine EV-Basis $v_1, \dots, v_n$ des K^n

(2) $S := (v_1, \dots, v_n)$

(3) $S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}$, wobei $Av_i = k_i v_i$ $(i = 1, \dots, n)$

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

- Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$u \bullet v := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

- Es gilt:

$$u \bullet v := u^T v = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(Matrizenmultiplikation)

BSP. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 3 = 2$

Eigenschaften des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^n$

1. $\bullet$ ist $\mathbb{R}$-bilinear:

   Für alle $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt
   $(u_1 + u_2) \bullet v = (u_1 \bullet v) + (u_2 \bullet v)$, $(ru) \bullet v = r(u \bullet v)$
   und
   $u \bullet (v_1 + v_2) = (u \bullet v_1) + (u \bullet v_2)$, $u \bullet (rv) = r(u \bullet v)$.

2. $\bullet$ ist symmetrisch:

   Für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt:
   $u \bullet v = v \bullet u$

3. $\bullet$ ist positiv definit:

   Für alle $u \in \mathbb{R}^n$ gilt:
   $u \bullet u \geq 0$ und $u \bullet u = 0 \iff u = 0$

Euklidischer Vektorraum

- Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

  Jede Abbildung $\bullet : V \times V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3) wird ein Skalarprodukt auf V genannt.

  Ist $\bullet$ ein Skalarprodukt auf V, dann nennt man $(V, \bullet)$ einen euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

- Beispiel:

  Der Vektorraum der Polynome in x über $\mathbb{R}$ ist mit dem durch

$$p \bullet q := \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\, dx$$

  definierten Skalarprodukt $\bullet$ ein euklidischer Vektorraum.

Bsp: V: VR der reellen Polynomfunktionen $p, q \in V$

$$p \cdot q = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\,dx \quad \text{(Skalarprodukt)}$$

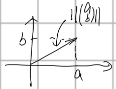
$$\left.\begin{array}{l} p = x \\ q = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x \cdot x^2 = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

Def: Sei $(V, \cdot)$ Euklidischer VR. $v \in V$

Dann nennt man $\|v\| := \sqrt{v \cdot v}$ Norm des Vektors v
(Länge)

Bsp: $\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\quad \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Standard



Def: Sei $(V, \cdot)$ ein Euklid VR, $v \in V$

gilt $\|v\| = 1$, dann nennt man v einen Einheitsvektor.

gilt, $u, v \in V$ und $u \cdot v = 0$ dann nennt man $\underbrace{u, v \text{ zueinander Orthogonal}}_{u \perp v}$

Längenmessung

- Die Norm (Länge) $||v||$ eines Vektors v ist durch

$$||v|| := \sqrt{v \bullet v}$$

  definiert.

- Ein Vektor v mit $||v|| = 1$ wird Einheitsvektor genannt.

- Es gilt:
  1. $||v|| \geq 0$ und $||v|| = 0 \iff v = 0$ für alle Vektoren v
  2. $||rv|| = |r| \cdot ||v||$ für alle Vektoren v und alle $r \in \mathbb{R}$
  3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ für alle Vektoren u, v (Dreiecksungleichung)

- Der Abstand $\text{dist}(u, v)$ von Vektoren u, v ist wie folgt definiert:

$$\text{dist}(u, v) = ||u - v||$$

Winkelmessung

Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\bullet$.

- Seien $u, v \in \{0_V\}$.
  Das eindeutig bestimmte $\alpha \in [0, \pi]$ mit
  $$\cos(\alpha) = \frac{u \bullet v}{||u|| \cdot ||v||}$$
  heißt Winkel zwischen u und v.

- Seien $u, v \in V$.
  Die Vektoren u und v heißen zueinander orthogonal, wenn
  $u \bullet v = 0$ gilt;
  Bezeichnung: $u \perp v$

- Seien $u, v \in V$. Dann gilt:
  $$u \perp v \iff ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$