TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

10. Übungsblatt für die Woche 17.06. - 23.06.2019

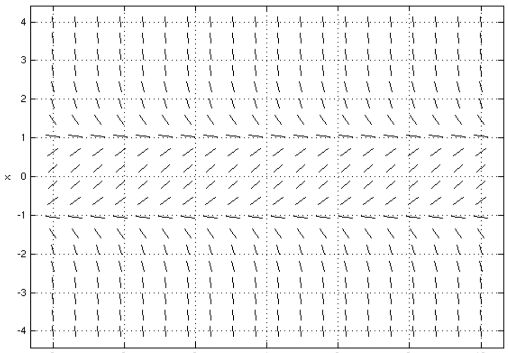
Differentialgleichungen

Ü55 (a) Finden Sie alle Parameterwerte $a, b \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $y_s(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 3\cos(2x)$ ist.

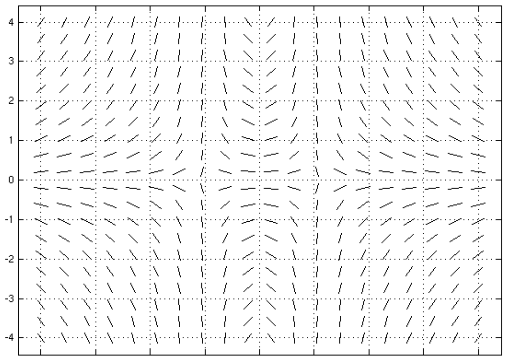
(b) Es sind drei gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung gegeben:

(i) $y' = 2\dfrac{y}{x}$ (ii) $y' = 2\dfrac{x}{y}$ (iii) $y' = 1 - y^2$.

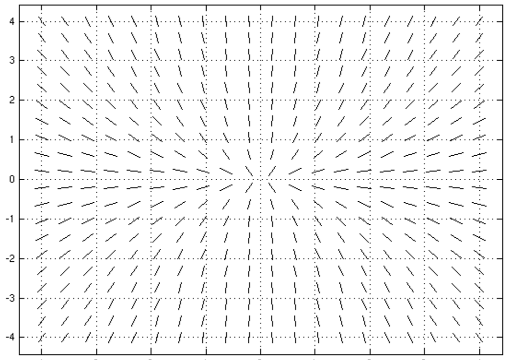
Ordnen Sie die Differentialgleichungen dem passenden Richtungsfeld zu:



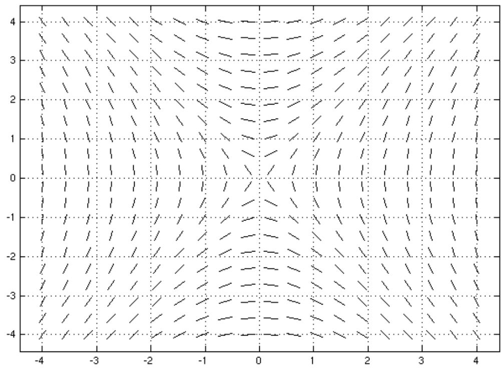
(1)



(2)



(3)



(4)

Ü56 (a) Bestimmen Sie für die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung die allgemeine Lösung mit der Methode der Trennung der Veränderlichen:

(i) $y' = 2\dfrac{y}{x}$ (ii) $y' = 2\dfrac{x}{y}$

(b) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $y'(1-x^2) = xy,\ y(2) = 1$ (ii) $y' = 1 - y^2,\ y(0) = 1.$

Ü57 Betrachtet wird die Differentialgleichung des logistischen Wachstums

$$N'(t) = \alpha N(t)(a - N(t))$$

mit Parametern $\alpha, a > 0$.

(a) Berechnen Sie diejenigen Lösungen $N(t)$, für die $N'(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Diese Lösungen heißen stationär. Warum?

(b) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung bzw. eine Reihe aussagekräftiger Lösungen. Lesen Sie daraus Eigenschaften der Lösungen ab.

(c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $N(t)$.

H58 $\boxed{\mathbf{A}}$ Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = \dfrac{3-y}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ durch Trennung der Veränderlichen.

(b) Bestimmen Sie diejenige Lösung $y_s(x)$, die der Bedingung $y_s(0) = -2$ genügt, und geben Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} y_s(x)$ an.

H59 (a) Finden Sie alle Parameterwerte $c \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $y(x) = \frac{c-x}{x+2}$ eine Lösung der Differentialgleichung $(x^2-4)y' - 4y = 0$ ist.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{4x}{x^2y + y}, y \neq 0$ mit der Methode der Trennung der Veränderlichen. Bestimmen Sie die spezielle Lösung $y_s(x)$, die die Bedingung $y(-1) = 0$ erfüllt, und geben Sie für diese Lösung an, für welche $x \in \mathbb{R}$ sie existiert.

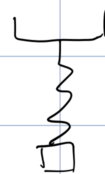
H60 Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit der Methode der Trennung der Veränderlichen:

(a) $y' = (xy)^2, \quad y(0) = -2,$ (b) $y' = \sqrt{1+y}, \quad y(1) = -1.$

55) $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \underbrace{3\cos(2x)}_{\text{äußere Kraft}}$

harmonischer Oszillator

$$F = -ky$$
$$\shortparallel$$
$$my''$$



x Zeit

$\downarrow$ Auslenkung $y(x)$

$$\Rightarrow my'' + ky(x) = 0$$

+ Reibung: $F_R \sim y'$ (Geschwindigkeit)

$$\Rightarrow F = my'' = -ky - by'$$

Ansatz für eine spezielle Lösung:

$$y(x) = a \cdot \sin(2x) + b \cdot \cos(2x)$$

$$y'(x) = 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)$$
$$y''(x) = -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x)$$

Einsetzen:

$$-4a\sin(2x) - 4b\cos(2x) + 3(2a\cos(2x) - 2b\sin(2x))$$
$$+ 2(a\sin(2x) + b\cos(2x)) = 3\cos(2x)$$

$$\Rightarrow -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x) + 6a\cos(2x) - 6b\sin(2x)$$
$$+ 2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) = 3\cos(2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a - 6b + 2a = 0 \\ -4b + 6a + 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{20} \\ b = -\frac{3}{20} \end{cases}$$

Koeffizienten vergleich

$\Rightarrow y_s(x) = \frac{9}{20} \sin(2x) - \frac{3}{20} \cos(2x)$ ist eine Lösung

(siehe nächste üb allgmeine Lösung:

$y(x) = y_{hom}(x) + y_s(x)$ mit y_{hom} allg. Lös von

$y'' + 3y' + 2y = 0$)

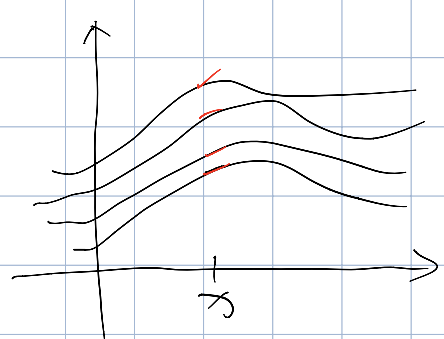
b) gewöhnl. DgL 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

z.B $\frac{\Delta y}{\Delta t} \sim y$

$\Delta t \to dt$

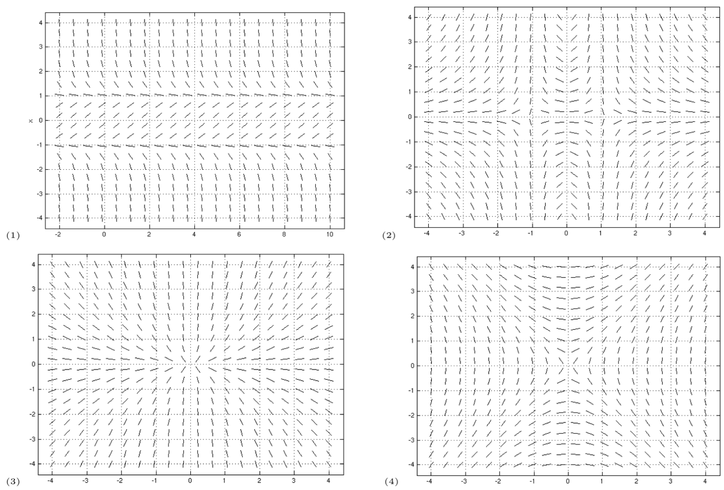
$$\frac{dy}{dt} = cy$$



Richtungsfeld.

(i) $y' = 2\frac{y}{x}$ (ii) $y' = 2\frac{x}{y}$ (iii) $y' = 1 - y^2$.

Ordnen Sie die Differentialgleichungen dem passenden Richtungsfeld zu:



i) $y' = 2\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

Betrachten $y=0$ (x-Achse)

$\Rightarrow y'=0$

$\Rightarrow$ (2) oder (3)

z.B $x \to 0$, $\Rightarrow y' \to \infty \Rightarrow$ (3)

ii) $y' = 2\frac{x}{y}$

$y \to 0 \xRightarrow{(x\neq 0)} y' \to \infty$ (x-Achse
$x=0$
y-Achse)

$\Rightarrow$ (4)

iii) $y' = 1 - y^2$ x nicht explizit auf rechter Seite

$\Rightarrow$ (1)

5b)

a) $y' = 2\frac{y}{x}$ Methode des TdV (falls möglich)

1. Fall $y = 0$ (Konstante Lösung)

2. Fall

$y \neq 0$ $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$

Integrieren $\Longrightarrow$ $\int \frac{1}{y} \underbrace{y' dx}_{dy} = \int \frac{2}{x} dx$

$\int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx$

$\ln|y| = 2 \ln|x| + C_0$

$\Rightarrow |y| = x^2 \cdot e^{C_0}$

$\Rightarrow y(x) = \underbrace{\pm e^{C_0}}_{=: C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \cdot x^2$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$y(x) = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$ ($C = 0$ ist 1. Fall)

existieren nur für $x < 0$ oder $x > 0$

ii) $y' = \frac{2x}{y}$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} \cdot y = 2x$

Fallunterscheidung: $\Rightarrow$ $dy \cdot y = 2x \cdot dx$

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = x^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 2x^2 + C \quad (y \neq 0)$$

b) $y'(1-x^2) = xy \qquad y(2) = 1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(1-x^2) = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{x}{1-x^2}\,dx \qquad u := 1-x^2, \quad \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{-2}\int \frac{1}{u}\,du \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C_0$$

$$\Rightarrow |y| = |1-x^2|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{C_0}$$

$$y(2) = 1 \Rightarrow 3^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{C_0} = 1 \qquad \frac{e^{C_0}}{\sqrt{3}} = 1$$

$$C_0 = \ln\sqrt{3} \Rightarrow e^{C_0} = \sqrt{3}$$

siehe. unten.

(ii) $y' = 1 - y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \Rightarrow \frac{dy}{1-y^2} = dx$

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int dx \Rightarrow \arctan y = x + C$$

$$\Rightarrow y = \tan x + C$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

also: $y = \tan x + 1$

b(i) $x = \pm 1$. $0 = \pm y$

$x \neq \pm 1$ 1 Fall $y = 0$ Konst. Lösung

2 Fall $y \neq 0$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} y' dx = \int \frac{x}{1-x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x}{1-x^2} dx$$

. . . .

allg Lösung: $y(x) = C \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$, $C \in \mathbb{R}$

(für $C = 0$, 1 Fall enthalten)

existieren für $x < -1$, $x \in (-1, 1)$

$x > 1$

Anfangsbed.: $y(2) = 1$ $x > 1$

$$y(2) = C \frac{1}{\sqrt{|1-2^2|}} = \frac{C}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{3}$$

$$y_s(x) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

b(ii)

1 Fall $1 - y^2 = 0 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} y_1(x) = -1 \\ y_2(x) = 1 \end{array}\right\}$ 2 Konst Lösungen.

ist schon die

ist schon die
gesuchte Lsg.

Zum Training: allg. Lös (PBZ links)

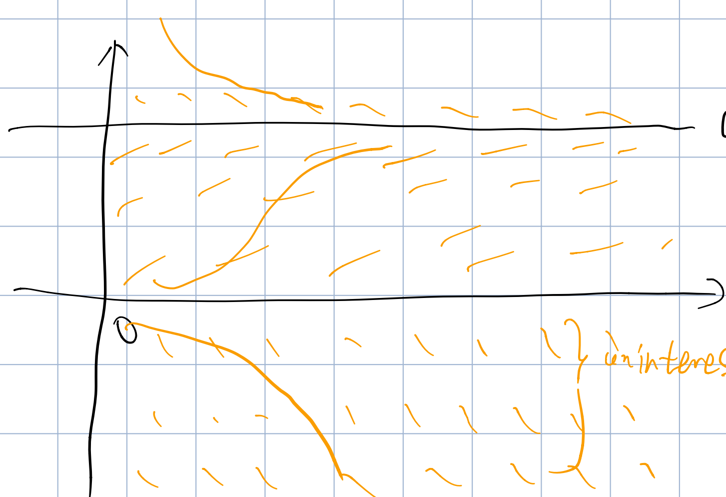
$$y(x) = \frac{ce^{2x}+1}{ce^{2x}-1}$$

57) $N'(t) = \lambda N(t)\,(a - N(t))$ $\quad \lambda, a > 0$

a) $N'(t) = 0 \iff \lambda N(t)\,(a - N(t)) = 0$

$N_1(t) = 0 \quad N_2(t) = a$ Konst. Lösung.

b)



rechte Seite
$f(N) = \lambda N(a-N)$