TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

12. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Graphen

V. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: "Es gibt einen Graphen mit sieben Knoten, in dem jeder Knoten den Grad drei hat.".

Ü67. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Der *n-dimensionale Würfel* ist der Graph $Q_n = (V_n, E_n)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$V_n = \mathcal{P}\big([n]\big),$$
$$E_n = \big\{\{A, B\} \mid A, B \subseteq [n], |A \mathbin{\Delta} B| = 1\big\}.$$

Dabei ist $A \mathbin{\Delta} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die symmetrische Differenz von A und B.

(a) Zeichnen Sie für alle $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ je ein Graphendiagramm von Q_n.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $|E_n| = n2^{n-1}$ ist.

(c) Finden Sie je einen Kreis in Q_3 und in Q_4, der alle Knoten enthält.

(d) Ist Q_n regulär? Falls ja, bestimmen Sie den gemeinsamen Knotengrad von Q_n.

Ü68. Die folgende Aufgabe stammt von Alkuin, einem Gelehrten am Hof Karls des Großen.

> Eine Person musste einen Fluss überqueren und einen Wolf, eine Ziege und ein Bündel Kohl hinüberbringen. Sie konnte nur ein Boot finden, das außer ihr lediglich eine dieser drei Sachen transportieren konnte. Alles sollte aber unbeschädigt herübergebracht werden. Die Person durfte also weder den Wolf mit der Ziege, noch die Ziege mit dem Kohl unbeaufsichtigt lassen. Wie kann sie das tun?

Hinweis: Stellen Sie die Lösung in einem Graphen dar, dessen Knoten die augenblicklichen Aufenthaltsorte von Person, Wolf, Ziege und Kohl repräsentieren. Kanten zwischen Knoten treten genau dann auf, wenn zwei Zustände durch eine Bootsfahrt ineinander überführbar sind.

Ü69. Es seien

$$V = \big\{n \in \mathbb{N} \mid n < 20, \mathrm{ggT}(n, 20) = 1\big\},$$
$$R = \big\{(a, b) \in V \times V \mid \mathrm{ggT}(a - b, 20) = 2\big\}.$$

(a) Geben Sie die Menge V elementweise an.

V: $G=(V,E)$

$\forall v \in V \quad \deg(v)=3$

Nach Lemma 13.4

$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E| = 3\cdot 7 = 21$

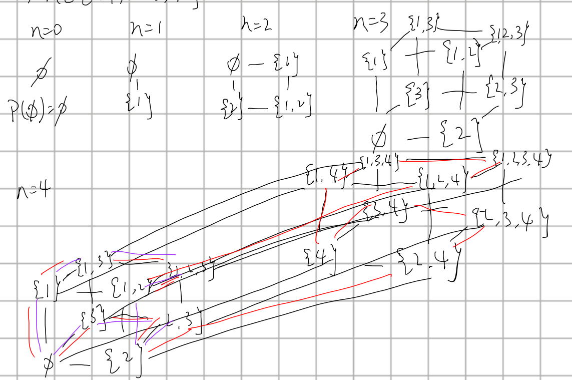
$2|E| = 21$

$|E| = 21/2$ $\lightning$

67) $V_n = P([n]) \quad [n]=\{1,\dots,n\}$

$E_n = \{\{A,B\} \mid A,B \subseteq [n],\ |A \triangle B| = 1\}$

a) $n \in \{0,1,2,3,4\}$



b) IA: $|E_0| = 0$ (Anzahl Kanten für $n=0$ ist 0)

IV: Ang.: es gilt $|E_n| = n\cdot 2^{n-1}$ für bel. fest $n \in \mathbb{N}$

IS: $E_{n+1} = \{\{A,B\},\ A,B \subseteq [n] \mid |A\triangle B| = 1\}$

$\cup\ \{\{A,B\} \mid A \subseteq [n+1]$ mit $n+1 \in A,\ B \subseteq [n],\ |A \triangle B| = 1\}$

$\cup\ \{\{A,B\} \mid A,B \subseteq [n+1]$ mit $n+1 \in A \cap B,\ |A\triangle B| = 1\}$

Erste und dritte haben nach IV genau $n\cdot 2^{n-1}$ Elemente

Zweite Menge: $\{\{A \cup \{n+1\}, A\} \mid A \subseteq [n]\}$

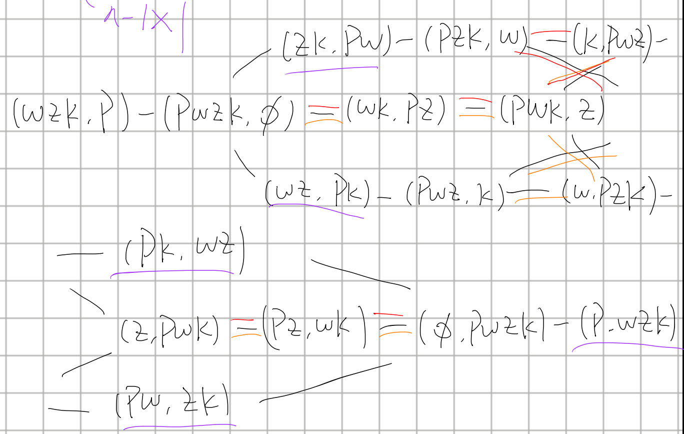
Nach Ü21 (i) hat diese Menge genau 2^n Elemente

$|E_{n+1}| = n\cdot 2^{n-1} + 2^n + n\cdot 2^{n-1}$
$= 2\cdot n 2^{n-1} + 2^n = (n+1)\cdot 2^n$

d) Sei $X \subseteq [n]$. Dann ist $\{X, X\setminus\{x\}\} \in E_n$ für alle $x \in X$, außerdem ist $\{X, X \cup \{x\}\} \in E_n$ für alle $x \notin X$. Also hat X genau n Nachbarn, also n-regulär.

$n - |X|$

68)



69) a) $V = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 20,\ ggT(n,20) = 1\}$

$20 = 2^2 \cdot 5$

$V = \{1,3,7,9,11,13,17,19\}$

b) $R = \{(a,b) \in V\times V \mid ggT(a-b, 20) = 2\}$

$V = \{1,3,7,9,11,13,17,19\}$

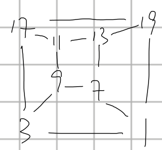
		Kanten
$a-b \mid 2$	(3,1) (7,1) (19,1)	(1,3) (1,7) (1,19)
$a-b \nmid 4$	(9,3) (17,3)	(3,9) (3,17)
$a-b \nmid 5$	(9,7) (13,7)	(7,9) (7,13)
	(11,9)	(9,11)
	(13,11) (17,11)	(11,13) (11,17)
	(19,13)	(13,19)
	(19,17)	(17,19)

$2 = ggT(\pm 2, 20) = ggT(\pm 6, 20) = ggT(\pm 14, 20) = ggT(\pm 18, 20)$

c) Diagramm von Graphen $G=(V,E)$

mit $E = \{\{a,b\} \mid (a,b) \in R\}$

$|E| = \frac{|R|}{2}$



(b) Geben Sie die Relation R als Menge von Paaren an.

(c) Zeichnen Sie ein Diagramm des Graphen (V, E) mit der Kantenmenge

$$E = \big\{\{a, b\} \mid (a, b) \in R\big\}.$$

A70. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 13. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**
Für zwei natürliche Zahlen $k, n \geq 1$ sei $X = \{1, 2, \ldots, 2n + k\}$. Es wird der Graph $G_{n,k} = (V, E)$ betrachtet, mit:

$$\begin{aligned} V &= \big\{A \subseteq X \mid |A| = n\big\}, \\ E &= \big\{\{A, B\} \mid A, B \subseteq X, A \cap B = \emptyset\big\}. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die Knoten- und Kantenmengen der Graphen $G_{1,2}$ und $G_{2,1}$ explizit an, und zeichnen Sie jeweils ein Graphendiagramm.

(b) Bestimmen Sie für die Graphen $G_{2,2}$ und $G_{3,1}$ die Anzahl der Knoten und Kanten, ohne ein Graphendiagramm zu zeichnen.

Hinweis: Verwenden Sie in (b) das Handschlag-Lemma.

H71. (a) Zeichnen Sie die Graphendiagramme der vollständigen bipartiten Graphen $K_{4,3}$ und $K_{4,4}$. Geben Sie jeweils die Knoten- und Kantenmenge an.

(b) Finden Sie für jeden der beiden Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält, bzw. begründen Sie, warum ein solcher Kreis nicht existiert.

(c) Begründen Sie, dass ein bipartiter Graph $G(A, B)$ keinen Kreis der Länge 3 enthält.

H72. Beim Schachspiel zieht der Springer immer zwei Felder in eine Richtung und ein Feld senkrecht dazu. Ein *Springerzug* ist eine Folge von Zügen mit einem Springer, sodass jedes Feld eines rechteckigen $m \times n$-Schachbretts genau einmal besucht wird. Erreicht der Springer nach seinem letzten Zug wieder das Ausgangsfeld, heißt der Springerzug *geschlossen*.

Wie lässt sich dieses Problem durch einen Graphen modellieren?

(a) Zeigen Sie, dass auf einem 3×3-Brett kein Springerzug möglich ist.

(b) Zeigen Sie, dass auf einem 4×3-Brett kein geschlossener Springerzug möglich ist. Finden Sie einen Springerzug auf diesem Feld. Welche Startfelder kommen dafür in Frage?

(c) Zeigen Sie, dass auf einem 4×4-Brett kein Springerzug möglich ist.

(d) Finden Sie einen geschlossenen Springerzug auf einem 5×6-Brett.

(e) Zeigen Sie, dass ein geschlossener Springerzug auf einem $m \times n$-Brett nicht möglich ist, wenn m und n beide ungerade sind.

Hinweis: Beziehen Sie in (e) die Farbe der Felder mit ein, und verwenden Sie die Überlegungen aus H71(b).