TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

5. Übungsblatt für die Woche 05.11. - 11.11.2018

Lösung linearer Gleichungssysteme, Gauss/Jordan-Verfahren

Vorrechenaufgabe:

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

(A1) Ein lineares Gleichungssystem mit einer 3×5-Koeffizientenmatrix, die eine 3-stufige Zeilenstufenform hat, ist stets lösbar.

(A2) Ein lineares Gleichungssystem mit einer 5×3-Koeffizientenmatrix, die eine 3-stufige Zeilenstufenform hat, besitzt höchstens eine Lösung.

f (A3) Hat ein linearen Gleichungssystem freie Parameter in der Lösungsmenge, so besitzt es unendlich viele Lösungen.

Ü25 Für zwei lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ ist die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ in Zeilenstufenform

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 9 \\ 0 & -3 & 1 & | & -17 \\ 0 & 0 & 0 & | & -9 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Ermitteln Sie die Lösungsmenge beider Gleichungssysteme.

Ü26 Lösen Sie die gegebenen linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ mit dem Verfahren von Gauss/Jordan: Markieren Sie dabei die Zeilenstufenform und geben Sie das zugehörige Gleichungssystem an. Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix schließlich in reduzierte Zeilenstufenform, und geben Sie die Lösungsmenge des ursprünglichen Gleichungssystems an.

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 = & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 = & 12 \end{array} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

Ü27 (a) Bestimmen Sie alle Parameterwerte $a, b \in \mathbb{R}$, so dass das lineare System

$$\begin{array}{rcl} x_1 + ax_2 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 & = & b \end{array}$$

(i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

Welches geometrische Problem verbirgt sich dahinter?

(b) Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & r & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -16 & s \end{array} \right).$$

Bestimmen Sie alle Parameterwerte $s, r \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem lösbar ist. Gibt es Parameterwerte, für die es eindeutig lösbar ist?

H28 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Wenden Sie das Verfahren von Gauss/Jordan auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}-2x_4} &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

an, um es zu lösen. Kennzeichnen Sie dabei die Zeilenstufenform. Geben Sie die Lösungsmenge in Mengenschreibweise an.

(b) Verwenden Sie das Verfahren von Gauss/Jordan, um die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 3 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.

H29 (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 9 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 10 \end{array} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 2 \end{array}$$

mit dem Verfahren von Gauss/Jordan. Kennzeichnen Sie dabei die Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} -z_1 & +2z_2 & +z_3 & = -1 + 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i}z_1 & -3\mathrm{i}z_2 & +6z_3 & = 1 + \mathrm{i} \end{array}$$

über $\mathbb{C}$ die reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix, und ermitteln Sie daraus die Lösungsmenge.

H30 Lösen Sie das folgende Gleichungssystem über GF(2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und geben Sie die Lösungsmenge in Mengenschreibweise an.
Wie viele Elemente hat die Lösungsmenge?
(Die Lösungsmenge ist ein Hamming-Code.)