TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Vollständige Induktion

Assoziativität: $(k+m)+n = k+(m+n)$ (A)
Neutralität: $m+0 = m = 0+m$ (N)
Induktionsanfang $H(n)$: $m+n = n+m$, m bel. natürl. Zahl $n \geq 0$
$H(0)$: $m+0 = m = 0+m$
$H(1)$: gewünschte Aussage kann umgeformt werden zu $H'(m)$
$H'(m) \Rightarrow m+1 = 1+m$

$\boxed{\text{IA: } H'(0): 0+1 = 1 = 1+0 \text{ (N)} \quad \text{IV: Ang. es gelte } H'(m) \text{ für ein festes } m \geq 0}$

Induktionsvoraussetzung (IV) Ang.

IS: $H'(m) \rightarrow H'(m+1)$
$H(m+1) \overset{(A)}{=} (1+m)+1 \overset{IV}{=} (m+1)+1$
Ang.: $H(n)$ gelte für ein festen $n \geq 0$

IS: $H(n) \rightarrow H(n+1)$
$m+(n+1) \overset{(A)}{=} (m+n)+1 \overset{IV}{=} (n+m)+1 \overset{(A)}{=} n+(m+1) \underset{H(1)}{\overset{H'(m)}{=}} n+(1+m) \overset{(A)}{=} (n+1)+m$

$\boxed{\text{V.}}$ Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Addition auf den natürlichen Zahlen kommutativ ist, also dass $m + n = n + m$ für zwei beliebige natürliche Zahlen m, n gilt.

Ü19. (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass folgende Gleichungen für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gelten.

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Schlussfolgern Sie eine geschlossene Formel für die Summe $\sum_{k=0}^{n} (2k)^2$.

(b) Es bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Diagonalen eines ebenen, konvexen n-Ecks. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ für $n \geq 3$ gilt.

Ü20. Für eine natürliche Zahl n definieren wir ihre *Fakultät* rekursiv über $n! = n(n-1)!$ mit der Anfangsbedingung $0! = 1$.

Seien m, n natürliche Zahlen mit $1 \leq m \leq n$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion.

(i) Es gibt genau $n!$ bijektive Abbildungen von einer n-elementigen Menge in eine n-elementige Menge.

(ii) Es gibt genau $\frac{n!}{(n-m)!}$ injektive Abbildungen von einer m-elementigen Menge in eine n-elementige Menge.

Ü21. Seien m, n natürliche Zahlen mit $0 \leq m \leq n$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion.

(i) Eine n-elementige Menge besitzt genau 2^n Teilmengen.

(ii) Eine n-elementige Menge besitzt genau $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ m-elementige Teilmengen.

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$k=1 \Rightarrow H(1) = 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$$

Ang: $k=m \Rightarrow H(m) = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = m^2$

$$H(m+1) = \sum_{0}^{m} m^2 + (m+1)^2$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{6(m+1)^2}{6}$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1)+6(m+1)^2}{6} = \frac{(m+1)[(m(2m+1)+6(m+1)]}{6}$$

$$= \frac{(m+1)(2m^2+m+6m+6)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

A22. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 5. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**

(a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgende Formel für $n \geq 1$ gilt.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \geq 3$ die Summe der Innenwinkel eines natürlichen n-Ecks $\pi(n-2)$ beträgt.

H23. Für eine natürliche Zahl n definieren wir die n-te *Fibonacci-Zahl* rekursiv über $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ mit den Anfangsbedingungen $F(0) = F(1) = 1$.

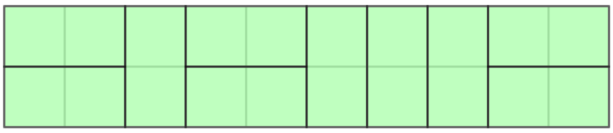
(a) Geben Sie die ersten zehn Fibonacci-Zahlen explizit an.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgende Gleichung für alle $n \geq 1$ gilt:

$$F(n)F(n+1) - F(n-1)F(n+2) = (-1)^n.$$

(c) Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ betrachten wir ein rechteckiges Brett mit Seitenlängen 2 und n. Ein *Domino* ist ein rechteckiger Spielstein mit Seitenlängen 1 und 2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass es genau $F(n)$ Möglichkeiten gibt, das Brett mit exakt n Dominos zu überdecken.

Hinweis: Hier sehen Sie eine Überdeckung eines 2×10-Bretts mit zehn Dominos.



H24. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen mittels vollständiger Induktion.

(i)	$2n < n^2$ für $n \geq 3$	(ii)	$n^2 < 2^n$ für $n \geq 5$
(iii)	$2^n < n!$ für $n \geq 4$	(iv)	$n! < n^n$ für $n \geq 2$