Mathematische Methoden für Informatiker INF-120-2
Wintersemester 2019/20

16. Übungsblatt für die Woche 28.10. - 03.11.2019

Algebraische Strukturen: endliche abelsche Gruppen, zyklische Gruppen, Isomorphieklassen

Ü91 Es seien $(G_1, \circ_1)$ und $(G_2, \circ_2)$ Gruppen. Beweisen Sie:

Wenn $G_1 \times G_2$ zyklisch ist, dann sind G_1 und G_2 zyklisch.

Gilt auch die Umkehrung?

Ü92 (a) Wie viele erzeugende Elemente besitzt die Gruppe $(\mathbb{Z}_{12}, +)$?

(b) Wie viele erzeugende Elemente besitzt die Gruppe $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, +)$? Geben Sie alle erzeugenden Elemente an. Welche Ordnung hat das Element $(2, 2)$?

(c) Ist $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ zu $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, +)$ bzw. $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$ isomorph?

(d) Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung $n = 100$, und geben Sie diese in der Form $Z_{m_1} \times \ldots \times Z_{m_k}$ mit $m_1 | m_2, m_2 | m_3, \ldots, m_{k-1} | m_k$ an. Welche dieser Isomorphieklassen besitzen ein Element der Ordnung 4 ?

(e) Wie viele abelsche Gruppen der Ordnung $n = 2^5 \cdot 3^4$ gibt es bis auf Isomorphie?

Ü93 (a) Benutzen Sie die Gruppentafeln von $(\mathbb{Z}_4, +)$ und $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ aus der Vorlesung, um alle Untergruppen und die Ordnung der Elemente zu bestimmen.
Sind die beiden Gruppen isomorph?

(b) Untersuchen Sie, ob folgende Gruppen zu $(\mathbb{Z}_4, +)$ bzw. $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ isomorph sind:

(1) die Menge $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation mod 5,

(2) die Menge der Funktionen $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ mit $f_k \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

und der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen,

(3) die Teilmenge $\langle 15 \rangle$ von $\mathbb{Z}_{20}$ mit der Addition mod 20.

(c) Es wird die Untergruppe $U := (\langle 27 \rangle, \cdot)$ von $(\mathbb{Z}_{31} \setminus \{0\}, \cdot)$ betrachtet.

(1) Bestimmen Sie die Ordnung von U.

(2) Wie viele Untergruppen hat U? Welche Ordnungen haben die Untergruppen?

(3) Bestimmen Sie für 27^3 die Ordnung und sein Inverses in $(\mathbb{Z}_{31} \setminus \{0\}, \cdot)$.

H94 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung $n = 2250$. Welche davon sind zyklisch? Geben Sie die Isomorphieklassen in folgender Form an:

$$Z_{m_1} \times \ldots \times Z_{m_k} \quad \text{mit} \quad m_1|m_2,\, m_2|m_3, \ldots,\, m_{k-1}|m_k\ .$$

(b) Finden Sie unter den Isomorphieklassen aus (a) alle diejenigen, die ein Element der Ordnung 25 besitzen, und geben Sie in dem Fall ein solches Element an.

H95 (a) Begründen oder widerlegen Sie:

- $\mathbb{Z}_8 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.
- $\mathbb{Z}_8 \simeq \mathbb{Z}_2 \times V_4$. ($V_4$ bezeichnet die Kleinsche Vierergruppe.)

(b) Welche maximale Ordnung kann ein Element in $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}, +)$ besitzen? Ist $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}, +)$ zu $(\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{10}, +)$ isomorph?

H96 Es sei M eine endliche Menge mit Mächtigkeit $|M| = n$. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit der symmetrischen Differenz $\triangle$ als Operation eine abelsche Gruppe bildet, die zur Gruppe $(\mathbb{Z}_2^n, +)$ isomorph ist. Es kann dabei als bekannt vorausgesetzt werden, dass $\triangle$ assoziativ auf $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ ist.

Hinweis: Für $A, B \in \mathcal{P}$ ist $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Die Addition in $\mathbb{Z}_2$ ist die übliche Addition mod 2 und in $\mathbb{Z}_2^n$ ist die Addition entsprechend komponentenweise auszuführen.

Sei $(G, \circ)$ zyklische Gruppe.

d.h. $\exists g \in G$

$$\langle g \rangle = \{g, \underbrace{g \circ g}_{= g^2}, g^3, \ldots, \underbrace{g^n}_{= e}\} = G$$

- Ordnung $\mathrm{Ord}(g^k)$
- zu jedem Teiler der Gruppenordnung gibt es genau eine Untergruppe. (zyklisch)
- bis auf Isomorphie genau eine zyklische Gruppe mit n Elemente.

91) z.zg: $G_1 \times G_2$ zyklisch
$\Rightarrow G_1$ und G_2 zyklisch.

Beweis:

sei also $G_1 \times G_2$ zyklisch.

$\exists (a, b) \in G_1 \times G_2 : \langle (a, b) \rangle = G_1 \times G_2$

$$\langle (a,b) \rangle = \{(a, b), (\underbrace{a \circ_1 a}_{= a^2}, \underbrace{b \circ_2 b}_{= b^2}), \ldots, (\underbrace{a^n}_{= e_1}, \underbrace{b^n}_{= e_2})\}$$

$\Rightarrow \langle a \rangle = G_1$,
$\langle b \rangle = G_2$ $\square$

Umkehrung gültig? Gegenbeispiel: $G_1 = G_2 = (\mathbb{Z}_2, +)$

$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ hat 9 Elemente.

$\text{Ord}((a,b)) \leq 3$ für alle $(a,b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

$(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +) \cong (\mathbb{Z}_{m \cdot n}, +)$ zyklisch $\Longleftrightarrow$ $ggT(m,n)=1$.

$(\mathbb{Z}_n, +)$ ist zyklisch.

$m \in \mathbb{Z}_n$ ist Erzeuger $\Longleftrightarrow$ $ggT(n,m)=1$

m. Einheit, d.h. Multi. Inversen Exist.

Sei $m \in \mathbb{Z}_n$, $ggT(n,m) = k > 1 \Rightarrow n = ka$

$m = kb$

$\langle m \rangle = \{m, m+m, 3m, \ldots, \underset{\underset{a \cdot k \cdot b}{\shortparallel}}{a m} \overset{=0}{}\}$ Nullteiler

Anzahl Erzeuger $\varphi(n)$

$= p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$

$$\varphi(n) = n \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k - 1}{p_k}$$

92) a) $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 \, \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$

(und zwar. 1, 5, 7, 11)

b) $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, +) \cong (\underset{\underset{\mathbb{Z}_{12}}{\shortparallel}}{\mathbb{Z}_{3 \cdot 4}}, +)$, da $ggT(3,4)=1$,

also zyklisch.

$\Rightarrow \varphi(12) = 4$ Erzeuger.

$\varphi(12) = \varphi(3 \cdot 4) = \varphi(3) \cdot \varphi(4)$, da $ggT(3,4) = 1$

Erzeuger in $\mathbb{Z}_3$: $1, 2.$
 $\mathbb{Z}_4$: $1, 3.$

$\Rightarrow (1,1), (1,3), (2,1), (2,3)$ sind die Erzeuger von $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

$+2, \text{mod } 3 \quad +2, \text{mod } 4$

$\langle (2,2) \rangle = \{ (2,2), (1,0), (0,2), (2,0), (1,2), \underset{\ddot{e}_1 \; \ddot{e}_2}{(0,0)} \}$

$Ord((2,2)) = 6 = kgV(Ord_{\mathbb{Z}_3}(2), Ord_{\mathbb{Z}_4}(2))$

in $\mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ gilt $Ord((a_1, \dots, a_k)) = kgV(ord_{\mathbb{Z}_{n_1}}(a_1) \cdots ord_{\mathbb{Z}_{n_k}}(a_k))$

c) $\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$, da $ggT(3,4) = 1$ in (b) gezeigt.

$\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ gilt nicht, da

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4$ ⟸ zyklisch

↑ nicht zyklisch.

da $ggT(2,2) > 1$.

d) für $n = 12$ Anzahl Elemente. $n = 2^2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$\Rightarrow$ 2 Isomorphieklassen: $\mathbb{Z}_{2^2} \xrightarrow{ggT(4,3)=1} \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{12}$ (zyklisch)

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$

$\mathrm{ggT}(2,3)=1$

$n = 100 = 2^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

Isomorphieklassen: $\underbrace{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}}_{\mathrm{ggT}(4,25)=1} \cong \mathbb{Z}_{100}$

$\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5}_{\mathrm{ggT}(2,5)=1} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \overbrace{\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5}^{\mathrm{ggT}(2,5)=1}$

$\cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_2 \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}}_{\mathrm{ggT}(2,25)=1} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{50}$

$\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{5^2} \cong \mathbb{Z}_{100}$ (zyklisch) da $\mathrm{ggT}(2^2, 5^2) = 1$

$\mathbb{Z}_2 \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{5^2}} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{50}$

$\underbrace{\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_5} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{20}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$

In welchen Isomorphieklassen gibt es ein Element der Ordnung 4?

- $\mathbb{Z}_{100}$, z.B. $\frac{100}{4} = 25$

Es gibt ein Element der Ordnung ℓ in $\mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_k}$

$\Leftrightarrow \ell \mid m_k$

- $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{20}$. z.B $(0, \frac{20}{4}) = (0,5)$

e) $n = 2^5 \cdot 3^4$

$5 = 4+1 = 3+2 = 2+3 = 1+4 = 3+1+1 = \dots$

$4 = 3+1 = 2+2 = 1+3 = \dots$

35 Isomorphie Klassen.

93) a) $(\mathbb{Z}_4, +)$ zyklisch. $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

Untergruppen:

- $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_4$ $\quad$ $\operatorname{ord}\langle 1 \rangle = 4$
- $\overset{\shortparallel}{\langle 3 \rangle}$ $\quad$ $\operatorname{ord}\langle 3 \rangle = 4$ (1, 3 sind Einheiten)
- $\langle 0 \rangle = \{0\}$ $\quad$ $\operatorname{ord}\langle 0 \rangle = 1$
- $\langle 2 \rangle = \{2, 0\}$ $\quad$ $\operatorname{ord}\langle 2 \rangle = 2$

(zu jedem Teiler von 4 gibt es genau eine UG dieser Ordnung)

allg. $G = \langle g \rangle$ mit $|G| = n$ und k teilt n.

Dann ist die UG mit Ordnung k: $\langle g^{\frac{n}{k}} \rangle$

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$: UG der Ordn. 1, 2, 4 (Satz v. Lagrange)

Ordn. 1: $\langle (0,0) \rangle = \{(0,0)\}$

Ordn 2: $\langle(1,1)\rangle = \{(1,1),(0,0)\}$

$\langle(0,1)\rangle = \{(0,1),(0,0)\}$

$\langle(1,0)\rangle = \{(1,0),(0,0)\}$

alle Elemente sind zu sich selbst invers.

Ordn. 4: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Tipp für c): $\langle 27 \rangle$ in $(\mathbb{Z}_{31}\setminus\{0\}, \cdot)$

Teiler von 30

$t \mid 30 \qquad 27^t \equiv 1 \pmod{31}$

$27 \equiv -4$

b) $(\mathbb{Z}_5\setminus\{0\}, \cdot)$

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

- abelsch
- nicht alle Elemente selbst invers.

(isomorph)

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_5\setminus\{0\}, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4, +)$

$\langle 2 \rangle = \{2, \underset{4}{2^2}, \underset{3}{2^3}, \underset{1}{2^4}\}$

H94 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung $n = 2250$. Welche davon sind zyklisch? Geben Sie die Isomorphieklassen in folgender Form an:

$$Z_{m_1} \times \ldots \times Z_{m_k} \quad \text{mit} \quad m_1|m_2,\, m_2|m_3, \ldots,\, m_{k-1}|m_k\,.$$

(b) Finden Sie unter den Isomorphieklassen aus (a) alle diejenigen, die ein Element der Ordnung 25 besitzen, und geben Sie in dem Fall ein solches Element an.

$$n = 2250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5^3$$
$$= 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 5$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 5$$
$$= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Isomorphieklassen:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{125} \cong \mathbb{Z}_{2250}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{125} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{375}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{225}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{25} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{75}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{45}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15}$$

$$\beta = (1\ 5\ 4) \circ (1\ 2\ 7\ 8\ 5) \circ (2\ 3\ 10)$$