Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120-2
Wintersemester 2019/20

14. Übungsblatt für die Woche 14.10. - 20.10.2019

Wiederholung: Beweistechniken, Äquivalenzrelationen

Hinweis: Hausaufgaben, die zur Abgabe bestimmt sind, sind durch $\boxed{\textbf{A}}$ gekennzeichnet. Weitere Hausaufgaben dienen Ihnen zum selbstständigen Nacharbeiten des Stoffes.

Ü79 (a) Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b gilt: $a^2 < b^2 \;\Rightarrow\; a < b$. Finden Sie sowohl einen direkten als auch einen indirekten Beweis (bzw. Widerspruchsbeweis).

(b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(c) Beweisen Sie folgende Aussage mit und ohne vollständige Induktion:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^5 - n$ durch 5 teilbar.

Ü80 (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $2^n \times 2^n$-Schachbrett so durch L-Stücke, die so groß sind wie drei Felder des Schachbretts, lückenlos und überlappungsfrei überdecken läßt, dass genau ein Feld des Schachbretts frei bleibt.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gibt es eine Primzahl, die n teilt.

Ü81 (a) Beweisen Sie, dass die Relation $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 5)\}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist. Geben Sie die Äquivalenzklassen von R an.

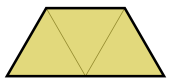
(b) Auf der Menge $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ist folgende Relation gegeben:

$$R \;=\; \Delta_A \cup \{(1,9),(2,4),(2,5),(2,7),(3,6),(4,2),(4,5),(4,7),\\ (5,2),(5,4),(5,7),(6,3),(7,2),(7,4),(7,5),(9,1)\}\,.$$

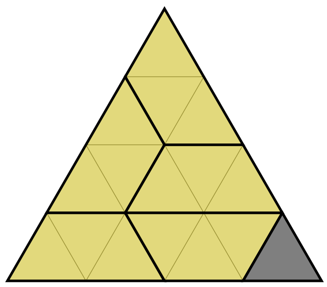
(1) Zeichnen Sie den der Relation zugeordneten gerichteten Graphen $G = (A, R)$.
(2) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die Äquivalenzklassen an.

H82 $\boxed{\textbf{A}}$

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 2^n derart durch trapezförmige Stücke, die so groß sind wie drei gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge 1 (siehe unten), lückenlos und überlappungsfrei überdecken läßt, dass einzig und allein ein Dreieck mit Seitenlänge 1 in einer Ecke frei bleibt.



Beispiel: Eine mögliche Überdeckung des Dreiecks mit Seitenlänge 4. Die untere rechte Ecke bleibt frei.



H83 (a) Beweisen Sie die folgende Aussage durch einen indirekten Beweis:
Für alle $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$ gilt: Wenn $\frac{a-b}{a+b}$ ein unkürzbarer Bruch ist, dann ist auch $\frac{a}{b}$ unkürzbar.

(b) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie durch einen indirekten Beweis, dass für jedes Element $a \in G$ genau ein $b \in G$ existiert mit $a \circ b = b \circ a = e$.

(c) Beweisen Sie folgende Aussage mit und ohne vollständige Induktion:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.

H84 Zeigen Sie, dass auf der Menge aller Paare natürlicher Zahlen $A = \mathbb{N}^2$ durch

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid a + d = c + b\}$$

eine Äquivalenzrelation definiert ist. Durch die Äquivalenzklassen lassen sich die ganzen Zahlen definieren. Geben Sie die Äquivalenzklasse $(0, 1)/R$ konkret an. Welche Eigenschaft haben alle Paare $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ gemeinsam, die in ein und derselben Äquivalenzklasse liegen?

Beweistechniken

- vollst. Induktion.
- direkter Beweisen
- Widerspruchsbeweis

79)

a) Beh. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0 \quad a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$

1. direkter Beweis:

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0$ beliebig mit $a^2 < b^2$

$\xRightarrow[\sqrt{\ }\ \text{smw}]{} |a| < |b| \xRightarrow[a,b>0]{} a < b$

2. Widerspruchsbeweis:

Angenommen: es existiert $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0$ und $a^2 < b^2$ mit $a \geq b$ Annahme: $A \wedge \neg B$ wahr

Beweis wie oben und am Ende $\lightning$ zu $a \geq b$

3. oder Beweis der Kontraposition: $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0$:

$\underset{\neg B}{a \geq b} \Rightarrow \underset{\neg A}{a^2 \geq b^2}$

Seien $a, b > 0$ mit $a \geq b \xRightarrow[\text{für } a,b>0]{(\ )^2\ \text{smw}} a^2 \geq b^2$.

b) Beh: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

IA: $n = 1 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$

IV: Es gelte $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ für $n\in\mathbb{N}$

IS: $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=-1}^{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{n+1}$

$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k-1} + 1$

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$

oder direkter Beweis:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Sei M Menge. $|M|=n$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \underbrace{|P(M)|}_{=2^n}$

c) Beh. $\forall n\in\mathbb{N}: 5 \mid n^5-n$. $n(n^2+1)(n^2-1)$

IA: $n=0 \Rightarrow 5 \mid 0 = 0$

IS $5 \mid (n+1)^5-(n+1) = n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1$
$-n-1$

$= \underline{n^5-n} + 5n^4+10n^3+10n^2+5n$

$$= n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$$

$$\Rightarrow 5 \mid \quad \ldots \quad \equiv 0$$

direkter Beweis

$$5 \mid n^5 - n \iff n^5 - n \equiv 0 \pmod 5$$

n	$n^5 - n$
0	0
1	$1^5 - 1 \equiv 0$
2	$2^5 - 1 \equiv 0$
3	$3^5 - 1 \equiv 0$
4	$4^5 - 1 \equiv 0$
	$(4 \equiv (-1))$

oder kleiner Formel:

$$n^p \equiv n \pmod p$$

hier: $n^5 \equiv n \pmod 5$

80) Beh. $\forall n \in \mathbb{N}$. Jedes $2^n \times 2^n$ Schachbrett lässt sich mit – Stücken bis auf ein Feld auslegen.

IA $n=0$ $2^0 \times 2^0$ Schachbrett $\square$ ✓

IS Beh. $\forall n \in \mathbb{N}$ Wenn das $2^n \times 2^n$-Schachbrett

diese Eigenschaft hat IV
dann auch das $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-Schachbrett

$$2^{n+1} \times 2^{n+1} - 2^n \times 2^n =$$

$$3 \mid 2^n \cdot 2^n \cdot 4 - (2^n \cdot 2^n)$$
$$= 3 \mid (2^n \cdot 2^n) \cdot 3$$
$$= 3 \mid 2^n \cdot 2^n \overset{IV}{=} 1.$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \ \exists p$ Primzahl : $p \mid n$.

IA: $n = 2 \quad \exists p = 2 : p \mid n$

IV: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \ \exists p$:

IS:

Äquivalenzrelation

81)

a) $R = \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod 5 \}$

- R ist reflexiv: $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a \pmod 5$
- R ist symm. : $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b \pmod 5 \Rightarrow b \equiv a \pmod 5$
- R ist transitiv $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$: $a \equiv b \pmod 5$ und

$b \equiv c \pmod 5$

$\Rightarrow \quad a \equiv c \pmod 5$

Äquivalenzklassen $\quad [a]_R = \{ b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod 5 \}$

$a \in \mathbb{Z}$

$[5]_R = [0]_R = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots \}$

$[1]_R$

$[2]_R$ $\quad$ entspricht $\mathbb{Z}_5$

$[3]_R$

$[4]_R$

b) $\quad \Delta_A = \{ (a,a) \mid a \in A \}$

Ü81 (a) Beweisen Sie, dass die Relation $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \, (\mathrm{mod}\, 5)\}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist. Geben Sie die Äquivalenzklassen von R an.

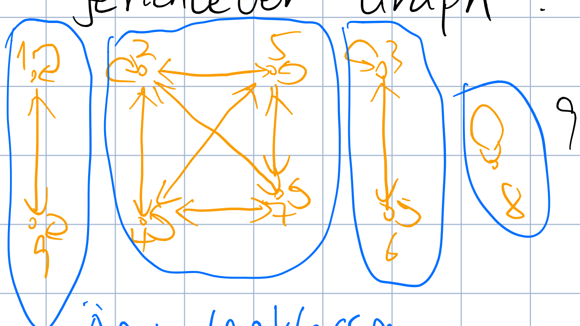
(b) Auf der Menge $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ist folgende Relation gegeben:

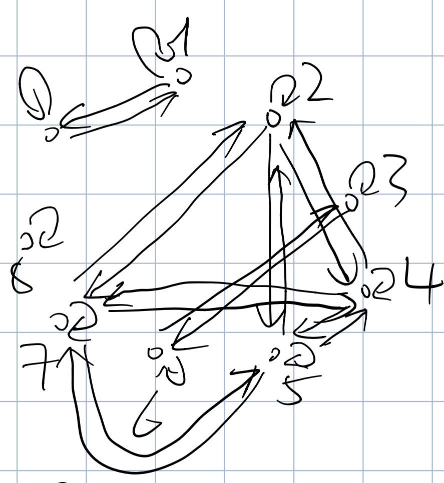
$$R = \Delta_A \cup \{(1,9),(2,4),(2,5),(2,7),(3,6),(4,2),(4,5),(4,7),(5,2),(5,4),(5,7),(6,3),(7,2),(7,4),(7,5),(9,1)\}.$$

(1) Zeichnen Sie den der Relation zugeordneten gerichteten Graphen $G = (A, R)$.

(2) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die Äquivalenzklassen an.

gerichteter Graph :





Äquivalenzklassen

$[1]_R = [9]_R = \{1, 9\}$

$[2]_R = [4]_R = [5]_R = [7]_R = \{2, 4, 5, 7\}$

$[3]_R = [6]_R = \{3, 6\}$

$[8]_R = \{8\}$

(2) ∘ R reflexiv, denn Δ_A

∘ R symm. denn $aRb \Rightarrow bRa$

∘ R transitiv: aRb, $bRc \Rightarrow aRc$