TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Teilbarkeit

$\boxed{\text{V.}}$ Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ eine Ordnungsrelation ist.

Ü37. Wie in der Vorlesung eingeführt, bezeichne $T(n) = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ teilt } n\}$ die *Teilermenge* von n.

(a) Geben Sie die Teilermengen $T(60)$ und $T(550)$ explizit an, und zeichnen Sie jeweils ein Teilerdiagramm.

(b) Finden Sie eine bijektive Abbildung $f\colon T(60) \to T(550)$, sodass für alle $x, y \in T(60)$ gilt: $x \mid y$ genau dann wenn $f(x) \mid f(y)$.

Ü38. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' für jedes der nachstehenden Zahlenpaare (x, y) den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(x, y)$, sowie eine Darstellung $\mathrm{ggT}(x, y) = ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

$$\text{(i)} \quad x = 108, y = 42, \quad \text{(ii)} \quad x = 144, y = 89, \quad \text{(iii)} \quad x = 560, y = 126.$$

Ü39. Beweisen Sie, dass $n^5 - n$ für jede natürliche Zahl n durch fünf teilbar ist, einerseits durch vollständige Induktion, und andererseits durch geschickte Zerlegung in Faktoren.

A40. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 8. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**
Für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ bezeichne a_i die i-te Ziffer Ihrer Matrikelnummer. Erzeugen Sie zunächst die Zahlen $x = 100a_1 + 10a_2 + a_3$ und $y = 100a_5 + 10a_6 + a_7$.

(a) Bestimmen Sie die Teilermengen $T(x)$ und $T(y)$, und zeichnen Sie jeweils ein Teilerdiagramm.

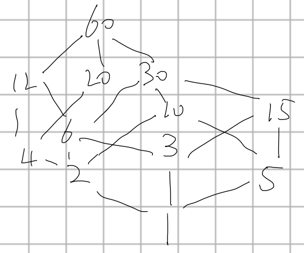
(b) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von x und y mittels des Euklidischen Algorithmus'. Geben Sie eine Darstellung $\mathrm{ggT}(x, y) = ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ an.

H41. Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\sup M$ das *Supremum* von M, also die kleinste Zahl $y \in \mathbb{N}$ die $x \leq y$ für alle $x \in M$ erfüllt.

(a) Sei $M \subseteq \mathbb{N}_{>0}$ mit $|M| = 6$ und $\sup M = 14$. Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene, nichtleere Teilmengen $A, B \subseteq M$ gibt, sodass $\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x$ gilt.

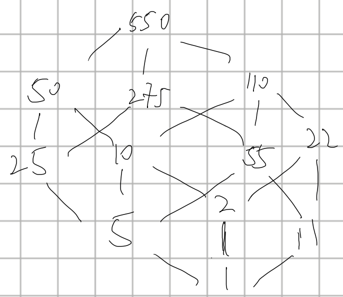
37) Primfaktorzerlegung $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$T(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$



$550 = 5^2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot \phi$

$T(550) = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 25, 50, 55, 110, 275, 550\}$



b)

x	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
$f(x)$	1	5	2	25	11	10	55	50	22	275	110	550

38) Euklidischer Algorithmus: $ggT(x, y)$

Ang: $x \geq y$. Setze $r_0 = x,\ s_0 = 1,\ t_0 = 0$

$r_1 = y,\ s_1 = 0,\ t_1 = 1$

$r_{k+1} = r_{k-1} - q_{k+1} r_k$

$s_{k+1} = s_{k-1} - q_{k+1} s_k$

$t_{k+1} = t_{k-1} - q_{k+1} t_k$

im Schritt erhalten wir $r_{n+1} = 0 \rightarrow$ Ende.

$ggT(x, y) = r_n$

	Rest
$108 : 42 = 2$	24
$42 : 24 = 1$	18
$24 : 18 = 1$	6
$18 : 6 = 3$	0

$\Rightarrow ggT(x, y) = 6$

$r_2 = r_0 - q_2 r_1$

$24 = 108 - 2 \cdot 42$

		$r_0 = x$	$r_1 = y$
	r_0	s_0	t_0
$-q_2$	r_1	s_1	t_1
$-q_3$	r_2	s_2	t_2
	$\vdots$		
$-q_{n+1}$	r_n	s_n	t_n
	r_{n+1}	s_{n+1}	t_{n+1}

i)

		108	42
	108	1	0
-2	42	0	1
-1	24	1	-2
-1	18	-1	3
-3	6	2	-5
	0	-7	18

k=1

$s_2 = s_0 - q_2 s_1 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$

$t_2 = t_0 - q_2 t_1 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$

$s_3 = s_1 - q_3 s_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$

$t_3 = t_1 - q_3 t_2 = 1 - 1 \cdot (-2) = 3$

...

$ggT(x,y) = 6 = 2 \cdot 108 - 5 \cdot 42$

ii)

	Rest
144 : 89 = 1	55
89 : 55 = 1	34
55 : 34 = 1	21
34 : 21 = 1	13
21 : 13 = 1	8
13 : 8 = 1	5
8 : 5 = 1	3
5 : 3 = 1	2
3 : 2 = 1	1
2 : 1 = 2	0

		144	89
	144	1	0
-1	89	0	1
-1	55	1	-1
-1	34	-1	2
-1	21	2	-3
-1	13	-3	5
-1	8	5	-8
-1	5	-8	13
-1	3	13	-21
-1	2	-21	34
-2	1	34	-55
	0	-89	144

$ggT(144, 89) = 1 = 34 \cdot 144 - 55 \cdot 89$

iii)

		560	126
	560	1	0
-4	126	0	1
-2	56	1	-4
-4	14	-2	9
	0	9	-40

$ggT(560, 126) = 14 = -2 \cdot 560 + 9 \cdot 126$

39) $n^5 - n$ für $\forall n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar ist.

Induktionsbeweis: gewünschte Aussage ist $H(n): \exists a \in \mathbb{Z}: n^5 - n = 5a$.

IA: $H(0)$: $0^5 - 0 = 5 \cdot 0 \quad (a=0)$

IV: Es gelte $H(n)$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$

IS: $H(n) \Rightarrow H(n+1)$

$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 = (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$

$\overset{IV}{=} 5a + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = 5\underbrace{(a + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)}_{\in \mathbb{Z}} \Longrightarrow$ durch 5 teilbar

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{N}_{>0}$ mit $|M| = 1008$ und $\sup M = 2014$. Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene Zahlen $x, y \in M$ gibt, sodass entweder $x \mid y$ oder $y \mid x$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie das Schubfachprinzip.

H42. Wie viele gekürzte Brüche $\frac{a}{b}$ mit $0 < \frac{a}{b} \leq 1$, $b < 15$, und $a, b \in \mathbb{N}$ gibt es?