Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

11. Übungsblatt für die Woche 24.06. - 30.06.2019

Differentialgleichungen, Dgl.-Systeme

Ü61 (a) Gegeben ist das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}(x).$$

Es ist bekannt, dass $\mathbf{v}_1 = (1,1)^T$ und $\mathbf{v}_2 = (6,-5)^T$ Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix sind. Stellen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems auf, und skizzieren Sie den (qualitativen) Verlauf der Lösungskurven in der xy-Ebene.

(b) Gegeben ist das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}(x).$$

Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix sind bekannt, es sind $\lambda_{1,2} = -3 \pm 2\mathrm{i}$. Berechnen Sie die allgemeine Lösung, und skizzieren Sie den (qualitativen) Verlauf derjenigen Lösungskurve in der xy-Ebene, die die Bedingungen $\mathbf{y}_s(0) = (1,0)^T$ erfüllt.

Ü62 (a) Berechnen Sie eine Eigenvektorbasis der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Verwenden Sie (a), um für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \\ y_3' &= -2y_1 + y_3 \ . \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ aufzustellen. Bestimmen Sie weiterhin diejenige Lösung $\mathbf{y}_s(x)$, die die Anfangsbedingung $\mathbf{y}_s(0) = (0,1,-1)^T$ erfüllt.

(c) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 10y_2 - 5y_3 \\ y_2' &= -5y_1 + 12y_2 - 5y_3 \\ y_3' &= -10y_1 + 20y_2 - 8y_3 \ . \end{aligned}$$

Bekannt ist, dass $\mathbf{v} = (1,1,2)^T$ ein Eigenvektor der Koeffizientenmatrix dieses Systems ist, und dass $k = 2$ ein doppelter Eigenwert dieser Koeffizientenmatrix ist.
Berechnen Sie die allgemeine Lösung $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$, sowie diejenige Lösung $\mathbf{y}_s(x)$, die die Anfangsbedingung $\mathbf{y}_s(0) = (1,0,0)^T$ erfüllt.

Ü63 Es wird die homogene Differentialgleichung 2. Ordnung $y'' + 3y' + 2y = 0$ betrachtet.

(a) Überführen Sie die Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung 2. Ordnung an. Bestimmen Sie diejenige Lösung $y_s(x)$, die die Bedingungen $y_s(0) = 2, y_s'(0) = 0$ erfüllt.

H64 $\boxed{\textbf{A}}$ Gegeben ist folgendes homogenes lineares Differentialgleichungssystem:

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & -3 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{y}(x)$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung $\mathbf{y}(x)$, sowie diejenige Lösung $\mathbf{y}_s(x)$, die die Anfangsbedingung $\mathbf{y}_s(0) = (1,2,3)^T$ erfüllt.

H65 Gegeben ist die Differentialgleichung $y'' + cy' + y = 0$ mit einem reellen Parameter $c \geq 0$.

(a) Überführen Sie die Differentialgleichung in ein entsprechendes Differentialgleichungssystem. Berechnen Sie die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix in Abhängigkeit vom Parameter c. Für welchen Parameterwert $c_0 \geq 0$ gilt, dass die Eigenwerte für $c \geq c_0$ reell und für $c < c_0$ nicht reell sind?

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung für den Parameterwert $c = 0$ (ungedämpfter Oszillator).

H66 Überführen Sie die Differentialgleichung 3. Ordnung des Anfangswertproblems

$$y''' - y'' - 2y' = 0 \qquad \text{mit } y(0) = 6,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 11 \ .$$

in ein entsprechendes Differentialgleichungssystem, und lösen Sie dieses System. Verwenden Sie die Lösung dieses Systems, um die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung aufzustellen.

Lin. Dgl - System.

$$Y'(x) = A\,Y(x) \quad \text{mit } (n \times n)\text{-Matrix } A$$

Suche n lin. unabhän. Lös.

$$Y_1(x), \dots, Y_n(x).$$

$\Rightarrow$ allg. Lösung.

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + \dots + c_n Y_n(x), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

- Eigenwerte von A

$$\det(A - \lambda E_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

- Eigenvektorbasis berechnen

$$(A - \lambda_k E_n)\, v = 0.$$

falls existent. $\{v_1, \dots, v_n\}$

- n lin. unabh. Lösungen von der Form

$$Y_k(x) = e^{\lambda_k x}\, v_k$$

61) a) $$Y'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} Y(x)$$

geg. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A.

$\{v_1, v_2\}$ lin. unabh. $\Rightarrow$ $\{v_1, v_2\}$ ist Basis des $\mathbb{K}$

Eigenwerte: $\begin{pmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 7$

$\begin{pmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-24\\20\end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$

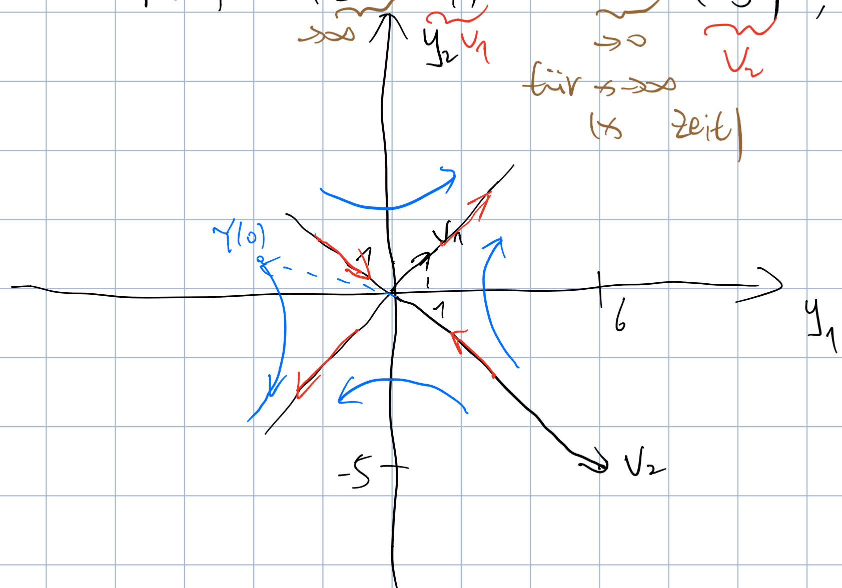
$\Rightarrow \lambda_2 = -4$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$Y(x) = c_1 \underbrace{e^{7x}}_{\to\infty} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{v_1} + c_2 \underbrace{e^{-4x}}_{\to 0} \underbrace{\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}}_{v_2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

für $x \to \infty$

(x Zeit)



$Y(x) = \begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}$

Spezielle Lösungen.

$c_1 = 0$: $\quad c_2 \underbrace{e^{-4x}}_{\to 0 \text{ für } x\to\infty} v_2$

$c_2 = 0$: $\quad c_1 \underbrace{e^{7x}}_{\to\infty \text{ für } x\to\infty} v_1$

b) $Y'(x) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} Y(x)$

Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i$

Keine reellen Eigenvektoren.

TRICK: Erweiterung des Zahlraumes: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

komplexer EV zu $\lambda_1 = -3+2i$:

$$\begin{pmatrix} -3-(-3+2i) & 2 \\ -2 & -3-(-3+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(-2i)x_1 + 2x_2 = 0 \qquad x_2 = i x_1$

$-2x_1 - (2i)x_2 = 0 \qquad x_1 = -i x_2$

$\Rightarrow$ EV: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zeilen sind l.a.

$-2ix_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = ix_1$

$\to \mathrm{Eig}_A(\lambda_1) = \mathrm{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}\right) = \mathrm{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$

eine zugehörige komplexe Lösung

$$Y_1^{\mathbb{C}}(x) = e^{(-3+2i)x}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Re $Y_1^{\mathbb{C}}$, Im $Y_1^{\mathbb{C}}$ sind l.u. reelle Lösung (s. VL)

$$Y_1^{\mathbb{C}}(x) = e^{-3x}\cdot\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right)\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= e^{-3x}\left(\cos(2x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\cos(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\sin(2x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{e^{-3x}\left(\cos(2x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{\text{Reelteil}} + i\,\underbrace{e^{-3x}\left(\cos(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(2x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{\text{Imagteil}}$$

$$\mathrm{Re}(Y_1^{\mathbb{C}}(x)) = e^{-3x}\begin{pmatrix}\cos(2x)\\-\sin(2x)\end{pmatrix}, \quad \mathrm{Im}(Y_1^{\mathbb{C}}(x)) = e^{-3x}\begin{pmatrix}\sin(2x)\\\cos(2x)\end{pmatrix}$$

allg. Lösung:

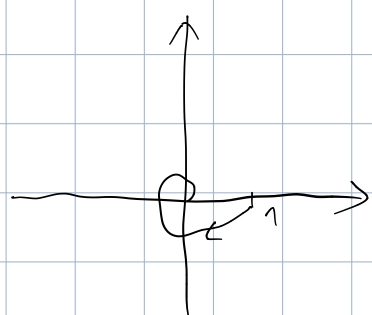
$$Y(x) = C_1 e^{-3x}\begin{pmatrix}\cos(2x)\\-\sin(2x)\end{pmatrix} + C_2 e^{-3x}\begin{pmatrix}\sin(2x)\\\cos(2x)\end{pmatrix}$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$= \underbrace{e^{-3x}}_{\to 0 \text{ für } x \to \infty} \underbrace{\begin{pmatrix}\cos(2x) & \sin(2x)\\ -\sin(2x) & \cos(2x)\end{pmatrix}}_{\text{Rotationsmatrix. im Uhrzeigersinn}} \begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

Spezielle Lösung: $Y_s(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =: e^{-3\cdot 0}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$



6.2) a), b)

$$Y'(x) = \begin{pmatrix}y_1'(x)\\y_2'(x)\\y_3'(x)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\-2 & 1 & 0\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\\y_3(x)\end{pmatrix}}_{Y(x)}$$

- Eigenwerte von A:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\big((4-\lambda)(1-\lambda)+2\big)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$$

zu λ_1:

$$\text{l.a.}\quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y_1(x) = 0 \quad y_3(x) = 0 \quad x_2$ beliebig.

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(\lambda_1) = \mathrm{Span}\Big(\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}\Big\}\Big)$$

Eigenräume:

$\lambda_1 = 1$
$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$

$$\text{l.a.}\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_3 = -2x_1. \quad x_2 = -2x_1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}_A(\lambda_2) = \mathrm{Span}\Big(\Big\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\Big\}\Big)$$

$$\underset{v_2}{\sim}$$

$\lambda_3 = 3$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_3 = -x_1 \quad x_2 = -x_1$

$\Rightarrow \operatorname{Eig}_A(\lambda_3) = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$

$\Rightarrow \text{Basis} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow$ allg. Lösung: $Y(x) = c_1 e^{x} v_1 + c_2 e^{2x} v_2 + c_3 e^{3x} v_3$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Spezielle Lösung: $Y_s(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$Y_s(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad c_1 = 2, \quad c_2, c_3 = 1.$

63) $\quad y'' + 3y' + 2y = 0$

$y_1 := y \qquad \longrightarrow \qquad y_1' = y_2$

$y_2 := y' \qquad \qquad \qquad y_2' = -3y' - 2y = -3y_2 - 2y_1$

$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Eigenwerte: (siehe. VL) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1$

$y(x) = y_1(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$ (Lösung der Ursprüngl. DgL)

$y_2(x) = y'(x) = c_1(-2) e^{-2x} + c_2(-1) e^{-x}$

oder über das System.

$\lambda_1 = -2 \quad \begin{pmatrix} 0-\lambda_1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$-\lambda_1 x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 = \lambda_1 x_1$$

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda_1) = \mathrm{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$