TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

2. Übungsblatt für die Woche 15.10. - 21.10.2018

Komplexe Zahlen

Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.

Stellen Sie die komplexe Zahl $z := \left(\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^9$ sowohl in kartesischer und als auch in exponentieller Form dar.

Ü7 (a) Beweisen Sie, dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \text{und} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Tipp: Für die einzelnen Beweise sind verschiedene Darstellungen komplexer Zahlen geeignet.

(b) Für feste reelle Parameter a, b wird die Gleichung $z^2 + az + b = 0$ betrachtet. Beweisen Sie: Wenn $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung ist, dann ist auch $\overline{z}$ eine Lösung.

Ü8 Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

(a) $z^5 = 1 - \mathrm{i}$ (b) $(z + 1 - \mathrm{i})^3 = -8$ (c) $z^4 = 1$ (d) $z^8 = 1$.

Wo liegen die Punkte in der Gaußschen Zahlenebene, die zu diesen Lösungen gehören?

Ü9 (a) Es sei $r > 0$ eine reelle Konstante. Beschreiben Sie den geometrischen Ort derjenigen Punkte z der Gaußschen Zahlenebene, die die Gleichung $|z - 3| = r$ erfüllen. Überlegen Sie sich anschließend graphisch, welche Zahlen $z \in \mathbb{C}$ die Bedingung

$$|z - 3| \leq |z + \mathrm{i}|$$

erfüllen (Tipp: Betrachten Sie zuerst den Fall '='). Bestimmen Sie nun die Lösungsmenge dieser Ungleichung rechnerisch, indem Sie $z = x + y\,\mathrm{i}$ einsetzen und nach y umstellen.

(b) Finden Sie alle $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, die die Bedingung $|z| + 2\overline{z} = -3 + 6\mathrm{i}$ erfüllen.

(c) Finden Sie $z \in \mathbb{C}$, die die Ungleichung $\frac{|z|-1}{\operatorname{Im} z} < 1$ erfüllen, und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Zahlenebene.

H10 $\boxed{\mathbf{A}}$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Ungleichung $|z - \mathrm{i}| \leq |z + 2 + \mathrm{i}|$, und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Zahlenebene.

(b) Berechnen Sie in $\mathbb{C}$ alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$.
Geben Sie die Lösungen in exponentieller Form an.

H11 (a) Bestimmen Sie allgemein für eine beliebige komplexe Zahl $z = x + y\mathrm{i}$ die kartesische Form der Zahlen $(\overline{z})^{-1}$ und $\overline{z^{-1}}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\frac{(1+2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(3+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = 1$ gilt.

(c) Gesucht sind alle reellen x, so dass $z = (x + 2 - \mathrm{i})^4$ reell wird.

(d*) Berechnen Sie in $\mathbb{C}$ die Lösungsmenge der Gleichung

$$z \cdot \overline{z} - (2 + \mathrm{i})z - (2 - \mathrm{i})\overline{z} = 4.$$

Zeichnen Sie diese Menge in der Gaußschen Zahlenebene ein. Welche geometrische Kurve stellt sie dar? Bringen Sie die Gleichung in eine passende Normalform.
(Hinweis: Ein Umstellen nach y oder nach x führt hier nicht zum Ziel.)

H12 (a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichungen $z^3 - 1 = 0$ und $z^3 + 1 = 0$.

(b) Ermitteln Sie alle Lösungen von $z^6 - 64 = 0$.
Hinweis: Man kann (b) lösen, indem man die Ergebnisse von (a) verwendet.