



Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110 Wintersemester 2018/19

8. Übungsblatt für die Woche 26.11. - 02.12.2018

lineare Unabhängigkeit, Basis, Kern, Spaltenraum und Rang einer Matrix

Vorrechenaufgabe:

Definieren Sie die Begriffe: Rang und Kern einer Matrix.

Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Rang 2 an, und bestimmen Sie deren Kern.

Ü43 Gegeben ist die Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a+3b+4c \\ a-b \\ 2a-b+c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (a) Stellen Sie U als Spannraum dar. Bestimmen Sie eine Basis von U.
- (b) Liegt $v = (1, 2, -5)^T$ in U? Geben Sie eine Basis und die Dimension von Span $(U \cup \{v\})$ an.
- (c) Stellen Sie U als Spaltenraum einer Matrix A dar, und bestimmen Sie $\operatorname{rg}(A)$ und $\operatorname{dim}(\operatorname{Ker}(A))$.
- Ü44 Im Vektorraum V der Polynomfunktionen über \mathbb{R} von Grad kleiner 3 (mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation) sind folgende Polynomfunktionen gegeben:

$$p_1(x) = 1 + 2x^2$$
, $p_2(x) = 2 + x + 3x^2$ und $p_3(x) = -1 - 3x + x^2$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{m_0, m_1, m_2\}$ mit $m_k(x) = x^k$ (k = 0, 1, 2) eine Basis von V bildet. Geben Sie die Koordinatenvektoren von p_1, p_2 und p_3 bzgl. dieser Basis an.
- (b) Sind die Polynomfunktionen p_1, p_2 und p_3 linear unabhängig?
- Ü45 (a) Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ "iber } \mathbb{R} \qquad \text{ und } \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ "iber } \mathbb{Z}_3$$

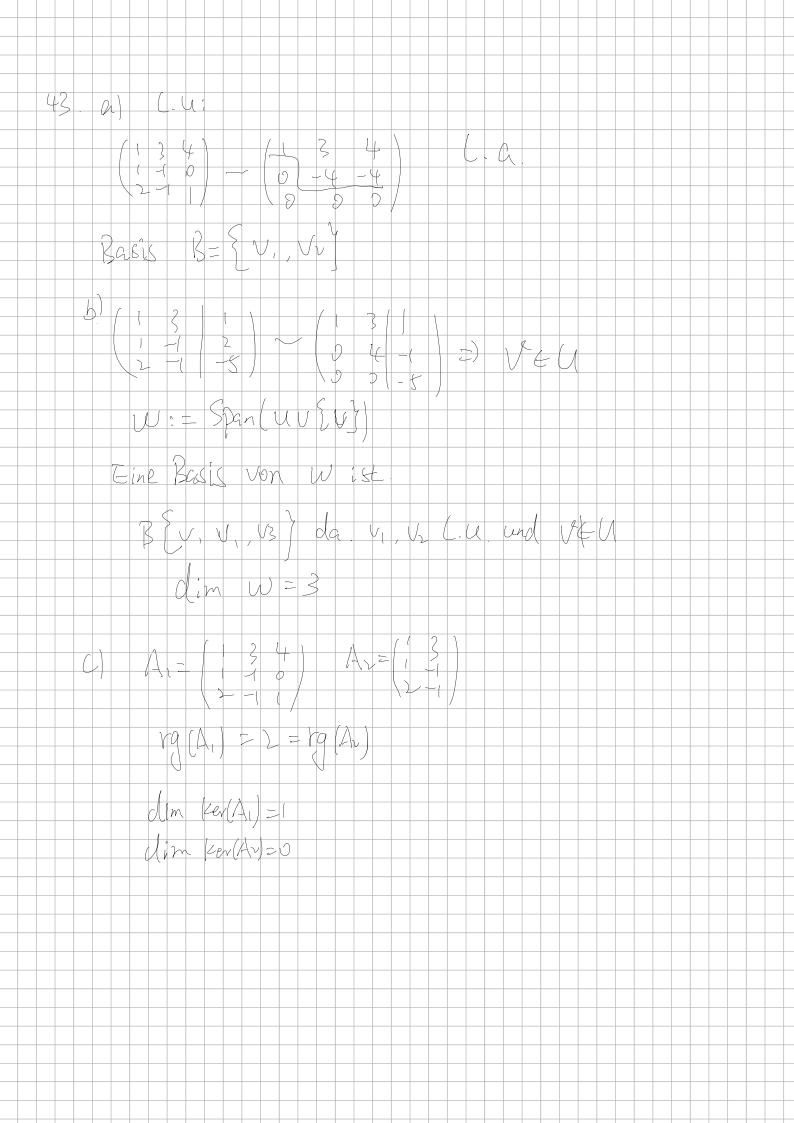
- (i) eine Basis des Spaltenraums Col(A) und den Rang,
- (ii) den Kern und seine Dimension.

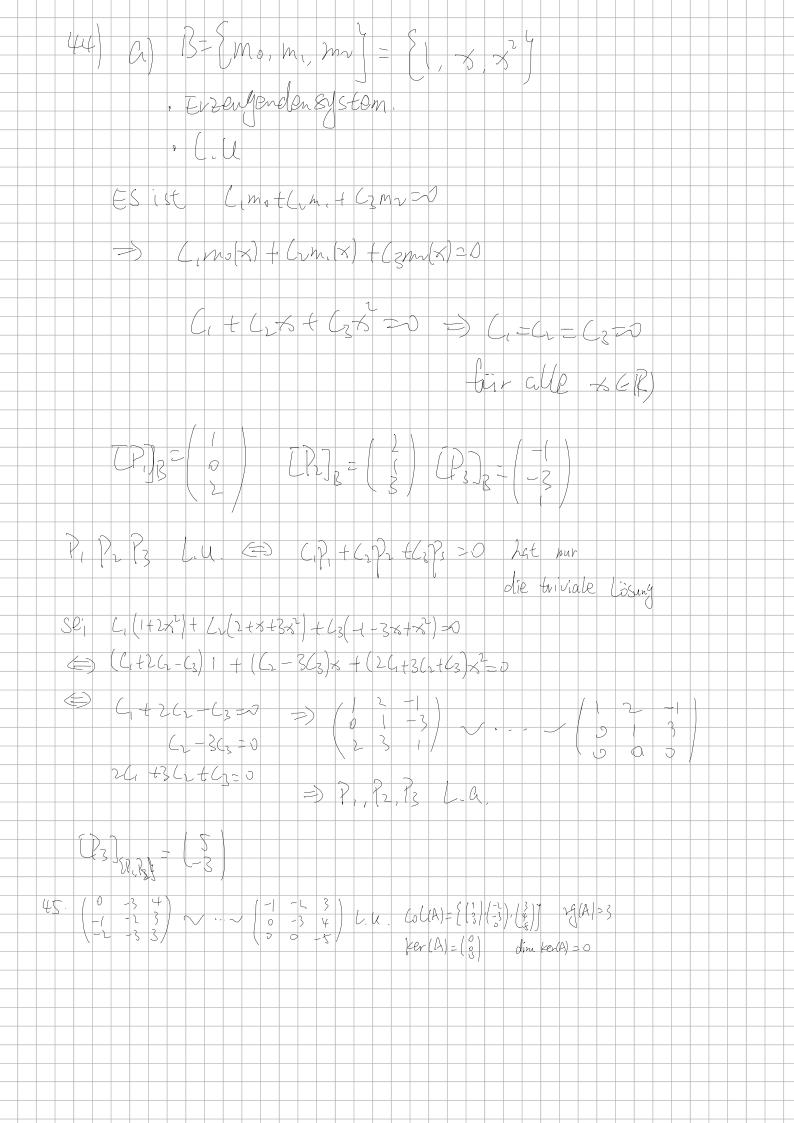
Liegt der Vektor $w = (1, 1, 1)^T$ im Spaltenraum Col(B)?

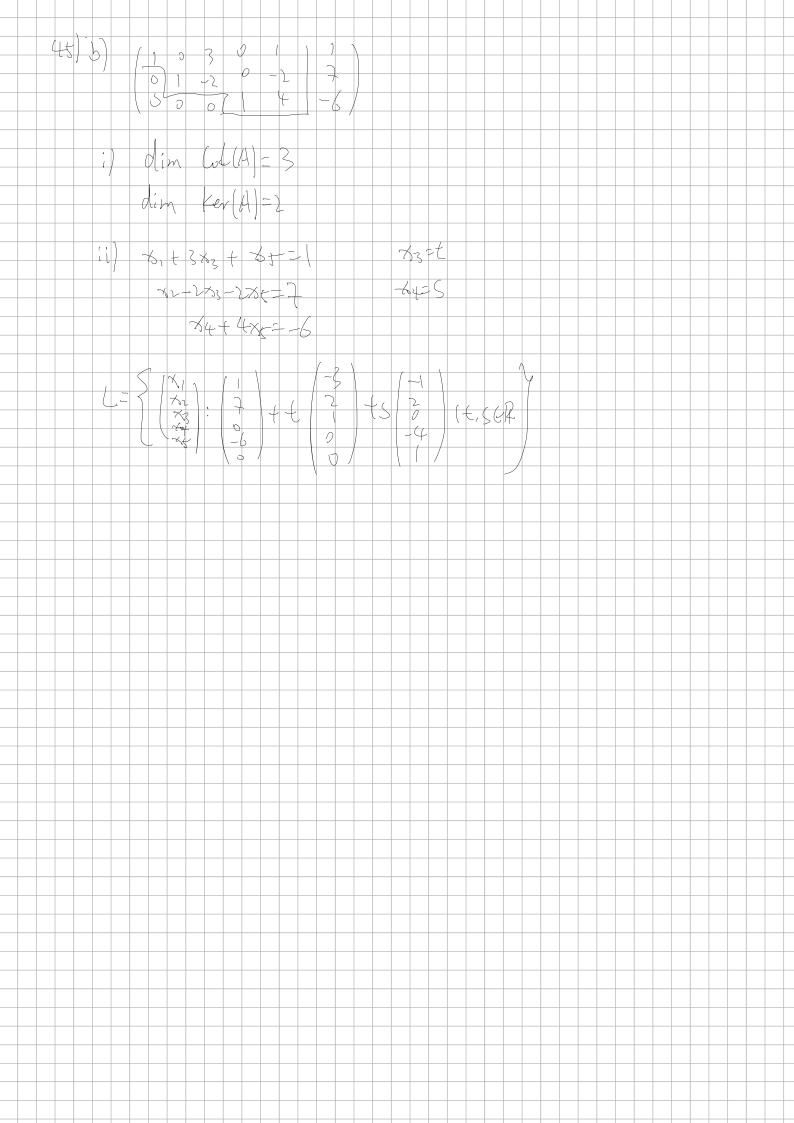
(b) Gegeben ist die reduzierte Zeilenstufenform von (A|b) für ein lineares System Ax = b:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -6
\end{array}\right).$$

- (i) Bestimmen Sie dim Col(A) und dim Ker(A).
- (ii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von Ax = b und Ax = 0 jeweils in Vektorform. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge von Ax = b einen affinen Teilraum von \mathbb{R}^5 bildet.







$$A = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \end{array}\right).$$

- (a) Verwenden Sie das Gauss/Jordan-Verfahren, um den Rang rg(A) und eine Basis \mathcal{B} von Col(A) zu bestimmen. Begründen Sie Ihre Ergebnisse! Liegt der Vektor $w = (1, 2, 3)^T$ in Col(A)? Wenn ja, so bestimmen Sie den Koordinatenvektor $w_{\mathcal{B}}$ von w bezüglich der Basis \mathcal{B} von Col(A).
- (b) Stellen Sie Ker(A) als Spannraum dar. Geben Sie eine Basis \mathcal{C} von Ker(A) an. Untersuchen Sie, ob der Vektor $v = (6, 2, -2, 0)^T$ im Kern von A liegt.
- H47 (a) Es sei A eine reelle $m \times n$ -Matrix, so dass für alle $b \in \mathbb{R}^m$ das lineare System Ax = b höchstens eine Lösung hat. Begründen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.
 - (b) Gegeben sind ein Vektorraum V über einem Körper K und Vektoren $v_1,v_2,v_3\in V$. Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\begin{aligned} & \{v_1,v_2,v_3\} \text{ ist linear abhängig } \Leftrightarrow \exists i \in \{1,2,3\}: \ v_i \in \operatorname{Span}(\{v_1,v_2,v_3\} \setminus \{v_i\}) \\ & (\text{Bemerkung: Allgemein lässt sich analog für } v_1,\dots,v_n \in V \text{ zeigen: } \\ & \{v_1,\dots,v_n\} \text{ ist linear abhängig } \Leftrightarrow \exists i \in \{1,\dots,n\}: \ v_i \in \operatorname{Span}(\{v_1,\dots,v_n\} \setminus \{v_i\}) \end{aligned}$$

- H48 (a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie: $|\operatorname{Ker}(AB)| > 1 \iff |\operatorname{Ker}(A)| > 1 \operatorname{oder} |\operatorname{Ker}(B)| > 1$.
 - (b) Bestimmen Sie für folgende komplexe Matrix den Rang und den Kern:

$$A = \begin{pmatrix} i & -i & 0 & 1 \\ -1 & -i & -1 & 0 \\ i+1 & 0 & 3 & i \end{pmatrix}$$

Stellen Sie den Kern als Spannraum einer Basis dar. Liegt der Vektor $a = (i, i, i)^T$ im Spaltenraum Col(A) von A?

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den Parametern $(r,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

(Hinweis: eine Fallunterscheidung ist nötig!)