Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

14. Übungsblatt für die Woche 21.01. - 27.01.2019

Orthogonalität, Orthogonalprojektion

Ü79 (a) Es seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $v_k \neq 0, k = 1, \cdots, n$, Elemente eines euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraumes, die paarweise orthogonal sind. Zeigen Sie, dass $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig ist.

(b) Betrachtet wird der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren unterschiedlicher Eigenwerte einer symmetrischen Matrix stets paarweise orthogonal sind.

(c) Bestimmen Sie eine Eigenvektorbasis der Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass es sich um eine Orthogonalbasis handelt und berechnen Sie den Koordinatenvektor des Vektors $v = (1, -1)^T$ in dieser Basis.

Ü80 (a) Es sei $v = (4, -3)^T \in \mathbb{R}^2$ und $U = \mathrm{Span}(\{v\})$. Bestimmen Sie $U^\perp$ als Spannraum, und zeichnen Sie U und $U^\perp$ in der xy-Ebene. Geben Sie eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^2$ an, die einen Vektor aus U enthält.

(b) Gegeben sind die Matrizen

$$\text{(i)}\quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)}\quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimmen Sie $\mathrm{Col(A)}^\perp$ und schreiben Sie ihn als Spannraum.

(2) Finden Sie eine orthonormale Basis $\mathcal{B}$ für $\mathrm{Col}(A)$.

(3) Für die Matrix aus (i) lässt sich $\mathcal{B}$ leicht zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ erweitern. Wie geht das?

Ü81 Es sei A eine Matrix aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit den Eigenwerten $k_1 = 3$ and $k_2 = 0.5$ und zugehörigen Eigenvektoren $b_1 = (1, -2)^T$ bzw. $b_2 = (1, 1)^T$. Wir betrachten das diskrete dynamische System

$$v_{k+1} = Av_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Startvektor $v_0 = (4, 1)^T$.

(a) Berechnen Sie v_0 als Linearkombination der Eigenvektorbasis $\{b_1, b_2\}$.

(b) Berechnen Sie v_1 als Linearkombination der Eigenvektorbasis $\{b_1, b_2\}$.

(c) Bestimmen Sie die k-te Iterierte v_k als Linearkombination der Eigenvektorbasis $\{b_1, b_2\}$.

(d) Was geschieht für $k \to \infty$? Wie verhält sich die Folge von Vektoren $v_0, v_1, v_2, \ldots$? Skizzieren Sie die zu den Vektoren $v_0, v_1, v_2, \ldots$ gehörigen Punkte in der xy-Ebene.

H82 Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Prüfen Sie, ob die Spaltenvektoren von A orthogonal zueinander sind, und bestimmen Sie den Untervektorraum $\mathrm{Col(A)}^\perp$.

79) Seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ Paarweise orthogonal und ungleich 0.

Angenommen $\{v_1, \dots, v_n\}$ l.a.

Dann existieren $c_1, \dots, c_n \in K$ nicht alle gleich 0, sodass

$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$

Es existiert ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $c_i \neq 0$

Mit Orthogonalität

$v_i \cdot (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = v_i \cdot 0$

$\Rightarrow c_1 v_i v_1 + \dots + c_n v_i v_n = 0$

$\Rightarrow c_i v_i v_i = 0$

$\Rightarrow c_i \|v_i\|^2 = 0$

da aber $v_i \neq 0$ vorausgesetzt was ist das ein widerspruch

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ l.u.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann ist $A^T = A$.

Seien v_1 und v_2 Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten k_1, k_2

Es folgt:

$v_2 \cdot A v_1 = v_2^T A v_1 = v_2^T (k_1 v_1) = k_1 (v_1 \cdot v_2)$

Andererseits ist wegen Symmetrie

$v_2 \cdot A v_1 = v_2^T (A^T v_1) = (A v_2)^T v_1 = k_2 (v_1 \cdot v_2)$

und damit $k_1 (v_1 \cdot v_2) = k_2 (v_1 \cdot v_2)$. Da aber $k_1 \neq k_2$ folgt

$v_1 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda E) = \left| \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right|$

$= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 6$

Eigenvektoren zu λ_1:

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 4x + 2y = 0$

EV zu λ_1. $v_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \}$

zu λ_2: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \lambda_2\ v_2 = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

$\{v_1, v_2\}$ ist Eigenvektorbasis

Es gilt. $v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-2) 1 = 0$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ ist orthogonalbasis $\quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\frac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{v \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{5} v_1 + \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{5} v_2 = -\frac{3}{5} v_1 - \frac{1}{5} v_2$

$[v] = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Alternativ
$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2$

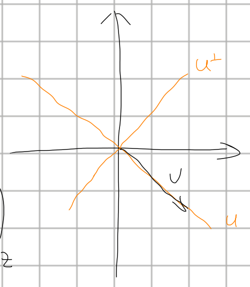
80) $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad U = \mathrm{Span}\{v\}$

Ein orthogonales Vektor zu v ist z.B. $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U^\perp = \mathrm{Span}\{w\}$

orthonormale Basis des $\mathbb{R}^2$ $\quad \{ \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \}$

mit $\|v\| = \|w\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}} = \sqrt{25} = 5$



b) i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Col}(A)^\perp = \ker(A^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$

$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = -z \\ y = z \end{array}$

$\Rightarrow \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} = \ker(A^T)$

ii) v_1 und v_2 sind schon orthogonal

$\|v_1\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{6} \quad \|v_2\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$

Damit ist $B = \{ \frac{v_1}{\sqrt{6}}, \frac{v_2}{\sqrt{2}} \}$ Orthonormalbasis von $\mathrm{Col}(A)$

iii) B lässt sich zu Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ erweitern.

$B \cup \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Col}(A)^\perp = \ker(A^T)$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \ker(A) = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$

b) $\mathrm{Col}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eine orthonormalbasis von $\mathrm{Col}(A)$ ist $\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

81) $v_{k+1} = A v_k \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad k_1 = 3 \quad k_2 = 0.5$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$

$\Rightarrow \alpha = 1 \quad \beta = 3$

$[v_0]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

alternativ $A = S D S^{-1} \quad S = (b_1, b_2) \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$[v_0]_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $v_1 = A v_0$

$= A(1 \cdot b_1 + 3 \cdot b_2) = 3 \cdot 1 \cdot b_1 + 0.5 \cdot 3\, b_2 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 1.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ -4.5 \end{pmatrix}$

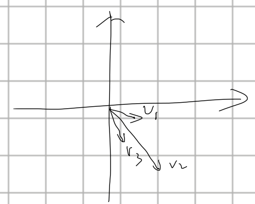
c) $v_2 = A \cdot v_1 = A(A v_0) = 3^2 b_1 + \frac{3}{2^2} b_2$

$v_3 = A v_2 = A(A v_1) = A(A(A v_0)) = 3^3 b_1 + \frac{3}{2^3} b_2$

$\vdots$

$v_k = A^k v_0 = 3^k \cdot b_1 + \frac{3}{2^k} b_2$

d) Für $k \to \infty$ schmiegt sich v_k immer mehr an b_1 an.



Erwärmungsaufgabe

geg. $\mathbb{R}^2$ Standard Skalarprodukt

$(u \cdot v = u^T v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n)$

sind folgende Aussagen w. f?

1) Die Spaltenvektor der Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ sind für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ Orthogonal

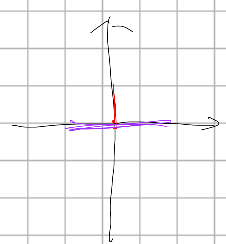
ja. denn $\cos\alpha(-\sin\alpha) + \sin\alpha \cos\alpha = 0$

2) $\{v_1, v_2\} \in \mathbb{R}^2$ orthogonal $\to \{v_1, v_2\}$ l.u.

nein. der Nullvektor muss ausgeschlossen werden

3) $\dim \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}^\perp = 1$

ja



H83 Durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$$

ist ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ definiert (das muss nicht gezeigt werden).

Zeigen Sie, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

keine Orthonormalbasis bzgl. dieses Skalarproduktes ist. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bzgl. $\bullet$.

H84 (a) Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $(1,7)^T$ auf die Gerade, die durch den Punkt $(-4,2)^T$ und den Koordinatenursprung geht.

(b) Gesucht ist der Abstand von $(3,1)^T$ zur Geraden durch $(8,6)^T$ und den Koordinatenursprung.

(c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 = (2,-3)^T$ und $v_2 = (6,4)^T$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^2$ bilden, und stellen Sie den Vektor $(9,-7)^T$ als Linearkombination von v_1 und v_2 dar.