TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

6. Übungsblatt für die Woche 12.11. - 18.11.2018

Vektorraum, Untervektorraum

Vorrechenaufgabe:

Es sind im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ folgende Mengen gegeben:

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\},\ U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x_2 = x_1^2 \right\} \text{ und } U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 3x_1 + x_2 = 0 \right\}.$$

Skizzieren Sie die Mengen in der Ebene, und untersuchen Sie, ob es sich dabei um Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ handelt. Ist $U_1 \cap U_3$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$?

Ü31 (a) Beweisen Sie, dass die von Null verschiedenen positiven reellen Zahlen mit den durch

$$x \oplus y := x \cdot y \qquad \text{und} \qquad kx := x^k$$

definierten Operationen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden. Dabei bezeichnet $\cdot$ die übliche Multiplikation reeller Zahlen.

(b) Es sei M die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Es soll gezeigt werden, dass M mit der punktweisen Addition von Funktionen

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad (p + q)(x) := p(x) + q(x)$$

und der punktweisen Skalarmultiplikation

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad (kp)(x) := kp(x)$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet. Prüfen Sie dazu die Vektorraumaxiome V4, V5 und V9.
Geben Sie einen Vektorraum an, für den M ein Untervektorraum ist.
Geben Sie einen nichttrivialen Untervektorraum von M an.

Ü32 (a) Beweisen Sie: Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines Vektorraums V über einem Körper K, dann ist auch $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V.

(b) Bildet die Vereinigung zweier Untervektorräume eines Vektorraums V auch immer einen Untervektorraum von V?

Ü33 Untersuchen Sie, ob folgende Mengen U Untervektorräume der gegebenen Vektorräume V sind:

(a) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$,

(b) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+3y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$,

(c) $V = \mathbb{C}^3, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \, \middle| \, z_1 = \mathrm{i}z_2 - (2+\mathrm{i})z_3 \right\}$,

(d) $\mathbb{R}$-Vektorraum V der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad U = \left\{ f \in V \, \middle| \, \forall x \in \mathbb{R} : \, f(x) = f(-x) \right\}$,

(Der Vektorraum der Funktionen ist mit der üblichen punktweisen Addition $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und Skalarmultiplikation $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ (für alle $x \in \mathbb{R}$) ausgestattet.)

H34 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume von V? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\text{(i) } U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x+2z \\ 3y-z \\ 4x-3y \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,z \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \text{(ii) } U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $U = \Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(2) = 2f(1) \Big\}$ einen Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums V aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ist.

H35 (a) Beweisen Sie: Ist V ein K-Vektorraum und $u \in V$, dann ist $(-1) \cdot u = -u$.

(b) Untersuchen Sie, ob die Menge $U = \Big\{ (x-1, x+y, y+1)^T \,\Big|\, x, y \in \mathbb{R} \Big\}$ einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ bildet.

H36 Bei der Lösung einer Interpolationsaufgabe geht es darum, ein Polynom $p(x)$ zu finden, dessen Graph gegebene Punkte (x_i, y_i) verbindet. Die Interpolation einer großen Punktmenge durch Polynome hohen Grades ist nicht immer sinnvoll, weil der Interpolationsfehler zu groß wird. Deshalb wird die Methode der Spline-Interpolation verwendet.

Für die Computergrafik sind kubische Splinefunktionen besonders wichtig. Das sind Polynome 3. Grades auf gegebenen Intervallen, aus denen man eine glatte Kurve zusammensetzen kann.

Gegeben ist folgende Wertetabelle:

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0

Gesucht ist eine Funktion

$$s(x) := \begin{cases} p_0(x), & x_0 \leq x < x_1 \\ p_1(x), & x_1 \leq x < x_2 \\ p_2(x), & x_2 \leq x < x_3 \\ p_3(x), & x_3 \leq x \leq x_4 \end{cases} \quad \text{mit } p_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

die folgende Bedingungen an die Funktion und ihre Ableitungen erfüllt:

$$s(x_i) = y_i \text{ für } i = 0,1,2,3,4$$

$$\left.\begin{array}{rcl} p_{i-1}(x_i) &=& p_i(x_i) \\ p'_{i-1}(x_i) &=& p'_i(x_i) \\ p''_{i-1}(x_i) &=& p''_i(x_i) \end{array}\right\} \text{ für } i = 1,2,3.$$

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0$$

Diese Funktion $s(x)$ nennt man natürliche kubische Splinefunktion. Grundlagen zu Splinefunktionen werden im Modul „Mathematische Methoden für Informatiker" vermittelt.

(a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i mit $i = 0, 1, 2, 3$ für $s(x)$ zur gegebenen Wertetabelle auf.

(b) Die Lösung ist:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2x + \frac{4}{3}, & -2 \leq x < -1 \\ -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x + \frac{4}{3}, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Führen Sie die Probe durch.