Einführung in die Mathematik für Informatiker

Prof. Dr. Ulrike Baumann

Institut für Algebra

8.10.2018

Inhalt des Moduls

Einführung in die Mathematik für Informatiker

Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

- **Lineare Algebra**

  Prof. Dr. Ulrike Baumann
  ulrike.baumann@tu-dresden.de

  Kursassistentin: Dr. Antje Noack
  antje.noack@tu-dresden.de

- **Diskrete Strukturen**

  Jun.-Prof. Dr. Friedrich Martin Schneider
  Kursassistent: Dr. Henri Mühle

Prüfungen

- Erste Modulprüfung: (90 Minuten)

  Anfang Dezember 2018

  Nach- und Wiederholungsprüfung:
  Beginn des Sommersemesters 2019

- Zweite Modulprüfung (120 Minuten)

  Prüfungszeitraum des Wintersemesters 2018/19

  Nach- und Wiederholungsprüfung:
  Prüfungszeitraum des Sommersemesters 2019

Hausaufgaben

Das Bearbeiten von Hausaufgaben dient dem **regelmäßigen Nacharbeiten der Vorlesungsinhalte**.

. . . .

Durch das Abgeben von Hausaufgaben bis zum festgesetzten Termin können **Bonuspunkte** für die Klausur erworben werden.

Hausaufgaben, die zur Bewertung abgegeben werden können, sind auf den Übungsblättern mit **A** gekennzeichnet.

Ein Bonus kann auch durch das **Vorrechnen von Aufgaben** in den Übungen erlangt werden.

Zugelassene Hilfsmittel in Prüfungen

keine elektronischen Hilfsmittel

insbesondere **kein** Taschenrechner

Ein DIN A4 Blatt (eventuell beidseitig) handbeschrieben

keine Kopie

Inhalt der Vorlesung

Lineare Algebra als mathematische Theorie für die Informatik:
Theorie der Vektorräume und der linearen Abbildungen

- Körper der komplexen Zahlen
- Matrizen
- Lineare Gleichungssysteme
- Vektorräume über Körpern
- Lineare Abbildungen
- Determinanten
- Euklidische Vektorräume
- Bestapproximation

1. Vorlesung

- Konstruktion der komplexen Zahlen
  (Zahlenbereichserweiterung)

- Rechnen mit komplexen Zahlen:
  Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

  (Zahlen)Körper der komplexen Zahlen

  Wir werden Vektorräume über beliebigen Körpern betrachten.

- Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen
  in der GAUSSschen Zahlenebene

  - arithmetische Darstellung – trigonometrische Darstellung – EULERsche Darstellung
  - *Umrechnen:* kartesische Koordinaten – Polarkoordinaten

- Anwendungen komplexer Zahlen

Zahlenbereiche

$$
\begin{array}{lcll}
\text{natürliche Zahlen} & \mathbb{N} & = & \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\
 & \mathbb{N}_+ & = & \{1, 2, 3, 4 \dots\} \\
\text{ganze Zahlen} & \mathbb{Z} & = & \{\dots, -3, -2, -1, -0, 1, 2, \dots\} \\
\text{rationale Zahlen} & \mathbb{Q} & = & \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \\
\text{reelle Zahlen} & \mathbb{R} & & \\
\text{komplexe Zahlen} & \mathbb{C} & &
\end{array}
$$

Rechnen mit komplexen Zahlen

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der komplexen Zahlen

- Addieren:

  $(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$

- Subtrahieren:

  $(a + bi) - (c + di) := (a - c) + (b - d)i$

- Multiplizieren:

  $(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$

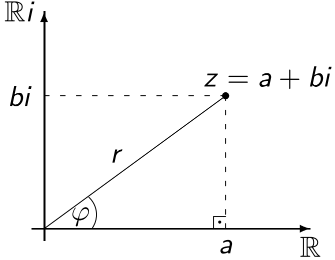
- Dividieren:

  $$\frac{a + bi}{c + di} := \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i \quad \text{für} \quad c + di \neq 0$$

Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ der komplexen Zahlen

- $+$ ist assoziativ:
  $$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$
- $+$ ist kommutativ:
  $$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$
- $+$ hat ein neutrales Element 0:
  $$z + 0 = 0 + z = z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}$$
- Jedes Element $z \in \mathbb{C}$ hat ein Inverses $-z$ bezüglich $+$:
  $$z + (-z) = (-z) + z = 0$$
- $\cdot$ ist assoziativ:
  $$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$
- $\cdot$ kommutativ:
  $$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$
- $\cdot$ hat ein neutrales Element 1:
  $$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$
- Jedes Element $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat ein Inverses z^{-1} bezüglich $\cdot$:
  $$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$
- $\cdot$ ist distributiv bezüglich $+$:
  $$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

Geometrische Darstellung von $\mathbb{C}$ (1)



$$\begin{aligned} z &= a + bi \in \mathbb{C} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \\ |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} = r \\ a &= r\cos\varphi \\ b &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

- in kartesischen Koordinaten:

$$z = a + bi$$

  Realteil: $\mathrm{Re}(z) = a$, Imaginärteil: $\mathrm{Im}(z) = b$

- in Polarkoordinaten:

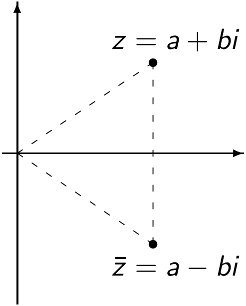
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

  Betrag: $|z| = r$, Argument: $Arg(z) = \varphi$

- in Exponentialform (EULERsche Darstellung)

$$z = re^{i\varphi}$$

Geometrische Darstellung von $\mathbb{C}$ (2)



- $\bar{z}$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl.
- $|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2$

Rechnen in Polarkoordinatendarstellung

Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

- Multiplikation:
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$
Beim Multiplizieren komplexer Zahlen multipliziert man die Beträge und addiert die Argumente.

- Multiplikatives Inverses von $z_2 \neq 0$:
$$(z_2)^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{1}{r_2} e^{-i\varphi_2} = \frac{1}{r_2} e^{i(-\varphi_2)}$$

- Division (falls $z_2 \neq 0$):
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$