Erwärmung

Es sei A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K.
Sind die folgenden Aussagen w oder f?

1) $k \in K$ ist Eigenwert von A $\iff$ $(A - kE)\underset{\text{Eigenvektor}}{v} = 0$ hat genau eine Lösung. falsch. unendlich viele

2) Das charakteristische Polynom von A hat den Grad n wahr. Polynom $\det(A - kE)$

3) Der Nullvektor ist ein Eigenvektor von A falsch

4) Ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A, so ist $\dim \ker(A) = 0$ falsch

5) A ist invertierbar $\iff$ $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von A wahr

Es gilt 0 kein EW von A $\iff 0 \neq \det(A - 0E)$
$\iff 0 \neq \det(A)$
$\iff A$ invertierbar

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

12. Übungsblatt für die Woche 07.01. - 13.01.2019

Eigenwerte und Eigenvektoren

Ü67 Es sei $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix M ist. Welches ist der zugehörige Eigenwert λ_1?

(b) Finden Sie alle Eigenwerte von M. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume und skizzieren Sie diese in der xy-Ebene. Stellen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ für $\mathbb{R}^2$ auf, die nur aus Eigenvektoren von M besteht.

(c) Betrachtet wird die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(v) := Mv$.
Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ von f bezüglich der Eigenvektorbasis $\mathcal{B}$, und berechnen Sie die Determinante von A_{BB}.

Was stellt das Bild des Einheitskreises unter der Abbildung f geometrisch dar?

Ü68 (a) Berechnen Sie für die folgenden Matrizen A und B alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume als Spannräume. Geben Sie, wenn möglich, eine Eigenvektorbasis von A bzw. B für den $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Wie müssen die reellen Parameter a und b gewählt sein, damit die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & 2a \end{pmatrix}$ genau einen reellen Eigenwert hat?

Ü69 Es sei A eine reguläre $n \times n$-Matrix über einem Körper K. Zeigen Sie:

- Jeder Eigenvektor von A ist auch Eigenvektor von A^{-1}.
- Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

H70 $\boxed{\mathbf{A}}$ Berechnen Sie für die folgenden Matrizen A und B jeweils alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume. Geben Sie die Eigenräume als Spannräume einer Basis an.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ü67

a) z.Z.: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV der Matrix M

$Mv_1 = \lambda v_1$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\, v_1$

Also ist v_1 Eigenvektor von M und $\lambda_1 = 5$ der zugehörige EW

b) charakteristisches Polynom:

$\det(M - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$= (3-\lambda)^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$\lambda = 3 \pm \sqrt{3^2 - 4} = 3 \pm 2$ $\qquad \lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$

ER zu λ_2 $\ker(M - \lambda_2 E)$ bestimmen

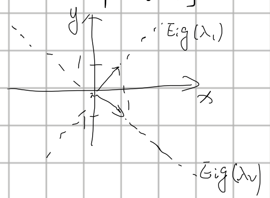
$\begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y$

$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Eig}_M(\lambda_2) = \mathrm{Span}\{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{\text{EV zu } \lambda_2}\}}_{\text{ER}}$

$= \{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \}$

aus a) ist schon der EV zum EW λ_1 bekannt.

$\mathrm{Eig}_M(\lambda_1) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$



Basis aus EV $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Linear. $f(v) = M \cdot v$ ges.: A_{BB} von f.

$f(v_1) = M\, v_1 = 5 \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow f(v_1)_B = 5 v_1 + 0 v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(v_2) = M\, v_2 = \lambda_2 v_2 = 1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(v_2)_B = 1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A_{BB} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \det A_{BB} = 5$

Wirkung der Linear Abbildung: Streckung mit Faktor 5 in Richtung v_1

68 A: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\quad (\lambda_1, \lambda_2$ doppelt alg VFH $2)$

$\lambda_3 = -1$

$(A - \lambda_{12} E) \ldots$ $\qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = y$ für $x, y = 0$ z. bel

$\mathrm{Eig}(\lambda_1) = \mathrm{Eig}(\lambda_2) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$\mathrm{Eig}(\lambda_3) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

B: $\lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_2 = 1$ doppelt $\quad \lambda_3 = -2$

$\mathrm{Eig}(\lambda_1) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$\mathrm{Eig}(\lambda_2) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$\mathrm{Eig}(\lambda_3) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Es ist nicht möglich. eine Eigenvektorbasis anzugeben. da die Summe der Dim der ER 3 ist.

Ü69:

Beweis: Sei A invertierbar und λ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v.

Dann ist $\quad A \cdot v = \lambda \cdot v \iff A^{-1} A v = A^{-1} \lambda v = \lambda A^{-1} v$

$\iff E v = \lambda A^{-1} v$

$\iff \frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v$

Folglich ist $\frac{1}{\lambda}$ ein EW von A^{-1}. Die zugehörigen ER $\mathrm{Eig}_{A^{-1}}(\frac{1}{\lambda})$ sind identisch.

H71 Von den folgenden Matrizen M sind die angegebenen Eigenvektoren bekannt. Bestimmen Sie jeweils alle Eigenwerte und die Dimension der zugehörigen Eigenräume.

- $M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$
- $M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

H72 Zeigen Sie, dass für eine beliebige $n \times n$-Matrix A die Eigenwerte von A und A^T gleich sind.
(Tipp: Betrachten Sie die zugehörigen charakteristischen Polynome.)