7. Übungsblatt für die Woche 19.11. - 25.11.2018

Vektorraum, Spannraum, lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Vorrechenaufgabe:

Es wird die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ betrachtet. Für welche Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$ bildet die Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie !

Untersuchen Sie weiterhin, ob die Spalten von A den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

Lässt sich ein Spaltenvektor von A als Linearkombination der anderen beiden Spaltenvektoren darstellen?

Ü37 (a) Im $\mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ gegeben.

Sind die Mengen $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ bzw. $\{v_2, v_4\}$ linear unabhängig?

Geben Sie zwei verschiedene Basen von $\mathrm{Span}(\{v_1, v_3\})$ an. Zeigen Sie, dass $v_2 \in \mathrm{Span}(\{v_1, v_3\})$ gilt, und berechnen Sie die Koordinaten von v_2 bzgl. beider Basen.

(b) Es werden im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},\ w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und der Unterraum $U = \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3\})$ betrachtet.

(1) Ist die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig ? Bildet sie ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

(2) Bestimmen Sie alle Teilmengen der Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$, die eine Basis von U bilden. Welche Dimension hat U?

(3) Liegen die Vektoren w_1 und w_2 in U ? Berechnen Sie gegebenenfalls den zugehörigen Koordinatenvektor in einer Basis von U.

Ü38 (a) Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren eines K-Vektorraums V. Beweisen Sie: Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig und $w \in \mathrm{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$, so ist die Darstellung vom w als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ eindeutig.

(b) Es seien v_1, v_2, v_3 Vektoren eines K-Vektorraums V. Beweisen oder widerlegen Sie:

Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig, dann ist $\{2v_1 - v_2 + v_3, v_1 + 2v_2, v_1 - 2v_3\}$ linear unabhängig.

Ü39 (a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der folgenden Untervektorräume der gegebenen Vektorräume V:

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 2x - 5y \\ x + 7y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$,

(2) $V = \mathrm{GF}(2)^4$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a + b \\ a + d \\ c + d \\ a + b + c + d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathrm{GF}(2) \right\}$.

(b) Es sei $T \subseteq \mathrm{GF}(2)^3$ die Menge aller 3-Tupel, in denen genau zwei Einsen vorkommen. Welche Dimension hat der von T aufgespannte Untervektorraum $\mathrm{Span}(T)$ des Vektorraums $\mathrm{GF}(2)^3$?

UB.

zu (1) ist $b \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \notin U \Rightarrow$ kein UVR

bleibt $b = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \ker(A)$

$\Rightarrow U$ VR.

$\text{span}(\{v_1 \dots v_n\}) = \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid k_1, \dots k_n \in K\}$

$\{v_1, \dots v_n\}$ sind linear unabhängig (l.u.)

$\Leftrightarrow c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0_V \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$

$\Leftrightarrow (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix} = 0_V$ hat nur die triviale Lösung

zu (2) $A \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$A \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ unendlich viele Lösungen. $\Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ lin. abh.

$x_1 = x_3$ $x_2 = -x_3$

z.B $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ $x_2 = -1$

$\Rightarrow 1 \cdot a_1 - a_2 + 1 \cdot a_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow a_2 = a_1 + a_3$

H40 $\boxed{\mathbf{A}}$

(a) Gegeben sind vier Vekoren aus dem $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_4 := \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, die eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und u, v seien linear unabhängige Vektoren aus V.
Es sei $T := \{u + 2v, 2u + v\}$.

Untersuchen Sie, ob $u \in \operatorname{Span}(T)$ gilt und stellen Sie – falls möglich – u als Linearkombination der Elemente von T dar.

Bestimmen Sie die Dimension von $\operatorname{Span}(T)$.

H41 (a) Es seien

$$V_1 := \operatorname{Span}(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}) \quad \text{und} \quad V_2 := \operatorname{Span}(\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}).$$

Ermitteln Sie für V_1, V_2 und für $V_1 \cap V_2$ jeweils eine Basis und die Dimension.

(b) Bestimmen Sie für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

eine maximale Menge linear unabhängiger Spaltenvektoren.

H42 (a) Man bestimme $r \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ r \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen.

(b) Es sind

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ a \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Für welche Werte von a gilt $v_3 \in \operatorname{Span}(\{v_1, v_2\})$?