TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

1. Übungsblatt für die Woche 08.04. - 14.04.2018

Zahlenfolgen, Monotonie, Beschränktheit

Hinweis: Hausaufgaben, die zur Abgabe bestimmt sind, sind durch $\boxed{\textbf{A}}$ gekennzeichnet. Weitere Hausaufgaben dienen Ihnen zum selbstständigen Nacharbeiten des Stoffes.

Ü1 (a) Untersuchen Sie die gegebenen reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$(1)\ x_n = \frac{n-1}{n+1}, \qquad (2)\ x_n = (-1)^n\,\frac{n-1}{n+1}, \qquad (3)\ x_n = \frac{n}{5} + \frac{5}{n},\ n \geq 1$$

auf Monotonie und Beschränktheit. Was läßt sich bezüglich Konvergenz schließen?

(b) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende reelle Zahlenfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Was läßt sich dann über das Monotonieverhalten der Folgen

$(1)\ y_n = \ln(x_n), \qquad (2)\ y_n = \frac{1}{x_n}, \qquad (3)\ y_n = \sin(x_n), \qquad (4)\ y_n = 1 - 2x_n$

aussagen?

(c) Untersuchen Sie die gegebenen reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Konvergieren diese Folgen?

$$(1)\ x_n = \ln\left(\frac{7n+1}{3n-1}\right),\ n \geq 1, \qquad (2)\ x_n = \sqrt{1 - \sin\left(\tfrac{1}{n}\right)},\ n \geq 1.$$

Ü2 (a) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Zahlenfolge (x_n) mit

$$x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}, \quad x_0 = \sqrt{3}$$

durch $\sqrt{2} < x_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist und streng monoton wächst.

(b) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Zahlenfolge (y_n) mit

$$y_{n+1} := \frac{1}{3}(y_n^2 + 2), \quad y_0 = \tfrac{7}{5}$$

durch $1 < y_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist und streng monoton fällt.

Ü3 Eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch

$$x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \quad x_0 = 1$$

rekursiv definiert. Dadurch lässt sich der Term $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$ (*unendlicher Kettenbruch*) Schritt für Schritt aufbauen.

Zeigen Sie, dass sich die Folgenglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ schreiben lassen.

H4 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Untersuchen Sie die reelle Zahlenfolge (x_n), definiert durch

$$x_n = 1 - \sqrt{\frac{3n+5}{4n+7}}\ ,\ n \geq 0,$$

auf Monotonie. (Tipp: Es empfiehlt sich, zuerst die Folge (y_n) mit $y_n := \frac{3n+5}{4n+7}$ zu betrachten.)

(b) Gegeben ist die rekursive Folge (x_n) mit

$$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}, \quad x_0 = \frac{3}{4}\ .$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Folge durch $0 < x_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Nutzen Sie dies anschließend, um zu zeigen, dass (x_n) streng monoton fällt.

H5 Es sei (x_n) eine streng monoton fallende Zahlenfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welches Monotonieverhalten zeigt dann die Folge (b_n) mit

$$b_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{x_n}}\ ?$$

Welche zusätzliche Forderung muss man an die Folge (x_n) stellen, damit die Folge (b_n) konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort!

H6 Untersuchen Sie die reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit:

(a) $x_n = \frac{n+3}{n+1}$,

(b) $x_n = \sqrt{1 - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)},\ n > 1$,

(c*) $x_n = n\left(2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\right),\ n > 0$.

Hier hilft geschicktes Umformen mit dem kleinen Trick:

$$y_n = n\left(2 - \sqrt{4 - \tfrac{1}{n}}\right)\frac{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}}.$$

Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

nach unten beschränkt

Streng monoton wachsend (smw)

$\forall n \geq n_0 : x_{n+1} > x_n$ $\qquad n_0 \in \mathbb{N}$

Streng monoton fallend (smf)

$x_{n+1} < x_n$

nach oben beschränkt

beschränkt: $\exists r \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq r$

genauere Schranken: $\exists m, M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$m \leq x_n \leq M$

monoton fallend / steigend & beschränkt $\Rightarrow$ konvergent, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$

Ü1 a) (1) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$ Zähler kleiner Nenner $\Rightarrow x_n < 1$

Monotonie: $x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{n-1}{n+1}$

$= \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1)-(n+2)(n-1)}{(n+2)(n+1)}$

$= \frac{n^2+n-n^2+n-2n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$

$\Rightarrow (x_n)$ smw für alle n.

alternativ: Umformen: $x_n = \frac{n}{n} \cdot \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$

$= \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \overbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}^{\Rightarrow 1 \text{ smw}} \longrightarrow x_n > 0$ smw

$\Rightarrow 1$ smw

$$x_n = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \nearrow$$

beschränkt: $x_0 < x_n < 1$

-1 ↑ smw

(2) $x_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$ es bleibt: $-1 \le x_n \le 1$

alternierend: nicht monoton

Es gilt: $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1$ $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1$ nicht Konvergent

(3) $x_n = \frac{n}{5} + \frac{5}{n}$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{5} + \frac{5}{n+1} - \frac{n}{5} - \frac{5}{n}$$

$$= \frac{n+1-n}{5} + \frac{5n - 5(n+1)}{(n+1)n} = \frac{1}{5} + \frac{-5}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{5}{n(n+1)} \nearrow \nearrow$$

x_n smw

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+25}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5} = \infty$$

nicht Konvergent.

b) (1) $y_n = \ln(x_n)$ smw

(2) $y_n = \frac{1}{x_n}$ smf.

(3) keine Monotonie

(4) $y_n = 1 - 2x_n$ smf.

c) $x_n = \ln\Big(\underbrace{\frac{7n+1}{3n-1}}_{y_n}\Big),\ n \geq 1$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{7(n+1)+1}{3(n+1)-1} - \frac{7n+1}{3n-1} = \frac{7n+8}{3n+2} - \frac{7n+1}{3n-1}$$

$$= \frac{(7n+8)(3n-1) - (3n+2)(7n+1)}{(3n+2)(3n-1)} = \frac{21n^2+17n-8-21n^2-17n-2}{(3n+2)(3n-1)}$$

$$= \frac{-10}{(3n+2)(3n-1)}$$

$n \geq 1$.

$(3n+2)(3n-1)$ wachsend ab $n \geq -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow (3n+2)(3n-1)$ smw $\Rightarrow \frac{\dots}{} > 0$

$\Rightarrow y_n$ smf. weil $\frac{-10}{\dots} < 0$

$\Rightarrow x_n$ smf.

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{7}{3}$ & (y_n) smf $\Rightarrow \frac{7}{3} \leq y_n \leq y_1 \Rightarrow \ln\frac{7}{3} \leq x_n \leq \ln 4$

$x_n = \sqrt{1 - \sin(\frac{1}{n})}$ $\quad n \geq 1$

- (y_n) ist smf. $\quad 0 < y_n \leq 1$
- $z_n := \sin(y_n)$ smf, da sin in $(0,1]$ smw.

$\sin(0) < z_n \leq \sin(1)$

- $v_n := 1 - z_n$ smw. $\quad 1 - 0 > v_n > 1 - \sin(1)$

Spiegelung

- $x_n = \sqrt{v_n}$ smw, da $\sqrt{\ }$ smw und

$\sqrt{1} > x_n \geq \sqrt{1 - \sin(1)}$

Ü2 Rekursiv gegebene Folge

(a) $x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}$ $\quad x_0 = \sqrt{3}$

- z.zg $\sqrt{2} < x_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständige Induktion.

IA: $n = 0$ $\quad x_0 = \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{2} < x_0 < 2$

IV: z.zg $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \sqrt{2} < x_n \leq 2$

IS: $x_n \to x_{n+1}$

$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

$\sqrt{2} < x_n \leq 2 \Rightarrow \sqrt{2} + 2 < x_n + 2 \leq 4$

$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{2}+2} < \sqrt{x_n+2} \leq 2$

$\sqrt{2}+2 > 2 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{2}+2} > \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{2}+2} < \sqrt{x_n+2} < 2 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{x_n+2} < 2$

alternativ:

$x_{n+1} = f(x_n)$

$f(x) = \sqrt{2+x}$

smw

$\Rightarrow f(\sqrt{2}) < x_n < f(2)$

dann weiter wie oben.

- z.zg (x_n) ist smw
  z.B mit Vollst. Induktion.

IA $n=0$ $\quad x_0 < x_1$

IS: z.zg. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$

$x_n < x_{n+1} \Rightarrow x_n < \sqrt{2+x_n}$

$x_n < x_{n+1} \Rightarrow \underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} < \underbrace{f(x_{n+1})}_{=x_{n+2}}$

$x_{n+1} = f(x_n)$

Ü3 $\quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad x_0 = 1$

z.zg $\quad x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

$F_0 = F_1 = 1$

IA: $x_0 = 1 = \frac{1}{1}$ ✓

IS: z.zg: $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}}_{IV} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$

Beweis: $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}}$

$$= 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

Ü2

(b) $\quad y_{n+1} := \frac{1}{3}(y_n^2 + 2) \qquad y_0 = \frac{7}{5}$

$$1 < y_n < 2$$

IA: $n = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{7}{5} \qquad 1 < y_0 < 2$

IV: Ang. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1 < y_n < 2$

IS: $y_n \to y_{n+1}$:

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}(y_n^2 + 2)$$

$$1 < y_n < 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < y_n^2 < 4 \qquad \text{da, } y_n > 0 \text{ ist.}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3 < y_n^2 + 2 < 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < \frac{1}{3}(y_n^2+2) < 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 < y_{n+1} < 2$$

z.zg. y_n ist smf.

IA: $n=0$ $\qquad y_0 = \frac{7}{5} \qquad y_1 = \frac{33}{25} \Rightarrow y_0 > y_1$

IV: Ang. $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n > y_{n+1} \Rightarrow y_n > \frac{1}{3}(y_n^2+2)$

IS: $y_n \to y_{n+1}$: $\qquad y_{n+2} = \frac{1}{3}(y_{n+1}^2+2) < y_{n+1}$

$$\Rightarrow y_n \text{ smf.}$$