Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/$\sim$baumann

12.11.2017

6. Vorlesung

- Spannraum Span(T), Linearkombinationen von Vektoren
- Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren
- Basis und Dimension eines Vektorraums
- Koordinatenvektoren

Bsp. aus der Informatik

(1) UVR der Splinefunktion

(2) $V = GF(2)^n$ Matrix $H \in GF(2)^{m \times n}$ $L = \{x \in GF(2)^n \mid \underset{m\times n}{H} \cdot \underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{0}\}$ Linearcode

UVR von $GF(2)$

Lineare Algebra

- Spannraum Span(T), Linearkombinationen von Vektoren
- Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren
- Basis und Dimension eines Vektorraums
- Koordinatenvektoren

Untervektorräume eines Vektorraums werden auch
Lineare Teilräume genannt.

Rückblick: Untervektorraum

Sei $(V; +, (k \mid k \in K))$ ein K-Vektorraum.

Eine Teilmenge U von V bildet einen Untervektorraum von V, wenn gilt:

1. $0_V \in U$

2. U ist abgeschlossen bezüglich der Addition, die auf V erklärt ist:
$$v_1, v_2 \in U \;\Rightarrow\; v_1 + v_2 \in U$$

3. U ist abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation des Vektorraums V:
$$k \in K \text{ und } v \in U \;\Rightarrow\; kv \in U$$

z.B $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein UVR von $GF(2)^3$, denn:

(1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{GF(2)^3} \in \mathcal{C}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$

(3) $0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$, $0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$

Bsp. UR $\mathbb{R}^3$

UVR: $\mathbb{R}^3$

· UVR gerade durch den $0_{\mathbb{R}^3}$

· $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ Nullraum

$\left\{ t \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\neq 0_{\mathbb{R}^3}} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

- UVR Ebene durch $0_{\mathbb{R}^3}$

$$\left\{ t_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

nicht auf einer Geraden

Spannraum Span(T)

- Der Durchschnitt von Untervektorräumen des Vektorraums V ist ein Untervektorraum von V.

- Zu jeder Teilmenge $T \subseteq V$ gibt es einen kleinsten Untervektorraum, der alle Elemente von T enthält.
  Insbesondere ist der Nullraum der kleinste Untervektorraum, der die leere Menge enthält.

- Sei V ein K-Vektorraum und $T \subseteq V$.
  Man nennt den kleinsten Untervektorraum von V, der alle Elemente von T enthält, den Spannraum von T.

  Dieser Untervektorraum von V wird mit Span(T) bezeichnet.

  $\mathrm{span}(V) = V$
  $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0_V\}$

Linearkombinationen

- Sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren aus einem K-Vektorraum V und $k_1, k_2, \ldots, k_n$ Elemente von K, dann nennt man

$$\boxed{k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n \in V}$$

eine Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

- Sei V ein K-Vektorraum.
Für jede Teilmenge $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ erhält man den Spannraum Span(T) als Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus T:

$$\mathrm{Span}(T) = \{k_1 t_1 + k_2 t_2 + \cdots + k_n t_n \mid k_1, k_2, \ldots, k_n \in K\}$$

Bsp: $\left\{ \begin{pmatrix} 3a+5b \\ 2c \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ UVR von $\mathbb{R}^3$ NEIN

enthält nicht $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3a+5b \\ 2c \\ a+b+c \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underbrace{\mathrm{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)}_{\text{UVR von } \mathbb{R}^3}$$

Lineare Unabhängigkeit, Lineare Abhängigkeit

- Eine Folge $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ von Vektoren aus einem K-Vektorraum V heißt linear unabhängig, wenn aus

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = 0$$

mit $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ stets

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

folgt. Andernfalls heißt die Folge linear abhängig.

- Man spricht auch von linear unabhängigen bzw. linear abhängigen Mengen von Vektoren (oder kurz von linear unabhängigen bzw. linear abhängigen Vektoren).

  Die leere Menge $\emptyset$ ist linear unabhängig.

BSP: (1) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind linear abhängig, denn.

$$\underline{1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \underline{1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \underline{(-1)}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

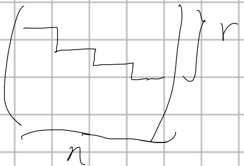
(2) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind linear unabhängig, denn.

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{LGS}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ LGS hat genau eine Lösung, nämlich $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Allg. $0, 0, \dots, 0 \in K^m$ lin. unabh. / abh. ?

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}}_{n}{}_{m} \xrightarrow{\text{LGS}} \text{ZSF}$$



$r = n \Rightarrow$ Vektoren sind lin. unabh.

$r < n \Rightarrow$ " " " " " abh.

Bsp: $\emptyset$ lin. unabhängig

$\{0_V\}$ lin. abhängig $k \cdot 0_V = 0_V$ für alle $k \in K$

Eine Teilmenge B eines K-Vektorraums V heißt Basis von V, wenn gilt:

- $V = \text{Span}(B)$
- B ist linear unabhängig.

Bemerkung:

Gilt $V = \text{Span}(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\})$, dann nennt man $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V.

Basen eines Vektorraums sind linear unabhängige Erzeugendensysteme.

BSP: (1) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ Basis von $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ Standard Basis von $\mathbb{R}^2$, $\{e_1, \ldots e_n\}$ mit $e_i = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ – i-te Zeile

Standardbasis von K^n

Bsp (2). 1 ist eine Basis für $\mathbb{R}$

$1, i$ ist eine Basis für $\mathbb{C}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
ist eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

(4) Der Nullraum $\{0_V\}$ hat als Basis $\emptyset$

Basisdarstellung

- Ist $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ eine (angeordnete) Basis des K-Vektorraums V, so lässt sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination

$$v = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots + k_n b_n$$

mit $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ darstellen.

- Diese eindeutig bestimmten Skalare $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ nennt man die Koordinaten des Vektors v bezüglich der Basis $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$;
- Koordinatenvektor v_B von v bezüglich der Basis B:

$$v_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Sätze über Basen von Vektorräumen

- Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.
- Jedes Erzeugendensystem von V enthält eine Basis von V:
  Eine Basis ist ein minimales Erzeugendensystem des Vektorraums.
- Jede linear unabhängige Teilmenge von V kann durch Hinzunahme weiterer Vektoren zu einer Basis von V ergänzt werden:
  Eine Basis ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums.
- Je zwei Basen eines Vektorraums haben die gleiche Anzahl von Elementen. V ein K-VR. B_1, B_2 Basen $\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

  Diese Aussage folgt aus dem Austauschsatz von Steinitz:

$$v \in \mathrm{Span}(T \cup \{w\}) \text{ und } v \notin \mathrm{Span}(T) \;\Rightarrow\; w \in \mathrm{Span}(T \cup \{v\})$$

Dimension eines Vektorraums

Die Dimension $\dim(V)$ eines Vektorraums V ist die Mächtigkeit einer Basis von V.

Ist B eine Basis des Vektorraums V mit $|B| = n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\dim(V) = n$$

$\dim(V) := |B|$ Dimension von V

Beispiele:

- $\mathbb{R}^n$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum.
- $\mathbb{C}^n$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum.

$\dim\{0_V\} = |\emptyset| = 0$

$\dim \mathbb{R} = 1$ $\dim K^n = n$

$\dim \mathbb{C} = 2$ $\dim K^{m \times n} = m \cdot n$

Standardbasis: $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ mit $e_i = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$

Def. Sei V ein K-VR. $B = (b_1, b_2 \dots b_n)$ eine angeordnete Basis von V. $v \in V$

Dann nennt man die eindeutig bestimmte Vektor $\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{v_B} \in K^n$

mit $k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n = v$

den Koordinatenvektor von v Bezeichnung v_B

Folgerungen

Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

- Je n linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis.
- Jedes Erzeugendensystem mit n Elementen bildet eine Basis.
- Mehr als n Vektoren sind stets linear abhängig.
- Für jeden Untervektorraum U von V mit $U \neq V$ gilt $\dim(U) < \dim(V)$.

Linear abhängige Vektoren

- Enthält eine Folge von Vektoren den Nullvektor, dann ist sie linear abhängig.
- Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ seien Vektoren aus V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  1. Die Folge $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ist linear abhängig.
  2. Es gibt ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit
  $$v_i \in \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}).$$
  3. Es gibt ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit
  $$\mathrm{Span}(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}) = \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}).$$

Linear unabhängige Vektoren

Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ seien Vektoren aus V. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Folge $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.

2. Jeder Vektor $v \in \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\})$ ist eindeutig als Linearkombination

   $$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

   mit $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ darstellbar.