# Einführung in die Mathematik für Informatiker Lineare Algebra

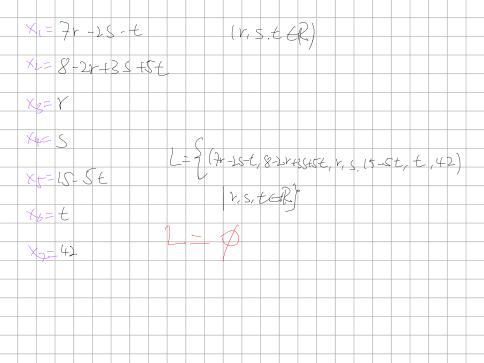
Prof. Dr. Ulrike Baumann www.math.tu-dresden.de/~baumann

29.10.2018

### 4. Vorlesung

- Rückblick: Rechnen mit Matrizen aus  $K^{n \times n}$
- LGS in Matrixschreibweise
- Lösungsverfahren für LGS
  - Ablesen der Lösungsmenge
  - Elementare Zeilenumformungen
  - Fliminationsverfahren nach GAUSS
  - Eliminationsverfahren nach GAUSS/JORDAN
- Beispiel: Hamming-Codes über GF(2)

Es gibt lineare Eleichungssysteme, aus deren man die Lösungsmerge Sofort ablesen Kann.



Rückblick: Rechnen mit Matrizen aus  $K^{n \times n}$ 

① 
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
 für alle  $A, B, C \in K^{n \times n}$ 

2 
$$A + 0_{n \times n} = 0_{n \times n} + A = A$$
 für alle  $A \in K^{n \times n}$ 

- 3 Zu jeder Matrix  $A \in K^{n \times n}$  gibt es eine Matrix  $-A := (-1) \cdot A$  mit  $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n \times n}$ .

Es gibt Matrizen A, B mit  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

Es gibt Matrizen A, durch die man nicht dividieren kann.

Matritenring liber Ring mit Einselement Ist Kein Körper) 2.3

#### Matrixschreibweise für LGS

LGS über einem Körper K mit m Gleichungen in n Unbekannten:

• Kurzform:

$$A \cdot x = b$$
 bzw.  $A_{m \times n} \cdot x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$ 

mit 
$$A \in K^{m \times n}$$
,  $x \in K^{n \times 1}$ ,  $b \in K^{m \times 1}$ 

Langform:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

# (Erweiterte) Koeffizientenmatrix eines LGS

• Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

• erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ulrike Baumann

Lineare Algebra

## Elementare Zeilenumformungen

- Elementare Zeilenumformungen:
  - Vertauschen zweier Zeilen
  - ② Multiplizieren einer Zeile mit einem Faktor  $k \in K \setminus \{0\}$
  - 3 Addieren des k-fachen ( $k \in K$ ) einer Zeile zu einer anderen Zeile

Die Lösungsmenge des LGS ändert sich nicht, wenn man eine elementare Zeilenumformung für die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS durchführt.

 Durch Hintereinanderausführung von elementaren Zeilenumformungen kann jede erweitere Koeffizientenmatrix eines LGS in

Zeilenstufenform

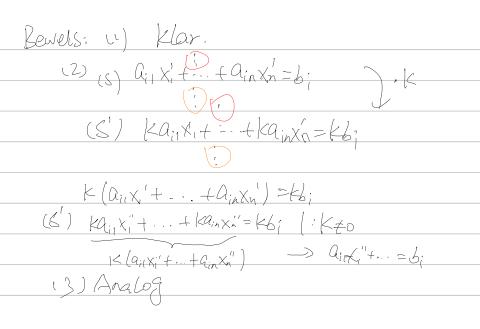
bzw.

reduzierte Zeilenstufenform

gebracht werden.

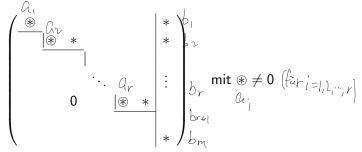
Ulrike Baumann

Lineare Algebra



#### Eliminationsverfahren nach GAUSS

Umformung des LGS auf | Zeilenstufenform



- Lösbarkeitsentscheidung
- Bei LES in ZSF kann man leicht ortscheiden, as es Läsungen gibt

  L= \$ \equiv \text{Es gibt ein je \( \text{Ert}\_1, ..., m\_j \) mit bijto

  Lösbarkeitsentscheidung

  j-te g(...)

  Not in toxy = bij widespruch
- Für lösbare LGS:

Rückwärtseinsetzen zur Ermittlung der Lösungen des LGS

Elementare Zeilenumformungen: Vertauschen Zweier Zeilen.

(2) Multiplizieren einer Gleichung mit KEK (E)

(3) Addieren einer Gleichung (KEK) zu einer anderen Gleichung

des K-fachen

## Eliminationsverfahren nach GAUSS / JORDAN

- Umformung des LGS auf Zeilenstufenform
- 2 Lösbarkeitsentscheidung
- <u>Für lösbare LGS:</u> weitere Umformung des LGS auf reduzierte Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} \boxed{ @ 0 & 0 & | * \\ \hline | @ * & 0 & | * \\ \hline | 0 & | 0 & | * \\ \hline & \ddots & 0 & | \vdots \\ 0 & | @ * & | \checkmark \\ \hline * \end{pmatrix} \quad \mathsf{mit} \ \circledast = 1$$

und Ablesen der Lösungen des LGS

# Lösungsmenge von LGS über unendlichen Körpern K

• Ein homogenes LGS hat immer die <u>triviale Lösung</u>  $(0,0,\ldots,0)$ .

Ein homogenes LGS über einem unendlichen Körper K hat

• entweder genau eine Lösung (d.h. <u>nur</u> die triviale Lösung)

#### oder

unendlich viele

Lösungen.

Ein inhomogenes LGS über einem unendlichen Körper K hat

entweder keine

#### oder

genau eine

#### oder

unendlich viele

Lösungen.

# Beispiel: Hamming-Codes über GF(2)

Es sei H eine  $m \times (2^m - 1)$ -Matrix über GF(2), deren Spalten paarweise verschieden sind und mindestens einen von Null verschiedenen Eintrag haben.

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2^m-1} \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{2^m-1} \mid H \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2^m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m \times 1} \right\}$$

wird binärer Hamming-Code der Länge  $2^m - 1$  genannt. Dieser Code ist 1-fehlerkorrigierend.

