TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

4. Übungsblatt für die Woche 29.04. - 05.05.2019

Funktionen, Definitionsbereich, Wertebereich, Stetigkeit

Ü19 Ermitteln Sie für die folgenden Funktionen $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ den größten Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x+2}$ (c) $f(x) = \ln(\sqrt{x+1})$.

Finden Sie alle Unstetigkeitsstellen der Funktionen, falls solche existieren. Begründen Sie, dass diese Funktionen auf ihrem Definitionsbereich stetig sind.

Ermitteln Sie den Wertebereich $W(f)$ der Funktionen.

Sind die Funktionen injektiv? Sind sie surjektiv? Begründen Sie!

Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}, falls sie existiert. Geben Sie den Definitionsbereich mit an.

Ü20 (a) Wie müssen die Konstanten a und b gewählt werden, damit die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+\pi), & x \le -\frac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist?

(b) Bestimmen Sie eine Polynomfunktion $p(x)$ kleinsten Grades, sodass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 5\,, & x < 0, \\ p(x)\,, & 0 \le x < 2, \\ 1 - 2x\,, & x \ge 2\ . \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist und $f(1) = -1$ erfüllt.

Ü21 Aus der 1. Übung ist bekannt, dass die rekursiv definierte Zahlenfolge

$$x_{n+1} = f(x_n) := \sqrt{2 + x_n}, \quad x_0 := \sqrt{3}$$

streng monoton wächst und durch $\sqrt{2} < x_n < 2$ beschränkt ist und folglich konvergiert.

Berechnen Sie den Grenzwert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Welche Eigenschaft von f nutzen Sie dabei?

H22 $\boxed{\mathbf{A}}$

(a) Bestimmen Sie eine Polynomfunktion $p(x)$ kleinsten Grades, sodass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{x^2 - x - 2}\,, & x < -1, \\ p(x)\,, & -1 \le x \le 3, \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}\,, & x > 3\,. \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Aus der 1. Übung ist bekannt, dass die rekursiv definierte Zahlenfolge

$$x_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - x_n}, \quad x_0 := \frac{3}{4}$$

streng monoton fällt und durch $0 < x_n < 1$ beschränkt ist. Somit konvergiert die Folge (x_n). Berechnen Sie den Grenzwert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

H23 Es ist die reelle Funktion $f\colon D(f) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(|x+1| - 2)$ gegeben.

(a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ und den zugehörigen Wertebereich $W(f)$.

(b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit, Injektivität und Surjektivität.

(c) Finden Sie größtmögliche Intervalle, in denen eine Umkehrfunktion existiert und berechnen Sie f^{-1} für jedes dieser Intervalle. Denken Sie daran, jeweils den Definitionsbereich von f^{-1} anzugeben.

H24 (a) Untersuchen Sie, ob die stückweise gegebene, reelle Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{x-2} - 1 & \text{für } x < 2, \\ \sqrt{x+2} & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

auf Ihrem Definitionsbereich stetig ist. Ist f injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Finden Sie alle Parameterwerte für die Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion

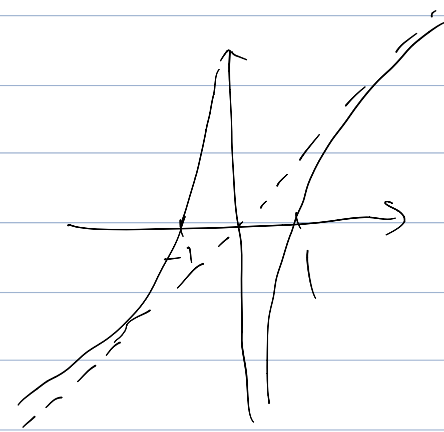
$$f(x) = \begin{cases} x\cos(x-1), & \text{für } x \le 1, \\ a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d, & \text{für } 1 < x < 3, \\ x - \sin\left(\dfrac{\pi\, x}{2}\right), & \text{für } x \ge 3 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

$f: D(f) \to \mathbb{R}$

- Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{R}$
- Stetig auf $D(f)$?
- unstetigkeitsstellen
- $W(f) = im(f)$
- injektiv / Surjektiv
- umkehrfunktionen.

Ü19) a) $f(x) = x - \frac{1}{x}$



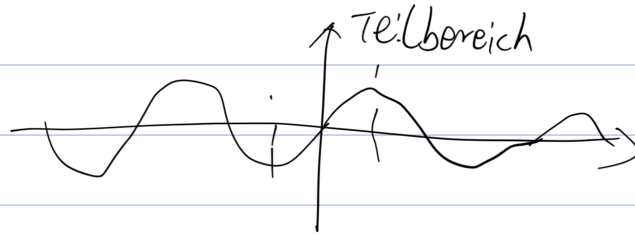
- Polstelle bei $x=0$
- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \neq 0$ da x im Nenner
- auf $D(f)$ stetig, denn Differenz stetiger elementarer Funktion
- $W(f) = \mathbb{R}$, denn z.B argumentiten

  $f(1) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ & stetig $\overset{ZWS}{\Longrightarrow}$ alle Werte in $[0, +\infty)$ werden angenommen

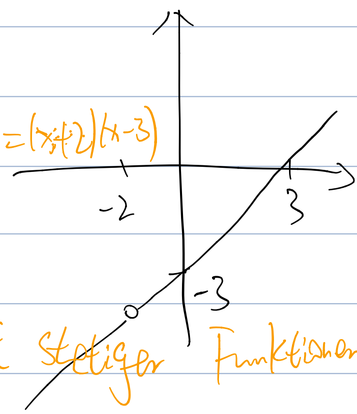
  $f(-1) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ & stetig $\overset{ZWS}{\Longrightarrow}$ alle Werte in $(-\infty, 0]$ werden angenommen

- nicht injektiv z.B $f(-1) = f(1) = 0$
- surjektiv, denn $W(f) = \mathbb{R}$
- Umkehrfunktion: existiert nicht, da nicht injektiv

$*$: $\sin(x)$ — $\arcsin(x)$



b) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x+2} = \frac{(x-3)(x+2)}{x+2}$



Lücke bei $x = -2$, denn $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

- Polstelle: keine
- $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- auf $D(f)$ stetig. da Quotient stetiger Funktionen
- Es folgt: $W(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
- injektiv da Gerade mit Anstieg $\neq 0$
- nicht surjektiv denn $W(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
- umkehrfunktion ex. $y = x - 3 \Rightarrow x = f^{-1}(y) = y + 3$

  $D(f^{-1}) = W(f)$

c) $f(x) = \ln\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\ln(x+1)$

$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ $\quad \ln x \Rightarrow x > 0$

- keine unstetigkeitsstelle
- $D = (-1, \infty)$
- auf $D(f)$ stetig, da Verkettung stetiger Funktionen
- $W(f) = \mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ & stetig und ZWS
- injektiv $\quad$ oder bekanntlich ist $W(\ln) = \mathbb{R}$ $\quad W(\sqrt{x+1}) = D(\ln)$
- surjektiv
- Umkehrfunktionen: $y = \ln\sqrt{x+1} \Rightarrow x = e^{2y} - 1 = f^{-1}(y)$ mit $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

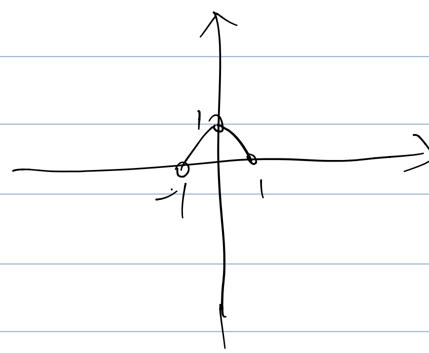
Zusatz: $f(x)=\sqrt{1-|x|}$ $D(f)$?

$1-|x|\geq 0$ $|x|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$

$D(f)=[-1,1]$

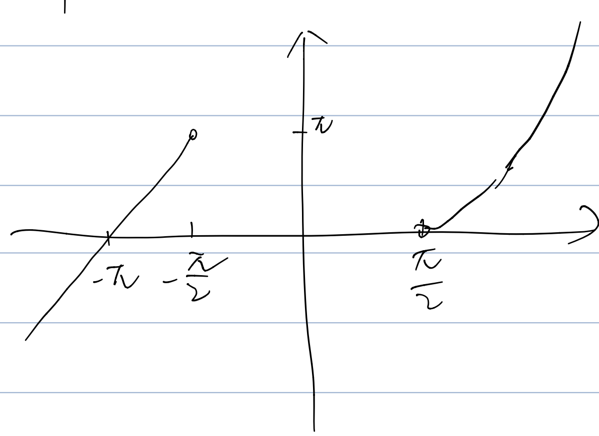
Graph: $x\geq 0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{1-x}$

$x<0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{1+x}$



Ü20.

a) $f(x)=\begin{cases} 2(x+\pi) & \text{für } x\leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & \text{für } |x|<\frac{\pi}{2} \\ \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 & \text{für } x\geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$



$a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+b=\pi \Rightarrow \begin{cases} -a+b=\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+b=0 \quad \Big| \quad a+b=0 \quad \Big| \quad a=-\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2(x+\pi) & x\le -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}\sin x+\frac{\pi}{2} & |x|<\frac{\pi}{2} \\ \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 & x\ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ges. $a,b\in\mathbb{R}$, sodass f auf $\mathbb{R}$ stetig:

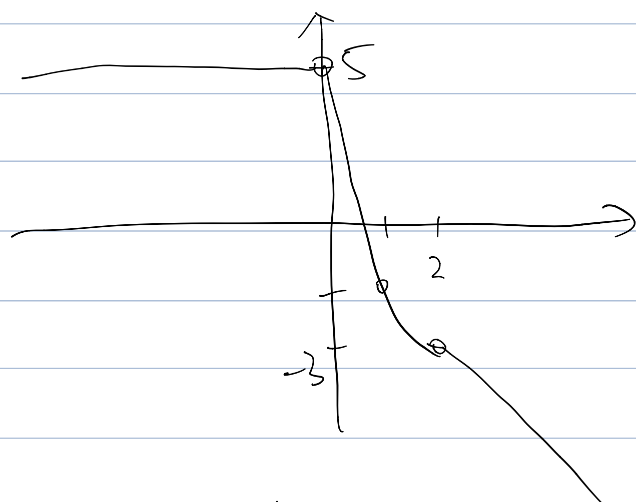
- Teilfunktionen sind stetig.
- Bedingungen bei $x_1=-\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$

1) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+b$

2) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+b$

$\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{\pi}{2} \\ b=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

b) $$f(x)=\begin{cases} 5 & x<0 \\ P(x) & 0\le x<2 \\ 1-2x & x\ge 2 \end{cases}$$



$P(1)=-1 \qquad P(0)=\lim_{x\to 0^-} 5=5 \qquad P(2)=\lim_{x\to 2^+}(1-2x)=-3$

Ang: $P(x)=ax^2+bx+c$ da 3 Bedingungen gibt

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=-1 \\ c=5 \\ 4a+2b+c=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-8 \\ c=5 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow P(x)=2x^2-8x+5$$

Ü21

$$x_{n+1}=f(x_n):=\sqrt{2+x_n}, \quad x_0:=\sqrt{3}$$

Wissen (x_n) smw, $\sqrt{2}<x_n<2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=:x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_n} \overset{\sqrt{\ }\text{ stetig}}{=} \sqrt{2+\underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n}_{=x}}$$

Fixpunktgleichung $x=f(x)=\sqrt{2+x}$

$$\Rightarrow x^2=2+x \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x_1=2 \quad x_2=-1.$$

$$\Rightarrow x=2 \quad \text{weil } \sqrt{2}<x_n<2$$