TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Kardinalitäten, Algebraische Strukturen

V. Für zwei natürliche Zahlen k, n definieren wir den *Binomialkoeffizienten* über

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{falls } k < 0 \text{ oder } k > n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Ü31. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $U_m = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m \text{ und } n \text{ ist ungerade}\}$.

(a) Geben Sie die Mengen U_0, U_1 und U_6, sowie die entsprechenden Potenzmengen konkret an.

(b) Bestimmen Sie die Kardinalität von $\mathcal{P}(U_m)$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$.

Ü32. Über zwei Mengen A und B ist folgendes bekannt.

(i) $A \cup B = \{x^2 + y \mid x \in \{0,1,2\}, y \in \{0,1,2\}\}$.

(ii) $|A| = |B| + 3$.

(iii) $|A \cap B| = 2$.

(iv) $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$.

Dadurch sind die Mengen A und B jedoch nicht eindeutig festgelegt.

(a) Geben Sie alle Mengen B elementweise an, die obige vier Bedingungen erfüllen.

(b) Wie viele Mengenpaare (A, B) gibt es, die obige Bedingungen erfüllen?

Hinweis: Sie dürfen die Gleichung $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$ verwenden.

Ü33. Es sei M eine endliche Menge.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \cap)$ ein kommutatives Monoid ist.

(b) Für $A, B \subseteq M$ sei die *symmetrische Differenz* definiert als

$$A \mathbin{\Delta} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ eine kommutative Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

Hinweis: In (b) können Sie Aufgabe H12 benutzen.

a) $U_m := \begin{cases} \{1, 3, 5, \dots, m-1\}, & \text{wenn } m \text{ gerade } m \neq 0 \\ \{1, 3, \dots, m\}, & \text{wenn } m \text{ ungerade} \end{cases}$

$U_0 = \emptyset \quad U_1 = \{1\} \quad U_6 = \{1, 3, 5\}$

$P(U_0) = \{\emptyset\} \quad P(U_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$P(U_6) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$

b) $|U_m| = \begin{cases} \frac{m}{2} & m \text{ gerade} \\ \frac{m+1}{2} & m \text{ ungerade} \end{cases}$

$|P(U_m)| = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}} & m \text{ gerade} \\ 2^{\frac{m+1}{2}} & m \text{ ungerade} \end{cases}$

32)

a) (i) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Tipp $\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

(iii) $= |A| + |B| - 2 = 2|B| + 1 = 7$

$|B| = 3$

$B: \{0, 2, 4\} \quad \{0, 2, 6\} \quad \{0, 4, 6\}$

$\{2, 4, 6\}$

b.) (ii) $\Rightarrow$ $|B| + 3 = 6 = |A|$

$\{1, 3, 5\} \subseteq A$, wenn z.B. $B = \{0, 2, 4\}$

dann bleiben 3 Möglichkeiten für A.

$\{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Es gibt 4 Möglichkeiten für B

$\Rightarrow$ Anz. Mengenpaaren (A, B) ist $1 \cdot 2 = 3 \cdot 4$

33) Abgeschlossenheit für $A, B \in P(M)$ ist $A \cap B \subseteq A \subseteq M$ und damit auch $A \cap B \in P(M)$

Assoziativ: Vorlesung $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ für alle $A, B, C \in P(M)$.

Neutrales Element: für $A \in P(M)$ gilt:

$$A \cap M = A = M \cap A$$

also ist M das NE bzgl. $\cap$.

Komm: Vorlesung

b) Abgeschl. $A, B \in P(M)$ Es sind sowohl $A \cap B \in P(M)$

$$A \cup B \in P(M) \Rightarrow A \triangle B \in P(M)$$

Assoz:

NE: $A \in P(M)$: $A \triangle \emptyset = \underbrace{(A \cup \emptyset)}_{A} \setminus \underbrace{(A \cap \emptyset)}_{\emptyset} = A$

$$\emptyset \triangle A = (\emptyset \cup A) \setminus (\emptyset \cap A) = A$$

Inverse: $A \in P(M)$: $A \triangle A = \underbrace{(A \cup A)}_{A} \setminus \underbrace{(A \cap A)}_{A} = \emptyset$

A Inv. (selbstinv.) bzgl. $\triangle$

Kommu. Vorlesung „$\cap$" und „$\cup$" sind komm.

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = B \triangle A$$

c) ◦ $(P(M), \triangle)$ abelsche Grup.

◦ $(P(M), \cap)$ Halbgruppe. ($\Leftarrow$ Monoid)

◦ Distributiv: $(*)$ $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cup B \cap \overline{(A \cap B)}$

$= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B})$

$= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$$(**)\; A \cap (B \setminus C) = A \cap B \cap \bar{C} = \underbrace{(A \cap B \cap \bar{A})}_{\emptyset} \cup A \cap B \cap \bar{C}$$

$$\underset{=}{\overset{dist.}{=}} (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) = A \cap B \cap \overline{A \cap C} = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

$$A \cap (B \triangle C) \overset{(*)}{=} A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) =$$

A34. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 7. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**

(a) Für $m \in \mathbb{N}$ sei $A_m = \{n \in \mathbb{N} \mid m < n \leq 4m\}$.

(i) Geben Sie die Mengen A_0, A_1, und A_2 sowie die Potenzmengen $\mathcal{P}(A_0)$ und $\mathcal{P}(A_1)$ konkret an.

(ii) Bestimmen Sie die Kardinalität von $\mathcal{P}(A_m)$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass folgende Gleichung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

H35. Es sei M eine endliche Menge.

(a) Für $f, g \in \{0,1\}^M$ sei das *punktweise Produkt* definiert als

$$f \odot g \colon M \to \{0,1\}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

Zeigen Sie, dass $\left(\{0,1\}^M, \odot\right)$ ein kommutatives Monoid ist.

(b) Für $f, g \in \{0,1\}^M$ sei die *punktweise Summe* definiert als

$$f \oplus g \colon M \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } f(x) = g(x), \\ 1, & \text{falls } f(x) \neq (x). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\left(\{0,1\}^M, \oplus\right)$ eine kommutative Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\left(\{0,1\}^M, \oplus, \odot\right)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

H36. Es sei e die Eulersche Zahl. Für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist der *natürliche Logarithmus* von x die eindeutig bestimmte Zahl $y \in \mathbb{R}$ für die $y = e^x$ gilt. Wir bezeichnen diese Zahl üblicherweise mit $\ln x$.

Sei nun $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$. Für $x, y \in M$ sei $x \circ y = x^{\ln y}$. Zeigen Sie, dass $(M, \circ)$ eine kommutative Gruppe ist.