Einführung in die Mathematik für Informatiker

Prof. Dr. Ulrike Baumann

Institut für Algebra

15.10.2018

Zusammenfassung

- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge aller komplexen Zahlen.

- Komplexe Zahlen kann man durch
  - kartesische Koordinaten: $z = a + bi$
    bzw.
  - Polarkoordinaten: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

  beschreiben und diese Darstellungen ineinander umrechnen.

- Rechenoperationen für komplexe Zahlen
  - $+$, -, $\cdot$, : in kartesischen Koordinaten
  - $\cdot$, : in Polarkoordinaten

2. Vorlesung

- Beispiel: „Komplexe Uhr“

- Potenzieren komplexer Zahlen:
  Satz von Moivre – Formel von Moivre

- Berechnung n-ter Wurzeln komplexer Zahlen:
  - Gesucht: alle Lösungen von $x^n = 1$ in $\mathbb{C}$
    (n-te Einheitswurzeln)
  - Gesucht: alle Lösungen von $x^n = z_0$ in $\mathbb{C}$

- Ausblick: Lösbarkeit von Gleichungen der Form
  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ in $\mathbb{C}$
  - Satz von Gauss - Fundamentalsatz der Algebra
  - $n = 2$ (Lösen von quadratischen Gleichungen)

Potenzieren in $\mathbb{C}$

Sei $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcll} z & = & r & e^{i\,\varphi} \\ z^2 & = & r^2 & e^{i\,2\varphi} \\ z^3 & = & r^3 & e^{i\,3\varphi} \\ \vdots & & & \vdots \end{array}$$

Satz von MOIVRE:

$$\boxed{\text{Für } n \in \mathbb{N} \text{ gilt:} \qquad z^n = r^n\, e^{i\,n\varphi}}$$

Formel von MOIVRE – Sonderfall $r = 1$:

$$\underbrace{z^n = e^{i\,n\varphi}}_{\text{Diese Zahlen } z^n \text{ liegen auf dem Einheitskreis.}}$$

Der Einheitskreis ist ein Kreis um 0 mit dem Radius 1.

n-te Einheitswurzeln

Die Lösungen der Gleichung $\boxed{z^n = 1}$ in $\mathbb{C}$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ heißen n-te Einheitswurzeln.

Die Lösungen dieser Gleichung sind:

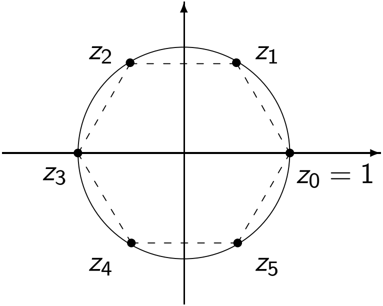
$$\boxed{z_k = e^{i\,\frac{2\pi k}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)}$$

Probe: $\quad (z_k)^n = \left(e^{i\,\frac{2\pi k}{n}}\right)^n = e^{i\,2\pi k} = 1$

Geometrische Interpretation der n-ten Einheitswurzeln

Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ bilden die Eckpunkte eines regulären n-Ecks, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist.

Beispiel: $n = 6$



Berechnung n-ter Wurzeln in $\mathbb{C}$

Berechnen aller Lösungen von $z^n = r_0\, e^{i\,\varphi_0}$ in $\mathbb{C}$:

Ansatz: $\quad z = r\, e^{i\,\varphi}$

Einsetzen in die gegebene Gleichung:

$$\begin{aligned}
(r\, e^{i\,\varphi})^n &= r_0\, e^{i\,\varphi_0} \\
r^n\, (e^{i\,\varphi})^n &= r_0\, e^{i\,\varphi_0} \\
r^n\, e^{i\,n\varphi} &= r_0\, e^{i\,\varphi_0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r_0}\; e^{i\,\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)}$$

Probe:

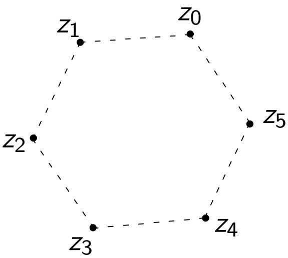
$$\begin{aligned}
(z_k)^n &= \left(\sqrt[n]{r_0}\; e^{i\,\frac{\varphi_0+2\pi k}{n}}\right)^n = (\sqrt[n]{r_0})^n\, \left(e^{i\,\frac{\varphi_0+2\pi k}{n}}\right)^n \\
&= r_0\, e^{i\,(\varphi_0 + 2\pi k)} = r_0\, e^{i\,\varphi_0} \cdot\, e^{i\,2\pi k} = r_0\, e^{i\,\varphi_0} \cdot 1 = r_0\, e^{i\,\varphi_0}
\end{aligned}$$

Zusammenhang zu den n-ten Einheitswurzeln

Man erhält alle Lösungen von

$$\boxed{z^n = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{i\varphi}}$$

z.B. $\quad n = 6$



in $\mathbb{C}$,

wenn man eine feste Lösung z_0
dieser Gleichung

mit

allen n-ten Einheitswurzeln w_k
multipliziert:

$$\boxed{z_k = z_0 \cdot w_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)}$$

Probe:

$$(z_k)^n = (z_0 \cdot w_k)^n = (z_0)^n \cdot (w_k)^n = r\,e^{i\varphi} \cdot 1 = r\,e^{i\varphi}$$

Lösbarkeit von Gleichungen in $\mathbb{C}$

- In $\mathbb{C}$ ist die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar;
  Lösungen: $\pm i$

- In $\mathbb{C}$ sind alle Gleichungen $x^2 = z_0$ $(z_0 \in \mathbb{C})$ lösbar.

- In $\mathbb{C}$ sind alle Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$
  $(a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0)$ lösbar.

- **Fundamentalsatz der Algebra**
  In $\mathbb{C}$ sind alle Gleichungen

  $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

  mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0$ lösbar.