Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/$\sim$baumann

10.12.2018

10. Vorlesung

- Berechnung von Determinanten für n-reihige Matrizen
  - Entwicklungssatz
  - Umformungsregeln für Determinanten
    Reduzierung des Rechenaufwands

- Multiplikationssatz für Determinanten

$\det\ K^{n\times n} \to K \qquad A \mapsto \underbrace{\det(A)}_{}$

Determinante der $n\times n$ - Matrizen

$\det(A)$ gibt den Faktor an, um den sich das „Volumen" einer Figur ändert, wenn man auf die Figur die Lineare Abb. $x \mapsto Ax$ anwendet.

Definition der Determinante

Für jede quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne

$$A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$$

diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

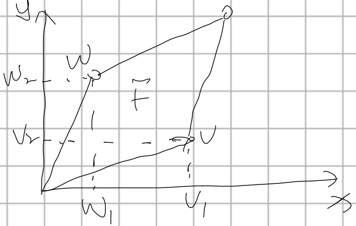
Es sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$.

- Für $n = 1$, d.h. $A = \left(\; a_{11} \; \right)$, ist $\det(A) := a_{11}$.
- Für $n \geq 2$ ist

$$\det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})\,.$$

BSP: $n=2$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = ad - bc$$



$$F = \left|\det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2\end{pmatrix}\right|$$

Bem. $\det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2\end{pmatrix} = 0 \iff v_1w_2 - v_2w_1 = 0 \iff v_1w_2 = v_2w_1 \iff \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} \; (=k)$

$\iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1k \\ w_2k\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2\end{pmatrix}$ sind l.a.

$\det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2\end{pmatrix} \neq 0 \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2\end{pmatrix}$ sind l.u.

BSP.
$n=3$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei+bfg+cdh-gec-hfa-idb$$

(Bem. für $n>3$ gibt es KEINE derartige Berechnungsmöglichkeiten.)

$$= a(ei-hf)-d(ib-ch)+g(bf-ec)$$

$$= a \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d \det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g \cdot \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Entwicklungssatz

Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ und beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

- Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

- Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Die Vorzeichen ergeben sich nach der Schachbrettregel:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Bsp.

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 0$$

Bem. Die Berechnungsvorschrift aus der Def. nennt man Entwicklung nach der 1. Spalte

Folgerung Matrizen, die eine 0-Zeile oder eine 0-Spalte enthalten, haben die Determinante 0.

BSP. $n=4$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -4\det\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} + 4\det\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \underbrace{0\det(\quad)}_{0} + 6\det\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -5 & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ -8 & -5 & \frac{15}{2} \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$8(-5+32) = 216$$

Rechenregeln für Determinanten

Für $A = (z_1, \dots, z_n)^T = (s_1, \dots, s_n)$ und $k \in K$ gilt:

$A' = kA$

$\det(A') = k^n \det(A)$

- $\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ kz_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = k \cdot \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$
- $\det(s_1, \dots, ks_j, \dots, s_n) = k \cdot \det(s_1, \dots, s_j, \dots, s_n)$
- Entsteht A' aus A durch Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten), dann gilt $\det(A') = -\det(A)$.
- Entsteht A' aus A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile (bzw. einer Spalte) zu einer anderen, dann gilt $\det(A') = \det(A)$.

Bsp)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sonderfälle für Determinanten

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1$

- $\det \begin{pmatrix} d_1 & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$

- $\det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det(A) \cdot \det(B)$

Multiplikationssatz und Folgerungen

- Multiplikationssatz:

  Gilt $A, B \in K^{n \times n}$, so gilt:

  $$\underline{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}$$

- Für Matrizen $A \in K^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

  (1) Die Matrix A ist invertierbar.

  (2) Es gilt $\det(A) \neq 0$.

- Es gilt $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

  Außerdem gilt: $\underline{\det(A^T) =} \underline{\det(A)} = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$.

Berechnung inverser Matrizen

- Es sei $A \in K^{n\times n}$ und $\det(A) \neq 0.$

  Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \Big(\underbrace{(-1)^{i+j} \det(A_{ji})}_{\textit{Stelle } (i,j)} \Big),$$

  wobei A_{ji} aus A durch Streichen von Zeile j und Spalte i entsteht.

- Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det(A) = ad - bc \neq 0.$

  Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$