$A \in K^{m \times n}$ $\quad A = (a_1 \dots a_n)$

$Col(A) = \{ b \in K^m \mid \exists x \in K^n, Ax = b \} = Span(\{a_1 \dots a_n\})$

$rg(A) = dim(Col(A)) \hat{=} \#$ Stufen der ZSF

$ker(A) = \{ x \in K^n \mid Ax = 0 \}$

$n = rg(A) + dim\ ker(A)$

$\uparrow$ # freie Variable von $Ax = 0$

VB.

- Inverse. $\exists B \in K^{n \times n}$ $\quad A \cdot B = B \cdot A = E_n$.
  $A \in K^{n \times n}$ $\quad B = A^{-1}$

- $Col(A) = \mathbb{R}^n$
  Ang. $\quad Col(A) \neq \mathbb{R}^n \Rightarrow Col(A) \subset \mathbb{R}^n$
  n Spalten $\Rightarrow \{a_1 \dots a_n\}$ linear abhängig.

  aber da A^{-1} existiert. ist die ZSF von A vollständig !
  Alternativ: zeigen, dass ein beliebigen $b \in \mathbb{R}^n$ auch in $Col(A)$ liegt.
  Wählen: $x = A^{-1}b \Rightarrow A(A^{-1}b) = b \Rightarrow b \in Col(A)$

- $f(x) = Ax$
  bijektiv: injektiv: z.z. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  Beweis: $f(x_1) = f(x_2)$
  $\Rightarrow Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow A^{-1}Ax_1 = A^{-1}Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
  surjektiv z.z $\forall y \in \mathbb{R}^n \ \exists x \in \mathbb{R}^n \ f(x) = y \Rightarrow Ax = y$
  Beweis. für bel. $y \in \mathbb{R}^n$ Wahl $x = A^{-1}y$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

9. Übungsblatt für die Woche 03.12. - 09.12.2018

inverse Matrix, lineare Abbildung

Vorbereitungsaufgabe:

- Definieren Sie den Begriff der inversen Matrix.
- Zeigen Sie: Wenn eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ invertierbar ist, so gilt $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$.
- Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die durch $f(x) = Ax$ mit einer regulären Matrix A definiert ist, bijektiv ist.

Ü49 (a) Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine beliebige Matrix über einem Körper K. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) A ist invertierbar.
(2) $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{K^n}\}$.
(3) $\mathrm{rg}(A) = n$.

(b) Beweisen Sie:

- Es gilt: $E_n^{-1} = E_n$.
- Für alle invertierbaren Matrizen $A \in K^{n\times n}$ gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Für alle invertierbaren Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ gilt: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ü50 (a) Untersuchen Sie, welche der folgenden reellen Matrizen invertierbar sind, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix mittels des Gauss/Jordan-Verfahrens. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_1 x = b$ für $b = (1\ 0\ 1)^T$ mit A_1 aus (a).

(c) Für welche Parameterwerte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *nicht* invertierbar?

Berechnen Sie für $a = -1$ die Matrix A^{-1}, und prüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe.

Ü51 Es wird die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ betrachtet, die durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

definiert ist.

(a) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes $\mathrm{Im}(f)$ und den Kern $\mathrm{Ker}(f)$ von f.
(b) Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten!
(c) Bestimmen Sie $f^{-1}(\{(1,1)^T\})$

49) a) (1) $\Rightarrow$ (2) Sei A invertierbar d.h A^{-1} existiert.

Ang. $x \in \ker(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1} 0 \Rightarrow x = 0$

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei $\ker(A) = \{0_{K^n}\}$

$n = rg(A) + \dim \ker(A)$

$\dim \ker(A) = 0 \Rightarrow rg(A) = n$.

(3) $\Rightarrow$ (1) sei $rg(A) = n$, d.h. die reduzierte ZSF von A ist E_n, da $A \in K^{n \times n}$

$\Rightarrow Ax = b$ ist für alle b eindeutig lösbar.

gesucht. $A^{-1} = (b_1, \dots, b_n)$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$.

$A \cdot (b_1, \dots, b_n) = E_n = (e_1, \dots, e_n)$

$(Ab_1, \dots, Ab_n) = (e_1, \dots, e_n) \Leftrightarrow Ab_j = e_j$ für $j = 1, \dots, n$

haben eindeutige Lösung.

(b) (1) $E_n^{-1} \cdot E_n = E_n \cdot E_n^{-1} = E_n \cdot E_n \Rightarrow E_n = E_n^{-1}$

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$ $\quad A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$

(3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ $\quad (A \cdot B)(B^{-1}A^{-1}) \overset{Ass}{=} A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E_n$

50) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

mit Gauss/Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -28 & -13 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{-7 \quad -3 \quad 1}_{A_1^{-1}} \end{array}\right)$$

A_1^{-1} existiert

$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ Blöcke auf der Diagonalen.

$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar weil a_1 das Doppelte von a_3 ist, damit $\{a_1, a_2, a_3\}$ l. a.
$\Rightarrow rg(A) < 3$

b) $A_1 x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = A_1^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1-3a & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2a & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1-3a & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow a = 1$ dann nicht invertierbar.

5I) Eine Basis kann aus den Spalten von A ausgewählt werden.

$$\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$\underline{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Basis hat max. 2 Elemente.

Da $\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$ l. u. (keine Vielfachen voneinander) ist das eine Basis.

$$\ker(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \underbrace{f(x)}_{\begin{array}{c}\shortparallel\\ Ax\end{array}} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} = \ker(A)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$L = \left\{\left(\tfrac{1}{3}t, \tfrac{1}{3}t, t\right)^T \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$$

c) $f^{-1}(\{(1,1)^T\}) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, Ax = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$(A|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix})$

$$f^{-1}(\{(1,1)^T\}) = \left\{\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ 0\end{pmatrix}}_{v_0} + t\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}}_{\ker(f)} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$$

H52 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Invertieren Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $K := \mathrm{GF}(2)$ mittels des Gauss/Jordan-Verfahrens.
Prüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine geeignete Probe.

(b) Gegeben ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} x.$$

- Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Begründen Sie Ihre Antworten!
- Untersuchen Sie, ob der Vektor $v = (1, 2, 3)^T$ im Bild von f liegt.

H53 (a) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ beliebig. Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ihre inverse Matrix A^{-1}. Kontrollieren Sie anschließend, dass die so berechnete Matrix A^{-1} die Eigenschaften der Inversen von A erfüllt.

(b) Bestimmen Sie die Inverse der komplexen Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1+i & 2+i & 3+i \\ 1-i & 2-i & 3-i \end{pmatrix}.$$

H54 (a) Es seien A, B beliebige Matrizen aus $K^{n \times n}$, und B sei invertierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$AB^{-1} = B^{-1}A \iff AB = BA.$$

(b) Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ von der Form

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

mit einer $n_1 \times n_1$-Matrix P und eine $n_2 \times n_2$-Matrix Q (mit $n = n_1 + n_2$) ist eine spezielle Form einer sogenannten *Blockmatrix*. Zeigen Sie: Ist A invertierbar, dann gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Was ergibt sich, wenn P oder Q nicht invertierbar sind?