TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

3. Übungsblatt für die Woche 22.10. - 28.10.2018

Komplexe Zahlen, lineare Gleichungssysteme, Matrixoperationen

Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.

Von zwei Geraden g_1 und g_2 ist folgendes bekannt:

g_1 : verläuft durch die Punkte $P_1(0|3)$ und $P_2(3|0)$,
g_2 : schneidet die y-Achse im Punkt -5 und hat den Anstieg $a \in \mathbb{R}$.

- Skizzieren Sie die Gerade g_1 und die Gerade g_2 für $a = 3$ in der xy-Ebene.
- Welches lineare Gleichungssystem ist zu lösen, um alle Schnittpunkte von g_1 und g_2 zu berechnen? Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Form auf.
- Berechnen Sie alle Schnittpunkte für $a = 3$, und diskutieren Sie anschließend die Anzahl Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter a.

Ü13 (a) Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\mathrm{i}\, z^5 = \sqrt{3}\,\mathrm{i} - 1$. Beschreiben Sie kurz die Lage der Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene.

(b) Beschreiben Sie die Gerade, die in der Gaußschen Zahlenebene durch die Punkte $z_1 = 1$ und $z_2 = \mathrm{i}$ führt geeignet in Mengenschreibweise.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller Paare $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}z_1 + z_2 &= 1 \\ (2-\mathrm{i})z_1 + \mathrm{i}z_2 &= 0\ . \end{aligned}$$

Ü14 Schreiben Sie für die linearen Gleichungssysteme die Koeffizientenmatrix auf:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 - x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 9x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - 4x_3 &= -1\ . \end{aligned}$$

Geben Sie beide Systeme sowohl in Matrixschreibweise, als auch als Summe der Spalten der Koeffizientenmatrix an. Haben Sie für diese Gleichungssysteme eine geometrische Interpretation?

Ü15 Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls möglich, die Matrizenausdrücke:

$$2A - C,\quad C + D,\quad AB,\quad BA,\quad DB,\quad C^2,\quad D^TA,\quad A^TD,\quad D^TD,\quad DD^T.$$

H16 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems sind, in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} (1+\mathrm{i})z_1 - z_2 &= \mathrm{i} \\ (1-\mathrm{i})z_1 + (1+\mathrm{i})z_2 &= 1\,. \end{aligned}$$

(b) Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

mit Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie, falls möglich, die Matrixprodukte

$$AA^T, \quad B^2, \quad AB, \quad (BA)^T, \quad A^TB^T, \quad A^T + C, \quad C^TC, \quad CC^T.$$

H17 (a) Beweisen Sie: Für alle $n \times n$-Matrizen A und B über $\mathbb{R}$ gilt:

$$BA = 0_{n\times n} \;\Rightarrow\; (AB)^2 = 0_{n\times n}.$$

(b) Betrachtet wird die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie alle reellen Zahlen (Skalare) a, b in $\mathbb{R}$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$A^3 = a\,A^2 + b\,A\,.$$

H18 (a) Zur Herstellung der Produkte P_1, P_2 und P_3 werden vier Rohstoffe benötigt R_1, R_2, R_3 und R_4. Die Tabelle zeigt, wie viele Einheiten jedes der Rohstoffe für die Herstellung einer Einheit der Produkte verwendet werden:

	P_1	P_2	P_3
R_1	20	13	5
R_2	0	11	35
R_3	15	16	0
R_4	8	3	1

Die Frage ist, wie viele Produkte (in Einheiten) produziert werden können, wenn eine vorgegebene Menge an (Einheiten von) Rohstoffen $r_i, i = 1, 2, 3, 4$ angeliefert wird. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Rohstoffen und Produkten in einem linearen Gleichungssystem dar.

Geben Sie das lineare System sowohl in Matrixschreibweise, als auch als Summe von Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix an.

(b) Peter ist doppelt so alt wie Max. Max ist 10 Jahre jünger als Bert. Zusammen zählen alle drei 86 Jahre. Wie alt sind Peter, Max und Bert?

Hinweis: Auch wenn ein Ergebnis anders gefunden werden kann: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es! Schreiben Sie auch die Koeffizientenmatrix auf.