letzte HA)

$$H(n): \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

IA: $H(1): \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1}{k} = (-1)^0 \binom{1}{0} + (-1)^1 \binom{1}{1} = 0$

IV: Es gelte $H(n)$ für $n \in \mathbb{N}$

IS: $H(n) \Rightarrow H(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} + (-1)^{k+1} \binom{n+1}{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + (-1)^{n+1}$$

$$= 0 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k-1} + (-1)^{n+1} = (-1)^0 \underbrace{\binom{n}{-1}}_{0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k-1} + (-1)^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} + (-1)^{k+1} \binom{n}{n} = -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Bereich Mathematik und Naturwissenschaften**, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

# 8. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

## *Primzahlen, Zahlentheoretische Funktionen*

V. Zeigen Sie, dass für beliebige natürliche Zahlen $m, n$ gilt:

$$m \cdot n = \mathrm{ggT}(m,n) \cdot \mathrm{kgV}(m,n).$$

Ü43. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die beiden Abbildungen

$$\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto \bigl|\{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}\bigr|,$$
$$\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto \bigl|\{k \in \mathbb{N} \mid k < n \text{ und } \mathrm{ggT}(k,n) = 1\}\bigr|.$$

Bestimmen Sie für die nachstehenden Zahlen $n \in \mathbb{N}$ jeweils die Primfaktorzerlegung, sowie die Werte $\tau(n)$ und $\varphi(n)$.

(i) $n = 10$, (ii) $n = 100$, (iii) $n = 101$, (iv) $n = 1001$, (v) $n = 10!$.

Ü44. Von der Zahl 14803 ist bekannt, dass sie das Produkt von genau zwei Primzahlen ist, und dass $\varphi(14803) = 14560$ gilt. Berechnen Sie mit diesen Informationen die Primfaktoren von 14803.

Ü45. (a) Beweisen Sie, dass $n^5 - 5n^3 + 4n$ für jede natürliche Zahl $n$ durch 120 teilbar ist.

(b) Für welche Primzahlen $p$ ist $p^2 - 1$ durch 24 teilbar?

(c) Zeigen Sie, dass jede sechsstellige Zahl der Form *ababab* durch sieben teilbar ist.

Hinweis: Stellen Sie die Zahlen in (a) und (b) zunächst als geeignete Produkte dar. In (c) empfiehlt es sich, die Dezimaldarstellung zu verwenden.

A46. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 9. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**

(a) Erzeugen Sie erneut mit Hilfe Ihrer Matrikelnummer die Zahlen $x$ und $y$ wie in Aufgabe A40. Geben Sie die Primfaktorzerlegung von $x$ und $y$ an, und berechnen Sie $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$.

43) $n=\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(n)}$ ~ $v_p(n)$ ist Potenz vom Primfaktor $p$ bzgl. $n$.

$\tau(n)=\prod_{p\in\mathbb{P}}(v_p(n)+1)$

$\varphi(n)=\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(n)-1}(p-1)=n\prod_{p\in\mathbb{P},\,p|n}(1-\frac{1}{p})$

i) $n=10=2\cdot 5$ $\quad\tau(10)=(1+1)\cdot(1+1)=2\cdot 2=4$

$\varphi(10)=10\cdot(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=4$

ii) $n=100=2^2\cdot 5^2$ $\quad\tau(100)=9$

$\varphi(100)=100\cdot(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=40$

iii) $n=101$ $\quad\tau(101)=2$

$\varphi(101)=101\,(1-\frac{1}{101})=100$

iv) $n=1001=7\cdot 11\cdot 13$ $\quad\tau(1001)=2\cdot 2\cdot 2=8$

$\varphi(1001)=1001(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})=720$

v) $n=10!=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$

$\tau(10!)=9\cdot 5\cdot 3\cdot 2=270$

$\varphi(10!)=10!\,(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})$

$=829440$

44) $14803 = p \cdot q$ ,

$14560 = 14803\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right) = (1-p)(1-q)$ $\varphi(n) = \varphi(p)\cdot\varphi(q)$ für $p, q$ teilerfremd.

$$= \underbrace{(p-1)}_{\varphi(p)}\underbrace{(q-1)}_{\varphi(q)}$$

$$0 = (p-1)(q-1) - 14560 = \left(\frac{14803}{q} - 1\right)(q-1) = 14560$$

$$= 14803 - q - \frac{14803}{q} + 1 = 14560$$

$$= 244 - q - \frac{14803}{q}$$

$$= q^2 - 244q + 14803$$

$$\Rightarrow q_{\frac{1}{2}} = \frac{244 \pm \sqrt{244^2 - 4 \cdot 14803}}{2} = 122 \pm \sqrt{\frac{59536}{4} - 14803}$$

$$= 122 \pm 9$$

$$\Rightarrow p = 131 \quad q = 113$$

45)

a) $n^5 - 5n^3 + 4n$

$n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2-1)(n^2-4) = n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2)$

Dieses Produkt ist teilbar durch 2. 3. 4. 5.

$120 = 2 \times 3 \times 4 \times 5$ Da $3, 5, 2^3$ teilerfremd sind. ist $3, 5, 8$ Teiler von $n^5 - 5n^3 + 4n$

b) $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$

$24 = 2^3 \cdot 3$ $\quad p = 2 \quad 2^2 - 1 = 3$ ist nicht durch 24 teilbar.

$p = 3 \quad 3^2 - 1 = 8$ . . . . —

Ang $p > 3$. dann folgt, dass $(p-1)$ $p$ oder $(p+1)$ durch 3 teilbar ist Da $p > 3$ ($p$ Prim) sind insbesondere $(p-1)$ oder $(p+1)$ durch 3 teilbar.

Da $p$ ungerade sind $(p-1)$ und $(p+1)$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen, d.h. $(p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar.

Da. 3 und 8 teilerfremd sind $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$ durch 24 teilbar. falls $p > 3$

(b) Finden Sie alle natürlichen Zahlen $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ die genau fünf Teiler haben, und begründen Sie warum das alle sind.

H47. Finden Sie die kleinste positive natürliche Zahl $n$ mit der folgenden Eigenschaft:

> Für alle Primzahlen $p$ gilt, dass $p$ genau dann ein Teiler von $n$ ist, wenn auch $p - 1$ ein Teiler von $n$ ist.

Hinweis: Eine solche Zahl gibt es wirklich. Allerdings ist das Finden der Lösung durch Ausprobieren recht aufwändig. Wenn Sie (bei 1 beginnend) pro Zahl eine Minute zum Überprüfen brauchen, werden Sie die Lösung erst nach etwas mehr als einem Tag finden.

H48. Seien $x, y \in \mathbb{N}$ derart, dass der Euklidische Algorithmus nach $n$ Schritten den Output $(d, s, t)$ liefert. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\operatorname{ggT}(x, y) = d = sx + ty.$$

Hinweis: Es seien $r_0, r_1, \ldots, r_{n+1}$ die im Euklidischen Algorithmus erzeugten Reste. Zeigen Sie zunächst, dass $\operatorname{ggT}(r_{i+1}, r_i) = \operatorname{ggT}(r_i, r_{i-1})$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt.