Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

13. Übungsblatt für die Woche 14.01. - 20.01.2019

Eigenwerte & Eigenvektoren, Diagonalisierung, Skalarprodukt, Norm

Ü73 (a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, welche der Vektoren $v_1 = (1,0,0)^T, v_2 = (1,1,0)^T$ und $v_3 = (1,1,1)^T$ Eigenvektoren von A sind.

Ist A diagonalisierbar? Stellen Sie A gegebenenfalls in der Form SDS^{-1} mit einer invertierbaren Matrix S und einer Diagonalmatrix D dar.

(b) Untersuchen Sie für die folgenden reellen 3×3-Matrizen, ob sie diagonalisierbar sind. Stellen Sie die Matrix gegebenenfalls in der Form SDS^{-1} mit einer invertierbaren Matrix S und einer Diagonalmatrix D dar.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & -3 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie die Matrix B^{10} für B aus (b).

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Drehmatrix $M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Für welche Werte $\alpha \in [0, 2\pi)$ besitzt die Drehmatrix reelle Eigenwerte?

Ü74 (a) Betrachtet wird ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt $\bullet$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$. Bestimmen Sie für einen beliebigen Vektor $w \neq 0$ in V den Wert $\|\frac{w}{\|w\|}\|$.

(b) Berechnen Sie im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt für die zwei Vektoren $v = (3,-1)^T$ und $w = (3,4)^T$ folgende Ausdrücke $\|w - v\|$ und $v \bullet \frac{w}{\|w\|}$.
Geben Sie eine geometrische Interpretation an.

(c) Zeigen Sie, dass in einem euklidischen Raum V mit Skalarprodukt $\bullet$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$ der „Satz des Pythagoras“ gilt:

$$\forall u, v \in V: \quad u \bullet v = 0 \;\Leftrightarrow\; \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Ü75 Zeigen Sie, dass durch

$$u \bullet v := u^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v \qquad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^2$$

ein Skalarprodukt für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Berechnen Sie die Länge der Einheitsvektoren in der zugehörigen Norm.

73) a) $A = SDS^{-1}$ A diagonalisierbar?

es ex. Basis aus Eigenvektoren.

$\det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow (2-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=2 \quad \lambda_2=-1 \quad \lambda_3=3$

Zu $\lambda_1=-1$ (weil durch Anfang a) bekommt man EV von $\lambda_1=2$ $\lambda_3=3$)

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} z=0 \\ y=-3x \end{matrix}$ $\Rightarrow \operatorname{Span}\{\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v}\}$

Basis aus Eigenvektoren $\{v_1, v, v_3\}$

Also ist A diagonalisierbar mit

$S = (v_1 \; v \; v_3)$ und $D = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$ $\boxed{} = \lambda$

b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & -3 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

$\det(B-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & -3 \\ 9 & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-2$ (doppelt) $\quad \lambda_2=1$

zu λ_1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & -3 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} y=s \\ z=t \end{matrix}$ $x = \frac{t}{3} - \frac{2}{3}s \Rightarrow \operatorname{Span}\{\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}\}$

zu λ_2: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \\ 9 & 6 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} y=z \\ x=0 \end{matrix}$ $\Rightarrow \operatorname{Span}\{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}\}$

Basis $= \{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow$ B diagonalisierbar $\quad S = (v_1\, v_2\, v_3) \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(C-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)^3 = 0 \quad \lambda=1$ (Tripel)

zu λ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $y=0 \quad x=z$ $\Rightarrow \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

C nicht diagonalisierbar, da die Eigenvektor keine Basis ist.

c) $B^{10} = SD^{10}S^{-1}$ $\quad D^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad S = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$B^{10} = SD^{10}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 3(1-2^{10}) & 2-2^{10} & 2^{10}-1 \\ 3(1-2^{10}) & 2(1-2^{10}) & 2\cdot 2^{10}-1 \end{pmatrix}$

Eigenschaften:
- $\mathbb{R}$-bilinear $\quad (u_1+u_2)\cdot v = u_1 v + u_2 v$, $\quad (ru)\cdot v = r(u\cdot v)$
- symmetrisch $\quad u\cdot v = v\cdot u$
- positiv definit: $u\cdot u \geq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$, $\quad u\cdot u = 0 \Leftrightarrow u=0$

Skalarprodukt

$\circ: K^n \times K^n \to K$

$u \circ v = u^T v = (u_1 \dots u_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

Norm: $\|v\| = \sqrt{v \circ v}$

74) a) $\left\|\frac{w}{\|w\|}\right\| = \sqrt{\frac{w}{\|w\|}\cdot\frac{w}{\|w\|}} = \sqrt{\frac{w\cdot w}{\|w\|^2}} = \sqrt{\frac{w\cdot w}{(\sqrt{w\cdot w})^2}} = \sqrt{\frac{w\cdot w}{w\cdot w}} = 1$

b) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$v\cdot w = (3, -1)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 9-4 = 5$

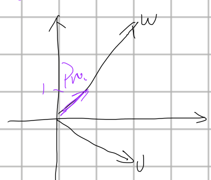
$\|w-v\| = \sqrt{(w-v)(w-v)} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}} = \sqrt{(0,5)\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}} = 5$

$v\cdot\frac{w}{\|w\|} = v\cdot\frac{w}{\sqrt{w\cdot w}} = \frac{v\cdot w}{\sqrt{w\cdot w}} = \frac{5}{5} = 1$

$w\cdot w = (3,4)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 9+16 = 25$

entspricht dem Abstand der zugehörigen Punkten in der Ebene

Länge der orthogonalen Projektion des Vektors v in Richtung w.



c) **Beweis** Es ist für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$

$\|u+v\|^2 = \left(\sqrt{(u+v)(u+v)}\right)^2 = (u+v)(u+v) = u\cdot u + u\cdot v + u\cdot v + v\cdot v$

$= \|u\|^2 + 2(u\cdot v) + \|v\|^2$ wegen $u\cdot v = 0$

$\Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Sind also u und v orthogonal, dass gilt

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \underbrace{2(u\cdot v)}_{=0}$

Gilt umgekehrt $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, dann folgt

$2(u\cdot v) = 0$ also $u\cdot v = 0$

75)
- $\mathbb{R}$ bilinear: folgt direkt aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation
- Symmetrisch: $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt wegen Symmetrie des Standardskalarprodukts und wegen $M^T = M$,

$u^T(Mv) = (Mv)^T u = v^T M^T u = v^T M u$

- Positiv definit: Es gilt für alle $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$(x \; y)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x+y \quad x+2y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= 2x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

Falls $(x+y)^2 + x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Einheitsvektoren haben die Norm $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|$

$= \sqrt{(1 \; 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}.$

H76 (a) Entscheiden Sie, jeweils für die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ob die Matrizen $A, B, C \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ diagonalisierbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche Parameterwerte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ -10 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar? Bestimmen Sie die Dimension der Eigenräume in Abhängigkeit von a.

H77 Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und S eine invertierbare Matrix aus $\mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Matrizen A und $B := S^{-1}AS$ die gleichen Eigenwerte besitzen.

H78 (a) Zeigen Sie: Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|u + v\| = \|u - v\|$, wenn u und v orthogonal sind.

(b) Betrachtet wird der $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt und zugehöriger Norm.
Bestimmen Sie alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$, die von $u = (1,1)^T$ den Abstand $\sqrt{2}$ haben und normiert sind (d.h. $\|v\| = 1$). Fertigen Sie eine passende Skizze dazu an.