

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle.

Wintersemester 2018/19

## 6. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

## Kardinalitäten, Algebraische Strukturen

 $\overline{V}$ . Für zwei natürliche Zahlen k, n definieren wir den Binomialkoeffizienten über

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } 0 \le k \le n, \\ 0, & \text{falls } k < 0 \text{ oder } k > n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

- Ü31. Für  $m \in \mathbb{N}$  sei  $U_m = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m \text{ und } n \text{ ist ungerade}\}.$ 
  - (a) Geben Sie die Mengen  $U_0$ ,  $U_1$  und  $U_6$ , sowie die entsprechenden Potenzmengen konkret an.
  - (b) Bestimmen Sie die Kardinalität von  $\mathcal{P}(U_m)$  für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$ .
- Ü32. Über zwei Mengen A und B ist folgendes bekannt.
  - (i)  $A \cup B = \{x^2 + y \mid x \in \{0, 1, 2\}, y \in \{0, 1, 2\}\}.$
  - (ii) |A| = |B| + 3.
  - (iii)  $|A \cap B| = 2$ .
  - (iv)  $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}.$

Dadurch sind die Mengen A und B jedoch nicht eindeutig festgelegt.

- (a) Geben Sie alle Mengen B elementweise an, die obige vier Bedingungen erfüllen.
- (b) Wie viele Mengenpaare (A, B) gibt es, die obige Bedingungen erfüllen?

<u>Hinweis:</u> Sie dürfen die Gleichung  $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$  verwenden.

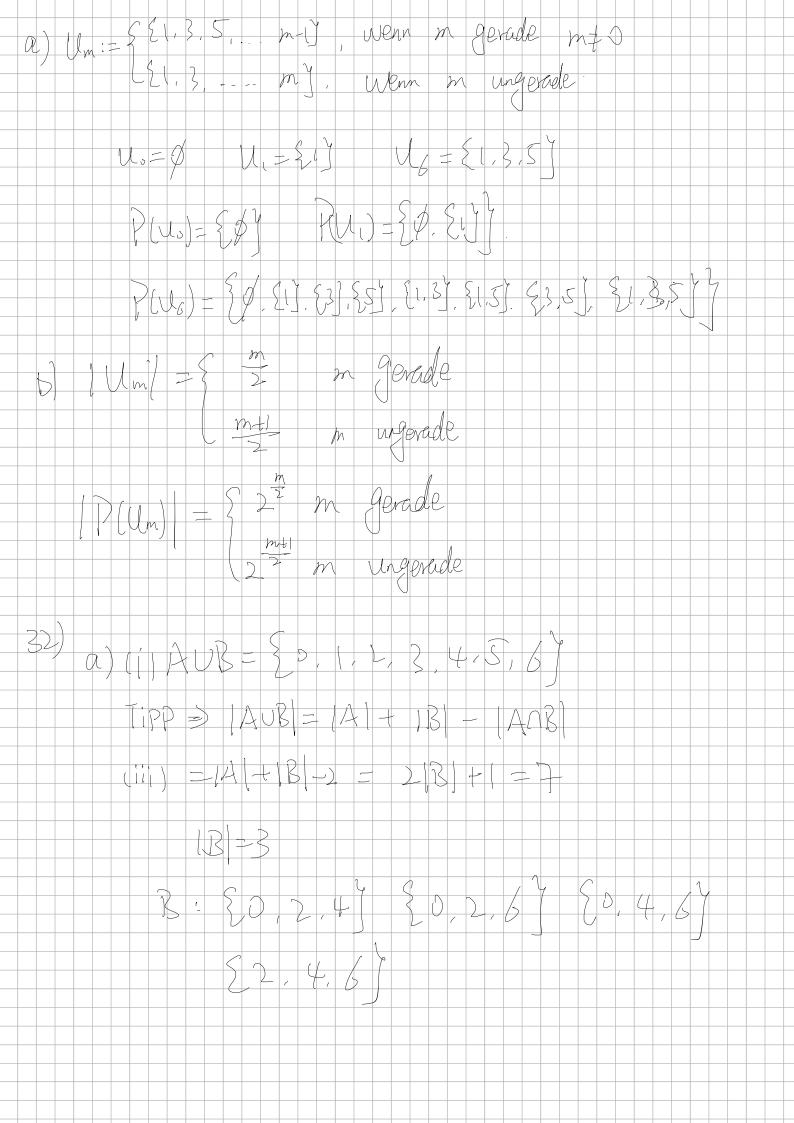
- Ü33. Es sei *M* eine endliche Menge.
  - (a) Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{P}(M), \cap)$  ein kommutatives Monoid ist.
  - (b) Für  $A, B \subseteq M$  sei die *symmetrische Differenz* definiert als

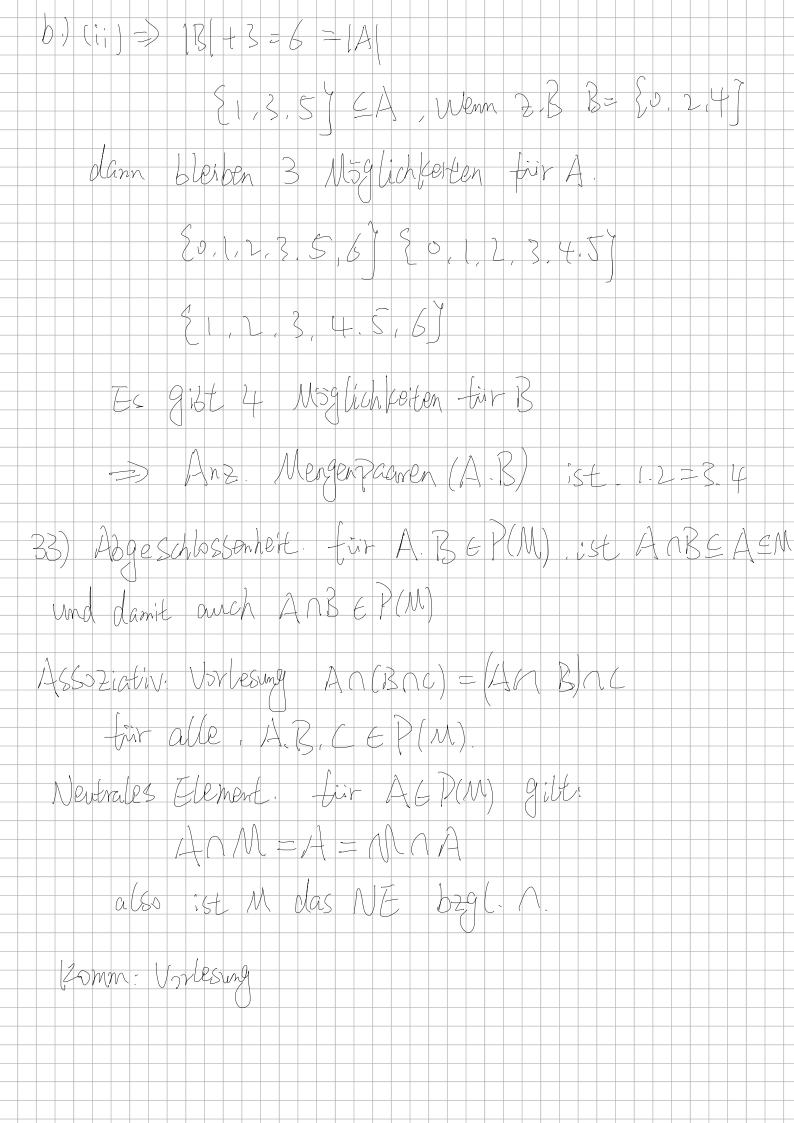
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

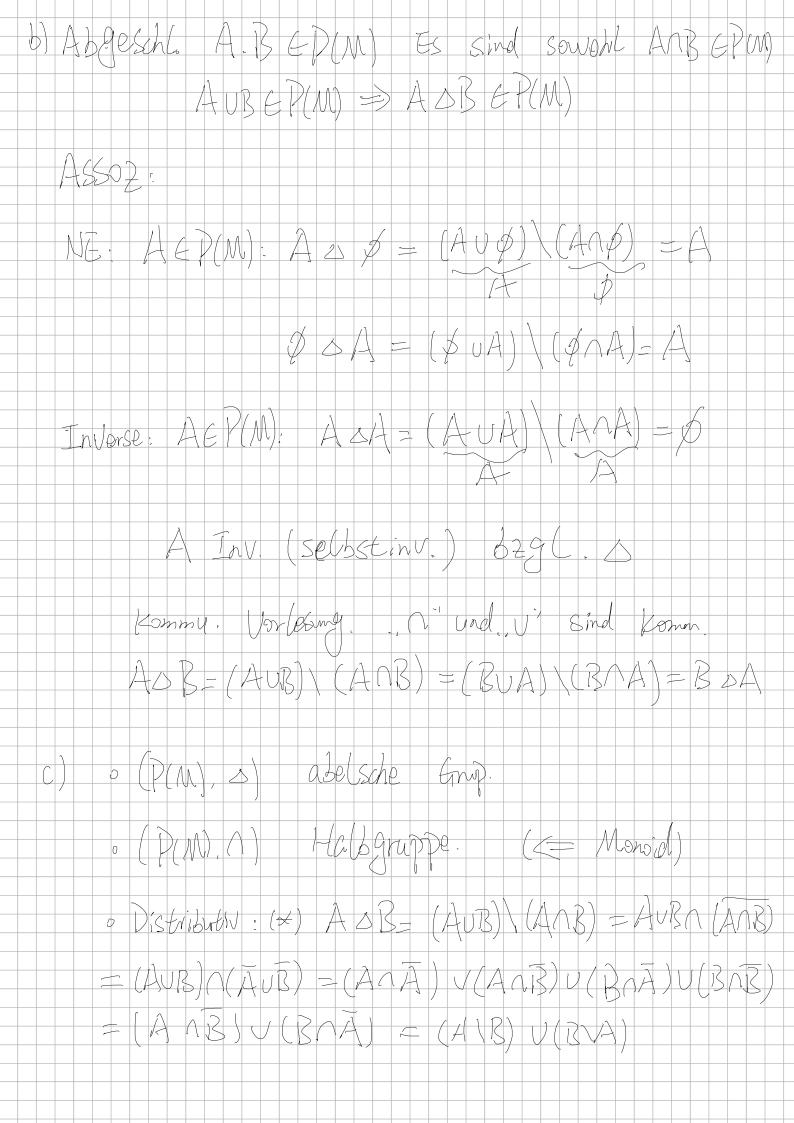
Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{P}(M), \Delta)$  eine kommutative Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$  ein kommutativer Ring mit 1 ist.

Hinweis: In (b) können Sie Aufgabe H12 benutzen.









- A34. Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 7. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.
  - (a) Für  $m \in \mathbb{N}$  sei  $A_m = \{ n \in \mathbb{N} \mid m < n \le 4m \}$ .
    - (i) Geben Sie die Mengen  $A_0$ ,  $A_1$ , und  $A_2$  sowie die Potenzmengen  $\mathcal{P}(A_0)$  und  $\mathcal{P}(A_1)$  konkret an.
    - (ii) Bestimmen Sie die Kardinalität von  $\mathcal{P}(A_m)$  für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$ .
  - (b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass folgende Gleichung für alle natürlichen Zahlen  $n \ge 1$  gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

- H35. Es sei *M* eine endliche Menge.
  - (a) Für  $f,g \in \{0,1\}^M$  sei das *punktweise Produkt* definiert als

$$f \odot g \colon M \to \{0,1\}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

Zeigen Sie, dass  $(\{0,1\}^M,\odot)$  ein kommutatives Monoid ist.

(b) Für  $f,g \in \{0,1\}^M$  sei die *punktweise Summe* definiert als

$$f \oplus g \colon M \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } f(x) = g(x), \\ 1, & \text{falls } f(x) \neq (x). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $(\{0,1\}^M,\oplus)$  eine kommutative Gruppe ist.

- (c) Zeigen Sie, dass  $(\{0,1\}^M,\oplus,\odot)$  ein kommutativer Ring mit 1 ist.
- H36. Es sei e die Eulersche Zahl. Für  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist der natürliche Logarithmus von x die eindeutig bestimmte Zahl  $y \in \mathbb{R}$  für die  $y = e^x$  gilt. Wir bezeichnen diese Zahl üblicherweise mit  $\ln x$ .

Sei nun  $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ . Für  $x, y \in M$  sei  $x \circ y = x^{\ln y}$ . Zeigen Sie, dass  $(M, \circ)$  eine kommutative Gruppe ist.