$\mathrm{Span}(\{v_1, v_2, \dots v_n\}) = \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid k_1 \dots k_n \in \mathbb{K}\}$

- $\{v_1 \dots v_n\}$ linear unabh. $\Longleftrightarrow$ $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$
- $B = \{v_1 \dots v_n\}$ Basis $\Longleftrightarrow$ l.u. Erzeugendensystem.
- $\dim V = |B| = \# B$ Anzahl der Basis

- $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{a_1, \dots, a_n\}$
- Rang $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{ran}(A)$
- Kern $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- Dimensionsformel. $\underbrace{n}_{\text{Spalten der Matrix}} = \underbrace{\mathrm{rg}(A)}_{\text{Stufen in ZSF}} + \underbrace{\dim(\ker(A))}_{\text{freie Variablen}}$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y \geq 0 \right\}$

$k = -1, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow ku = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin U$

Nullelement hier $0(x) = 0$

$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Lineare Algebra INF 110
Wintersemester 2018/19

8. Übungsblatt für die Woche 26.11. - 02.12.2018

lineare Unabhängigkeit, Basis, Kern, Spaltenraum und Rang einer Matrix

Vorrechenaufgabe:

Definieren Sie die Begriffe: Rang und Kern einer Matrix.

Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Rang 2 an, und bestimmen Sie deren Kern.

Ü43 Gegeben ist die Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a+3b+4c \\ a-b \\ 2a-b+c \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Stellen Sie U als Spannraum dar. Bestimmen Sie eine Basis von U.

(b) Liegt $v = (1,2,-5)^T$ in U? Geben Sie eine Basis und die Dimension von $\operatorname{Span}(U \cup \{v\})$ an.

(c) Stellen Sie U als Spaltenraum einer Matrix A dar, und bestimmen Sie $\operatorname{rg}(A)$ und $\dim(\operatorname{Ker}(A))$.

Ü44 Im Vektorraum V der Polynomfunktionen über $\mathbb{R}$ von Grad kleiner 3 (mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation) sind folgende Polynomfunktionen gegeben:

$$p_1(x) = 1 + 2x^2, \; p_2(x) = 2 + x + 3x^2 \;\text{ und }\; p_3(x) = -1 - 3x + x^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{m_0, m_1, m_2\}$ mit $m_k(x) = x^k$ $(k = 0,1,2)$ eine Basis von V bildet. Geben Sie die Koordinatenvektoren von p_1, p_2 und p_3 bzgl. dieser Basis an.

(b) Sind die Polynomfunktionen p_1, p_2 und p_3 linear unabhängig?

Ü45 (a) Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ über } \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ über } \mathbb{Z}_3$$

(i) eine Basis des Spaltenraums Col(A) und den Rang,

(ii) den Kern und seine Dimension.

Liegt der Vektor $w = (1,1,1)^T$ im Spaltenraum $\operatorname{Col}(B)$?

(b) Gegeben ist die reduzierte Zeilenstufenform von $(A|b)$ für ein lineares System $Ax = b$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \end{array}\right).$$

(i) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Col}(\mathrm{A})$ und $\dim \operatorname{Ker}(A)$.

(ii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$ und $Ax = 0$ jeweils in Vektorform. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge von $Ax = b$ einen affinen Teilraum von $\mathbb{R}^5$ bildet.

43. a) l.u:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{l.a.}$$

Basis $B = \{v_1, v_2\}$

b) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow v \notin U$$

$W := \mathrm{Span}(U \cup \{v\})$

Eine Basis von W ist

$B\{v, v_1, v_2\}$ da v_1, v_2 l.u. und $v \notin U$

$\dim W = 3$

c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$rg(A_1) = 2 = rg(A_2)$

$\dim \ker(A_1) = 1$
$\dim \ker(A_2) = 0$

44) a) $B = \{m_0, m_1, m_2\} = \{1, x, x^2\}$

- Erzeugendensystem.
- l.u

Es ist $c_1 m_0 + c_2 m_1 + c_3 m_2 = 0$

$\Rightarrow \quad c_1 m_0(x) + c_2 m_1(x) + c_3 m_2(x) = 0$

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$)

$$[P_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad [P_2]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad [P_3]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P_1\ P_2\ P_3$ l.u. $\Leftrightarrow$ $c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 = 0$ hat nur die triviale Lösung

Sei $c_1(1+2x^2) + c_2(2+x+3x^2) + c_3(-1-3x+x^2) = 0$

$\Leftrightarrow (c_1 + 2c_2 - c_3)\,1 + (c_2 - 3c_3)x + (2c_1 + 3c_2 + c_3)x^2 = 0$

$\Leftrightarrow$
$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - c_3 &= 0 \\ c_2 - 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P_1, P_2, P_3$ l.a.

$$[P_3]_{\{P_1, P_2\}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

45. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ l.u. $\quad \mathrm{Col}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathrm{rg}(A) = 3$

$\ker(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dim \ker(A) = 0$

45) b)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \end{array}\right)$$

i) $\dim \operatorname{Col}(A) = 3$

$\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$

ii) $x_1 + 3x_3 + x_5 = 1$ $\qquad x_3 = t$

$x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 7$ $\qquad x_4 = s$

$x_4 + 4x_5 = -6$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

H46 $\boxed{\textbf{A}}$ Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Verwenden Sie das Gauss/Jordan-Verfahren, um den Rang $\mathrm{rg}(A)$ und eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{Col}(A)$ zu bestimmen. Begründen Sie Ihre Ergebnisse!
Liegt der Vektor $w = (1, 2, 3)^T$ in $\mathrm{Col}(A)$? Wenn ja, so bestimmen Sie den Koordinatenvektor $w_{\mathcal{B}}$ von w bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{Col}(A)$.

(b) Stellen Sie $\mathrm{Ker}(A)$ als Spannraum dar. Geben Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathrm{Ker}(A)$ an. Untersuchen Sie, ob der Vektor $v = (6, 2, -2, 0)^T$ im Kern von A liegt.

H47 (a) Es sei A eine reelle $m \times n$-Matrix, so dass für alle $b \in \mathbb{R}^m$ das lineare System $Ax = b$ höchstens eine Lösung hat. Begründen Sie, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

(b) Gegeben sind ein Vektorraum V über einem Körper K und Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$.
Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\{v_1, v_2, v_3\} \text{ ist linear abhängig } \Leftrightarrow \exists\, i \in \{1, 2, 3\} : \; v_i \in \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3\} \setminus \{v_i\})$$

(Bemerkung: Allgemein lässt sich analog für $v_1, \ldots, v_n \in V$ zeigen:
$\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\exists\, i \in \{1, \ldots, n\} : \; v_i \in \mathrm{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\})$)

H48 (a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie: $\quad |\,\mathrm{Ker}(AB)| > 1 \iff |\,\mathrm{Ker}(A)| > 1$ oder $|\,\mathrm{Ker}(B)| > 1$.

(b) Bestimmen Sie für folgende komplexe Matrix den Rang und den Kern:

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} & -1 & 0 \\ i+1 & 0 & 3 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Stellen Sie den Kern als Spannraum einer Basis dar.
Liegt der Vektor $a = (\mathrm{i}, \mathrm{i}, \mathrm{i})^T$ im Spaltenraum $\mathrm{Col}(A)$ von A?

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den Parametern $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: eine Fallunterscheidung ist nötig!)