Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/$\sim$baumann

26.11.2018

8. Vorlesung

- Rangberechnung für Matrizen, Dimensionsformel
- reguläre Matrizen – Berechnung der inversen Matrix

. . . .

- Lineare Abbildungen
  - Lineare Fortsetzung
  - Kern und Bild, Dimensionsformel

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a & b \\ 0 & 4 & 5 & c & d \\ 0 & 0 & 6 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{array}$$

$rg(A)$?

z_4 lin. abh.

z_3 lin. unabh. ; z_2, z_3 lin. unabh. $z_1, z_2 z_3$ lin unabh.

Maxi-zahl lin. unabh. Zeilenvektor. ist 3.

Also. $rg(A) = 3$

S_4 lin. unabh.

S_1, S_2 - .

S_1, S_2, S_3 - -

S_4 ist eine LK von S_1, S_2, S_3

(eindeutig) lösbares LGS

$S_1 \dots S_4$ lin abh.

Maximalzahl lin unabh. Spaltenvektoren ist 3

Also $rg(A) = 3$

Rückblick: Elementare Zeilenumformungen

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplizieren einer Zeile mit einem Faktor $k \in K \setminus \{0\}$
3. Addieren des k-fachen ($k \in K$) einer Zeile zu einer anderen Zeile

Elementare Zeilenumformungen ändern die Lösungsmenge des LGS $Ax = b$ nicht.

Rangberechnung für Matrizen

- Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

- Bringt man eine Matrix A mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform, so ist der Rang $\mathrm{rg}(A)$ von A die Anzahl der Zeilen, in denen nicht nur Nullen als Einträge erscheinen.

- Satz: (Dimensionsformel)

  $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$

  Ist $A \in K^{m \times n}$, dann gilt:

Bem.

$$\mathrm{rg}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = n$$

$\mathrm{rg}(A) = n \iff \dim \ker(A) = 0 \iff \ker(A) = \{0_{K^n}\}$

$\mathrm{rg}(A) = 0 \iff \dim \ker(A) = n \iff \ker(A)$ ist ein $\overbrace{n\text{-dim. UVR von } K^n}^{K^n}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_r \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \\ \\ \\ \end{matrix} \; \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m$$

$n-r$ freie Parameter

in der Lösungsmenge von $Ax = 0_{K^m}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ rg(A)? dim Ker(A)?

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $rg(A) = 2$

Spaltenanzahl

$$\dim \operatorname{Ker}(A) = 3 - 2 = 1$$ (1 freier Parameter in der Lösungsmenge)

Bsp: $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ZSF $\quad \operatorname{rg} H = 3$

Parameter in GF(2)

$\dim \operatorname{Ker} H = 7 - 3 = 4$

$x_1 = \dots$

$\vdots$

$x_4 = a$

$x_5 = b$

$x_6 = c$

$x_7 = d$

$a(\quad) + b(\quad) + c(\quad) + d(\quad)$

Rückblick: Inverse Matrix (Kann man durch Matrizen dividieren?)

$Ax = b \Rightarrow x = \underbrace{A^{-1}}_{\text{inverse Matrix}} \cdot b$

inverse Matrix. Existenz? Berechnung?

(regulär)

- Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in K^{n \times n}$ mit

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$$

gibt. Die eindeutig bestimmte Matrix A^{-1} mit dieser Eigenschaft wird die zu A inverse Matrix genannt.

Bem. falls eine inverse Matrix exist. ist sie eindeutig bestimmt; denn

$A \cdot B_1 = E_n = A \cdot B_2 \underset{B_1 \cdot \text{ex}}{\Longrightarrow} \underbrace{B_1 \cdot A}_{E_n} \cdot B_1 = \underbrace{B_1 \cdot A}_{E_n} \cdot B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$ Berechnung: A^{-1} ist die inverse Matrix zu A (ex. falls A invertierbar)

- Die inverse Matrix A^{-1} einer invertierbaren Matrix $A \in K^{n \times n}$ kann man durch paralleles Lösen von n linearen LGS mit der Koeffizientenmatrix A berechnen.

Paralleles Lösen von n LGS $Ax = e_i$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der inversen Matrix zu $A \in K^{n \times n}$

1. Notiere $(A \mid E_n)$, wobei E_n die n-reihige Einheitsmatrix bezeichnet.
2. Mit elementaren Zeilenumformungen bringe man $(A \mid E_n)$ in Zeilenstufenform $(B \mid \dots)$.
3. Enthält $(B \mid \dots)$ eine Nullzeile, so existiert A^{-1} nicht.

   Andernfalls setze man mit elementaren Zeilenumfomungen so lange fort, bis man eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform erhält:

   $$(A \mid E_n) \to \ \dots \ \to (B \mid \dots) \to \ \dots \ \to (E_n \mid A^{-1})$$

   Die inverse Matrix zu A kann man unmittelbar aus dieser Darstellung ablesen.

Sei $A \in K^{n \times n}$

$$(A|E_n) = \left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[\text{Zeilen Umf.}]{\text{el.}} \begin{array}{c} n \\ \left(\begin{array}{c|c} \text{(Stufenform)} & \begin{matrix} \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 \end{matrix} \\ 0\,0 \cdots 0 & \end{array}\right) \end{array} \Big\} n$$

ex. eine Nullzeile. dann ex. A^{-1} nicht

ex. keine Nullzeile dann ex A^{-1}

A^{-1} ex. el. Zeilenumf. $\xrightarrow{\text{reduz. ZSF}} (E_n \mid A^{-1})$

Inverse spezieller Matrizen

- Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ und $ad - bc \neq 0$.
  Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Sind $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \in K \setminus \{0\}$, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

- $E_n^{-1} = E_n$

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ A^{-1} ex? Berechnung?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c} -3 \\ 1 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

A^{-1} ex

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \; | : (-2) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \; A^{-1}$$

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Anderer Rechenweg $(n=2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4 - 3\cdot 2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Äquivalente Bedingungen

Es sei $A \in K^{n \times n}$.

- A ist eine invertierbare Matrix.
- A^T ist eine invertierbare Matrix.
- Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
- $\mathrm{rg}(A) = n$
- $\dim \mathrm{Col}(A) = n$
- $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{K^n}\}$
- $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$

- Sei K ein Körper.

  Eine Abbildung $f : V \to W$ von einem Vektorraum V über K in einen Vektorraum W über K heißt **lineare Abbildung** (oder Homomorphismus), wenn für alle $v_1, v_2 \in V$ und alle $k \in K$ gilt:

  1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ (Additivität)
  2. $f(kv_1) = k\,f(v_1)$ (Homogenität)

- Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ bildet den Nullvektor 0_V von V auf den Nullvektor 0_W von W ab:

$$f(0_V) = 0_W$$

Bem.

$f(0_V) = 0_V = 0_V +_V 0_V \Rightarrow f(0_V) = f(0_V + 0_V) \Rightarrow f(0_V) = f(0_V) +_W f(0_V) \Rightarrow \underbrace{f(0_V) -_W f(0_V)}_{0_W} = f(0_V) +_W (f(0_V) -_W f(0_V)) = \underbrace{f(0_V) + 0_W}_{f(0_V)}$

Kriterien für die Linearität einer Abbildung

Für Vektorräume V und W über einem Körper K und eine Abbildung $f : V \to W$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Die Abbildung f ist linear.
- Für alle $v_1, v_2 \in V$ und alle $k_1, k_2 \in K$ gilt:

$$f(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) \quad \text{(Linearität)}$$

Äq zu 1 und 2.

Lineare Fortsetzung

Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ ist durch die Bilder der Basisvektoren von V eindeutig bestimmt:

Ist

$$\varphi : B \to W : b \mapsto \varphi(b)$$

eine Abbildung von einer Basis $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ von V in den Vektorraum W, dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$f : V \to W$$

mit

$$f(b_i) = \varphi(b_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nämlich:

$$f : V \to W : k_1 b_1 + \cdots + k_n b_n \mapsto k_1 f(b_1) + \cdots + k_n f(b_n)$$

Man nennt diese eindeutig bestimmte Abbildung f die lineare Fortsetzung von φ auf V.

Kern und Bild einer linearen Abbildung

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

- $\mathrm{Ker}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subseteq V$ heißt Kern von f.

  $\mathrm{Im}(f) := \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$ nennt man das Bild von f.

- $\mathrm{Ker}(f)$ ist ein Untervektorraum von V.

- $\mathrm{Im}(f)$ ist ein Untervektorraum von W.

- Eine lineare Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}$ gilt.

Dimensionsformel

Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum, dann gilt für jede lineare Abbildung

$$f : V \to W$$

die folgende Gleichung:

$$\dim(V) = \dim(\underbrace{f^{-1}(\{0_W\})}_{\mathrm{Ker}(f)}) + \dim(\underbrace{f(V)}_{\mathrm{Im}(f)})$$