Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/$\sim$baumann

17.12.2018

11. Vorlesung

- Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen
- Charakteristisches Polynom $\chi_A(x)$ einer Matrix $A \in K^{n \times n}$
  - Die Eigenwerte von A sind Nullstellen von $\chi_A(x)$.
- Eigenvektoren einer Matrix $A \in K^{n \times n}$
  - Eigenraum von A zum Eigenwert k
  - linear unabhängige Eigenvektoren von A

Bsp. $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= 16 - (-4)$

$= 20$

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ ex. $\Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow \ker(A) = \{0_{K^n}\}$

$\det(A) = 0 \Leftrightarrow |\ker(A)| > 1 \Leftrightarrow \ker(A) \neq \{0_{K^n}\}$

sei $A \in K^{n \times n}$, $v \in K^n$, $k \in K$

$\underbrace{A \cdot v}_{\text{Matrizenmul.}} = \underbrace{k \cdot v}_{\text{Skalarmul.}}$ für Eigenvektoren v von A zum Eigenwert A.

Eigenwerte und Eigenvektoren

- Es sei K ein Körper.

  Ein Element $k \in K$ wird ein Eigenwert der quadratischen Matrix $A \in K^{n \times n}$ genannt, wenn es einen Vektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit

  $$Av = kv$$

  gibt. Ein solcher Vektor v wird ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert k genannt.

- Der Nullvektor $0 \in K^n$ ist für keinen Eigenwert der Matrix A ein Eigenvektor.

- Es gibt Matrizen, für die das Nullelement $0 \in K$ ein Eigenwert ist.

Bem Es gilt $A \cdot 0_{K^n} = 0_{K^n} = k \cdot 0_{K^n}$ für alle $k \in K$ (Nullvektor ist kein Eigenvektor)

$0 \in K$ keinen Eigenwert von A sein, z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 0$

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\underset{\sim}{2}$, denn $A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ " " " " " " " " " 3, denn $A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bem. k EW von A. $\Leftrightarrow \exists v \in K^n \setminus \{0\}$ $A \cdot v = k \cdot v = \underset{\sim}{k E_n v}$ $\Leftrightarrow \exists v \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$ $Av - kE_n v = (A - kE_n) v = 0$

k an. LGS mit koeff.-Mat $A - kE_n$

$\Leftrightarrow$ das hom. LGS mit der koff. Matrix $A - kE_n$.

$\Leftrightarrow$ Es ex. ein vom Nullvektor verschiedener EL. mit kern von $A - kE_n$

$\Leftrightarrow |\ker(A \setminus kE_n)| > 1$

$\Leftrightarrow \det(A - kE_n) = 0$

Bem. Sei k ein EW von A Dann gilt jeder Eigenvektor v ist ein EL des Kerns von $A - kE_n$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ges. EW (EV)

$$\det(A - E_n v) = \det\begin{pmatrix} 1-k & -2 & 0 \\ -2 & -k & 1 \\ 0 & -2 & 1-k \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -2 & -k & 1 \\ 1-k & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1-k \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ 1-k & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1-k \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ 0 & \frac{k(k-1)}{2} - 2 & \frac{1-k}{2} \\ 0 & -2 & 1-k \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} \frac{k(k-1)}{2} - 2 & \frac{1-k}{2} \\ -2 & 1-k \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} \frac{k(k-1)}{2} - 1 & 0 \\ -2 & 1-k \end{pmatrix} = 2(1-k)\left(\frac{k(k-1)}{2} - 1\right) = 0 \Rightarrow (1-k)\left(\frac{k(k-1)-2}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow k = 1 \vee k = 2 \vee k = -1$

$\Leftrightarrow k \in \{1, -1, 2\}$ $-1, 1, 2$ EW von A

Eigenwerte von A

- Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ hat genau dann den Eigenwert $k \in K$, wenn
$$\det(A - kE_n) = 0$$
gilt.

- 0 ist ein Eigenwert von $A \iff A^{-1}$ existiert nicht

- Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ hat genau dann den Eigenwert $k \in K$, wenn das homogene lineare Gleichungssystem
$$(A - kE_n)v = 0$$
eine Lösung $v \neq 0$ besitzt.

Charakteristisches Polynom von A

- Der Ausdruck

  $$\chi_A(x) := \det(A - xE_n) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

  wird charakteristisches Polynom der Matrix $A \in K^{n \times n}$ genannt.

- $k \in K$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn k eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A ist:

  $$\chi_A(k) = c_n \cdot k^n + c_{n-1} \cdot k^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot k + c_0 = 0$$

Folgerungen

- Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ hat höchstens n Eigenwerte.

- Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat genau n Eigenwerte, wenn jeder Eigenwert mit seiner Vielfachheit (als Nullstelle von χ_A) gezählt wird.

- Ist A eine reelle symmetrische Matrix, d.h. $A^T = A$, dann sind alle Eigenwerte $k \in \mathbb{C}$ von A reell.

- Ist $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ und sind $k_1, \; k_2, \ldots, k_n$ die Eigenwerte von A, dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n \\ \mathrm{Spur}(A) &= k_1 + k_2 + \ldots + k_n \end{aligned}$$

  Dabei ist $\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

$\chi_A(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x+1)^1 \quad A \in K^{6\times 6}$ $\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

$\lambda_4=\lambda_5=2$

$\lambda_6=-1$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, EW $-1, 1, 2$ ges: EV

EV zu $\lambda=2$: $A-2E_3 = \begin{pmatrix} 1-2 & -2 & 0 \\ -2 & 0-2 & 1 \\ 0 & -2 & 1-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\ker(A-2E_3) = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}\right)$

Eigenvektoren von A zum EW $\lambda_1=2$: $\ker(A)-2E_3 \setminus \{0\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}, t \neq 0 \right\}$

Eigenvektoren zum Eigenwert k

Sei $A \in K^{n \times n}$ und k sei ein Eigenwert von A.

- Die Elemente von $\operatorname{Ker}(A - k \cdot E_n) \setminus \{0\}$ sind die zu k gehörigen Eigenvektoren von A.
- $\operatorname{Ker}(A - k \cdot E_n)$ ist der Eigenraum von A zum Eigenwert k.
- Der Eigenraum von A zum Eigenwert k ist ein Untervektorraum von K^n.
- Sind $k_1, \ldots, k_t$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_t$ (also $Av_i = k_i v_i$), dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_t$ linear unabhängig.

BSP: (Fortsetzung)

$k_2 = 1$ ER zu 1 $\quad \ker(A - 1E) = \ker\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & 0 \\ -2 & 0-1 & 1 \\ 0 & -2 & 1-1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}\right)$

$k_3 = -1$ 〃 〃 -1 〃 $+E) = \ker\begin{pmatrix} 1+1 & - & - \\ - & 0+1 & - \\ - & - & 1+1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$

Bem. $\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sind L.U

Satz: gilt $A \cdot v_i = k_i v_i$ $(i = 1, \dots, t)$ und sind $k_1, \dots, k_t$ paares verschieden,
dann sind $v_1, \dots, v_t$ L.U