Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

2. Übungsblatt für die Woche 15.04. - 21.04.2019

Zahlenfolgen, Konvergenz, Rechenregeln für Grenzwerte, Quetschlemma

Ü7 Berechnen Sie für die gegebenen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, falls er existiert. Verwenden Sie dazu aus der Vorlesung bekannte Grenzwerte und Rechenregeln für konvergente Folgen.

(a) $x_n = \dfrac{5n^2+n-1}{3n^2-4}$ (b) $x_n = \left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{n-2}, n>0,$ (c) $x_n = \left(1+\dfrac{3}{4n}\right)^{n}, n>0$

(d) $x_n = \dfrac{n^3-2}{n^4-n+4},$ (e) $x_n = \dfrac{3e^{2n}-e^n+1}{3-e^{3n}},$ (f) $x_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^{n+1} + \sqrt[n]{2^{n+1}},$

(g) $x_n = \left(\dfrac{2n-5}{n}\right)^{n}, n>0.$

Ü8 Verwenden Sie das Quetschlemma, um die reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(a) $x_n = \sqrt[n]{2+n^{-1}}, n>0,$ (b) $x_n = \dfrac{2n^4}{2-3n^2+4n^4}\sqrt[n]{9+\cos(2n+1)},\ n>0$

(c) $x_n = \sqrt[n]{n+3}$

auf Konvergenz zu untersuchen und gegebenenfalls ihren Grenzwert zu berechnen.

Ü9 Betrachtet wird die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $x_n := \dfrac{n^2}{2^n}$ definiert ist.

(a) Bestimmen Sie das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass (x_n) für $n \geq n_0$ streng monoton fällt.

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$.

(c) Es sei $p(n) = a_0 + a_1 n + \dots a_k n^k$ mit $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ ein Polynom bzgl. n. Untersuchen Sie die Zahlenfolge (y_n) mit $y_n = \dfrac{p(n)}{2^n}$ auf Konvergenz.

H10 $\boxed{\textbf{A}}$ Berechnen Sie für die reellen Zahlenfolgen (x_n) und (y_n), die durch

$$x_n := \frac{1}{2}\sqrt[n]{3-\sin(n^2)} + (-3)^{n+1}\cdot\frac{1}{5^n}, \qquad y_n := \frac{4n^2}{(n-2)^3-n^3}$$

definiert sind, den Grenzwert. Nutzen Sie dafür geeignete Rechenregeln für konvergente Folgen und/oder das Quetschlemma, sowie aus der Vorlesung bekannte Grenzwerte. (Es muss dabei klar ersichtlich sein, welche Rechenregeln Sie an welcher Stelle anwenden.)

H11 (a) Untersuchen Sie die reellen Zahlenfolgen auf Konvergenz, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) (a_n) mit $a_n = \dfrac{4n^4 - 5n + 7}{4n^3 + 9n^2 + 11n + 6}$,

(ii) (b_n) mit $b_n = 6^{-n}\Big((-2)^n + 2^n\Big)$,

(iii) (c_n) mit $c_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+5}$,

(vi) (d_n) mit $d_n = \dfrac{2^n + 3^{n+1} \cdot n^2}{3^n \cdot n^2} - 2\sqrt[n]{3}$, $n > 0$.

(b) Untersuchen Sie die reellen Zahlenfolgen (x_n) auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den (möglicherweise uneigentlichen) Grenzwert:

(i) $x_n = \dfrac{n}{3} + \dfrac{3}{n}$, (ii) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{n}{3} + \dfrac{3}{n}}$, (iii) $x_n = \dfrac{1 + 6n^4}{3n^4 + 2n - 1} + (-1)^n \dfrac{\sin(n)}{2n}$.

H12 (a) Von einer Folge (x_n) mit $x_n = cq^n$ sind $x_2 = 18$, $x_3 = -54$ und $x_m = 1458$ bekannt. Bestimmen Sie die Konstanten c, q und m.

(b) Finden Sie alle Folgen (y_n) mit $y_3 = 272$ und $y_5 = 68$.

Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ berechnen

ü7 a) $x_n = \frac{5n^2+n-1}{3n^2-4} = \frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{5+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{4}{n^2}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3-4\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{5+0+0^2}{3-4\cdot 0^2} = \frac{5}{3}$

b) $x_n = \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n-2} = \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-2} = \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1-\lim\frac{3}{n}\right)\left(1-\lim\frac{3}{n}\right)} = \frac{e^{-3}}{1} = e^{-3}$

c) $x_n = \left(1+\frac{3}{4n}\right)^n = \left(1+\frac{\frac{3}{4}}{n}\right)^n \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{3}{4}}{n}\right)^n = e^{\frac{3}{4}}$

d) $x_n = \frac{n^3-2}{n^4-n+4} = \frac{n^4}{n^4}\cdot\frac{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^4}}{1-\frac{1}{n^3}+\frac{4}{n^4}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\frac{1}{n}-\lim\frac{2}{n^4}}{1-\lim\frac{1}{n^3}+\lim\frac{4}{n^4}} = \frac{0-0}{1-0+0} = 0$

e) $x_n = \frac{3e^{2n}-e^n+1}{3-e^{3n}} = \frac{e^{3n}}{e^{3n}}\cdot\frac{\frac{3}{e^n}-\frac{1}{e^{2n}}+\frac{1}{e^{3n}}}{\frac{3}{e^{3n}}-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{e^n}-\lim\frac{1}{e^{2n}}+\lim\frac{1}{e^{3n}}}{\lim\frac{3}{e^{3n}}-1} = \frac{0-0+0}{0-1} = 0$

f) $x_n = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n+1} + \sqrt[n]{2^{n+1}} = \left(1+\frac{-\frac{1}{3}}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{-\frac{1}{3}}{n}\right) + \sqrt[n]{2^n}\cdot\sqrt[n]{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\left(1+\frac{-\frac{1}{3}}{n}\right)^n\cdot\lim\left(1+\frac{-\frac{1}{3}}{n}\right) + \lim\sqrt[n]{2^n}\cdot\lim\sqrt[n]{2}$

$= e^{-\frac{1}{3}}\cdot 1 + 2\cdot 1 = 2+e^{-\frac{1}{3}}$

g) $x_n = \left(\frac{2n-5}{n}\right)^n = \left(2-\frac{5}{n}\right)^n = 2^n\left(1+\frac{-\frac{5}{2}}{n}\right)^n$

$\lim x_n = \lim 2^n \lim\left(1+\frac{-\frac{5}{2}}{n}\right)^n = \infty$ nicht konvergent,

denn $\forall r>0\ \exists N_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N_0\ x_n>r$

$$x_n = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad \operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{"} \quad p(x) = a_k x^k + \ldots + a_0,\ q(x) = b_k x^k + \ldots + b_0. \\ +\infty & \text{"} \quad > \end{cases}$$

alternativ.

f) $y_n = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n+1}$ $\qquad z_n = 2^{\frac{n+1}{n}}$

$$\ln z_n = \ln 2^{\frac{n+1}{n}} = \frac{n+1}{n} \ln 2 \qquad \lim_{n\to\infty} \ln(z_n) = \ln 2 \lim \frac{n+1}{n}$$
$$= \ln 2 \left(1 + \lim \frac{1}{n}\right) = \ln 2$$

$$z_n = e^{\ln z_n} \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = e^{\lim_{n\to\infty} \ln z_n} = e^{\ln 2} = 2 \quad \text{da } e^x \text{ stetig}$$

Quetschlemma

Wenn $a_n \le x_n \le b_n$ für $n > n_0$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Ü8 a) $x_n = \sqrt[n]{2 + n^{-1}} \Rightarrow \sqrt[n]{2} \le x_n \le \sqrt[n]{3}$, denn $0 < \frac{1}{n} \le 1$

und $\sqrt[n]{x}$ für festes $n > 0$ smw Funktion.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1 \overset{QL}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

b) $x_n = \frac{2n^4}{2 - 3n^2 + 4n^4} \cdot \sqrt[n]{9 + \cos(2n+1)}$, $n > 0$

$$\sqrt[n]{8} \le \sqrt[n]{9 + \cos(2n+1)} \le \sqrt[n]{10} \qquad \lim \sqrt[n]{8} = \lim \sqrt[n]{10} = 1$$

und $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4} \frac{2}{2 - \frac{3}{\ldots} + 4 \ldots} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim \frac{n^4}{n^4}\cdot\frac{2}{\frac{2}{n^4}-\frac{3}{n^2}+4} \cdot \lim \sqrt[n]{5+\cos(2n+1)} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

c) $x_n = \sqrt[n]{n+3} = \sqrt[n]{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{1+\frac{3}{n}} \leq \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{4}$

alternativ. $\sqrt[n]{n} \leq x_n \leq \sqrt[n]{2n}$

$\lim \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim \sqrt[n]{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1 \overset{QL}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n = 1$

Ü9. $y_n = \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_k n^k}{2^n} = \frac{a_0}{2^n} + a_1 \frac{n}{2^n} + \dots + a_k \frac{n^k}{2^n}$

a) $x_n = \frac{n^2}{2^n}$ $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{9}{8},\ x_4 = 1$

$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} = \frac{(n+1)^2 - 2n^2}{2^{n+1}} = \frac{n^2+2n+1-2n^2}{2^{n+1}} = \frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$

Nenner >0. $g(x) = x^2 - 2x - 1$

Nullstellen $x_0 = 1 \pm \sqrt{2}$

ab $n_0 = 3$ ist der Zähler $<0 \Rightarrow (x_n)$ smf.

oder. $\frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}} < \frac{-n^2+2n+n}{2^{n+1}} = \frac{-n^2+3n}{2^{n+1}} < 0$ für $n>3$

b) $0 \leq \frac{n^2}{2^n} \leq \underbrace{\max\{x_0, x_1, x_2, x_3\}}_{=\frac{9}{8}}$ da (x_n) smf ab $n=3$

a) & b) $\leadsto \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} \in \mathbb{R}$

Zusatz:

Grenzwert $=0$ zeigen mit Quetschenlemma

$\underbrace{0}_{=a_n} < \frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{n^3}$ ab $n_0=10$

Beweis vollst. Induktion $\forall n \geq 10: 2^n > n^3$

IA: $n = 10 \quad 1024 > 1000$ ✓

IS: $\forall n \geq 10 \quad 2^n > n^3 \Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^3$

Beweis: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{IV}{>} 2n^3$

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$2n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow n^3 > 3n^2 + 3n + 1$

$3n^2 + 3n^2 + n^2 \geq 3n^2 + 3n + 1$

$7n^2 \Rightarrow n^3 > 7n^2 \geq 3n^2 + 3n + 1$ für $n \geq 7$

H 10

$$x_n := \frac{1}{2}\sqrt[n]{3-\sin(n^2)} + (-3)^{n+1}\cdot\frac{1}{5^n}, \qquad y_n := \frac{4n^2}{(n-2)^3-n^3}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt[n]{2} \le \frac{1}{2}\sqrt[n]{3-\sin(n^2)} \le \frac{1}{2}\sqrt[n]{3+1} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt[n]{4} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt[n]{3-\sin(n^2)} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{5^n} = \lim_{n\to\infty} -3\left(\frac{-3}{5}\right)^n + 1 = 0+1$$
$$= 1$$

$$y_n = \frac{4n^2}{(n-2)^3-n^3} = \frac{4n^2}{n^3-6n^2+12n-8-n^3} = \frac{4n^2}{-6n^2+12n-8} = \frac{n^2}{n^2}\,\frac{4}{-6+\frac{12}{n}-\frac{8}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

H 11

den Grenzwert.

(i) (a_n) mit $a_n = \dfrac{4n^4-5n+7}{4n^3+9n^2+11n+6}$,

(ii) (b_n) mit $b_n = 6^{-n}\Big((-2)^n+2^n\Big)$,

(iii) (c_n) mit $c_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+5}$,

(vi) (d_n) mit $d_n = \dfrac{2^n+3^{n+1}\cdot n^2}{3^n\cdot n^2} - 2\sqrt[n]{3}$, $n>0$.

i) $$a_n = \frac{n^4}{n^4}\,\frac{4-\frac{5}{n^3}+\frac{7}{n^4}}{\frac{4}{n}+\frac{9}{n^2}+\frac{11}{n^3}+\frac{6}{n^4}} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{0} = \infty$$

nicht Konvergent

ii) $$b_n = \frac{(-2)^n+2^n}{6^n} = \left(-\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n$$

wenn n ungerade $\Rightarrow b_n = 0$

wenn n Gerade $\Rightarrow b_n = \dfrac{2^{n+1}}{6^n}$

nicht monoton

iii) $C_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+5}$

$m := 2n+1 \quad C_n = \left(\frac{m+2}{m}\right)^{m+4} = \left(1+\frac{2}{m}\right)^m \cdot \left(1+\frac{2}{m}\right)^4$

$$\lim C_n = \lim \left(1+\frac{2}{m}\right)^4 \cdot e^2$$
$$= 1 \cdot e^2 = e^2$$

$$\frac{C_{m+1}}{C_m} = \frac{\left(\frac{m+3}{m+1}\right)^{m+5}}{\left(\frac{m+2}{m}\right)^{m+4}} = \frac{m+3}{m+1}\left(\frac{\frac{m+3}{m+1}}{\frac{m+2}{m}}\right)^{m+4}$$

$$= \frac{m+3}{m+1}\left(\frac{m(m+3)}{(m+1)(m+2)}\right)^{m+4}$$

v) $d_n = \frac{2^n + 3^{n+1} \cdot n^2}{3^n \cdot n^2} - 2^n\sqrt{3}, \quad n > 0$

$$= \frac{2^n}{3^n \cdot n^2} + 3 - 2^n\sqrt{3}$$

$$\frac{2^n}{3^n \cdot n^2} < \frac{3^n}{3^n \cdot n^2} = \frac{1}{n^2} \quad \lim \cdot\cdot = 0$$

$$\Rightarrow \lim \frac{2^n}{3^n \cdot n^2} = 0$$

$$\lim d_n = 0 + 3 - 2 = 1$$