TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Abbildungen, Kardinalitäten

$\boxed{\text{V.}}$ Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \neq n^+$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$ gibt es eine natürliche Zahl m mit $n = m^+$.

Ü25. Die *Teilbarkeitsrelation* auf $\mathbb{N}$ ist über

$$R = \big\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists\, c \in \mathbb{N} \colon b = ac\big\}$$

definiert.

(a) Welche Kardinalität besitzt die Menge $\big\{n \in \mathbb{N} \mid (n, 154) \in R\big\}$?

(b) Es sei $M = \big\{n \in \mathbb{N} \mid (n, 50) \in R\big\}$. Bestimmen Sie alle Paare aus $M \times M$, die in R liegen.

Ü26. Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie:

Bsp: $f(a)=1$ $f(b)=2$ (i) die Anzahl aller injektiven Abbildungen in B^A und A^B;

Bsp: $f(1)=f(2)=a$ $f(3)=f(4)=b$ (ii) die Anzahl aller surjektiven Abbildungen in B^A und A^B.

Geben Sie jeweils, wenn möglich, ein Beispiel einer solchen Abbildung an.

Ü27. Sei n eine natürliche Zahl, und sei $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$f_n \colon \mathcal{P}\big([n]\big) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}\big([n] \times [n]\big),$$
$$T \mapsto \big\{(a,b) \in [n] \times [n] \mid a \in T \text{ und } b \in \overline{T}\big\}.$$

(a) Stellen Sie diese Abbildung für $n = 3$ als Wertetabelle dar.

(b) Wieviele Elemente haben die Mengen $\mathcal{P}\big([n]\big) \setminus \{\emptyset\}$ und $\mathcal{P}\big([n] \times [n]\big)$ für beliebiges n?

(c) Untersuchen Sie, für welche n diese Abbildung injektiv, surjektiv, oder gar bijektiv ist. Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Ü25.

a) Primfaktorzerlegung $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$

$154 : 2 = 77$

$77 : 7 = 11$

$M := \{\underline{1}, \underline{2}, \underline{7}, \underline{11}, \underline{14}, \underline{22}, \underline{77}, \underline{154}\}$

$|M|$ = Kardinalität $= 8$

b) Primfaktorzerlegung : $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$

$M = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$

Ü26) Es gibt keine injektiven Abb. $f: A \to B$, wenn $|A| > |B|$.

Es gibt keine surjektiven Abb. $f: A \to B$, wenn $|B| > |A|$ (*)

i) A^B: keine inj. Abb.

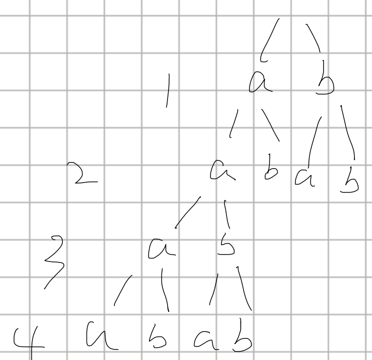
B^A: nach 20(ii) gilt: Anz. aller inj. Abb. von m-elemente nach einer n-elem. Menge:

$$\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$$

ii) A^B: $|A^B| = 2^4 = 16$.

Anzahl surj. Abb. 14

B^A: nach (*) gibt keine surj. Abb.



weil die beiden Abb. wegfallen, was 1234 alle auf a oder b abgebildet werden.

Ü27

T	$\overline{T}$	$f(T)$
$\{1\}$	$\{2,3\}$	$\{(1,2),(1,3)\}$
$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{(2,1),(2,3)\}$
$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{(3,1),(3,2)\}$
$\{1,2\}$	$\{3\}$	$\{(1,3),(2,3)\}$
$\{1,3\}$	$\{2\}$	$\{(1,2),(3,2)\}$
$\{2,3\}$	$\{1\}$	$\{(2,1),(3,1)\}$
$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

b) $|P([n])\setminus\{\emptyset\}| = 2^n - 1$ $\qquad |P([n]\times[n])| = 2^{n^2}$

c) $P([n])\setminus\emptyset \to P([n]\times[n])$

$2^n - 1 < 2^{n^2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ nicht surjektiv

nicht bij.

Injektivität: Seien $T_1, T_2 \subseteq [n]$ mit $f(T_1) = f(T_2)$

Falls $T_1 = [n]$, dann $f(T_1) = \emptyset = f(T_2) \Rightarrow T_2 = [n]$

Wenn $T_1 \neq [n]$, dann gibt es $a \in T_1$ und $b \in \overline{T_1}$

und es ist $(a,b) \in f(T_1) = f(T_2) \Rightarrow a \in T_2,\ b \in \overline{T_2} \Rightarrow T_1 = T_2$

A28. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 6. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**

(a) Es sei $Q = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}\colon n = m^2\}$ die Menge der Quadratzahlen. Weiter seien

$$g\colon \mathbb{N} \cup \{-1\} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n+1,$$
$$f\colon \mathbb{N} \to Q, \qquad n \mapsto n^2$$

Abbildungen. Bestimmen Sie, falls möglich, die Abbildungen $(f \circ g)^{-1}$ und $g^{-1} \circ f^{-1}$.

(b) Es seien A, B, C beliebige endliche Mengen, und $g\colon A \to B$ und $f\colon B \to C$ bijektive Funktionen. Beweisen Sie:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

H29. a) Es seien A und B endliche, gleichmächtige Mengen. Zeigen Sie, dass jede injektive Abbildung $f\colon A \to B$ auch bijektiv ist.

b) Es sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Der *Lift* von f ist die Abbildung

$$F\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), \quad T \mapsto \big\{f(t) \mid t \in T\big\}.$$

Zeigen Sie, dass der Lift einer bijektiven Abbildung wieder bijektiv ist.

H30. Die folgenden Regeln beschreiben das Spiel "Die Türme von Hanoi".

Das Spielbrett besteht aus einer Bodenplatte mit drei senkrecht zu dieser stehenden Stäben. Die Spielsteine sind n gelochte Scheiben mit paarweise verschiedenen Durchmessern, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.

Ein *gültiger Turm* ist eine nach Größe sortierte Anordung einer Teilmenge der Scheiben auf einem einzelnen Stab. Dabei soll die größte verwendete Scheibe am weitesten unten liegen.

Ein *gültiger Zug* besteht nun darin, die oberste Scheibe eines gültigen Turms auf einen anderen Stab zu bewegen, sodass wieder ein gültiger Turm entsteht.

Zu Beginn des Spiels wird auf einem beliebigen Stab (dem *Ausgangsstab*) ein gültiger Turm aus allen n Scheiben errichtet.

Ziel des Spiels ist es nun allein durch gültige Züge einen gültigen Turm aus n Scheiben auf einem beliebigen, vom Ausgangsstab verschiedenen, Stab zu errichten.

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass mindestens $2^n - 1$ gültige Züge nötig sind, um das Spielziel zu erreichen.