Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/$\sim$baumann

5.11.2018

5. Vorlesung

Die Lineare Algebra ist die Theorie der Vektorräume (und der linearen Abbildungen).

- Definition Vektor, Vektorraum

  z.B. $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \boxplus \right.$ Symbol für Addition, $\boxdot$ Symbol für Skarlarmultiplikation)

  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ $\quad r \boxdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra \\ rb \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$

- Beispiele für Vektorräume

- Rechenregeln für Vektoren

- Untervektorräume

Definition Vektorraum

Sei K ein Körper.

Ein K-Vektorraum $(V; +, (k \mid k \in K))$ (kurz: K-Vektorraum V)
ist eine Struktur
besteht aus einer

- Menge V, $\neq \emptyset$
- einer Addition $+$ und $: V \times V \to V : (v_1, v_2) \to v_1 \boxed{+} v_2$ kurz $(v_1 + v_2)$
- einer Skalarmultiplikation $(k \mid k \in K)$, $K \times V \to V : (k, v) \to k \boxed{\cdot} v$ (kv)

für die die Eigenschaften (V1) bis (V10) erfüllt sind.
VR-Axiome

Man spricht auch von einem Vektorraum über dem Körper K.

Die Elemente eines Vektorraums nennt man Vektoren.

Für $K = \mathbb{R}$ heißt V reeller Vektorraum.

Für $K = \mathbb{C}$ heißt V komplexer Vektorraum.

Vektorraum-Axiome

(V1) Für je zwei Elemente $v_1, v_2 \in V$ ist $v_1 + v_2$ ein eindeutig bestimmtes Element von V.
exist.

(V2) Es gilt $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$.

(V3) Es gilt $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

(V4) Es gibt ein Element 0 in V (Nullvektor) mit $0 + v = v + 0 = v$ für alle $v \in V$.

(V5) Es gibt zu jedem $v \in V$ ein Element $-v$ in V mit
$v + (-v) = (-v) + v = 0$.

(V6) Für jedes $k \in K$ und jedes $v \in V$ ist kv ein eindeutig bestimmtes Element von V.
exist. kv

(V7) Es gilt 1v=v für alle $v \in V$. wobei 1 des einselement des körpers

(V8) Es gilt $(k_1 k_2)v = k_1(k_2 v)$ für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $v \in V$.

(V9) Es gilt $(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v$ für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $v \in V$.

(V10) Es gilt $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$ für alle $k \in K$ und alle $v_1, v_2 \in V$.

Bem. (V7) Kann nicht weggelassen werden

(V3) Kann weggelassen werden. (Kann aus den restlichen Axiome hergeleitet werden)

Bem. $0_K \in K$ $\quad 0_V \in V$

Bem. Der Nullvektor ist in jedem VR eindeutig bestimmt, denn

Annahme: $0_1, 0_2$ seien Nullvektoren und $0_1 \neq 0_2$

$$0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$$

0_1 Nullvektor $\quad 0_2$ Nullvektor

widerspruch. Annahme falsch.

Rechenregeln für Vektoren

Es sei V ein K-Vektorraum, 0_K das Nullelement des Körpers K und 0_V der Nullvektor aus V.

Dann gilt für alle Vektoren $v \in V$ und alle Skalare $k \in K$:

(R1) $0_K v = 0_V$ (kurz: $0v = 0$)

(R2) $k 0_V = 0_V$ (kurz: $k0 = 0$)

(R3) $kv = 0_V \Rightarrow k = 0_K$ oder $v = 0_V$ (kurz: $k = 0$ oder $v = 0$)

(R4) $(-k)v = -(kv)$, insbesondere: $(-1)v = -v$

Beweis von (R1)

wegen (V5) ex. $-\square \in V$

$$\boxed{0_K \cdot v} \underset{\uparrow}{=} (0_K + 0_K) \cdot v \underset{V9}{=} (0_K \cdot v) + \boxed{(0_K \cdot v)}$$

0_K ist 0 Ele aus K

$$\Rightarrow \underbrace{\square + -\square}_{\substack{0_V \\ \text{(wegen (V5))}}} = (0_K \cdot v) + \underbrace{\square + -\square}_{\substack{0_V \\ \text{(wegen (V5))}}}$$

(V2)

$$\boxed{0_V = 0_K \cdot v}$$

Beispiele für Vektorräume

- $K^{m\times n}$ mit der Matrizenadditition und Skalarmultiplikation über dem Körper K $0 =$ Nullmatrix $0_{m\times n}$
- $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\mathbb{C}^n := \mathbb{C}^{n\times 1}$, $\mathrm{GF}(2)^n := \mathrm{GF}(2)^{n\times 1}$
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, GF(2), allgemein: Körper K $K^n := \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \mid k_1, k_2, \ldots k_n \right\}$ z.B $\mathbb{R}^2$
- Linearcodes (Codierungstheorie)
- $C[a, b]$

  Die Vektoren sind reellwertige Funktionen, die auf dem reellen Intervall $[a, b]$ stetig sind.
- $\mathcal{P}(M)$ für jede Menge M mit der Addition $A + B := A \triangle B$ $:= (A\setminus B) \cup (B \setminus A)$ und der Skalarmultiplikation $0A := \emptyset$, $1A = A$ über dem Körper GF(2). $A, B \subseteq M$

VR von Abbildungen.

$f: A \to K$ nullvektor $f: A \to K$ $a \mapsto 0$

Beziehungen: $\mathbb{R} \to$ VR reeller VR.

$\mathbb{C} \to$ VR komplexer VR.

Bem. $(V, +)$ ABELsche Gruppe $+$: 2-stellige Operation

$$\underbrace{(V, +, (k \mid k \in K))}_{\text{Skalarmultiplikation}}$$

$|k|$ 1-stellige Operation

$k \in K$, k fest $V \to V$: $v \mapsto kv$

Untervektorräume

Def

- Eine Teilmenge U eines K-Vektorraums V heißt Untervektorraum von V, wenn gilt:

  (U1) U enthält den Nullvektor 0 von V.

  (U2) Aus $u_1 \in U$ und $u_2 \in U$ folgt $u_1 + u_2 \in U$.

  (U3) Aus $k \in K$ und $u \in U$ folgt $ku \in U$.

- Ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V ist wieder ein K-Vektorraum (mit den Einschränkungen der Operationen von V auf U).

- Jeder Vektorraum V enthält die trivialen Untervektorräume $\{0\}$ und V.

- Der Untervektorraum $\{0\}$ des Vektorraums V wird Nullraum genannt.

Aufgespannter Untervektorraum Span(T)

- Der Durchschnitt von Untervektorräumen des Vektorraums V ist ein Untervektorraum von V.

- Zu jeder Teilmenge $T \subseteq V$ gibt es einen kleinsten Untervektorraum, der alle Elemente von T enthält.
  Insbesondere ist der Nullraum der kleinste Untervektorraum, der die leere Menge enthält.

- Sei V ein K-Vektorraum und $T \subseteq V$.
  Man nennt den kleinsten Untervektorraum von V,
  der alle Elemente von T enthält,
  den von T aufgespannten Untervektorraum von V.

  Dieser Untervektorraum wird mit $\mathrm{Span}(T)$ bezeichnet.