Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann

www.math.tu-dresden.de/$\sim$baumann

21.1.2019

- Konstruktion von Orthogonalbasen: Gram-Schmidt-Verfahren
- Bestapproximation

Orthogonalprojektion / Orthogonalzerlegung

$v = \hat{v} + w$

$\hat{v} = \mathrm{Proj}_u v$ bzw. $\hat{v} = \mathrm{Proj}_{\mathrm{span}(\{u\})} v$ $\qquad U = \mathrm{Span}(\{u\})$

$\hat{v}$ ist die Orthogonalprojektion von v auf u und $\underbrace{w \perp u}_{w \cdot u = 0}$ bzw $w \in U^{\perp}$

geg: u, v $\quad$ ges: $\hat{v}, w$

Lösung $w = v - \hat{v}$, falls $\hat{v}$ bekannt ist

ges: $\hat{v}$

Wir sehen voraus $\hat{v} = ku$ mit $k \in \mathbb{R}$ (denn $\hat{v} \in U = \mathrm{Span}(\{u\})$)

$$v = \hat{v} + w = ku + w \overset{|\cdot u}{\Rightarrow} v \cdot u = (ku + w) \cdot u \overset{\text{Eig. von } \cdot}{=} k(u \cdot u) + w \cdot u \Rightarrow \underbrace{v \cdot u}_{\in \mathbb{R}} = k \underbrace{(u \cdot u)}_{\in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \Rightarrow k = \frac{v \cdot u}{u \cdot u}$$

Zusammenfassung $\quad \hat{v} = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$, $\quad w = v - \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$

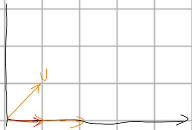
Satz über die Orthogonalzerlegung

- Es sei U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Dann ist jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ in der Form
$$v = \widehat{v} + w$$
darstellbar, wobei $\widehat{v} \in U$ und $w \in U^\perp$ gilt.

- Ist $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ eine Orthogonalbasis von U, dann gilt:
$$\widehat{v} = \mathrm{proj}_U v = \frac{v \bullet u_1}{u_1 \bullet u_1} u_1 + \frac{v \bullet u_2}{u_2 \bullet u_2} u_2 \cdots + \frac{v \bullet u_k}{u_k \bullet u_k} u_k$$
und
$$w = v - \widehat{v}.$$

BSP: $u=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. ges: $\hat{v} = \mathrm{proj}_u v$, $w \in \mathrm{Span}(\{u\})^\perp$ mit $v = \hat{v} + w$

$$\hat{v} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{4}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad w = v - \hat{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$



Beweis (von Satz) $\hat{v} \in U = \mathrm{Span}(\{u_1, \dots, u_k\})$ zu zeigen $w \in U^\perp$ (d.h. $w \cdot u_1 = w \cdot u_2 = \dots = w \cdot u_k = 0$)

Sei $i \in \{1, \dots, k\}$ $w \cdot u_i = (v - \hat{v}) \cdot u_i = v \cdot u_i - \hat{v} \cdot u_i = v \cdot u_i - \frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\underbrace{(u_1 \cdot u_i)}_{0} - \dots - \frac{v \cdot u_i}{u_i\, u_i}(u_i \cdot u_i) - \dots - \frac{v \cdot u_k}{u_k u_k}\underbrace{(u_k \cdot u_i)}_{0}$

$= v \cdot u_i - \frac{v \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}(u_i \cdot u_i) = v \cdot u_i - v \cdot u_i = 0$

Bezeichnung: $\hat{v} = \mathrm{Proj}_U v$

Vereinfachung für Orthonormalbasen

- Ist $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ eine Orthonormalbasis für einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, dann ist

$$(v \bullet u_1)u_1 + (v \bullet u_2)u_2 + \cdots + (v \bullet u_k)u_k$$

  die Projektion von v auf diesen Untervektorraum.

- Ist $U := \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ eine Orthonormalbasis, dann ist

$$UU^T v$$

  die Projektion von v auf den von $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Gram-Schmidt-Verfahren

Es sei U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ und $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ eine Basis von U. Es sei:

$$
\begin{aligned}
u_1 &:= b_1 \\
u_2 &:= b_2 - \frac{b_2 \bullet u_1}{u_1 \bullet u_1}\, u_1 \qquad (u_2 \perp u_1) \\
u_3 &:= b_3 - \frac{b_3 \bullet u_1}{u_1 \bullet u_1}\, u_1 - \frac{b_3 \bullet u_2}{u_2 \bullet u_2}\, u_2 \qquad (u_3 \perp u_1,\ u_3 \perp u_2) \\
&\vdots \\
u_k &:= b_k - \frac{b_k \bullet u_1}{u_1 \bullet u_1}\, u_1 - \frac{b_k \bullet u_2}{u_2 \bullet u_2}\, u_2 - \cdots - \frac{b_k \bullet u_{k-1}}{u_{k-1} \bullet u_{k-1}}\, u_{k-1} \\
&:= b_k - \mathrm{Proj}_{\mathrm{span}(\{u_1, \ldots, u_{k-1}\})}\, b_k
\end{aligned}
$$

Dann ist $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ eine Orthogonalbasis und $\{\frac{u_1}{||u_1||}, \frac{u_2}{||u_2||}, \ldots, \frac{u_k}{||u_k||}\}$ eine Orthonormalbasis von U.

GS-Verfahren zur Konstruktion von Orthogonalbasen

geg. Basis $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ eines k-dim UVR des eukl. $\mathbb{R}$-VR V

ges: Orthogonalbasis $\{u_1, \dots, u_k\}$ dieses UVR.

d.h $u_i \cdot u_j = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ $i \neq j$

$u_1 = b_1$

$\vdots$

$b_2 = \hat{b}_2 + w$

$u_2 = b_2 - \hat{b}_2$

siehe Vorne

BSP. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ keine Orthogonalbasis

Konstruktion Orthogonalbasis:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Satz über die Bestapproximation

- Es sei U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $\widehat{v}$ die Orthogonalprojektion von v auf U.

  Dann gilt
  $$||v - \widehat{v}|| < ||v - u||$$
  für alle $u \in U \setminus \{\widehat{v}\}$.

- $\widehat{v}$ ist also derjenige Vektor aus U, der zu v kleinstmöglichen Abstand hat.

- $\widehat{v}$ wird Bestapproximation von v durch ein Element von U genannt.

Sei V ein eukl. $\mathbb{R}$-VR, $v\in V$ U ein UVR von $\mathbb{R}$, $\hat{v}=\mathrm{Proj}_U v \in U$

Dann gilt: $\|v-\hat{v}\| \le \|v-u\|$ für alle $u\in U$

Sei $Ax=b$ ein LGS mit $L=\emptyset$ (denn $b\notin \underbrace{Col(A)}_{U}$)

$b=\hat{b}+w$ mit $\hat{b}\in U$, $w\in U^{\perp}$ wobei $\hat{b}=\mathrm{Proj}_U b$

Statt $Ax=b$ wird $Ax=\hat{b}$ lösen; Lösung: $\hat{x}$ ($Ax=\hat{b}$ ist lösbar wegen $\hat{b}\in U$)

Die Lösung ist bestmöglich, weil $\hat{b}$ die Projektion von b auf U ist und der Satz über Bestappr. gilt, d.h. $\|b-\hat{b}\|$ minimal ist.

Bsp. $\begin{pmatrix}4&0\\0&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\11\end{pmatrix}}_{b}$ ges. Näherungslösung

zuerst eine Orthogonalbasis von $Col(A)$ ($=U$) berechnen (nach GS)

danach $\mathrm{Proj}_U b=\hat{b}$, dann $Ax=\hat{b}$ lösen. Es geht noch einfacher.

$Ax=b$ $\quad b=\hat{b}+w$ $\quad A=(s_1,\dots,s_n)$

$w \in Col(A)^{\perp}$

$s_i\cdot w=0$ $(i=1,\dots,n)$

$s_i^T\cdot w=0$

Matrizenmulti.

$$\left.\begin{matrix} s_1^T(b-\hat{b})=0\\ \vdots \\ s_n^T(b-\hat{b})=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow A^T(b-\hat{b})=0 \Rightarrow A^Tb-A^T\hat{b}=0$$

$$\Rightarrow A^Tb-A^T(A\hat{x})=0$$

$$\Rightarrow (A^TA)\hat{x}=(A^Tb)$$

zu lösen ist (nur) das Normalgleichungsproblem.

$A^TA=\begin{pmatrix}17&1\\1&5\end{pmatrix}$ $\quad A^Tb=\begin{pmatrix}19\\11\end{pmatrix}$ $\quad A^TA\hat{x}=A^Tb$ $\quad A^TAx=A^Tb$

die Lösung $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Bestapproximation (1)

- Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$

- Finde ein $\widehat{x}$, so dass
$$||b - A\widehat{x}||$$
kleinstmöglich ist.

- Es gilt
$$||b - A\widehat{x}|| \leq ||b - Ax||$$
für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Bestapproximation (2)

- Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$
- Gesucht wird ein Vektor $\widehat{x}$, für den $||b - A\widehat{x}||$ kleinstmöglich ist.
- Zur Lösung berechnet man zunächst $\widehat{b} := \text{proj}_{\text{Col}(A)} b$. (Projektion von b in den Spaltenraum $\text{Col}(A)$ der Matrix A)
- Die Lösungen des linearen Gleichungssystems

  $$A\widehat{x} = \widehat{b}$$

  sind genau die Lösungen des Ausgangsproblems und genau die Lösungen der Normalgleichung

  $$A^T A\widehat{x} = A^T b.$$