

Математический анализ

Лабораторная работа №1

**Инчин Ярослав Владимирович
502463**

**Магденко Дмитрий Тарасович
502748**

J3115

Дата: 3 декабря 2025 г.

Содержание

1	Easy level	3
2	Normal level	6
2.1	Задача о количестве неподвижных точек	7
2.2	Задача о последовательности	7
2.3	Задача о сужении	9
2.4	Больше отображений	10
3	Hard level	13
3.1	Задача 1.1	13
3.2	Задача 1.2	14
3.3	Задача 1.3	15

1 Easy level

Easy:

Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in [0; 1]$

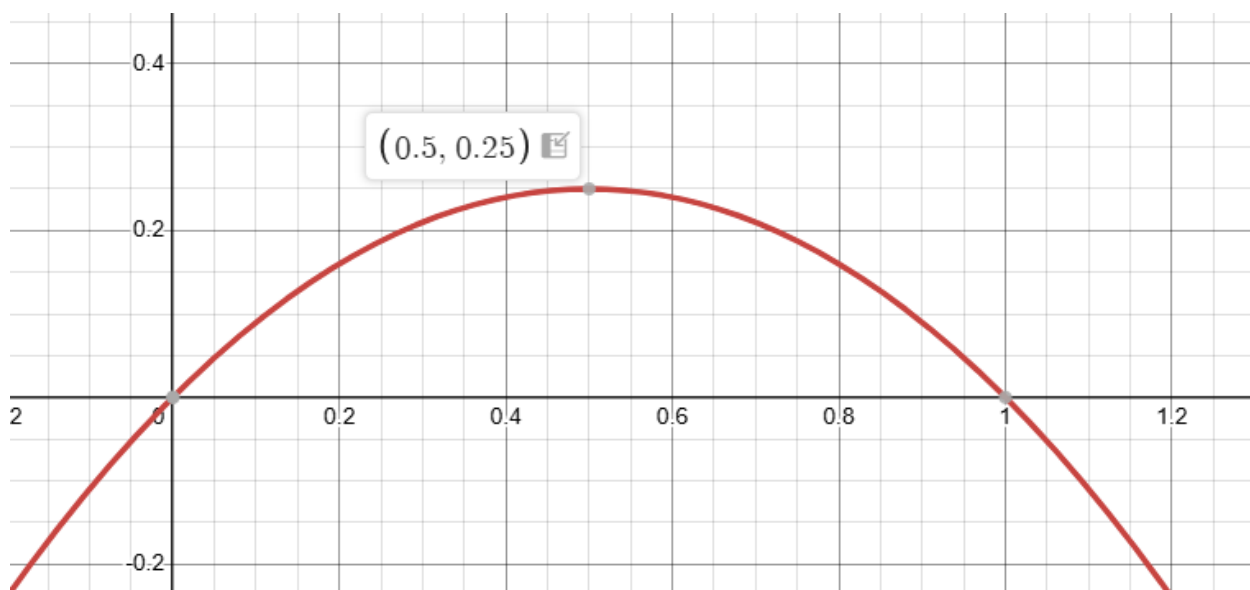
$$0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1$$

Заметим, что наибольшие значения x_{n+1} достигаются при $r = 1$;
Выражение принимает вид $x_{n+1} = x_n(1-x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - x_n^2$

Найдем такие $x \in [0, 1]$, образ которых больше них самих

$$x - x^2 > x$$

$$x \in \emptyset$$

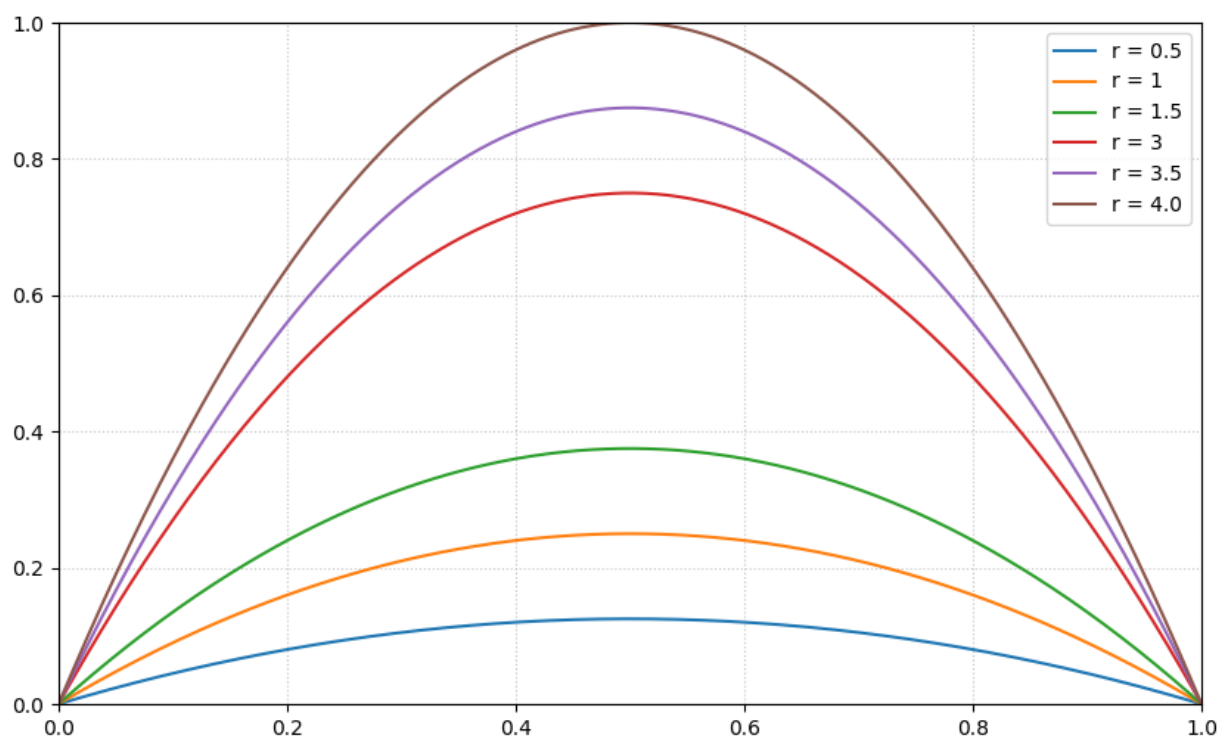


Образ никакого x не может превышать 0.25.

Easy:

Сделайте вывод: как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_n от x_{n-1} ? Постройте эту функцию для нескольких различных значений r .

Заданный график зависимости - есть само отображение $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$



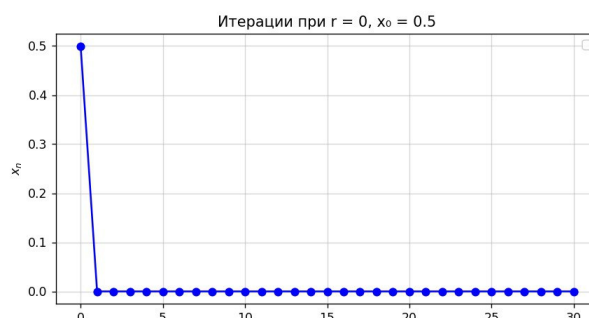
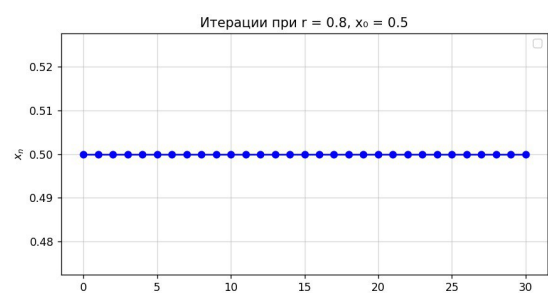
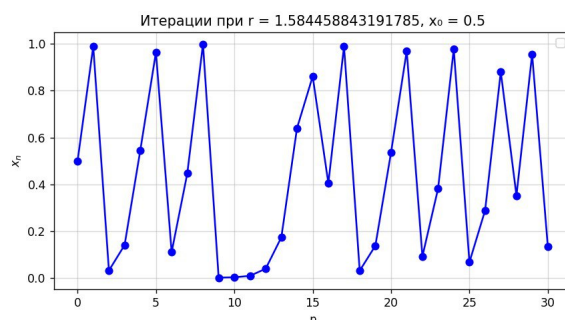
Параметр r влияет лишь на кривизну этой параболы

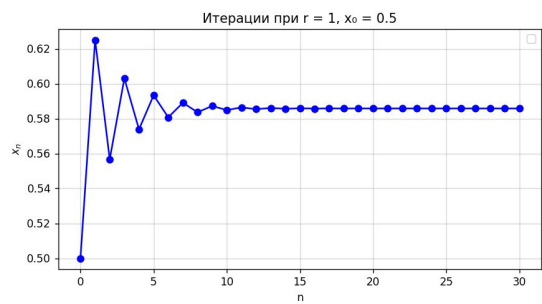
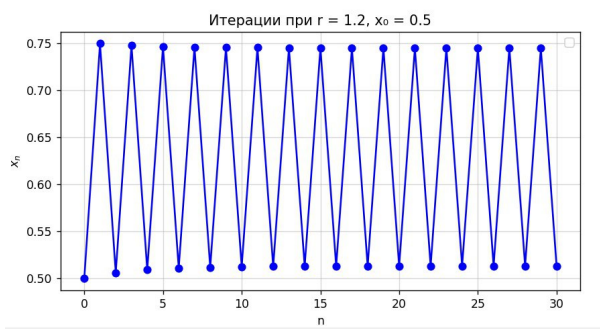
Easy:

Для заданной вариантом функции $g(x_n)$:

1. Постройте графики зависимости x_n от x_{n-1} для нескольких различных значений r .
2. Сделайте вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из вашего варианта. Предположите: чем могут быть вызваны сходства/различия?

Отображение объединяет поведение при различных значениях r . При одних они сходятся к 0, при других принимают последовательно два разных значения (мигалка), при других сходятся к определённому положительному числу. Также при некоторых r содержат в себе больше 2 подпоследовательностей, которые сходятся к определённым различным значениям. Отличаются отображения значениями переменной r , при которых они претерпевают свою состояния. Также в отличие от точечного отображения, логистическое при определённых значениях (3.6 - 3.9999) ведёт себя непредсказуемо, в то время как точечное всегда имеет точную динамику изменений. Отличия могут быть связаны тем, что логистическое отображение является квадратным, а точечное - кубическим, из-за чего на данных значениях r точечное не успело пройти стадии логистического.





2 Normal level

2.1 Задача о количестве неподвижных точек

Normal:

1. Найдите все неподвижные точки логистического отображения.
2. При каких r отображение имеет одну неподвижную точку? Несколько?
3. Какое максимальное количество неподвижных точек может иметь логистическое отображение? Почему?

$$*x = *xr(1 - *x)$$

Мы имеем квадратное уравнение, которое может иметь не более 2 решений, одно из которых 0, другое: $x = \frac{r-1}{r}$

Так как $0 \leq x \leq 1$, то второй корень существует и не совпадает с первым при $r > 1$

1. $*x = 0; \frac{r-1}{r}$

2. 1 точка: $0 \Leftarrow r \Leftarrow 1$, 2: $1 < r \leq 4$

3. Не более 2, тк корней квадратного уравнения не больше 2.

2.2 Задача о последовательности

Монотонность.

Рассмотрим разность $x_n - x_{n+1} = x_n - x_nr(1 - x_n) = x_n(1 - r(1 - x_n))$

Правая часть неотрицательна, значит, $x_n \geq x_{n+1}$.

Предел.

Normal:

Докажите, что при $x_0 \in (0; 1)$ и $r \in (0; 1]$ последовательность $\{x_n\}$, заданная логистическим отображением, монотонно убывает. Существует ли предел у данной последовательности при $r \in (0; 1]$? Докажите. Покажите графически.

Последовательность монотонно убывает и ограничена снизу нулем, значит, по теореме Вейерштрасса, она имеет конечный предел, равный инфимуму последовательности.

Предположим, $\inf x_n = 0 = \lim x_n$

$$x_{n+1} = x_n r (1 - x_n)$$

Перейдя к пределу: $\lim x_{n+1} = \lim x_n$

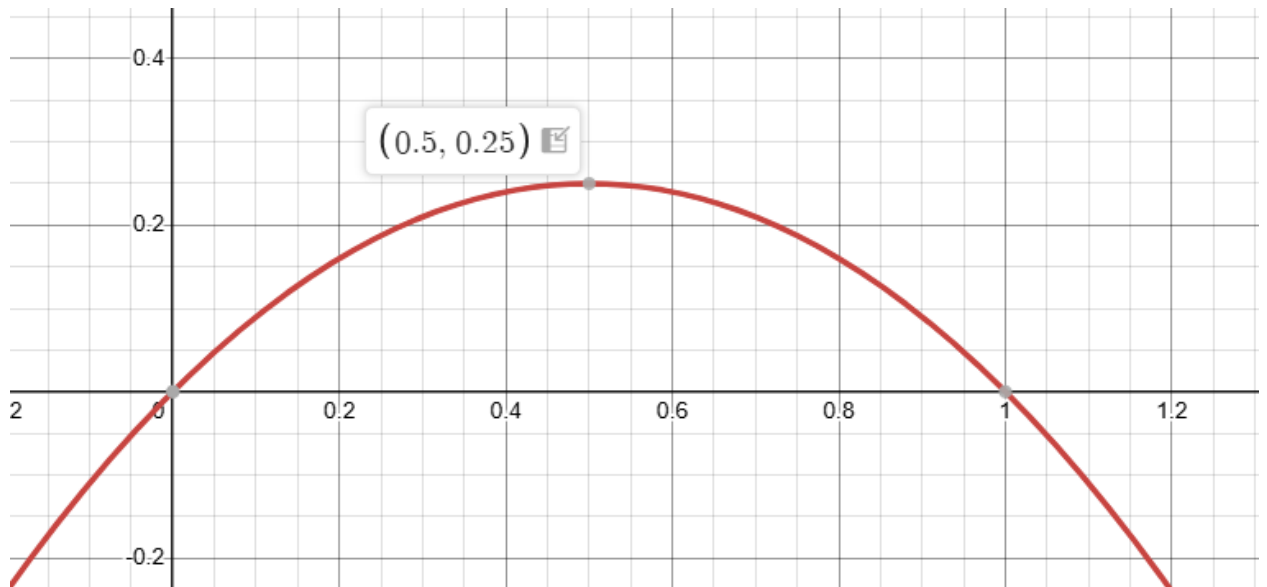
$$\lim x_n = r(\lim x_n)(1 - \lim x_n)$$

$$(\lim x_n)(r(1 - \lim x_n) - 1) = 0$$

$$\lim x_n = 0$$

$$\lim x_n = 1 - \frac{1}{r} - \text{при } r \in (0, 1] \text{ предел отрицателен, что невозможно} \\ \Rightarrow \lim x_n = 0$$

При $r = 1$ достигаются наибольшие значения



По графику очевидно, что образ любого $x_n < x_n$.

2.3 Задача о сужении

Normal:

Пусть $r \in (2; 3)$, $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$. Что вы можете сказать о монотонности подпоследовательностей^a $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$? Докажите. Проверьте графически.

^aАналогично, здесь идет речь о логистическом отображении.

Итак, как было сказано выше, при $r \in (2; 3)$ отображение имеет две неподвижные точки, однако 0 мы рассматривать не будем, т.к, если $x_{2n+1} < 0$, то множество x_{2n+1} пусто.

$$x^* = \frac{r-1}{r} > 0.5$$

$$l(x) = f(f(x)) - x$$

Пусть $\exists a \in (x^*; 1]$

$$l(a) > 0; l(1) < 0$$

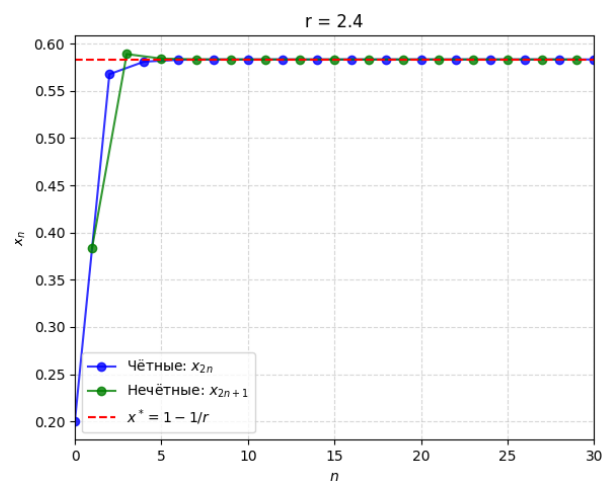
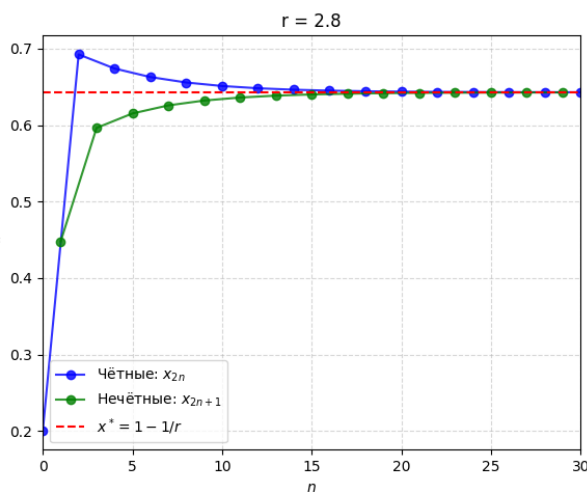
Так как f - непрерывная функция, то и l непрерывна (как композиция непрерывных функций)

$l \in C[a, 1] \Rightarrow$ по теореме Больцано-Коши l принимает все промежуточные значения, в том числе и 0 $\Rightarrow \exists$ неподвижная точка на $(a, 1)$, где $a > x^*$ - противоречие $\Rightarrow l((x^*, 1]) < 0 \Rightarrow$ последовательность x_{2n} монотонно убывает.

Заметим, что $l(0, 25)$ при $r > 2$ положительно.

Пусть $\exists a \in (0, x^*) \setminus \{0.25\} | l(a) < 0$

Аналогично по Больцано-Коши l достигает 0 $\Rightarrow \exists x^*$ неподвижная точка на $(0, x^*)$ - противоречие $\Rightarrow x_{2n+1}$ монотонно возрастает



2.4 Больше отображений

Normal:

Для отображения $g(x_n)$, заданного вариантом:

1. Аналитически найдите неподвижную точку.
2. Найдите или оцените диапазон параметра r , при котором последовательность монотонно сходится к нулю.
3. Постройте графики зависимости x_n от n для нескольких различных значений параметра r .

Нашим вариантам соответствует отображение

$$g(x_{n+1}) = r * x_n(1 - x_n)(3 - x_n)$$

$$r \in [0; \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}]$$

Можно оценить r сверху:

$$r < 1.6$$

$$1. \ x = rx(1 - x)(3 - x)$$

$$x(r(1 - x)(3 - x) - 1) = 0 \Rightarrow x^* = 0$$

$$r(1 - x)(3 - x) - 1 = 0$$

$$rx^2 - 4rx + 3r - 1 = 0$$

$$x = \frac{4r \pm \sqrt{4r^2 + 4r}}{2r}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{r}}$$

$x = 2 + \sqrt{1 + \frac{1}{r}}$ строго больше 1, значение вне области определения отображения.

$$2 - \sqrt{1 + \frac{1}{r}} \geq 0$$

$$r \geq \frac{1}{3}$$

$$2 - \sqrt{1 + \frac{1}{r}} \leq 1$$

$$r \in R$$

$$x^* = 0$$

$$x^* = 2 - \sqrt{1 + \frac{1}{r}} \mid r \geq \frac{1}{3}$$

2. Рассмотрим разность

$$x_n - x_{n+1} = x_n - rx_n(1 - x_n)(3 - x_n)$$

Найдем такие r , когда эта разность положительна.

$$x_n(1 - r(1 - x_n)(3 - x_n)) \geq 0$$

$$x_n \geq 0$$

$$(1 - r(1 - x_n)(3 - x_n)) \geq 0$$

$$r(1 - x_n)(3 - x_n) < 1$$

$x_n^2 - 4x_n + 3$ на промежутке $[0;1]$ строго убывает, потому достигает в точке 0 максимального значения, равного 3

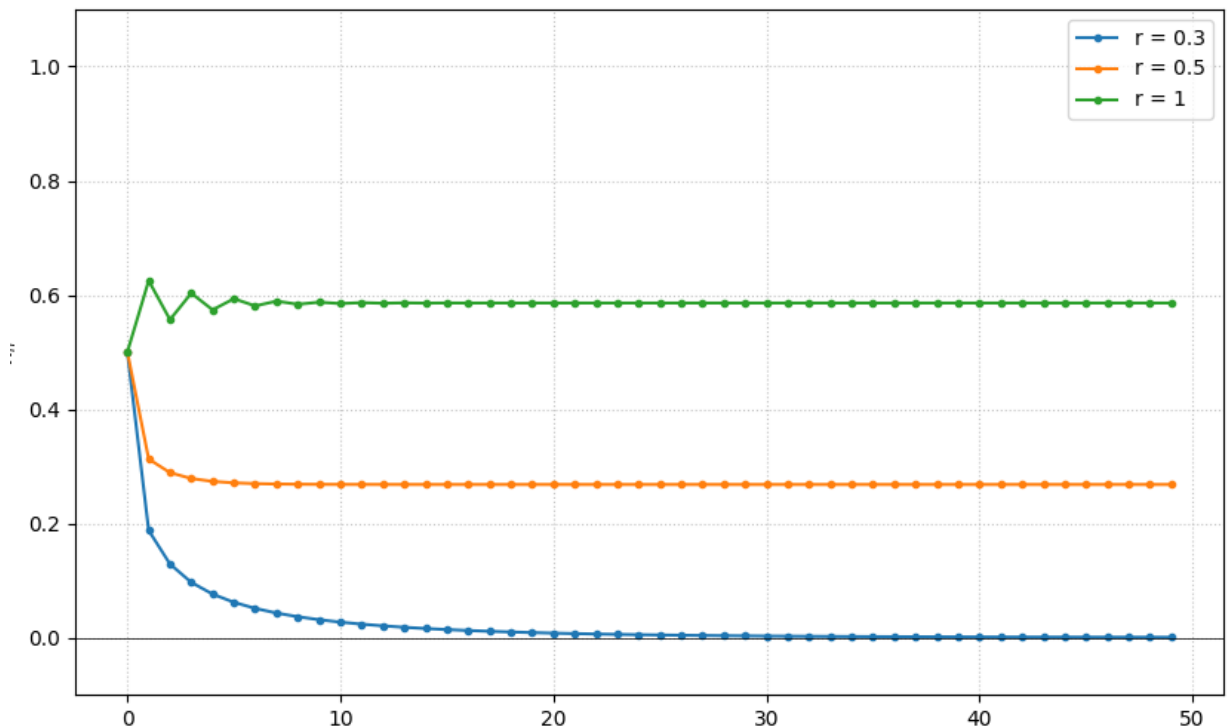
$$r(1 - x_n)(3 - x_n) \leq 3r$$

$$3r < 1$$

$$r < \frac{1}{3}$$

При $r < \frac{1}{3}$ значения функции монотонно убывают и стягиваются к своей неподвижной точке 0, т.е монотонно сходятся к 0.

3.



3 Hard level

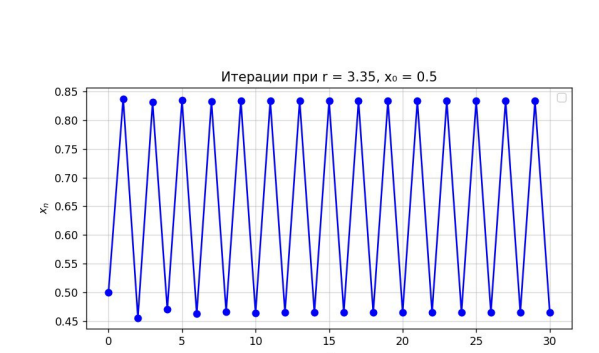
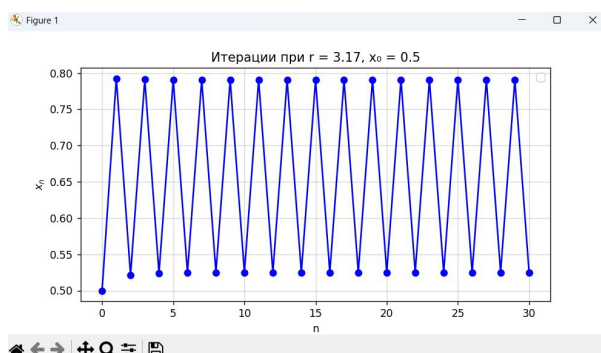
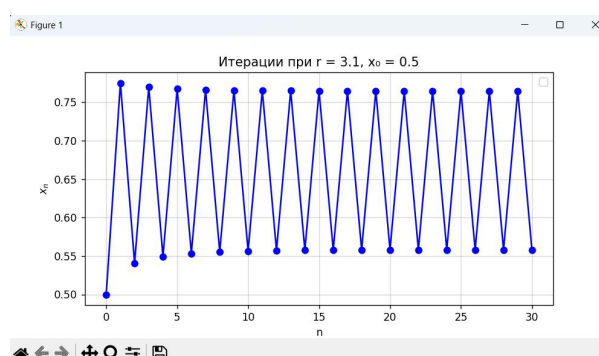
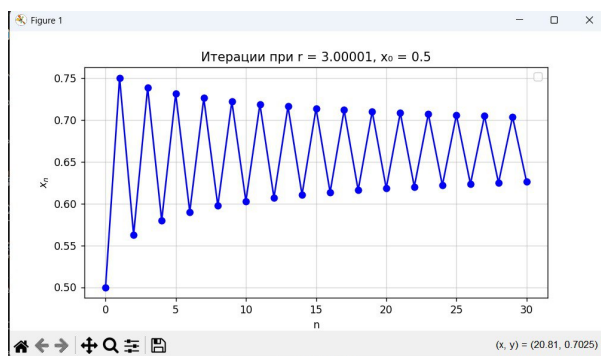
3.1 Задача 1.1

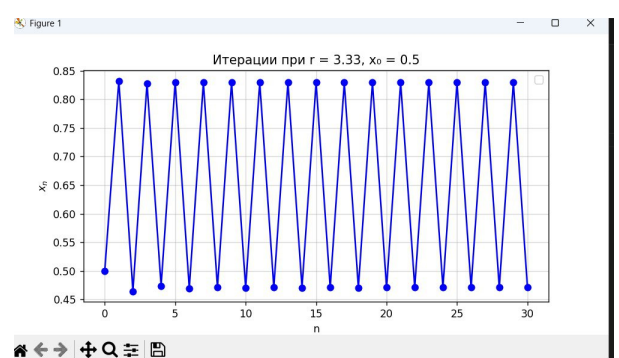
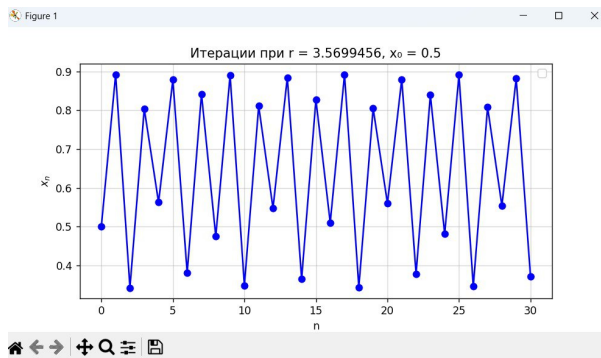
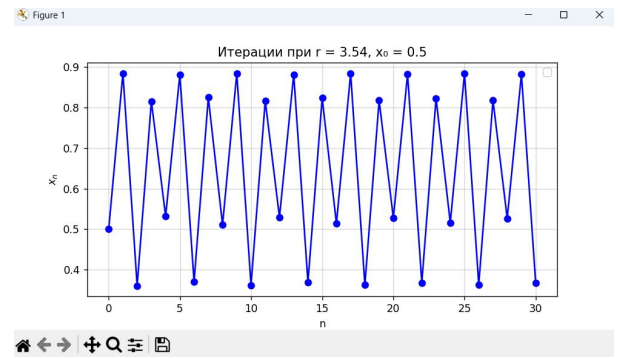
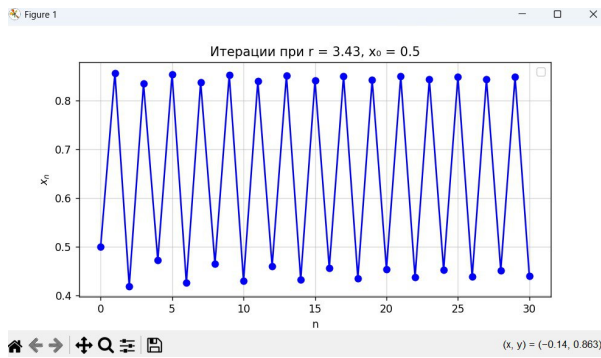
Hard:

1. Положим $r_\infty \approx 3.5699456 \dots$. Как изменяется длина цикла при $r \in (3; r_\infty)$?
2. Для $r \in (3; r_\infty)$ экспериментально установите, какие ограничения^a действуют на m ?

^aЗдесь имеется в виду не ограниченность сверху или снизу, а то, какую закономерность можно выделить, исследовав изменение длины цикла m .

При r , близких к 3, логистическое отображение сходится к некоторому числу, но при увеличении значения отображение выравнивается к устойчивому двойному циклу, который держится до 3.33. Далее начинается плавное расхождение на циклы длины 4 и к значению $r = 3.43$ можно выделить устойчивые циклы длины 4. Затем при $r = 3.54$ возникают циклы длины 8, а при приближении r к верхнему значению интервала возникают циклы длины 16.



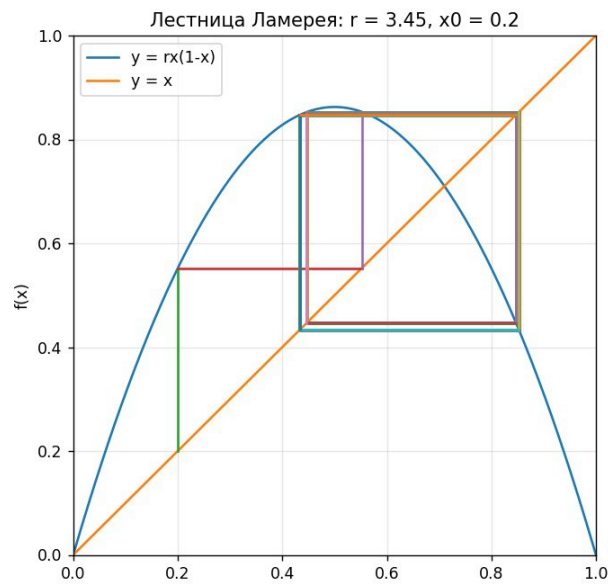
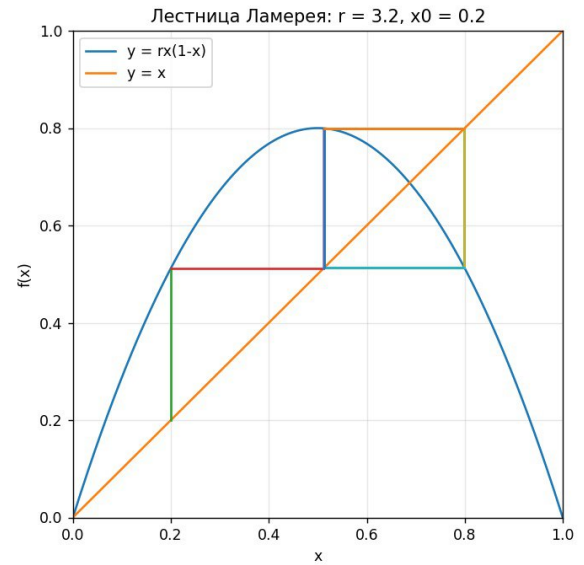
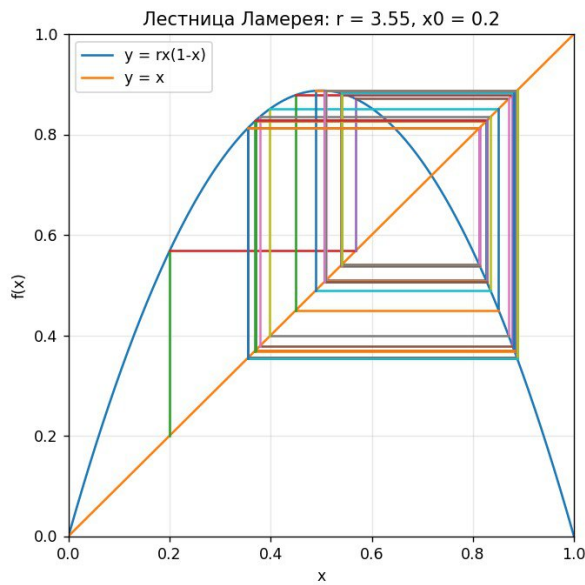


3.2 Задача 1.2

Hard:

1. Напишите функцию, которая для заданного параметра r строит лестницу Ламерея.
2. Сделайте выводы: как выглядят циклы различных порядков на графике?

С помощью лестницы Ламерея в нашей реализации можно заметить большое кол-во прямоугольников. Некоторые из них "нарисованы" тонкой линией (что означает, что по ним проходились 1 раз, поэтому это не часть цикла). А некоторые нарисованы жирной линией из-за наложения линий разных цветов. Именно кол-во прямоугольников с жирной границей и наложением большого числа цветов показывает циклы. Если всего прямоугольников с жирной линией n штук, то цикл длины $2n$.



3.3 Задча 1.3

Hard:

Исследуйте: как изменяется длина цикла заданного варианта отображения $g(x_n)$ с изменением параметра r ? Постройте соответствующие графики. Есть ли сходства с логистическим отображением?

При увеличении параметра r к значению r_{∞} , кол-во циклов увеличивается. На маленьких значениях можно проследить, как появляется 2-цикл, затем 4-цикл. Кол-во циклов увеличивается в два раза с переходом через определенное значение r . Сходство с логистическим отображением заключается в том, что в обоих отображениях при данных значениях r циклы могут быть только длины 2^k

