Математический анализ

Лабораторная работа №1

Инчин Ярослав Владимирович
502463

Магденко Дмитрий Тарасович
502748

J3115

Дата: 14 декабря 2025 г.

Содержание

1 Easy level

Easy:
Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in [0;1]$

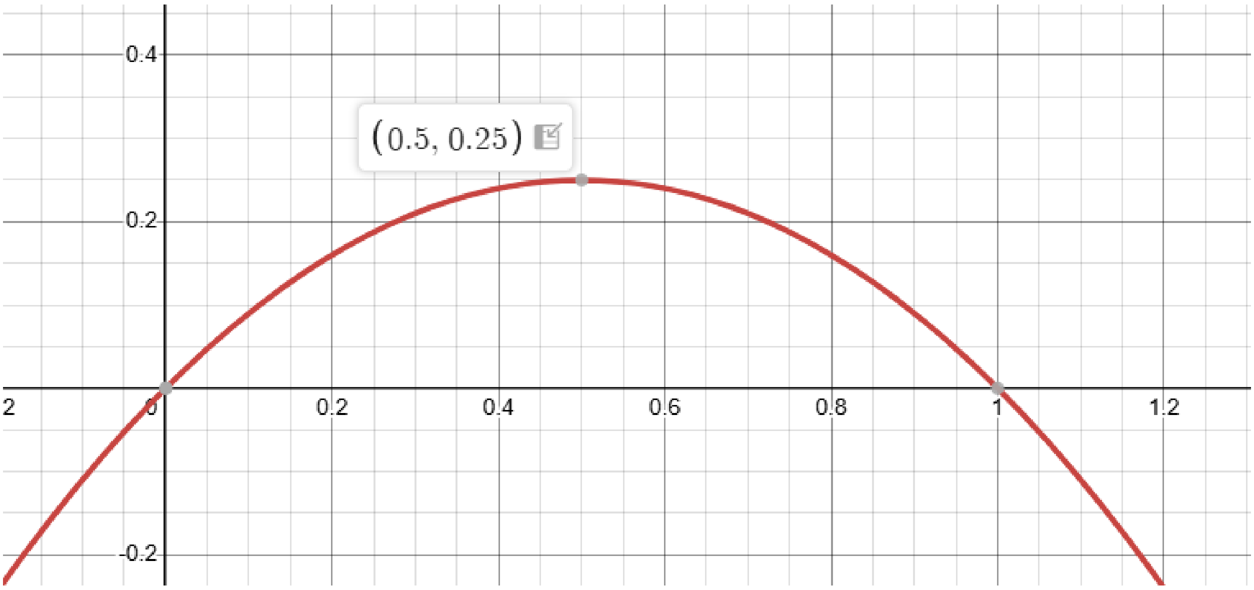
$$0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1$$

Заметим, что наибольшие значения x_{n+1} достигаются при r $= 1$; Выражение принимает вид $x_{n+1} = x_n(1\text{-}x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n$ - x_n^2

Найдем такие $x \in [0, 1]$, образ которых больше них самих

$x - x^2 > x$

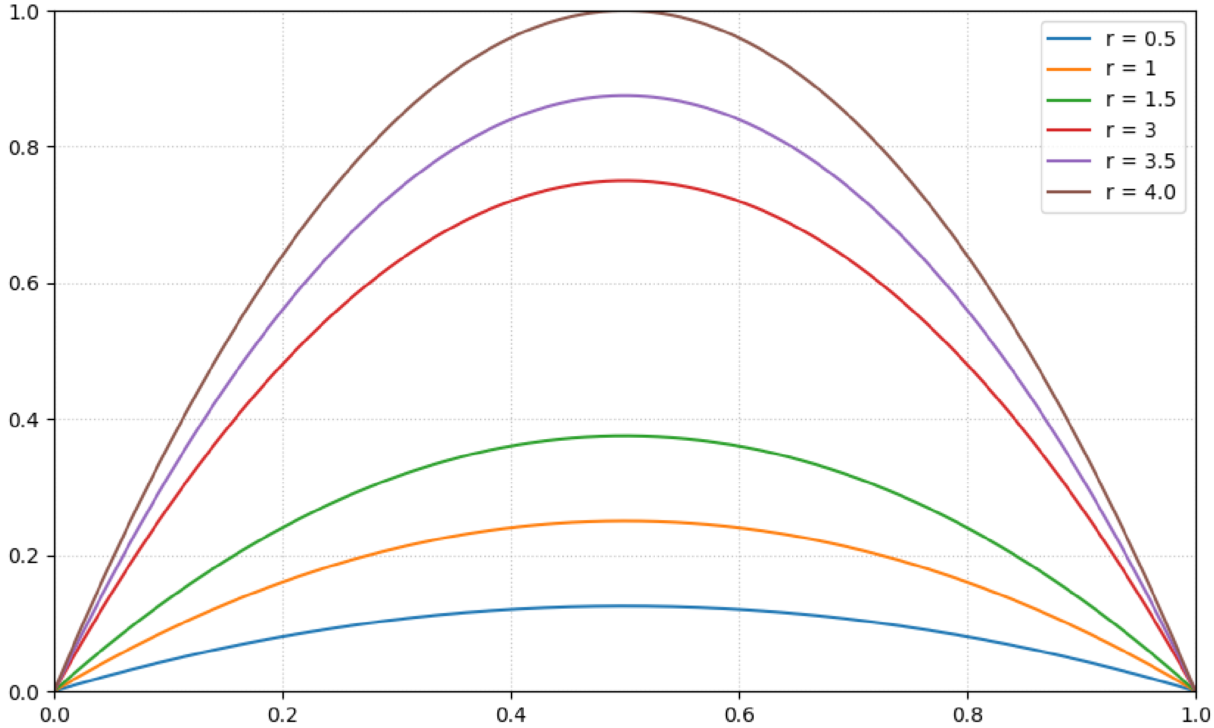
$x \in \emptyset$



Образ никакого x не может превышать 0.25.

Easy:
Сделайте вывод: как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_n от x_{n-1}? Постройте эту функцию для нескольких различных значений r.

Заданный график зависимости - есть само отображение $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

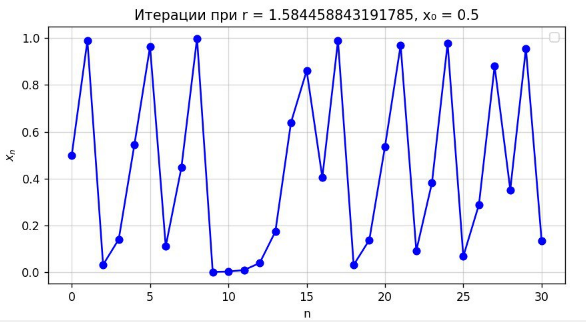


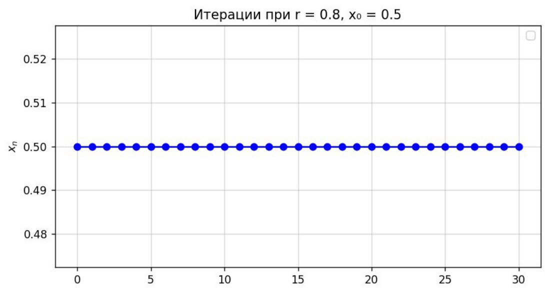
Параметр r влияет лишь на кривизну этой параболы

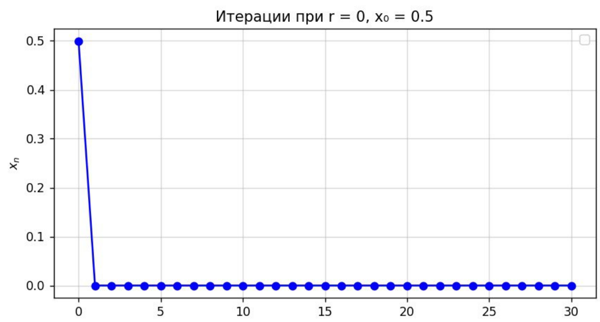
Easy:
Для заданной вариантом функции $g(x_n)$:

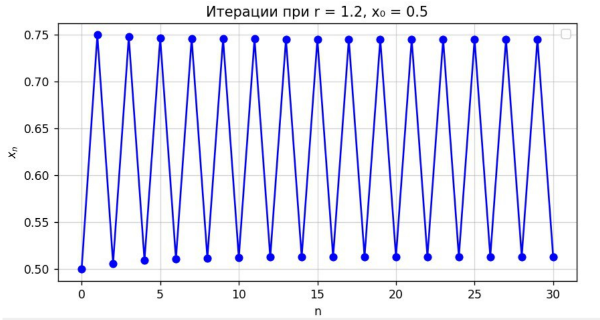
1. Постройте графики зависимости x_n от x_{n-1} для нескольких различных значений r.
2. Сделайте вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из вашего варианта. Предположите: чем могут быть вызваны сходства/различия?

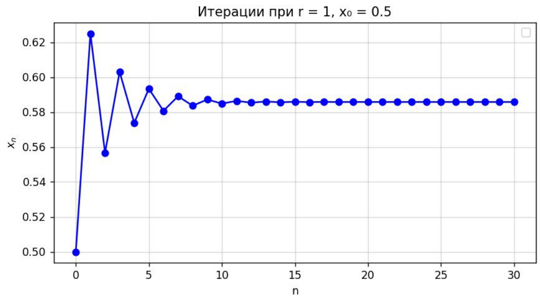
Отображение объединяет поведение при различных значениях r. При одних они сходятся к 0, при других принимают последовательно два разных значения (мигалка), при других сходятся к определённому положительному числу. Также при некоторых r содержать в себе больше 2 подпоследовательностей, которые сходятся к определённым различным значениям. Отличаются отображения значениями переменной r, при которых они претерпевают свою состояния. Также в отличие от точечного отображения, логистическое при определённых значениях (3.6 - 3.9999) ведёт себя непредсказуемо, в то время как точечное всегда имеет точную динамику изменений. Отличия могут быть связаны тем, что логистическое отображение является квадратным, а точечное - кубическим, из-за чего на данных значениях r точечное не успело пройти стадии логистического.











2 Normal level

2.1 Задача о количестве неподвижный точек

Normal:

1. Найдите все неподвижные точки логистического отображения.
2. При каких r отображение имеет одну неподвижную точку? Несколько?
3. Какое максимальное количество неподвижных точек может иметь логистическое отображение? Почему?

$$*x = *xr(1 - *x)$$

Мы имеем квадратное уравнение, которое может иметь не более 2 решений, одно из которых 0, другое: $x = \dfrac{r-1}{r}$

Так как $0 \le x \le 1$, то второй корень существует и не совпадает с первым при r > 1

1. $*x = 0; \dfrac{r-1}{r}$

2. 1 точка: $0 \Leftarrow r \Leftarrow 1$, 2: $1 < r \le 4$

3. Не более 2, тк корней квадратного уравнения не больше 2.

2.2 Задача о последовательности

Монотонность.

Рассмотрим разность $x_n - x_{n+1} = x_n - x_n r(1 - x_n) = x_n(1 - r(1 - x_n))$

Правая часть неотрицательна, значит, $x_n \ge x_{n+1}$.

Предел.

Normal:
Докажите, что при $x_0 \in (0;1)$ и $r \in (0;1]$ последовательность $\{x_n\}$, заданная логистическим отображением, монотонно убывает. Существует ли предел у данной последовательности при $r \in (0;1]$? Докажите. Покажите графически.

Последовательность монотонно убывает и ограничена снизу нулем, значит, по теореме Вейерштрасса, она имеет конечный придел, равный инфимуму последовательности.

Предположим, $inf x_n = 0 = \lim x_n$

$x_{n+1} = x_n r(1 - x_n)$

Перейдя к пределу: $\lim x_{n+1} = \lim x_n$

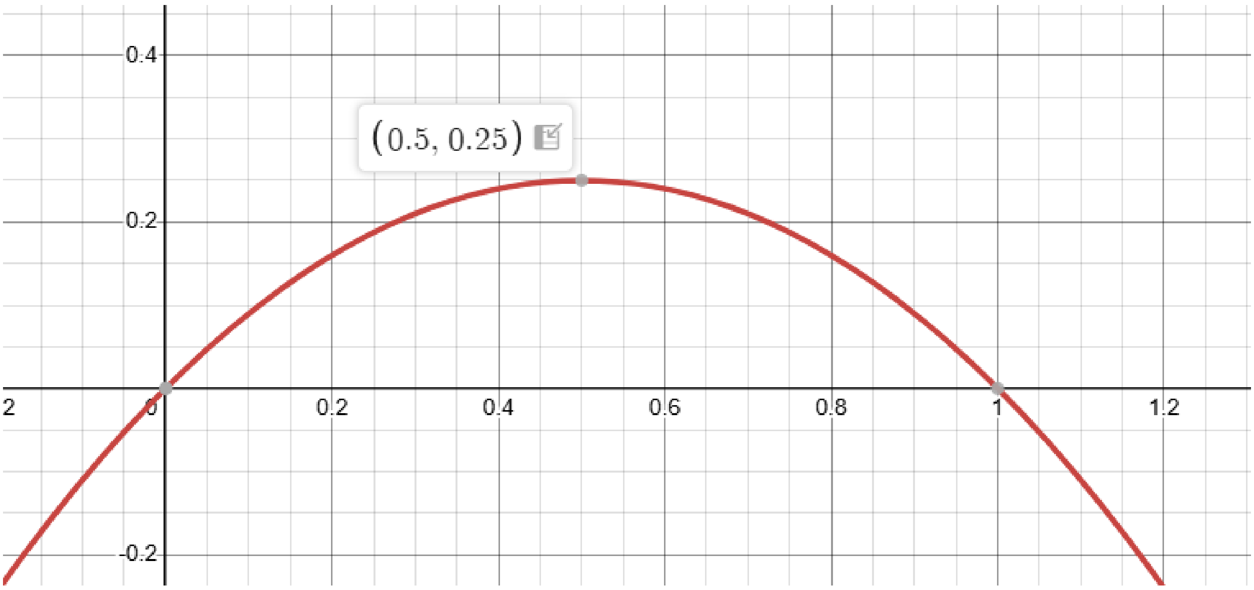
$\lim x_n = r(lim x_n)(1 - \lim x_n)$

$(lim x_n)(r(1 - \lim x_n) - 1) = 0$

$\lim x_n = 0$

$\lim x_n = 1 - \frac{1}{r}$ - при r $\in$(0, 1] предел отрицателен, что невозможно $\Rightarrow \lim x_n = 0$

При r = 1 достигаются наибольшие значения



По графику очевидно, что образ любого $x_n < x_n$.

2.3 Задача о сужении

Normal:
Пусть $r \in (2; 3)$, $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$. Что вы можете сказать о монотонности подпоследовательностей[a] $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$? Докажите. Проверьте графически.

[a] Аналогично, здесь идет речь о логистическом отображении.

Итак, как было сказано выше, при $r \in (2; 3)$ отображение имеет две неподвижные точки, однако 0 мы рассматривать не будем, т.к, если $x_{2n+1} < 0$, то множество x_{2n+1} пусто.

$$x* = \frac{r-1}{r} > 0.5$$

$$l(x) = f(f(x)) - x$$

Пусть $\exists a \in (x*; 1]$

$$l(a) > 0; l(1) < 0$$

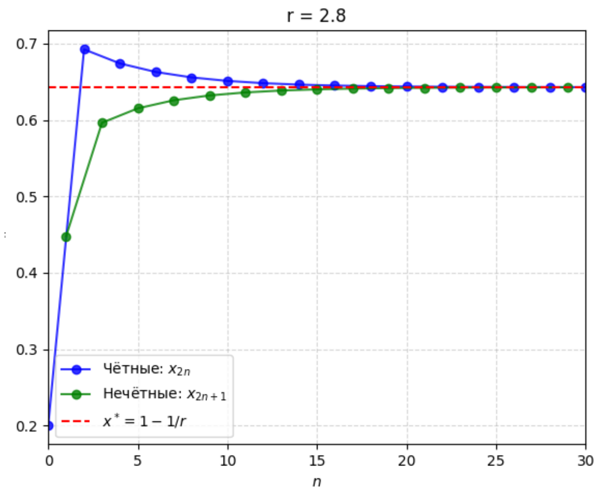
Так как f - непрерывная функция, то и l непрерывна (как композиция непрерывных функций)

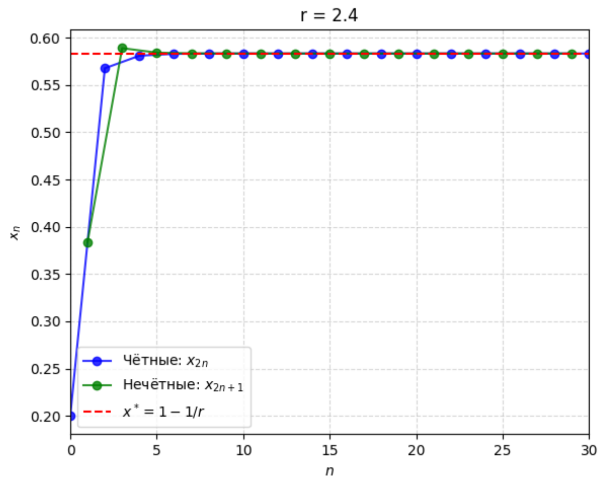
$l \in C[a, 1] \Rightarrow$ по теореме Больцано-Коши l принимает все промежуточные значения, в том числе и $0 \Rightarrow \exists$ неподвижная точка на (a, 1), где $a > x^*$ - противоречие $\Rightarrow l((x^*, 1]) < 0 \Rightarrow$ последовательность x_{2n} монотонно убывает.

Заметим, что $l(0, 25)$ при $r > 2$ положительно.

Пусть $\exists a \in (0, x^*) \backslash \{0.25\} | l(a) < 0$

Аналогично по Больцано-Коши l достигает $0 \Rightarrow \exists x^*$ неподвижная точка на $(0, x^{*)}$ - противоречие $\Rightarrow x_{2n+1}$ монотонно возрастает





2.4 Больше отображений

Normal:
Для отображения $g(x_n)$, заданного вариантом:

1. Аналитически найдите неподвижную точку.
2. Найдите или оцените диапазон параметра r, при котором последовательность монотонно сходится к нулю.
3. Постройте графики зависимости x_n от n для нескольких различных значений параметра r.

Нашим вариантам соответсвует отображение

$g(x_{n+1}) = r * x_n(1 - x_n)(3 - x_n)$

$r \in [0; \frac{27}{2(7\sqrt{7} - 10)}]$

Можно оценить r сверху:

$r < 1.6$

1. $x = rx(1 - x)(3 - x)$

$x(r(1 - x)(3 - x) - 1) = 0 \Rightarrow x^* = 0$

$r(1 - x)(3 - x) - 1 = 0$

$rx^2 - 4rx + 3r - 1 = 0$

$x = \frac{4r \pm \sqrt{4r^2 + 4r}}{2r}$

$x = 2 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{r}}$

$x = 2 + \sqrt{1 + \frac{1}{r}}$ строго больше 1, значение вне области определения отображения.

$2 - \sqrt{1 + \frac{1}{r}} \geq 0$

$r \geq \frac{1}{3}$

$2 - \sqrt{1 + \frac{1}{r}} \leq 1$

$r \in R$

$x^* = 0$

$x^* = 2 - \sqrt{1 + \frac{1}{r}} \mid r \geq \frac{1}{3}$

2. Рассмотрим разность

$x_n - x_{n+1} = x_n - rx_n(1 - x_n)(3 - x_n)$

Найдем такие r, когда эта разность не отрицательна.

$x_n(1 - r(1 - x_n)(3 - x_n) \geq 0$

$x_n \geq 0$

$(1 - r(1 - x_n)(3 - x_n) \geq 0$

$r(1 - x_n)(3 - x_n) \leq 1$

$x_n^2 - 4x_n + 3$ на промежутке [0;1] строго убывает, потому достигает в точке 0 максимального значения, равного 3

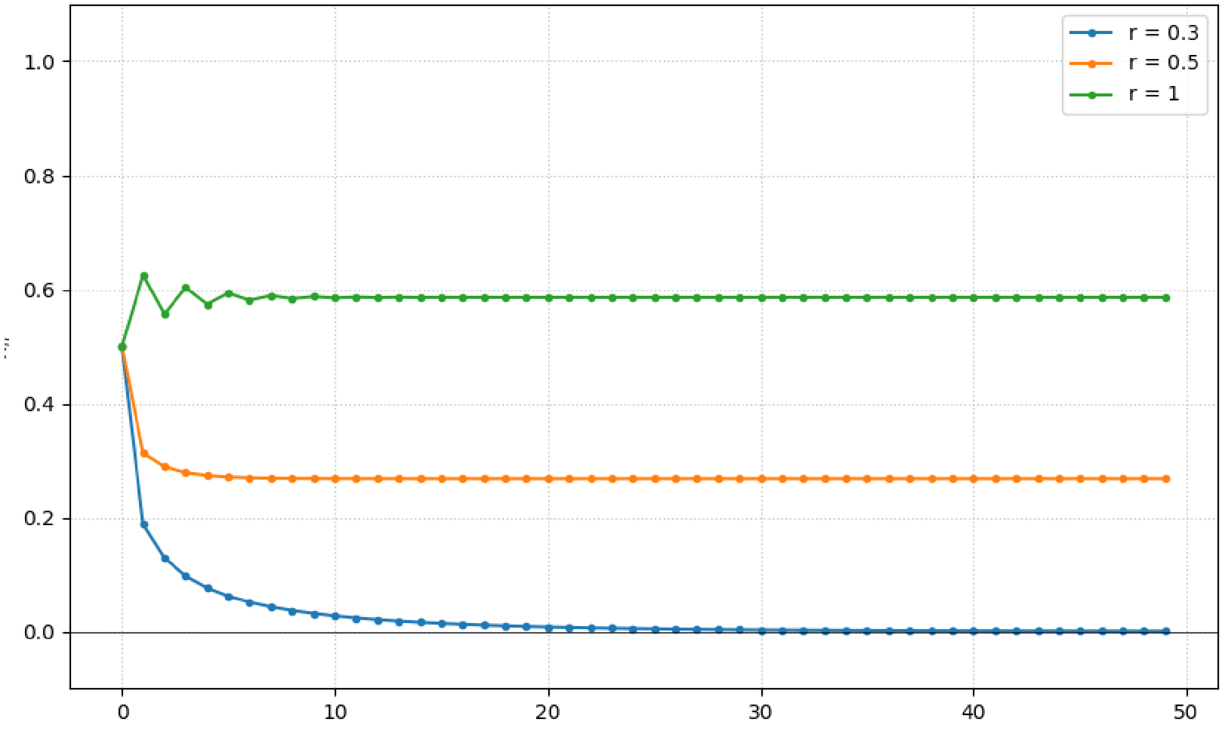
$r(1 - x_n)(3 - x_n) \leq 3r$

$3r \leq 1$

$r \leq \dfrac{1}{3}$

При $r \leq \dfrac{1}{3}$ значения функции монотонно убывают и стягиваются к своей неподвижной точке 0, т.е монотонно сходятся к 0.

3.



3 Hard level

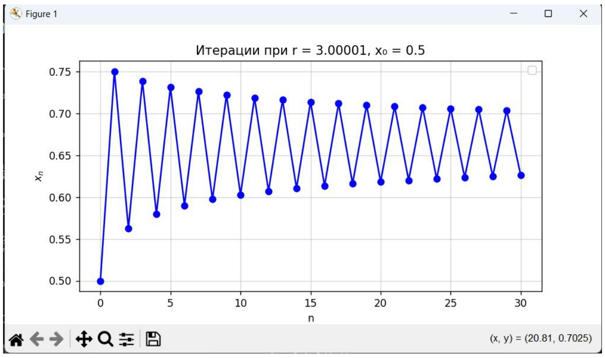
3.1 Задача 1.1

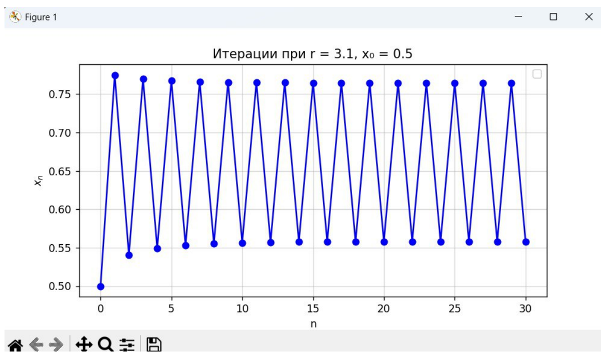
Hard:

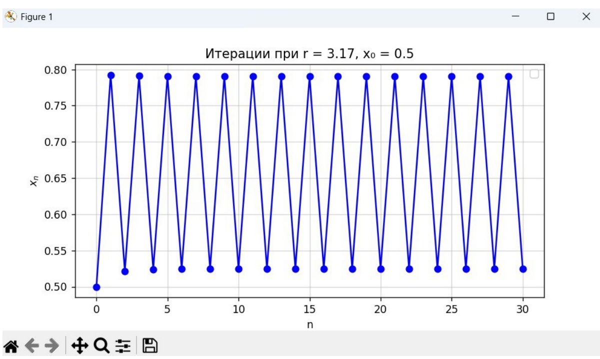
1. Положим $r_\infty \approx 3.5699456\ldots$ Как изменяется длина цикла при $r \in (3; r_\infty)$?
2. Для $r \in (3; r_\infty)$ экспериментально установите, какие ограничения[a] действуют на m?

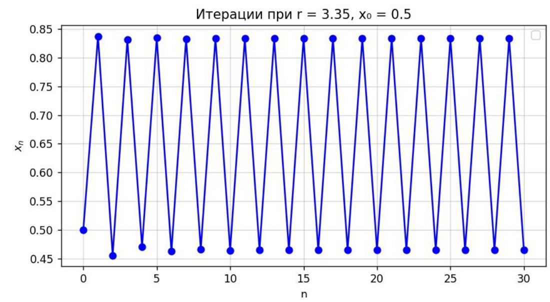
[a]Здесь имеется в виду не ограниченность сверху или снизу, а то, какую закономерность можно выделить, исследовав изменение длины цикла m.

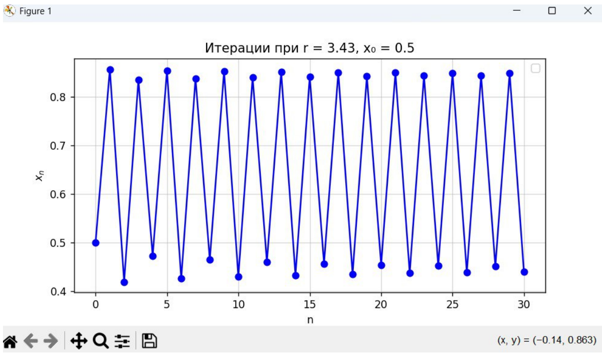
При r, близких к 3, логистическое отображение сходится к некоторому числу, но при увеличении значения отображение выравнивается к усточивому двойному циклу, который держится до 3.33. Далее начинается плавное расхождение на циклы длины 4 и к значению r - 3.43 можно выделить устойчивые циклы длины 4. Затем при r = 3.54 возникают циклы длины 8, а при приближении r к верхнему значению интервала возникают циклы длины 16.

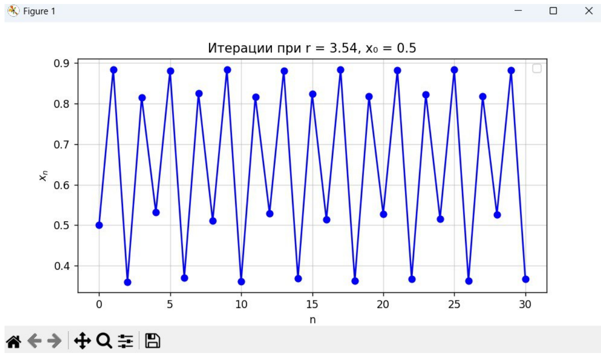


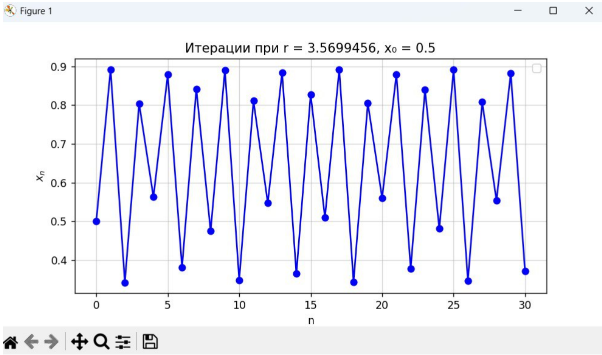


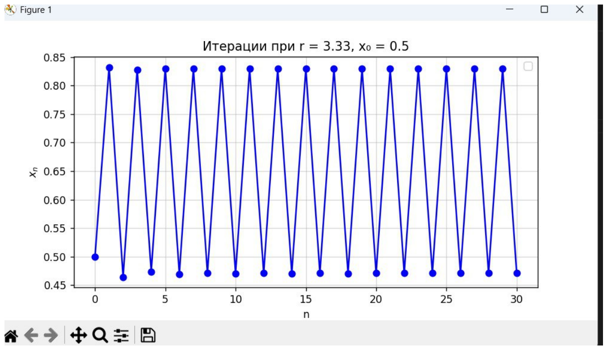










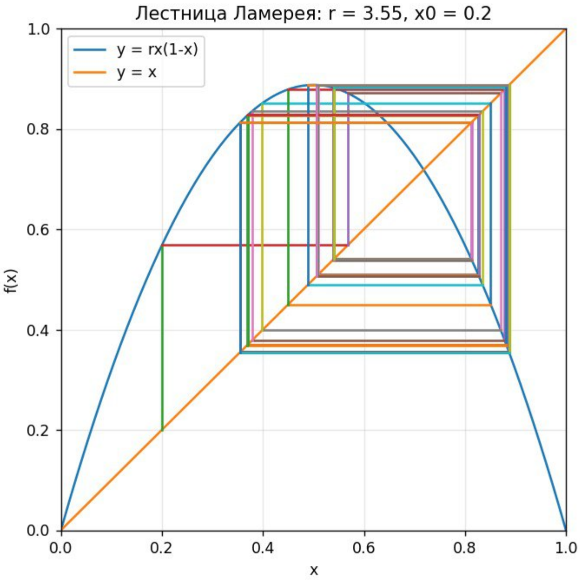


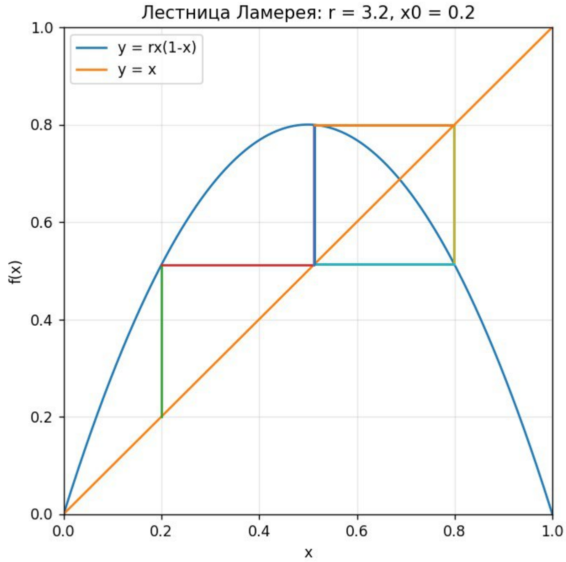
3.2 Задача 1.2

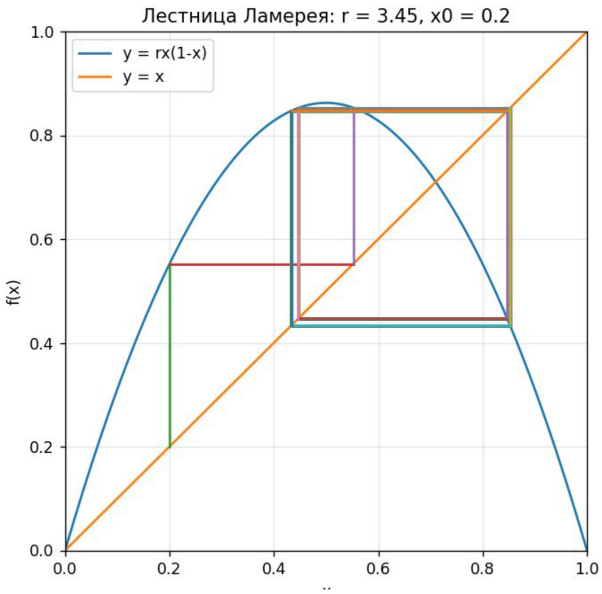
Hard:

1. Напишите функцию, которая для заданного параметра r строит лестницу Ламерея.
2. Сделайте выводы: как выглядят циклы различных порядков на графике?

С помощью лестницы Ламерея в нашей реализации можно заметить большое кол-во прямоугольников. Некоторые из них "нарисованы"тонкой линией (что означает, что по ним проходились 1 раз, поэтому это не часть цикла). А некоторые нарисованы жирной линией из-за наслоения линий разных цветов. Именно кол-во прямоугольников с жирной границей и наслоением большого числа цветов показывает циклы. Если всего прямоугольников с жирной линией n штук, то цикл длины 2n.



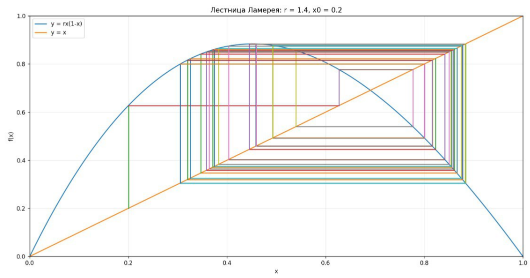


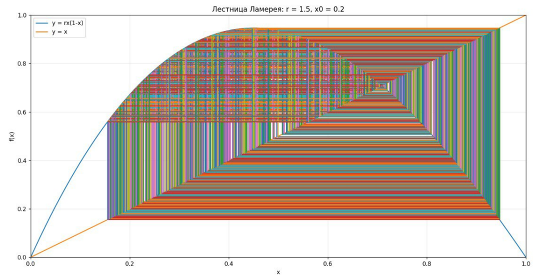


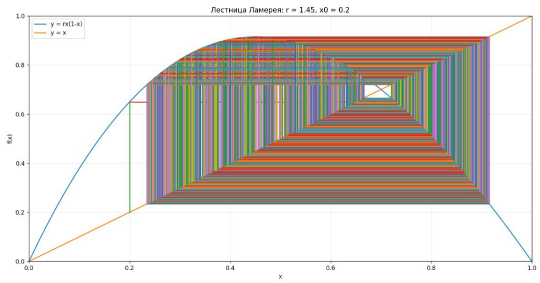
3.3 Задча 1.3

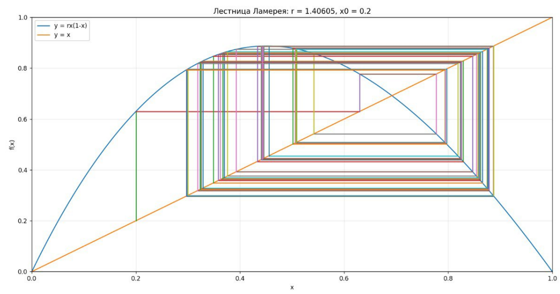
Hard:
Исследуйте: как изменяется длина цикла заданного вариантом отображения $g(x_n)$ с изменением параметра r? Постройте соответствующие графики. Есть ли сходства с логистическим отображением?

При увеличении параметра r к значению r oo, кол-во циклов увеличивается. На маленьких значениях можно проследить, как появляется 2-цикл, затем 4-цикл. Кол-во циклов увеличивается в два раза с переходом через определенное значение r. Сходство с логистическим отображением заключается в том, что в обоих отображениях при данных значениях r циклы могут быть только длины 2^k









4 Expert level

4.1 Задача 1

Expert:
Следует ли асимптотическая устойчивость x^* из условия

$$\exists \delta_0 > 0 : \quad |x_0 - x^*| < \delta_0 \implies x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^* \ ?$$

Обоснуйте свой ответ.

В общем случае это неверно. Например, можно рассмотреть следующее отображение:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 0.1 \\ 0, x \in [0; +\infty] \backslash (0; 0.1) \end{cases}$$

Какую δ ни выбирай, в окрестности 0 найдется $x_0 \neq 0$, последовательность начнет возрастать, а потом, став больше 0.1, станет 0, т.е существует δ_0, такая что для любого x0 из δ_0 окрестности нуля, последовательность сходится в 0.

То есть, противоречие для $0 < \epsilon < 0.1$

Значит, нет устойчивости и асимптотической устойчивости

Докажем этот факт для логистического отображения.

Пусть $\exists \delta_0 > 0 :\mid x_0 - x^* \mid < \delta_0 \Rightarrow x_n \to x^*$

Зафиксируем ϵ

Тогда, начиная с некоторого номера N, $\forall \epsilon_1 \ \forall n > N \ |x_n - x^*| < \epsilon_1$

Значит, начиная с N + 1, условие устойчивости выполнено.

Обозначим $f^n(x)$ как применение логистического отображения к x n раз.

Логистическое отображение непрерывно, тогда $f^n(x)$ непрерывно как композиция непрерывных функций.

Пусть k = 0, 1, 2, ..., N

$U_k = \{x \in [0, 1] : |f^k(x) - x^*| < \epsilon\}$

Заметим, что прообраз интервала, который является открытым в R, $(x^* - \epsilon; x^* - \epsilon)$, лежит в U_N. По критерию непрерывности функции, прообраз открытого множества открыт, значит, U_N открыто. По той же логике его прообраз лежит в U_{N-1}. Значит, все множества U_k открыты.

Пусть $V = U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap ... \cap U_N$

Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Так как $x^* - x^* = 0$, то $x^* \in U_k$

По определению открытого множества $\exists \delta_1$, такая, что ее окрстность точки x^* лежит в V.

По тому, как мы задали V следует, что для любого x из δ_1 окрестности x^* выполнено $|f^k(x) - x^*| < \epsilon$

Теперь, пусть $\delta = min(\delta_0, \delta_1)$

Тогда будет выполняться $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta$, равная нашей $\delta : |f^n(x) - x^*| < \epsilon$ $\forall n$

Значит, из выполнения условия из задания следует устойчивость неподвижной точки логистического отображения, значит, она является асимптотически устойчивой

4.2 Задача 2

Expert: Докажите или опровергните утверждение.
При $r \in (0; 1)$ неподвижная точка $x^* = 0$ является устойчивой. Является ли она асимптотически устойчивой?

Как уже было показано в 1 задаче уровня Easy, при $r \in (0, 1)$ образ любого x не больше него самого. Тогда $\forall\epsilon > 0$ выберем δ равную ϵ, и если $| x_0 |< \delta$, то $| x_n |< \epsilon$, так как $x_n \Leftarrow x_0$, значит, $x^* = 0$ устойчива.

Во второй задаче уровня Normal было доказано, что при $r \in (0, 1)$ $\lim x_n = 0$ $\forall x_0 \in (0, 1)$, значит, найдется $\delta_0 > 0$, $| x_0 |< \delta_0 \Rightarrow \lim x_n = 0$.

Значит, при $r \in (0, 1)$ $x^* = 0$ является устойчивой и асимтотически устойчивой.

4.3 Задача 3

Expert:
Докажите, что точка $x^* = 0$ при $r \in (2; 3)$ является неустойчивой.

Пусть $x^* = 0$ устойчива, тогда условие устойчивости выполняется для любых $\epsilon > 0$. Пусть $\epsilon = \frac{1}{4}$

Пусть $x_0 \in (0, \min(\frac{1}{4}, \delta))$

$x_0 < \frac{1}{2}$

$x_1 = x_0 r(1 - x_0) > x_o r \frac{1}{2}$

Тогда индуктивно $x_n > x_0 (\frac{r}{2})^n$ пока $x_n < \frac{1}{2}$

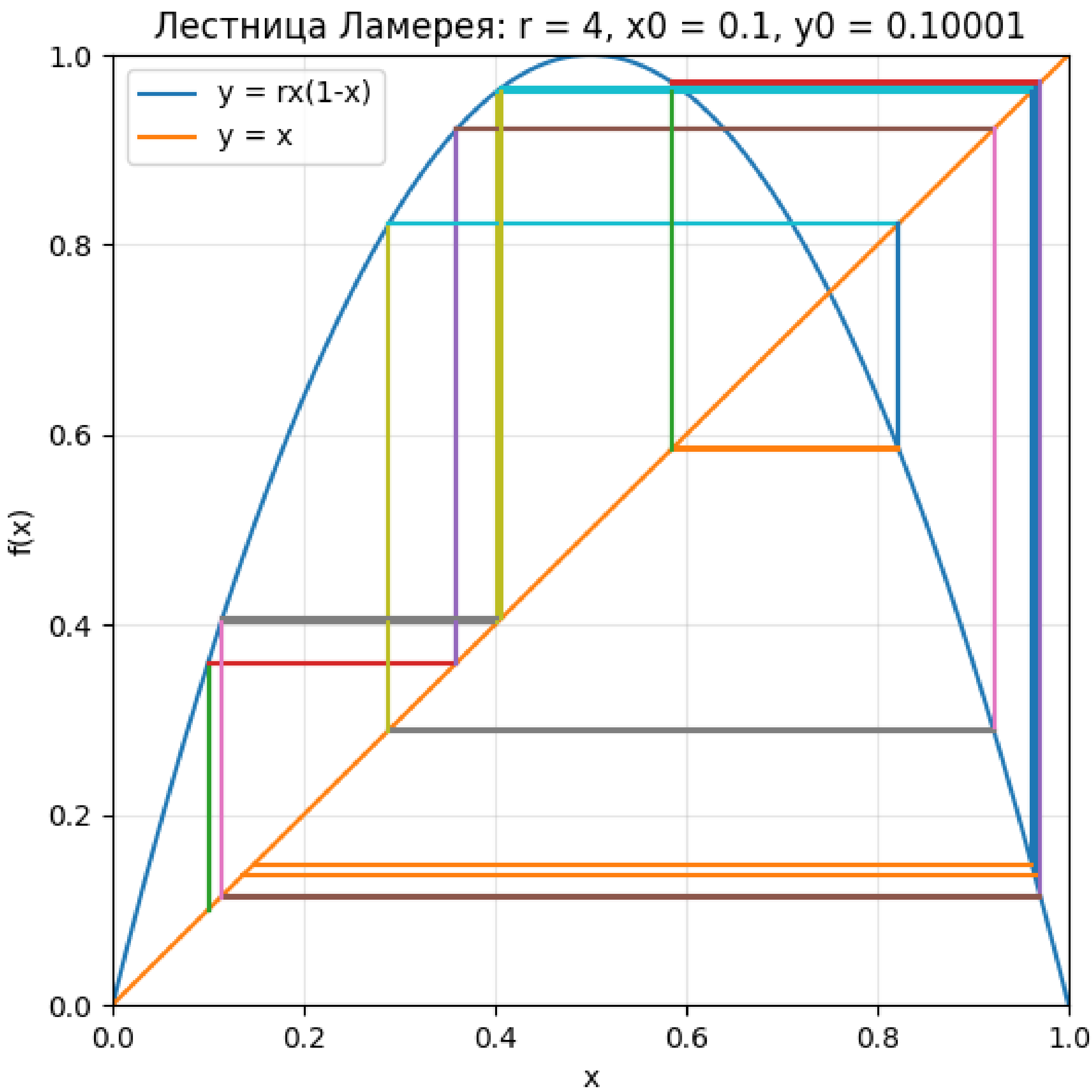
$\frac{r}{2} > 1$, так как r > 2

Тогда какой бы x_0 мы не взяли (важно, что $x_0 \neq 0$), $\exists n \in N \Rightarrow x_n >= \frac{1}{4}$ ввиду неограниченности роста $(\frac{r}{2})^n$.

Нарушается условие устойчивости, значит, $x^* = 0$ неустойчива при $r \in (2, 3)$

4.4 Задача 4

Expert:
Напишите функцию, которая для заданных x_0, $y_0 = x_0 + \varepsilon$, r строит две траектории лестницы Ламерея на одном графике. Постройте этот график для $r = 4$. Как можно интерпретировать результаты?

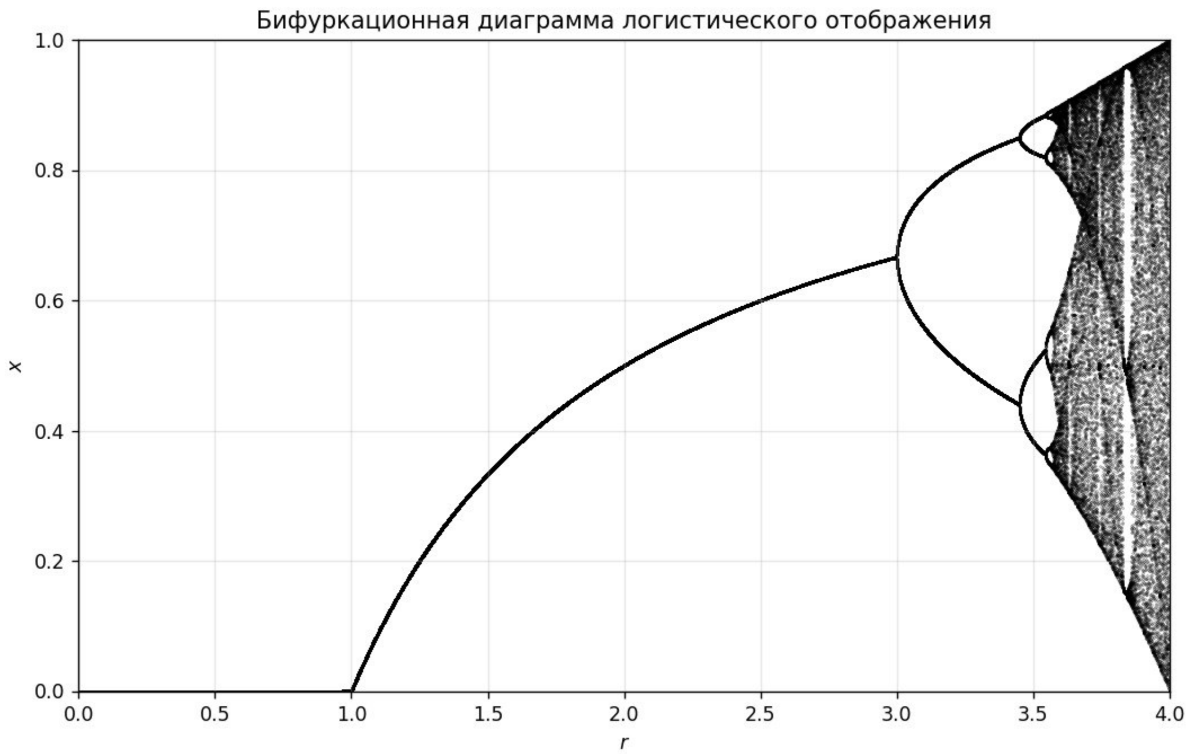


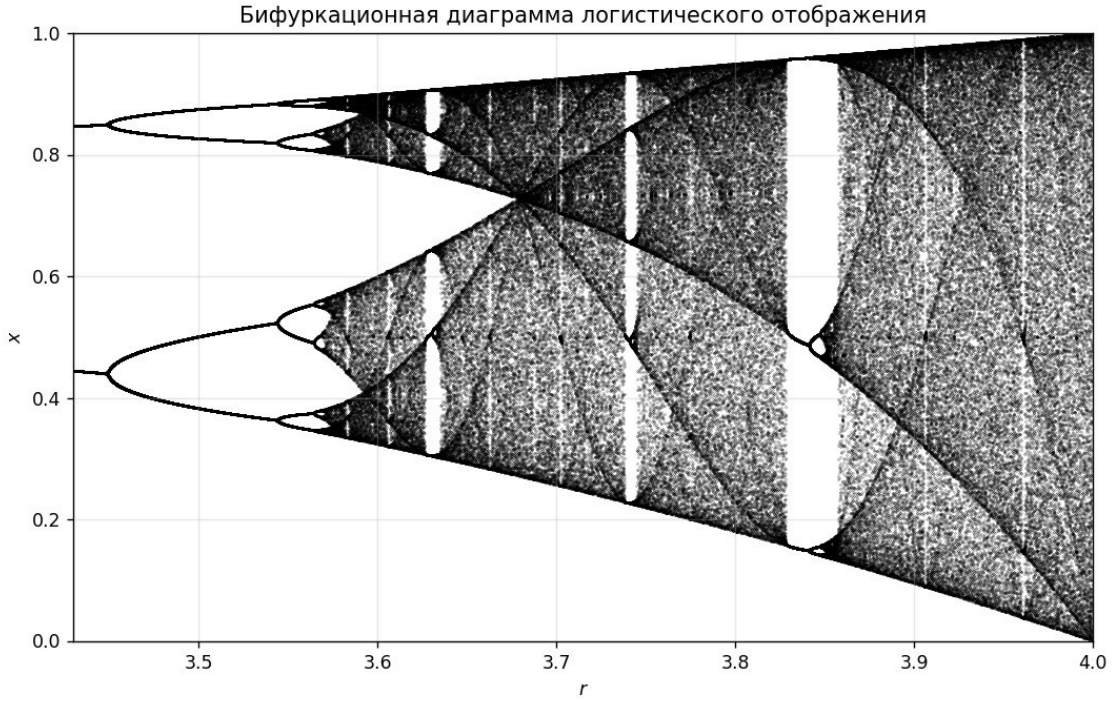
По графику видно, что даже при незначительном изменении начальных условий, отклонение значений последовательности становится невозможно предугадать. Таким образом, логистическое отображение крайне сильно зависит от начальных условий.

4.5 Задача 5

Expert:

1. Постройте бифуркационную диаграмму логистического отображения.
2. Проанализируйте: как интерпретировать полученный график?
3. Где на диаграмме находится r_∞? Как ведет себя система до r_∞? После?



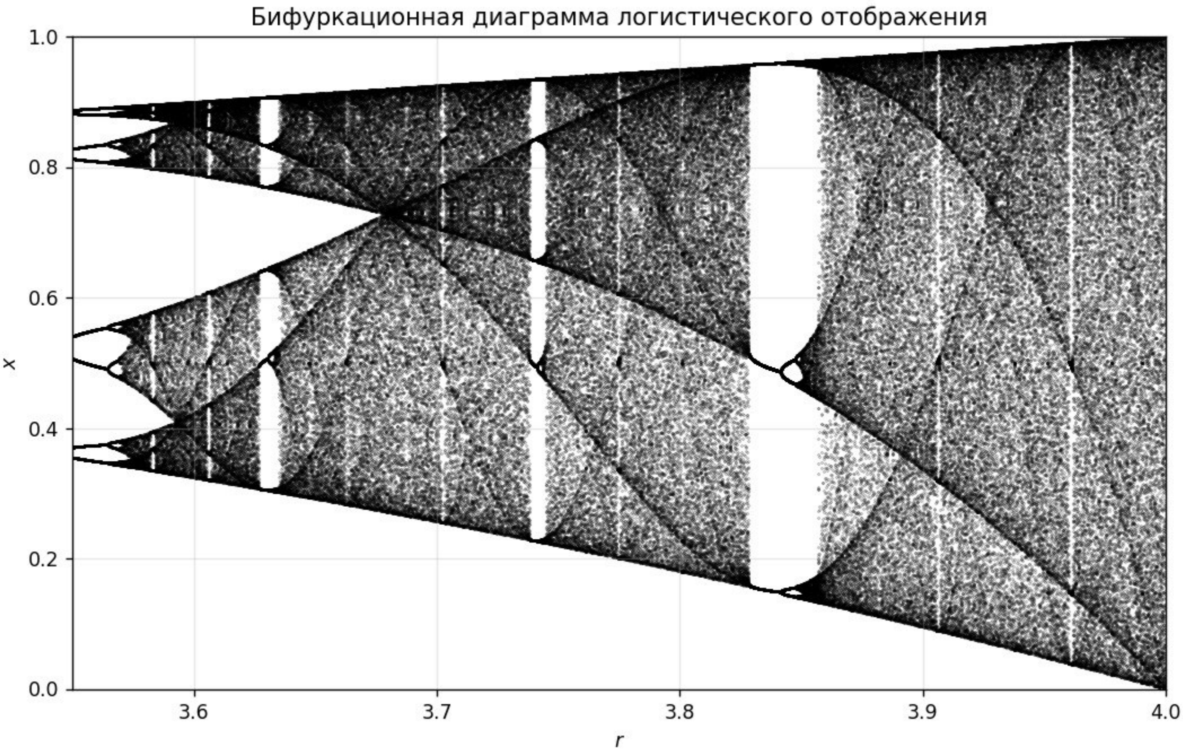


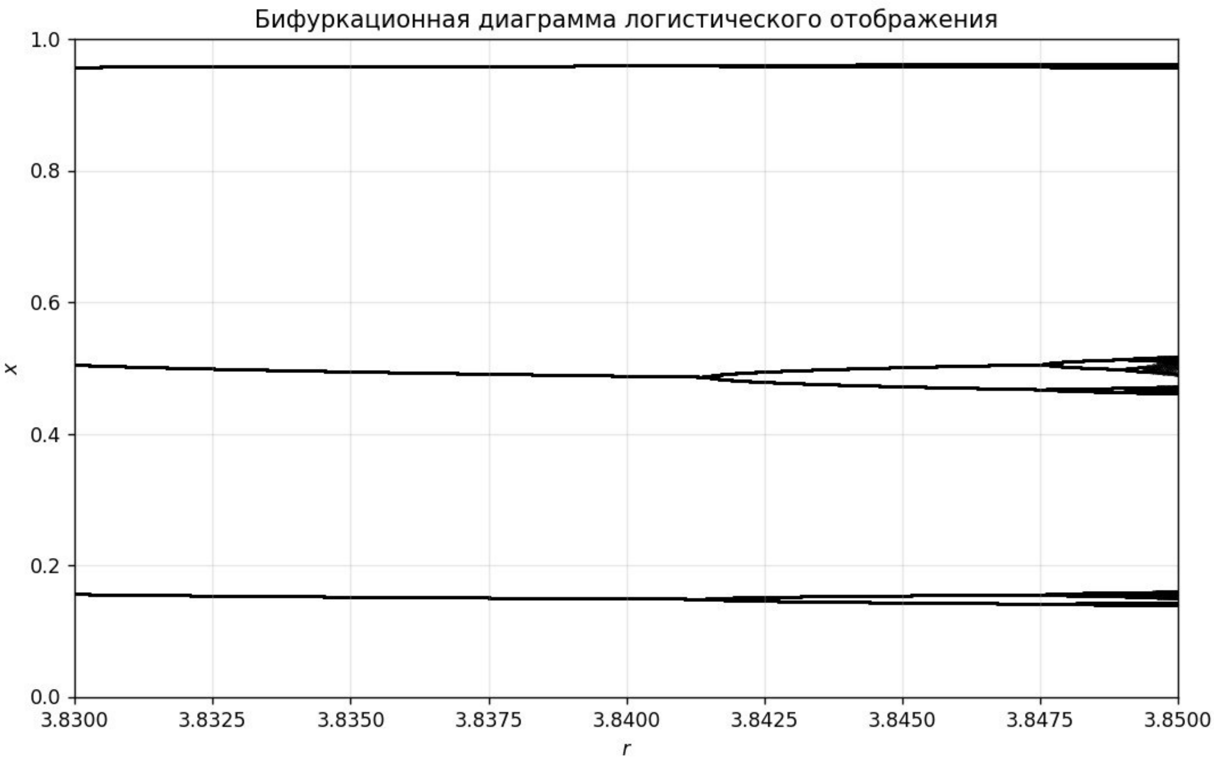
При r < 1: Отображение уходит в ноль или "вымирает". Любая последовательность с любой начальной точкой стремится к 0. При r от 1 до 3: Возникает единственная устойчивая точка, к которой сходится последовательность. При r от 3 до 3.5699456: Отображения удваивает свои значения несколько раз подряд. Возникает 2-цикл, затем 4-цикл и тд. При r > 3.57 начинается хаос. Отображение теряет предсказуемое поведение и лишь изредка возникают "окна периодичности в которых появляется цикл кратности n.

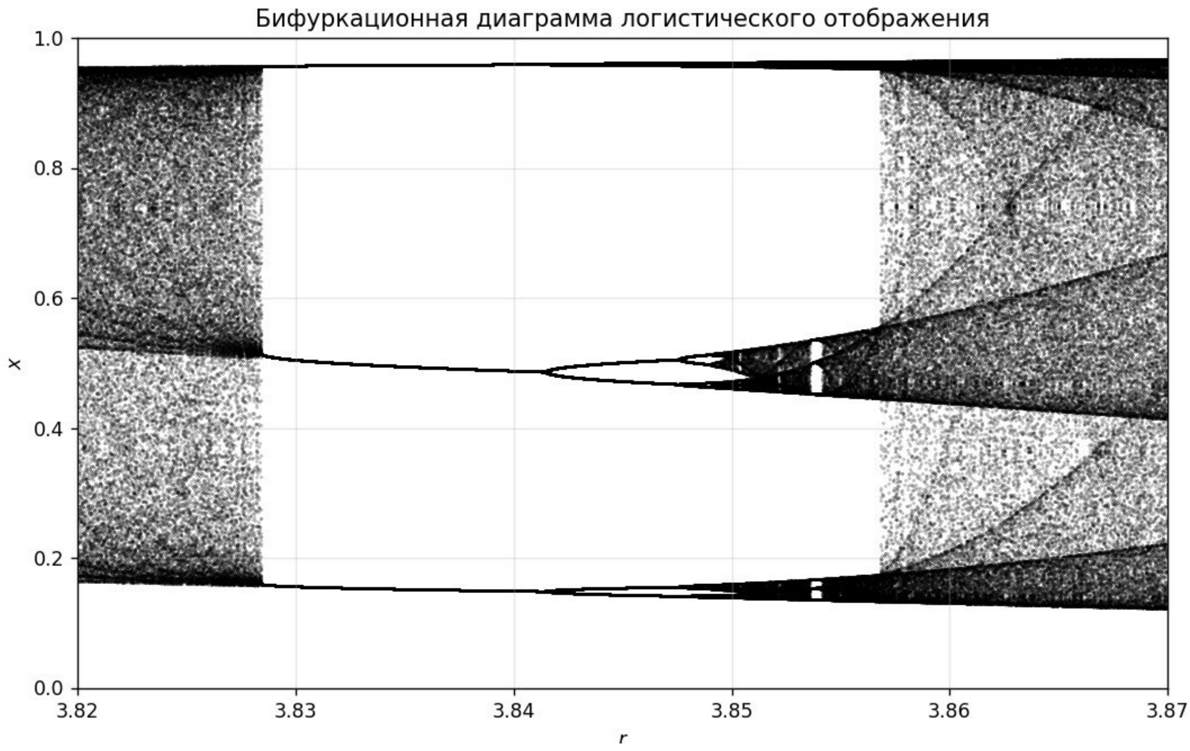
r_∞ - точка, в которой начинается "чёрное полотно до этого значения отображение имеет чёткое предсказуемое поведение: 2k-цикл. После этой точки начинается хаос. Нельзя точно описать структуру поведения.

4.6 Задача 6

Expert:
С помощью увеличения фрагмента около $r \approx 3.83$ визуализируйте фрактульную структуру (самоподобие) диаграммы.


Бифуркационная диаграмма логистического отображения
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
x
3.6
3.7
3.8
3.9
4.0
r

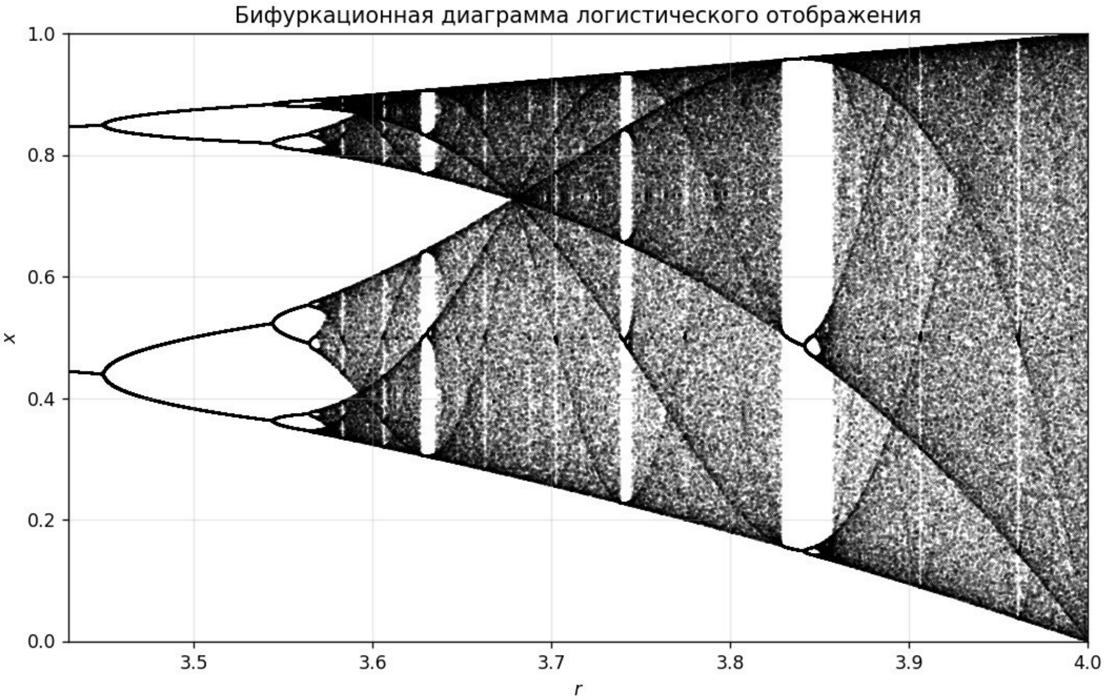

Бифуркационная диаграмма логистического отображения
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
x
3.8300
3.8325
3.8350
3.8375
3.8400
3.8425
3.8450
3.8475
3.8500
r



При r = 3.83 отображение начинает повторять своё поведение в самом начале. Возникает три цикл, в котором центральное значение распадается на 2, 4.. цикл, как и отображение при начальных r

4.7 Задача 7

Expert:
Приближенно найдите значения r, при которых возникают циклы с периодом 3, 5, 6. Отобразите область(-и) бифуркационной диаграммы с соответсвующими окнами периодичности.



при r = 3.829 отображение принимает вид 3-цикла при r = 3.738 - 5-цикл при r = 3.63 - 6-цикл

4.8 Бонусная задача

Expert(бонус):
С помощью внешних источников исследуйте: как связано наличие цикла с периодом 3 с хаотичностью системы?

По теореме Ли-Йорка, открытой в 1975 года Тиен-Юнгом Ли и Джеймсом Йорком, если система имеет цикл периода 3, то выполняются следующие свойства:

1) В системе существуют циклы сколь угодно больших периодов

2) Существует несчётное множество непериодических траекторий, которые никогда не повторяются

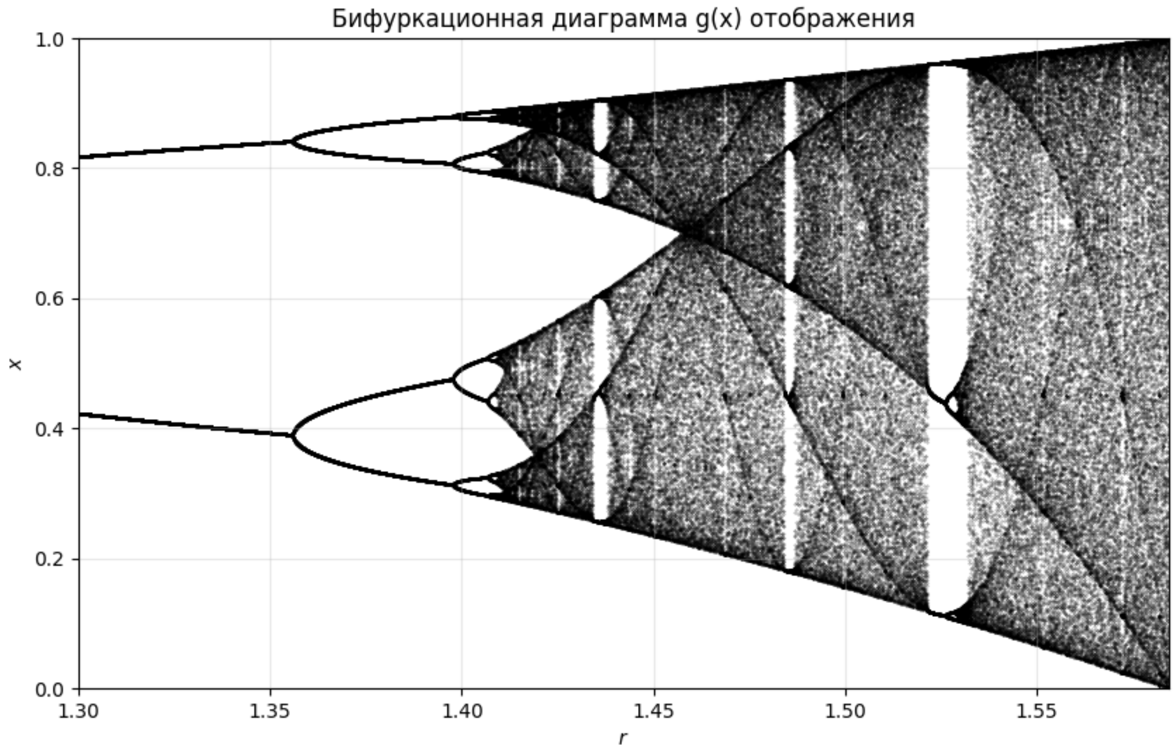
3) Проявляется зависимость от начальный условий

Зависимость от начальных условий и является причиной хаотичности системы, имеющей цикл периода 3.

4.9 Задача 8

Expert:
Для заданного вариантом отображения $g(x_n)$:

1. Численно или аналитически найдите верхнюю и нижнюю границы параметра r, при котором точка $x^* = 0$ является устойчивой, неустойчивой;
2. Постройте бифуркационную диаграмму. Отметьте сходства или различия с диаграммой логистического отображения;
3. Визуализируйте окна периодичности, если они есть.



В последней задаче уровня Normal было показано, что при $r > \frac{1}{3}$ разность x_n и x_{n+1} отрицательна, то есть последовательность возрастает.

Тогда либо последовательность x_n выходит за любую окрестность 0, что означает ее неустойчивость, либо она ограничена в некоторой окрестности, но в таком случае, по теореме Вейерштрасса эта последовательность сходится к некоторой точке, находящейся между двумя неподвижными точками отображения.

Пусть $x_n \to L$

Так как наше отображение непрерывно, то справедливо:

$\lim f(x_n) = f(L)$

$f(L) = L$

Значит, L - неподвижная точка, чего быть не может. Противоречие. Значит, при r $> \frac{1}{3}$ 0 неустойчива.

Как уже было доказано ранее, при $r \leq \frac{1}{3}$ последовательность убывает и сходится в 0, что позволяет выбрать $\delta = \epsilon$, и условие устойчивости будет выполнено.