Математический анализ

Лабораторная работа №1

Инчин Ярослав Владимирович
502463

Магденко Дмитрий Тарасович
502748

J3115

Дата: 30 ноября 2025 г.

Содержание

1 Easy level

Easy:
Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in [0;1]$

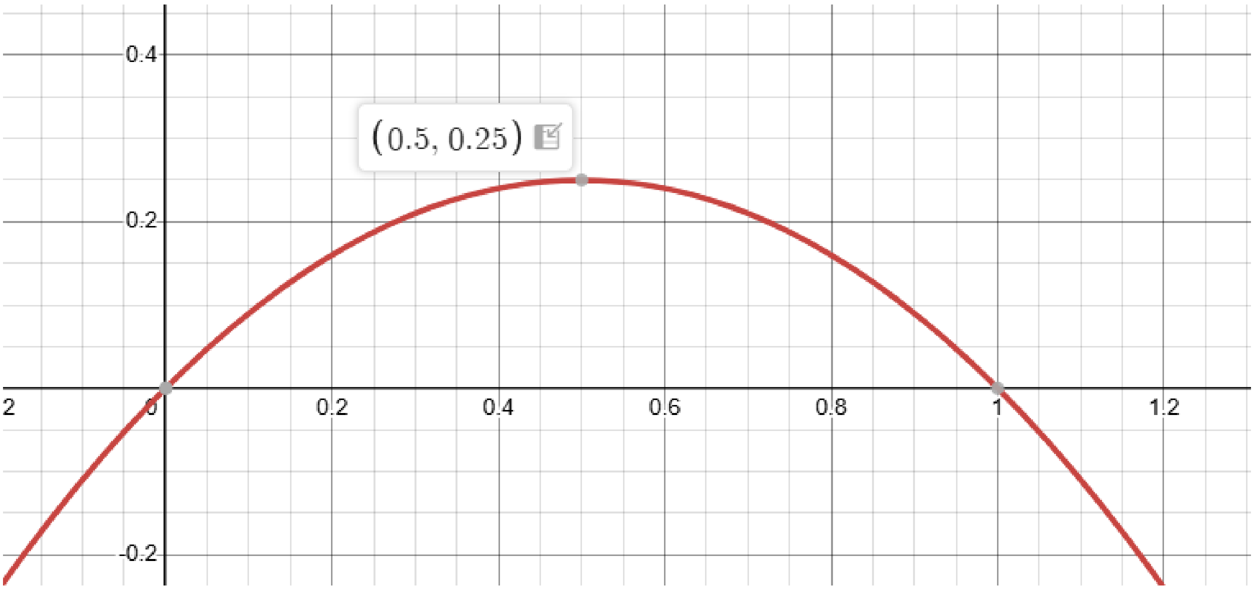
$$0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1$$

Заметим, что наибольшие значения x_{n+1} достигаются при r $= 1$; Выражение принимает вид $x_{n+1} = x_n(1$-$x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n$ - x_n^2

Найдем такие $x \in [0,1]$, образ которых больше них самих

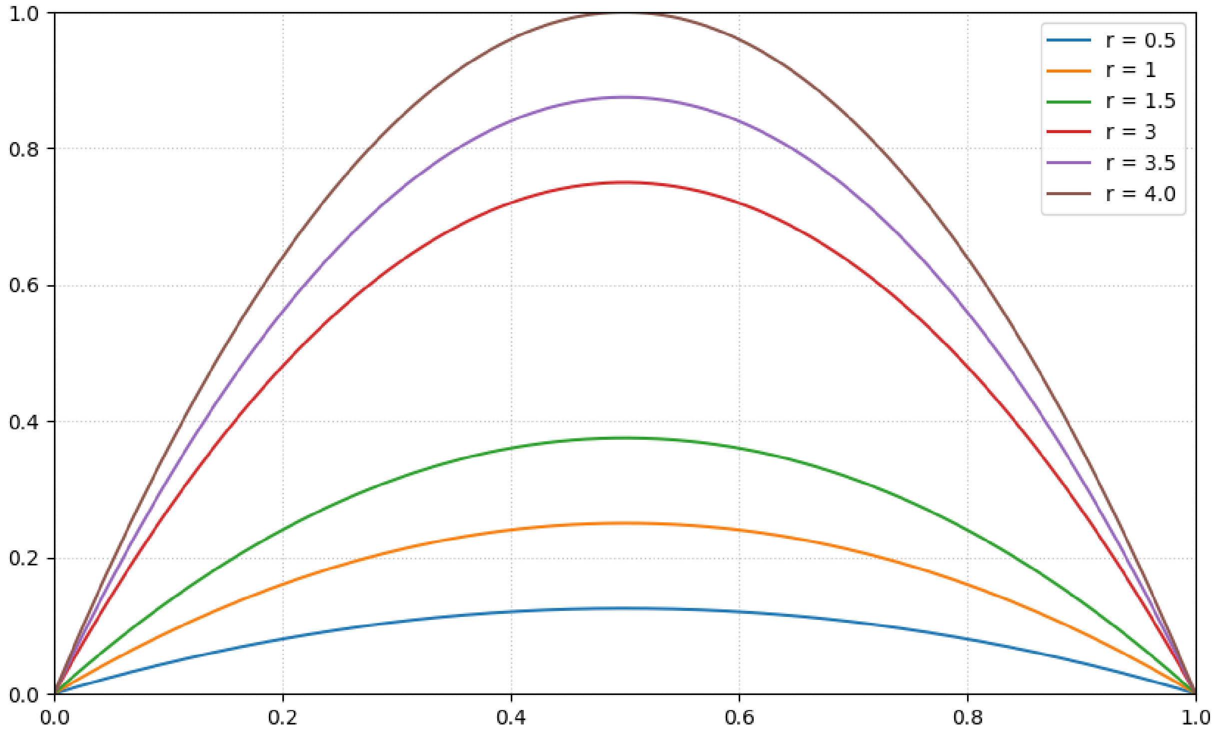
$x - x^2 > x$

$x \in \emptyset$



Образ никакого x не может превышать 0.25.

Easy:
Сделайте вывод: как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_n от x_{n-1}? Постройте эту функцию для нескольких различных значений r.

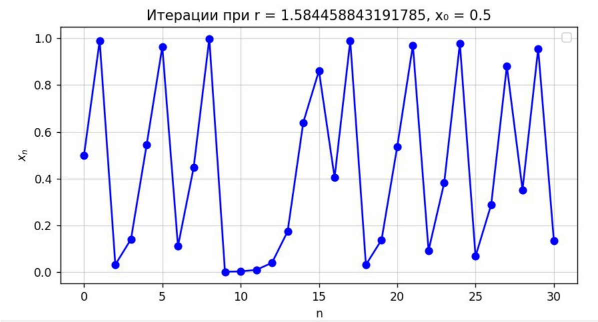


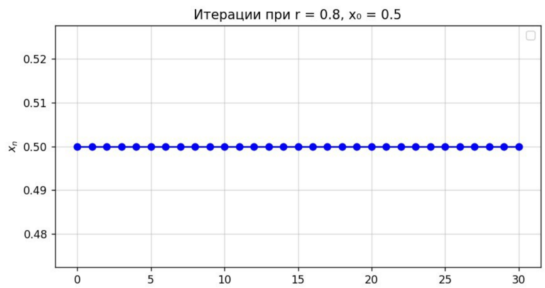
Заметим, что при r $\leq$1 популяция вымирает. При 1 $<$ r $<$ 3 близится к стабильности. При r $\geq$3 характер популяции перестает поддаваться анализу

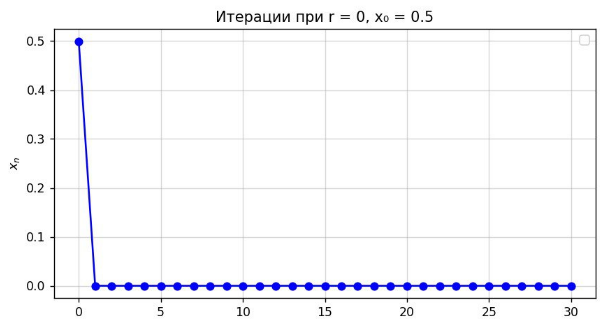
Easy:
Для заданной вариантом функции $g(x_n)$:

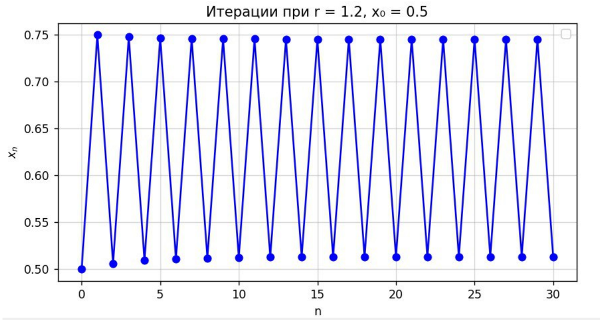
1. Постройте графики зависимости x_n от x_{n-1} для нескольких различных значений r.
2. Сделайте вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из вашего варианта. Предположите: чем могут быть вызваны сходства/различия?

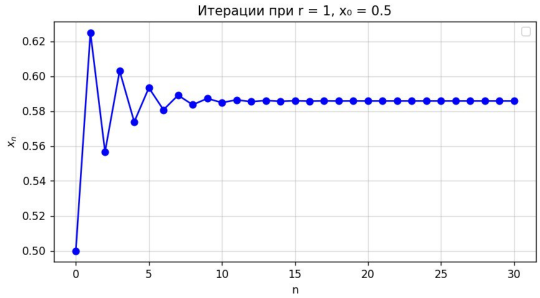
Отображение объединяет поведение при различных значениях r. При одних они сходятся к 0, при других принимают последовательно два разных значения (мигалка), при других сходятся к определённому положительному числу. Также при некоторых r содержать в себе больше 2 подпоследовательностей, которые сходятся к определённым различным значениям. Отличаются отображения значениями переменной r, при которых они претерпевают свою состояния. Также в отличие от точечного отображения, логистическое при определённых значениях (3.6 - 3.9999) ведёт себя непредсказуемо, в то время как точечное всегда имеет точную динамику изменений. Отличия могут быть связаны тем, что логистическое отображение является квадратным, а точечное - кубическим, из-за чего на данных значениях r точечное не успело пройти стадии логистического.











2 Normal level

2.1 Задача о количестве неподвижный точек

Normal:

1. Найдите все неподвижные точки логистического отображения.
2. При каких r отображение имеет одну неподвижную точку? Несколько?
3. Какое максимальное количество неподвижных точек может иметь логистическое отображение? Почему?

$$*x = *xr(1 - *x)$$

Мы имеем квадратное уравнение, которое может иметь не более 2 решений, одно из которых 0, другое: $x = \dfrac{r-1}{r}$

Так как $0 \leq x \leq 1$, то второй корень существует и не совпадает с первым при r > 1

1. $*x = 0; \dfrac{r-1}{r}$
2. 1 точка: $0 \Leftarrow r \Leftarrow 1$, 2: $1 < r \leq 4$
3. Не более 2, тк корней квадратного уравнения не больше 2.

2.2 Задача о последовательности

Монотонность.

Рассмотрим разность $x_n - x_{n+1} = x_n - x_n r(1 - x_n) = x_n(1 - r(1 - x_n))$

Правая часть неотрицательна, значит, $x_n \geq x_{n+1}$.

Предел.

Normal:
Докажите, что при $x_0 \in (0;1)$ и $r \in (0;1]$ последовательность $\{x_n\}$, заданная логистическим отображением, монотонно убывает. Существует ли предел у данной последовательности при $r \in (0;1]$? Докажите. Покажите графически.

Последовательность монотонно убывает и ограничена снизу нулем, значит, по теореме Вейерштрасса, она имеет конечный придел, равный инфимуму последовательности.

Предположим, $inf x_n = 0 = \lim x_n$

$x_{n+1} = x_n r(1 - x_n)$

Перейдя к пределу: $\lim x_{n+1} = \lim x_n$

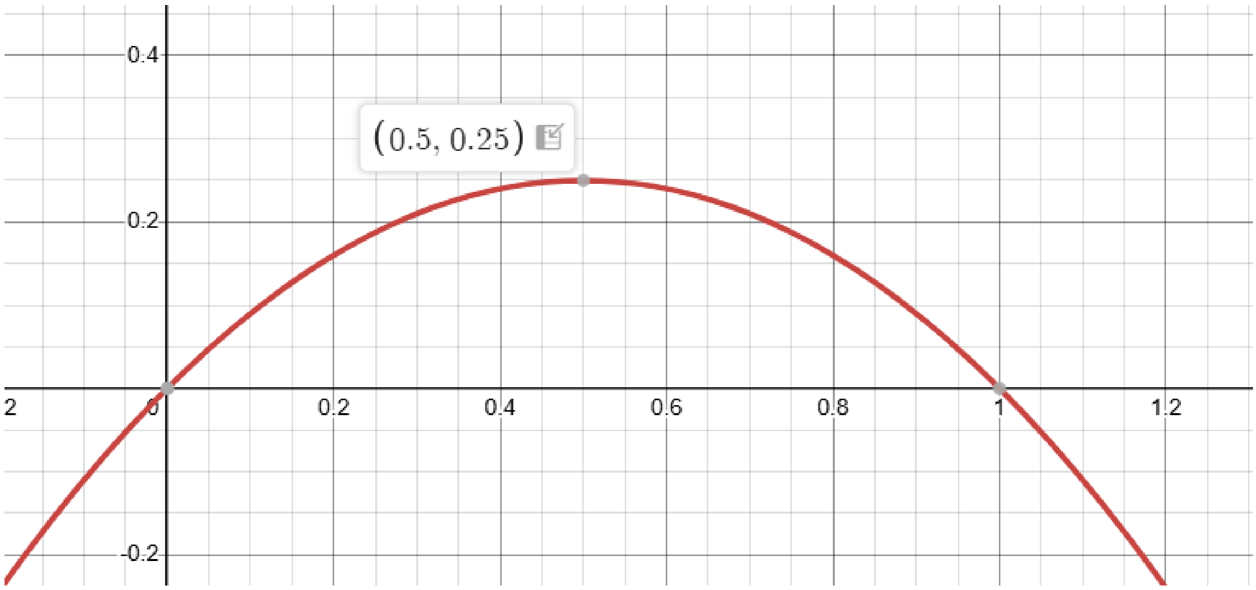
$\lim x_n = r(lim x_n)(1 - \lim x_n)$

$(lim x_n)(r(1 - \lim x_n) - 1) = 0$

$\lim x_n = 0$

$\lim x_n = 1 - \dfrac{1}{r}$ - при r $\in$(0, 1] предел отрицателен, что невозможно $\Rightarrow \lim x_n = 0$

При r = 1 достигаются наибольшие значения



По графику очевидно, что образ любого $x_n < x_n$.

2.3 Задача о сужении

Normal:
Пусть $r \in (2;3)$, $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$. Что вы можете сказать о монотонности подпоследовательностей[a] $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$? Докажите. Проверьте графически.

[a] Аналогично, здесь идет речь о логистическом отображении.

Итак, как было сказано выше, при $r \in (2;3)$ отображение имеет две неподвижные точки, однако 0 мы рассматривать не будем, т.к, если $x_{2n+1} < 0$, то множество x_{2n} пусто.

$$x* = \frac{r-1}{r} > 0.5$$

Пусть $\exists a \in (x*;1]$

$l(x) = f(f(x)) - x$

$l(a) > 0; l(1) < 0$

$l \in C[a,1] \Rightarrow$ по теореме Больцано-Коши l принимает все промежуточные значения, в том числе и 0 $\Rightarrow \exists$ неподвижная точка на (a, 1), где $a > x^*$ - противоречие $\Rightarrow l((x^*,1]) < 0 \Rightarrow$ последовательность x_{2n} монотонно убывает.

Замети, что $l(0,25)$ при $r > 2$ положительно.

Пусть $\exists a \in (0,x^*)\backslash\{0.25\}|l(a) < 0$

Тогда по Больцано-Коши l достигает $0 \Rightarrow \exists x^*$ неподвижная точка на $(0, x^{*)}$ - противоречие $\Rightarrow x_{2n+1}$ монотонно возрастает

2.4 Больше отображений

Normal:
Для отображения $g(x_n)$, заданного вариантом:

1. Аналитически найдите неподвижную точку.
2. Найдите или оцените диапазон параметра r, при котором последовательность монотонно сходится к нулю.
3. Постройте графики зависимости x_n от n для нескольких различных значений параметра r.

Нашим вариантам соответсвует отображение

$g(x_{n+1}) = r * x_n(1-x_n)(3-x_n)$

$r \in [0; \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}]$

Можно оценить r сверху:

$r < 1.6$

1. $x = rx(1-x)(3-x)$

$x(r(1-x)(3-x)-1) = 0 \Rightarrow x^* = 0$

$$r(1-x)(3-x)-1=0$$

$$rx^2-4rx+3r-1=0$$

$$x=\frac{4r\pm\sqrt{4r^2+4r}}{2r}$$

$$x=2\pm\sqrt{1+\frac{1}{r}}$$

$x=2+\sqrt{1+\frac{1}{r}}$ строго больше 1, значение вне области определения отображения.

$$2-\sqrt{1+\frac{1}{r}}\geq 0$$

$$r\geq\frac{1}{3}$$

$$2-\sqrt{1+\frac{1}{r}}\leq 1$$

$$r\in R$$

$$x^*=0$$

$$x^*=2-\sqrt{1+\frac{1}{r}}\mid r\geq\frac{1}{3}$$

2. Рассмотрим разность

$$x_n-x_{n+1}=x_n-rx_n(1-x_n)(3-x_n)$$

Найдем такие r, когда эта разность положительна.

$$x_n(1-r(1-x_n)(3-x_n)\geq 0$$

$$x_n\geq 0$$

$$(1-r(1-x_n)(3-x_n)\geq 0$$

$$r(1-x_n)(3-x_n)<1$$

$x_n^2-4x_n+3$ на промежутку [0;1] строго убывает, потому достигает в точке 0 максимального значения, равного 3

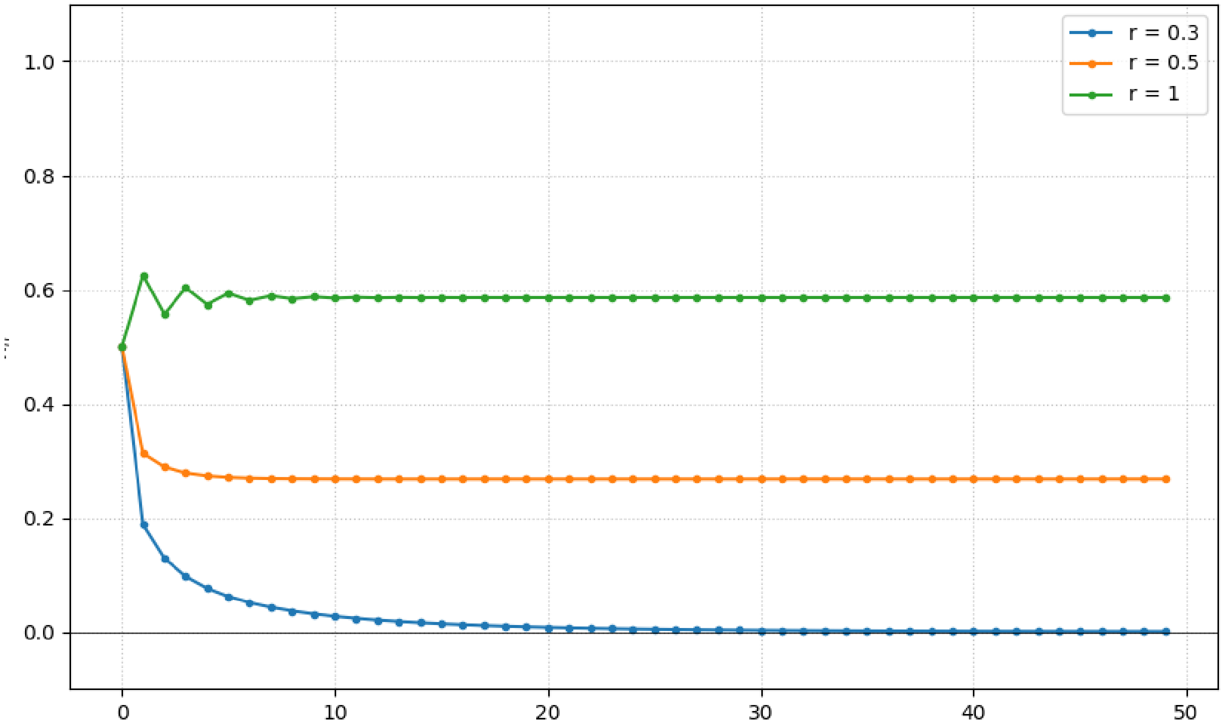
$r(1 - x_n)(3 - x_n) \leq 3r$

$3r < 1$

$r < \dfrac{1}{3}$

При $r < \dfrac{1}{3}$ значения функции монотонно убывают и стягиваются к своей неподвижной точке 0, т.е монотонно сходятся к 0.

3.



3 Hard level

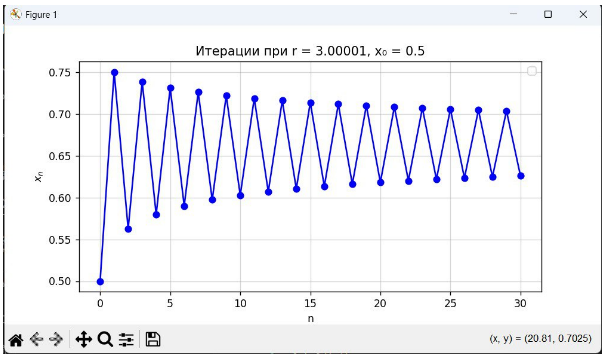
3.1 Задача 1.1

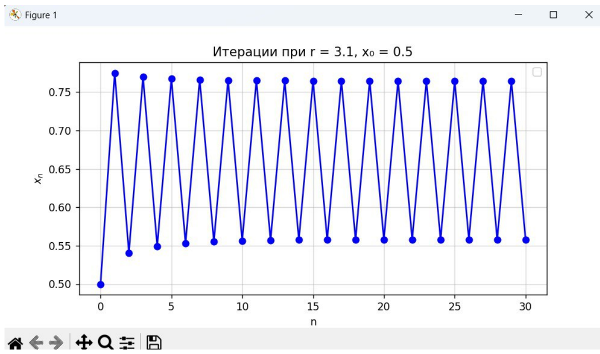
Hard:

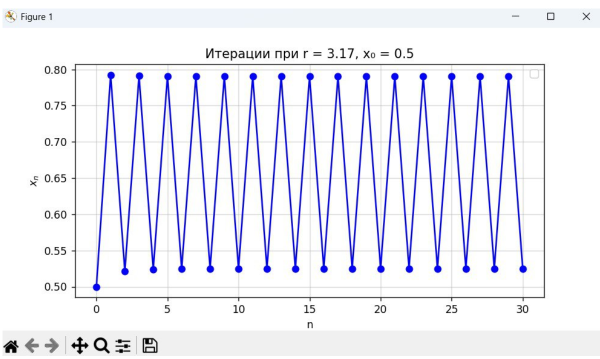
1. Положим $r_\infty \approx 3.5699456\ldots$ Как изменяется длина цикла при $r \in (3; r_\infty)$?
2. Для $r \in (3; r_\infty)$ экспериментально установите, какие ограничения[a] действуют на m?

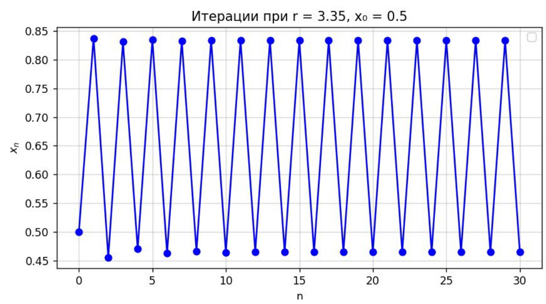
[a]Здесь имеется в виду не ограниченность сверху или снизу, а то, какую закономерность можно выделить, исследовав изменение длины цикла m.

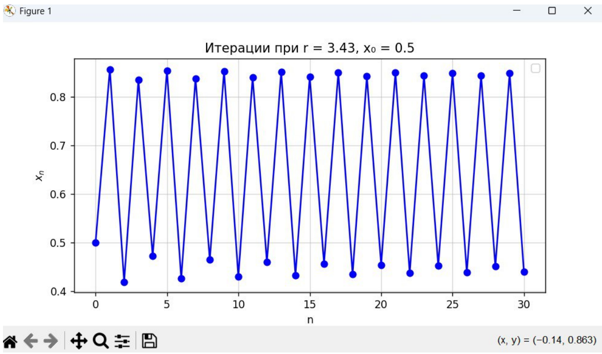
При r, близких к 3, логистическое отображение сходится к некоторому числу, но при увеличении значения отображение выравнивается к усточивому двойному циклу, который держится до 3.33. Далее начинается плавное расхождение на циклы длины 4 и к значению r - 3.43 можно выделить устойчивые циклы длины 4. Затем при r = 3.54 возникают циклы длины 8, а при приближении r к верхнему значению интервала возникают циклы длины 16.

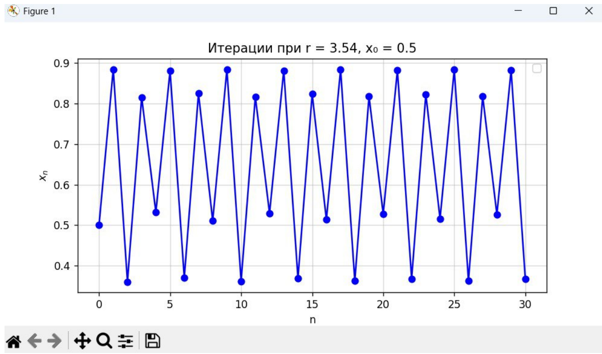


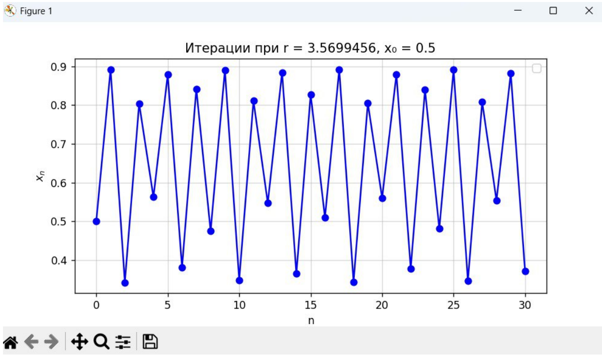


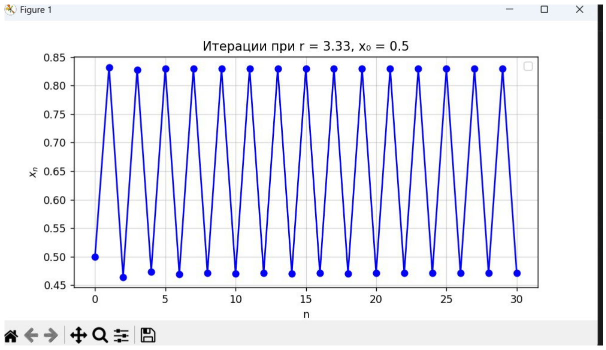










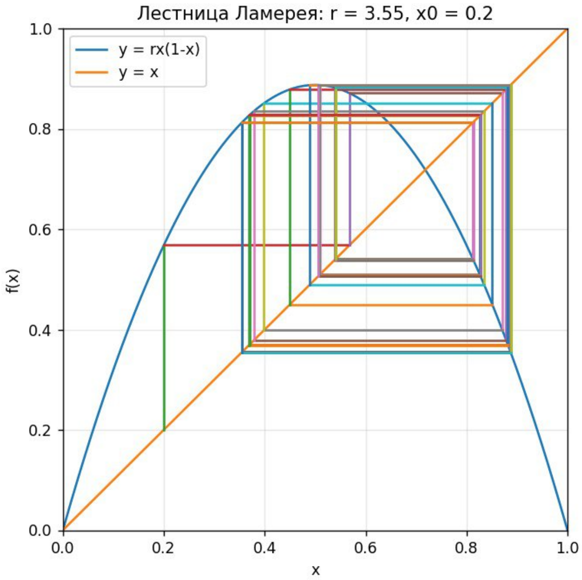


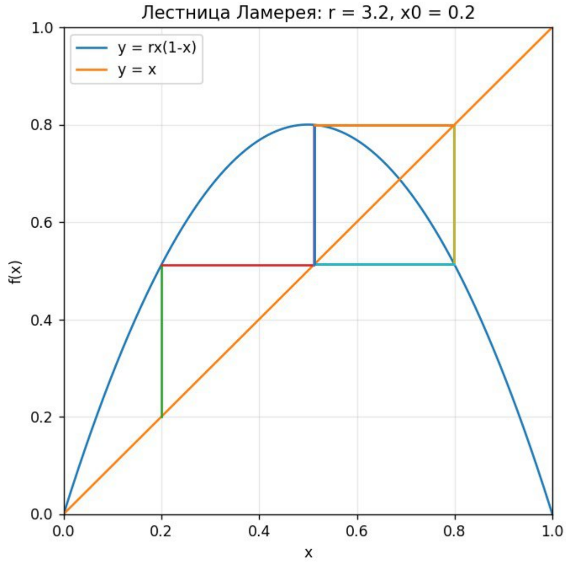
3.2 Задача 1.2

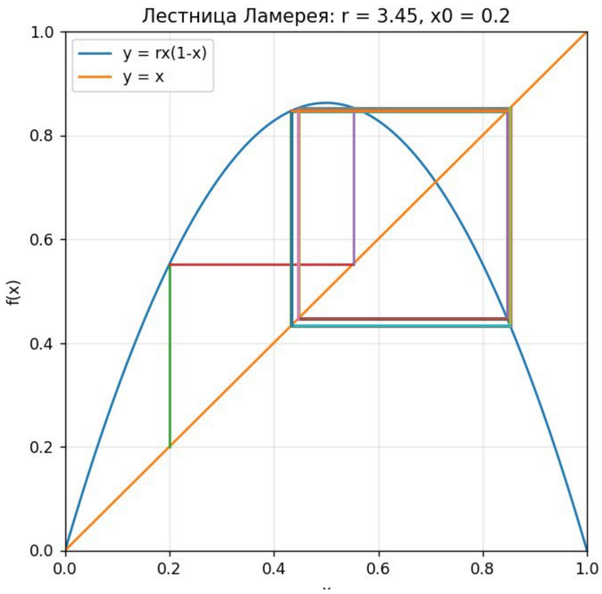
Hard:

1. Напишите функцию, которая для заданного параметра r строит лестницу Ламерея.
2. Сделайте выводы: как выглядят циклы различных порядков на графике?

С помощью лестницы Ламерея в нашей реализации можно заметить большое кол-во прямоугольников. Некоторые из них "нарисованы"тонкой линией (что означает, что по ним проходились 1 раз, поэтому это не часть цикла). А некоторые нарисованы жирной линией из-за наслоения линий разных цветов. Именно кол-во прямоугольников с жирной границей и наслоением большого числа цветов показывает циклы. Если всего прямоугольников с жирной линией n штук, то цикл длины 2n.







3.3 Задча 1.3

Hard:
Исследуйте: как изменяется длина цикла заданного вариантом отображения $g(x_n)$ с изменением параметра r? Постройте соответствующие графики. Есть ли сходства с логистическим отображением?

При увеличении параметра r к значению r oo, кол-во циклов увеличивается. На маленьких значениях можно проследить, как появляется 2-цикл, затем 4-цикл. Кол-во циклов увеличивается в два раза с переходом через определенное значение r. Сходство с логистическим отображением заключается в том, что в обоих отображениях при данных значениях r циклы могут быть только длины 2^k