Übungsaufgabe 5.1 (a) Verifizieren Sie bitte mithilfe von Python und Qiskit, dass das BEISPIEL 4.1.1 gegebene QUBO folgende optimale Lösung besitzt:

$$x^* = (1,0,0,1) \in \{0,1\}^4 \qquad \text{mit} \qquad y = (x^*)^T Q x^* = -11$$

Beispiel 4.1.1 : Für $M = D_F = \{0,1\}^n$ als Definitionsbereich der Zielfunktion mit $n=4$ ist die Zielfunktion durch

$$F: M \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto -5x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 6x_4 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3 + 10x_3x_4 \in \mathbb{R}.$$

gegeben, was zunächst der Zielfunktion in der Form

$$F: \{0,1\}^n \ni x \to x^t \cdot Ax + b^T x + c = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j \cdot x_k + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + c \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ auf $\{0,1\}^n$ zu minimieren ist, mittels Quanten Computin lösen

mit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und } c = 0.$$

$$Q_1 := \begin{pmatrix} -5 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Lösung :

$x^* = (1,0,0,1) \in \{0,1\}^4$ mit $y = (x^*)^T Q x^*$.

nach Satz 4.2 (siehe Kapitel 4, S. 190) gilt

für binäre Variablen $x_j^2 = x_j$ und somit jeder Zielfunktion

$$F(x) = \sum_{i \leq j} (Q_1)_{ij} x_i x_j = x^T Q_2 x.$$

$$\Rightarrow F(x^*) = F(1,0,0,1) = \sum_{i \leq j} (Q_1)_{ij} x_i x_j$$
$$= -5 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 8 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + 4(1 \cdot 0) + 8(1 \cdot 0) + 2(0 \cdot 0) + 10(0 \cdot 1)$$
$$= -5 - 6$$
$$= -11 \quad \boxtimes$$

$$x^{*T} \cdot Q_2 \cdot x^* = \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^* (Q_2)_{ij} \right) \cdot x^*$$
$$= \left(x_1^* (Q_2)_{1j} + x_2^* (Q_2)_{2j} + x_3^* (Q_2)_{3j} + x_4^* (Q_2)_{4j} \right) x^*$$

Recall: $x^* = (1,0,0,1)^T \Rightarrow$ nur $i=1$ und $i=4$ sind in $=1$., also

Für $j=1$: $(1)(Q_{11}) + (1)(Q_{41}) = -5+0 = -5$
$j=2$: $(1)(Q_{21}) + (1)(Q_{42}) = 2+0 = 2$
$j=3$: $(1)(Q_{31}) + (1)(Q_{32}) = 4+5 = 9$
$j=4$: $(1)(Q_{44}) + (1)(Q_{44}) = 0+(-6) = -6$.

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{4} x^* (Q_2)_{ij} \right) = (-5, 2, 9, -6) \quad \text{und somit}$$

$$(-5 \; 2 \; 9 \; -6) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + (-6 \cdot 1) = \underline{-11}$$

Also es ist äquivalent zu $x^{*T} \cdot Q_2 x^*$ $\boxtimes$

(b) Verifizieren Sie bitte die in Beispiel 4.1.2 angegebene QUBO-Formulierung des Partitionsproblems für $M = \{25, 7, 13, 31, 42, 17, 21, 10\}$ und verifizieren Sie bitte mithilfe von Python und Qiskit, dass die optimale Lösung durch

$$x^* = (0,0,0,1,1,0,0,1)^T \in \{0,1\}^8 \qquad \text{mit} \qquad y^* = (x^*)^T Q x^* = -6889$$

gegeben ist und auf perfekt passende Summen von $25 + 7 + 13 + 17 + 21 = 83 = 31 + 42 + 10$ für die so entstandenen Teilmengen führt.

Beispiel 4.1.2 besagt:

$M = \{25, 7, 13, 31, 42, 17, 21, 10\} \subset \mathbb{N}$, mit $N=8$ gegeben, so ist.

$S = 25 + 7 + 13 + 31 + 42 + 17 + 21 + 10 = 166$ also $S^2 = 27655 6$.

und

$$Q = \begin{pmatrix} -3525 & 175 & 325 & 775 & 1050 & 425 & 525 & 250 \\ 175 & -1113 & 91 & 217 & 294 & 119 & 147 & 70 \\ 325 & 91 & -1989 & 403 & 546 & 221 & 273 & 130 \\ 775 & 217 & 403 & -4185 & 1302 & 527 & 651 & 310 \\ 1050 & 294 & 546 & 1302 & -5208 & 714 & 882 & 420 \\ 425 & 119 & 221 & 527 & 714 & -2533 & 357 & 170 \\ 525 & 147 & 273 & 651 & 882 & 357 & -3045 & 210 \\ 250 & 70 & 130 & 310 & 420 & 170 & 210 & -1560 \end{pmatrix}$$

Lösung

Nach B1. Partitionsproblem (siehe Kapitel 4, Seite 192). : es gibt eine Teilmenge $M_1 \subset M$ durch $x = (x_1, \dots, x_8)^T \in \{0,1\}^8$ mit

$$x_j = \begin{cases} 1, & m_j \in M_1 \\ 0, & m_j \notin M_1 \end{cases}.$$

Sei nun $m := \{25, 7, 13, 31, 42, 17, 21, 10\}^T$. Dann ist die Summe in M_1:

$$S_1 = \sum_{m \in M} m \cdot \mathbb{1}_{M_1}(m) \quad \text{und} \quad S_2 = \left(\sum_{m \in M} m\right) - S_1 = \left(\sum_{m \in M} m\right) - \sum_{m \in M} m \cdot \mathbb{1}_{M_1}(m) \quad \text{und} \quad S := \sum_{m \in M} m = \underline{\underline{166}}$$

$$= S - S_1.$$

Die Quadratische Zielfunktion (Quadratische abweichung) der beiden Teilmengen-Summe:

$$\Delta := S_2 - S_1 = \left(\sum_{j=1}^{N} m_j\right) - 2 \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \mathbb{1}_{M_1}(m_j)$$

$$= S - 2 m^T x$$

$$= S^2 + 4 \cdot x^T \cdot Q \cdot x.$$

mit $Q = (q_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\dots,N\}^2}$ gegeben durch.

$q_{ij} = m_j \cdot (m_j - S)$ und $q_{j \cdot k} = q_{k \cdot j} = m_j \cdot m_k$, $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Dann ist Minimierung von Δ^2 äquivalent zur Minimierung von.

$y(x) = x^T Q x$.

Aus $\Delta^2 = S^2 + 4 x^T \cdot Q x \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \{0,1\}^8$

$$x^T Q x \geq -\frac{S^2}{4}, \quad \text{genau, dann wenn } \Delta = 0, \; m^T \cdot x = S/2$$

$$\geq -\frac{166^2}{4}$$

$$\geq -6889$$

$\Rightarrow x^T Q \cdot x \geq -6889$

Prüfen:

Gegeben sei $x^* = (0,0,0,1,1,0,0,1)^T$.

Also $M_1 = \{31, 42, 10\} \Rightarrow$

$m^T \cdot x^* = 31 + 42 + 10 = 83 = S/2$ ✓.

Also $\Delta = S - 2 \cdot 83 = 0$. folglich:

$$\Delta^2 = 0 = S^2 + 4 x^{*T} \cdot Q x^* \Rightarrow x^{*T} \cdot Q x = -\frac{S^2}{4} = -6889.$$

$*$ $Q = (q_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, N\}^2}$,

$q_{jj} = m_j \cdot (m_j - S)$ — ; $q_{j,k} = q_{k,j} = m_j \cdot m_k$.

$\Rightarrow \cdot q_{11} = m_1 \cdot (m_1 - S)$

$= 25 \cdot (25 - 166) = -25 \cdot 141 = \underline{\underline{-3525}}$

$\cdot q_{22} = m_2 (m_2 - S)$

$= 7 (7 - 166) = -1113$

$\cdot q_{33} = m_3 (m_3 - S)$

$= 13 (13 - 166) = -1989$

$\cdot q_{44} = m_4 (m_4 - S)$

$= 31 (31 - 166) = \underline{\underline{-4185}}$

$q_{55} = m_5 (m_5 - S)$

$= 42 (42 - 166) = \underline{\underline{-5208}}$

$q_{66} = m_6 (m_6 - S)$

$= 17 (17 - 166) = \underline{\underline{2533}}$

$q_{77} = m_7 (m_7 - S)$

$= 21 (21 - 166) = \underline{\underline{-3045}}$

$q_{88} = m_8 (m_8 - S)$

$= 10 (10 - 166) = \underline{\underline{1560}}$

$q_{12} = q_{21} = m_1 \cdot m_2 = 25 \cdot 7 = \underline{175}$

$q_{13} = q_{31} = m_1 \cdot m_3 = 25 \cdot 13 = 325$

$q_{14} = q_{41} = m_1 \cdot m_4 = 25 \cdot 31 = 775$

$q_{15} = q_{51} = m_1 \cdot m_5 = 25 \cdot 42 = 1050$

$q_{16} = q_{61} = m_1 \cdot m_6 = 25 \cdot 17 = 425$

$q_{17} = q_{71} = m_1 \cdot m_7 = 25 \cdot 21 = 525$

$q_{18} = q_{81} = m_1 \cdot m_8 = 25 \cdot 10 = 250$

$q_{23} = q_{32} = m_2 \cdot m_3 = 7 \cdot 13 = 91$

$q_{24} = q_{42} = m_2 \cdot m_4 = 7 \cdot 31 = 217$

$q_{25} = q_{52} = m_2 \cdot m_5 = 7 \cdot 42 = 294$

$q_{26} = q_{62} = m_2 \cdot m_6 = 7 \cdot 17 = 119$

$q_{27} = q_{72} = m_2 \cdot m_7 = 7 \cdot 21 = 147$

$q_{28} = q_{82} = m_2 \cdot m_8 = 7 \cdot 10 = 70$

$q_{34} = q_{43} = m_3 \cdot m_4 = 13 \cdot 31 = 403$

$q_{35} = q_{53} = m_3 \cdot m_5 = 13 \cdot 42 = 546$

$q_{36} = q_{63} = m_3 \cdot m_6 = 13 \cdot 17 = 221$

$q_{37} = q_{73} = m_3 \cdot m_7 = 13 \cdot 21 = 273$

$q_{38} = q_{83} = m_3 \cdot m_8 = 13 \cdot 10 = 130$

$q_{45} = q_{54} = m_4 \cdot m_5 = 31 \cdot 42 = 1302$

$q_{46} = q_{64} = m_4 \cdot m_6 = 31 \cdot 17 = 527$

$q_{47} = q_{74} = m_4 \cdot m_7 = 31 \cdot 21 = 651$

$q_{48} = q_{84} = m_4 \cdot m_8 = 31 \cdot 10 = 310$

$q_{56} = q_{65} = m_5 \cdot m_6 = 42 \cdot 17 = 714$

$q_{57} = q_{75} = m_5 \cdot m_7 = 42 \cdot 21 = 882$

$q_{58} = q_{85} = m_5 \cdot m_8 = 42 \cdot 10 = 420$

$q_{67} = q_{76} = m_6 \cdot m_7 = 17 \cdot 21 = 357$

$q_{68} = q_{86} = m_6 \cdot m_8 = 17 \cdot 10 = 170$

$q_{78} = q_{87} = m_7 \cdot m_8 = 210$.

Somit entsteht Q und

es gilt der perfekte Partition $31 + 42 + 10 = 83 = S/2 = 25 + 7 + 13 + 17 + 21$ ☑

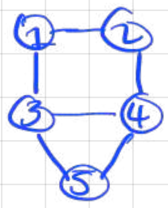
(c) Verifizieren Sie bitte die in BEISPIEL 4.1.3 angegebene QUBO-Formulierung für das Problems des maximalen Schnittes zum Graphen in **Abbildung 4.1** mit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ des Scripts und verifizieren Sie bitte mithilfe von Python und Qiskit, dass

$$x^* = (0, 1, 1, 0, 0)^T \in \{0, 1\}^5 \qquad \text{mit} \qquad y^* = (x^*)^T Q x^* = 5$$

die Zielfunktion maximiert, was auf $S = \{2, 3\}$ und $T = \{1, 4, 5\}$ führt.

Beispiel 4.1.3 besagt:

Wir betrachten den ungewichteten Graphen



gilt die Kantenmenge:

$K = \{12, 24, 13, 34, 35, 45\}$

Für $x = (x_1, \dots, x_5) \in \{0,1\}^5$ zählt

$f(x) = \sum_{uv \in K} (x_u + x_v - 2 x_u x_v)$.

Lösung

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$w: K \longrightarrow \mathbb{R},\ w = 1.$

Gesucht ist $E = S \uplus T$ sodass $\sum_{u \in S, v \in T} w(uv) = \sum_{uv \in K} (x_u + x_v - 2 x_u \cdot x_v)$ max wird

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \{0,1\}^{5 \times 1}.$

$f(x) = (x_1 + x_2 - 2x_1 x_2) + (x_2 + x_4 - 2x_2 \cdot x_4) + (x_1 + x_3 - 2x_1 \cdot x_3) + (x_3 + x_4 - 2x_3 \cdot x_4) + (x_3 + x_5 - 2x_3 \cdot x_5) +$
$\quad + (x_4 + x_5 - 2x_4 \cdot x_5)$

$= 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_4 - 2x_1 x_3 - 2x_3 x_4 - 2x_3 \cdot x_5 - 2x_4 x_5$

$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_5^2 - x_1 x_2 - x_2 x_1 - x_2 x_4 - x_4 x_2 - x_1 x_3 - x_3 x_1 - x_3 x_4 - x_4 x_3 - x_3 x_5 - x_5 x_3 - x_4 x_5 - x_5 x_4$

$$= x^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x.$$

und $x^* = (0, 1, 1, 0, 0)^T Q x^* = 5$ und die zugehörige Zerlegung ist

$S = \{2, 3\},\ T \{1, 4, 5\}.$

(d) Verifizieren Sie bitte, dass der jeweilige Strafterm in BEMERKUNG 4.1.1 null wird, wenn die in der Tabelle angegebene Nebenbedingung erfüllt ist, bzw. ansonsten positiv ist. Geben Sie bitte auch die "verbale Interpretation" der jeweiligen Nebenbedingung an, wie z.B.: Die Erfüllung der Nebenbedingung $x_1 + x_2 \leq 1$ bedeutet inhaltlich, dass "*höchstens eine der beiden Variablen, also entweder x_1 oder x_2, in der Optimierung Berücksichtigung finden darf*".

Lösung

Für binäre Variablen : $x_i \in \{0,1\} \Rightarrow x_i^2 = x_i$

Laut Normalform (4.2), $F(x) = x^T \cdot Q x.$

Nach Bemerkung 4.1.1 Lassen sich binäre Variable der obigen Form als nichtnegative Polynomterme formulieren, die genau dann 0 sind, wenn die Bedingunge erfüllt ist: Also.

$P(x)=0$, falls NB erfüllt, $P(x)>0$ sonst.

$\Rightarrow$ Die Sechs typische Nebenbedingungen (mit $\xi>0$) sind:

1. $x_1+x_2 \leq 1$:
   $P = \xi x_1 x_2$
   $\Rightarrow \underset{x_1 x_2}{(1,1)}$ die NB nicht erfüllt und nicht erlaubt, aber alle andere Punkten $(1,0), (0,1), (0,0)$ erfüllen NB.

2. $x_1+x_2 \geq 1$:
   $P = \xi(1-x_1)(1-x_2)$
   $\Rightarrow$ NB nicht erfüllt bei $\overset{x_1 x_2}{(0,0)}$ also nicht erlaub.
   Aber alle andere Punkte $(1,1), (0,1), (1,0)$ erfüllen die NB.

3. $x_1+x_2=1$
   $P=\xi(1-x_1-x_2+2x_1x_2)$.
   $\Rightarrow$ Die NB sind nur für $(1,0), (0,1)$ erfüllt

4. $x_1 \leq x_2$;
   $P=\xi x_1(1-x_2)$
   $\Rightarrow$ NB ist für $(1,1), (0,0), (0,1)$ erfüllt, aber nicht für $(1,0)$.

5. $x_1=x_2$;
   $P=\xi(x_1+x_2-2x_1x_2)$.
   $\Rightarrow$ NB ist nur für $(0,0), (1,1)$ erfüllt, aber nicht für $(1,0), (0,1)$.

6. $x_1+x_2+x_3 \leq 1$.
   $P=\xi(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

- Für (000): $P=0$ und NB erfüllt.
- Für $(100, 010, 001)$: $P=0$ und NB erfüllt.
- Für $(110, 101, 011)$: $P=\xi \neq 0 \Rightarrow$ NB nicht erfüllt.
- Für (111): $P=3\xi \neq 0 \Rightarrow$ NB nicht erfüllt.

Jede NB wird durch einen Strafterm modelliert: 0 im erlaubten Fall, positiv im Verbotenen.

Dadurch lassen sich beliebige logische Bedingungen in die QUBO-Zielfunktion einbauen ohne zusätzliche Variablen.

Aufgabe 5.2:

Es Seie die Binärevariablen: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{0,1\} \approx$ (Eisen, Brot, Torte, Aluminium)

Laut Aufgabestellung können bis zu vier verschiedene Produkte hergestellt werden.

Gegeben seien weiterhin die Einzelzengewinne:

$P_{x_1}=50$; $P_{x_2}=30$, $P_{x_3}=40$, $P_{x_4}=45$.

Es seien außerdem gegeben die Wirkung der Paaren Produktion (S) mit

$S_{x_1x_2}=-40$; $S_{x_1x_3}=-40$; $S_{x_2x_3}=+10$, $S_{x_4x_2}=+20$; $S_{x_4x_3}=+5$.

$\Rightarrow$ Die Gewinfunktion ist definiert durch:

$$P(x)=50x_1+30x_2+40x_3+45x_4-40x_1x_2-40x_1x_3+10x_2x_3+20x_4x_2+5x_4x_3.$$

(a) Was sollten wir produzieren, um möglichst viel Geld zu verdienen? – Lösen Sie dieses Problem zunächst rein kombinatorisch! Wie viele Szenarien sind zu betrachten? Geben Sie den maximalen Gewinn und die hergestellten Produkte an!

Lösung

Es gibt $2^4=16$ Möglichkeiten.

Das Maximum ist $P_{x_1}=50$.

Die möglichen Kombinationen ergibt: (beispielsweise)

$x_1 + x_4 = 50+45+20 = 115$ ✓

$x_2 + x_3 = 30+40+10 = 80$

$x_1 + x_2 = 50+30-40 = 40$ (nein).

$x_1 + x_3 = 50+40-40 = 50$ (nein)

$x_4 + x_3 = 45+40+5 = 90$

$x_2 + x_3 + x_4 = 30+40+45+10+5 = 130$ (max)

$x_1 + x_2 + x_3 = 50+30+40-40-40-10 = 50$

$x_1 + x_3 + x_4 = 50+40+45-40+20+5 = 80$

$x_1 + x_2 + x_3 = 50+30+45-40+20 = 105$.

oder:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50+30+40+45-40-40+10+20+5 = \underline{\underline{80}}$

$\Rightarrow$ Bestmöglicher Wert nach ausprobieren:

$P_{max} = 130$ bei (x_2, x_3, x_4) also $x = (0,1,1,1)$
Brot, Torte, Aluminium.

(b) Formulieren Sie bitte die Zielfunktion des QUBO in den beiden Normalformen (4.2) mit Q_1 und Q_2 und lösen Sie auch diese mithilfe von Python und Qiskit (also nicht wie im obigen Notebook von J. WEHNER).

Lösung

$F(x) = -P(x)$ soll minimiert werden $\Rightarrow$ $P(x)$ maximieren.

Sei (Eisen, Brot, Torte, Aluminium) $:= (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

- Normalform Q_1 (Oberes Dreieck): (siehe Bedingung 4.2).

$F(x) = \sum_{i \le j} (Q_1)_{ij} \cdot x_i x_j$ mit $(Q_1)_{ii} = -p_i$ und $(Q_1)_{ij} = -c_{ij}$.

$$\Rightarrow \quad Q_1 = \begin{pmatrix} -50 & 40 & 40 & -20 \\ 0 & -30 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -45 \end{pmatrix}$$

- Normalform Q_2 (symmetrisch):

$F(x) = x^T \cdot Q_2 \cdot x$ mit

$(Q_2)_{ii} = -p_i$, $(Q_2)_{ij} = -\frac{1}{2} c_{ij}$.

$$\Rightarrow Q_2 = \begin{pmatrix} -50 & 20 & 20 & -10 \\ 20 & -30 & -5 & 0 \\ 20 & -5 & -40 & -2{,}5 \\ -10 & 0 & -2{,}5 & -45 \end{pmatrix}$$

Aus a) für $x = (0,1,1,1)$ ist $P(x) = 130 \Rightarrow F = -130$. (also minimum).

(c) Wenn zusätzlich die Nebenbedingung eingehalten werden soll, dass (nur) genau zwei verschiedene der oben angegebenen Produkte hergestellt werden können, was ergibt sich als optimale Lösung (maximalen Gewinns für welche Produkte)?

Lösung

Genau zwei verschiedene produkte herstellen können bedeutet

$\sum x_i = 2$ gelten muss $\Rightarrow$ es gibt nur 6 Möglichkeiten:

$x_1 + x_4 = 50+45+20 = 115$

$x_4 + x_3 = 45+40+5 = 90$

$x_2 + x_3 = 30+40+10 = 80$

$x_1 + x_3 = 50+40-40 = 50$

$x_1 + x_2 = 50+30-40 = 40$

$x_2 + x_4 = 30+45 = 75$.

$\Rightarrow$ Best paar: $x = (1,0,0,1) \approx$ (Eisen + Alluminum)

$P_{max} = \underline{\underline{115}}$

(d) Formulieren Sie bitte eine Nebenbedingung für (c), modifizieren Sie die Zielfunktion F aus (b) und lösen Sie das erhaltene QUBO mithilfe von Python und Qiskit!

Losung:

Für die Herstellung von genau 2 durch das Penalty:

$\varrho \cdot \left(\sum_i x_i - 2 \right)^2, \quad \varrho > 0$

mit $x_i^2 = x_i$ ergibt:

$$\left(\sum x_i - 2\right)^2 = \sum_i x_i + 2 \sum_{i<j} x_i x_j - 4 \sum_i x_i + 4$$
$$= -3 \sum_i x_i + 2 \sum_{i<j} x_i x_j + 4$$

Zu minimieren ist (Penalty Funktion):

$F_\varrho(x) = -P(x) - \varrho\left(\sum x_i - 2\right)^2$ (siehe Kap 4 S. 200 - 204).

$\Rightarrow F_\varrho(x) = 50x_1 + 36x_2 + 40x_3 + 45x_4 - 40x_1x_2 - 40x_1x_3 + 16x_2x_3 + 20x_1x_4 + 5x_3x_4 - \varrho(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$