Übungsaufgaben 1.3

Verifizieren Sie bitte durch Nachrechnen folgende Behauptungen:

a) Nach Beispiel 1.3.3 ist $P_{\psi_0}(|1\rangle) = \frac{1}{2}$

Lösung:

Nach definition 1.3.1 Kapitel 1 gilt:

Allgemein die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $|\psi\rangle$ im Zustand $|x\rangle$ gemessen werden kann durch:

$$P_\psi(|x\rangle) = |\langle x|\psi\rangle|^2$$, $\langle x|$ Komplex Konjugierte Bra-Vector im Zustand $|x\rangle$.

hier ist $x = 1$ und $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle \in \mathcal{H}$

$$\Rightarrow P_{\psi_0}(|x\rangle) = |\langle 1|\psi_0\rangle|^2$$

$$= \left|\langle 1|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot|1\rangle\right)\right|^2$$

Skalar produkt eigenschaft

$$\overset{\downarrow}{=} \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle\right|^2 + \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2\langle 1|0\rangle + \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2\langle 1|1\rangle$$

wegen orthonormalität bedingung ($\langle 0|0\rangle = 1 = \langle 1|1\rangle$, $\langle 0|1\rangle = 0 = \langle 1|0\rangle$)

$$\overset{\downarrow}{=} \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2\cdot 0 + \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2\cdot 1$$

$$= 0 + \frac{|i|^2}{|\sqrt{2}|^2}$$ (eigenschaft von i und absolute Betrag)

$$= \frac{|-1|}{|2|} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$ ∎

b) Die Projektion von $|x\rangle$ auf den Zustand $|\psi\rangle$ ergibt sich als Fourier-Koeffizient wie aus AN/LA bekannt:

$$(|\psi\rangle\langle\psi|)|x\rangle = \langle\psi|x\rangle\cdot|\psi\rangle$$

Lösung: sei $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\psi_i|e_i\rangle$, $e_i := \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, mit 1 an der iten stelle.

und $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$: $x = \sum_{j=0}^{n}\langle x|e_j\rangle\cdot e_j \Rightarrow |x\rangle = \sum_{j=0}^{n} x_j|e_j\rangle$

LHS:

$$\Rightarrow (|\psi\rangle\langle\psi|) = \left(\sum_i \psi_i|e_i\rangle\right)\cdot\left(\sum_j \bar{\psi}_j\langle e_j|\right) = \sum_{i,j}^{nm}\psi_i\bar{\psi}_j|e_i\rangle\langle e_j|.$$

und somit

$$(|\psi\rangle\langle\psi|)|x\rangle = \left(\sum_{i,j}^{nm}\psi_i\bar{\psi}_j|e_i\rangle\langle e_j|\right)\cdot\left(\sum_j x_j|e_j\rangle\right)$$

$$= \sum_{i,j}^{nm}\psi_i\bar{\psi}_j|e_i\rangle\langle e_j|x_j\rangle$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m}\bar{\psi}_j\cdot x_j\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_i|e_i\rangle\right)$$

$$= \underline{\underline{\langle\psi|x\rangle\cdot|\psi\rangle}}$$

c) Die Abbildungsmatrizen der Projection auf die Basiszustände $|0\rangle$ bzw $|1\rangle$ eines Qubits ergeben sich zu:

$$|0\rangle\langle 0| \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |1\rangle\cdot\langle 1| \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Sei $|0\rangle \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ und $|1\rangle \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$,

wegen Imaginärteil $= 0$.

$$\Rightarrow |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (\bar{1}, \bar{0}) = \begin{pmatrix} 1\cdot\bar{1} & 1\cdot\bar{0} \\ 0\cdot\bar{1} & 0\cdot\bar{0} \end{pmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \;\; 1) = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

d) Zeigen Sie bitte, dass die Matrizen $\{|0\rangle\langle 0|, |0\rangle\langle 1|, |1\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$ eine Basis des des $\mathbb{C}^{2\times 2}$ bilden.

Lösung

aus c) gilt $|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

und
$$|0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \;\; 1) = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ 0\cdot 0 & 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \;\; 0) = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 & 0\cdot 0 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

z.z ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ein Basis des $\mathbb{C}^{2\times 2}$ bilden.

Seien $E_{11} = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{12} = |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

z.z ist i) E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} linear unabh sind und.

ii). Existenz der Darstellung („Aufspannen")

iii) Eindeutigkeit der Darstellung

Beweis

i) Linear unabh.

Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ beliebig.

z.z: $a\cdot E_{11} + b\cdot E_{12} + c\cdot E_{21} + d\cdot E_{22} \stackrel{!}{=} 0$.

$$\Leftrightarrow a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left| \begin{matrix} a=0, & b=0 \\ c=0, & d=0 \end{matrix} \right.$ und somit linear unabhängig.

ii) Existenz der Darstellung

Sei A wie oben beliebig. gesucht sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit

$$A = \alpha E_{11} + \beta E_{12} + \gamma\cdot E_{21} + \delta\cdot E_{22} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha = a, \; \beta = b, \; \gamma = c, \; \delta = d.$

Damit existieren für jedes A passende Koeffizienten

$\Rightarrow (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ existieren auf $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

iii) <u>Eindeutigkeit der Darstellung</u>

Ang es gäbe zwei Darstellungen;

$$A = \alpha E_{11} + \beta \cdot E_{12} + \gamma \cdot E_{21} + \delta \cdot E_{22} = \alpha' E_{11} + \beta' \cdot E_{12} + \gamma \cdot E_{21} + \delta \cdot E_{22}.$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \alpha') \cdot E_{11} + (\beta - \beta') E_{12} + (\gamma - \gamma') E_{21} + (\delta - \delta') E_{22}$$

wegen der linearen Unabhängigkeit aus i) müssen:

$(\alpha - \alpha') = 0$, $(\beta - \beta') = 0$, $(\gamma - \gamma') = 0$, $(\delta - \delta') = 0$.

Also $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$. ↯

$\Rightarrow$ Die Darstellung ist eindeutig.

Damit ist $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ ein Basis von $\mathbb{C}^{2\times 2}$. ■

c) Zeigen Sie bitte, dass das komplexe Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ auf $\mathbb{C}^2$ die folgende Eigenschaften für $|\varphi_j\rangle \simeq \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}, j \in \{1,2\}$, $|\psi\rangle \simeq \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ sowie $a_j \in \mathbb{C}, j \in \{1,2\}$ besitzt.

1) $\langle \varphi_1 | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \varphi_1 \rangle} = \langle \psi | \varphi_1 \rangle^*$.

Lösung.

$$\text{LHS: } \langle \varphi_1 | \psi \rangle = \overline{|\varphi_1\rangle}^T \cdot |\psi\rangle$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \;\Big|\; \cdot (\;)^T$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}^T \cdot \overline{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}} \;\Big|\; \cdot \overline{(\;)}$$

$$= \overline{\left(\overline{\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}^T} \cdot \overline{\overline{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}}} \right)}$$

$$= \overline{\overline{\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}}$$

$\simeq$ transponierte komplex Konjugierte.

$$= \langle \alpha | \varphi_1 \rangle = \overline{\langle \alpha | \varphi_1 \rangle} = \underline{\underline{\langle \psi | \varphi_1 \rangle^*}}$$

2) $\langle \psi | a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 \rangle = a_1 \cdot \langle \psi | \varphi_1 \rangle + a_2 \cdot \langle \psi | \varphi_2 \rangle$

Lösung

$$\text{LHS: } \langle \psi | a_1 \varphi_1 + a_2 \cdot \varphi_2 \rangle = \langle \psi | \big(|a_1 \cdot \varphi_1\rangle + |a_2 \cdot \varphi_2\rangle \big)$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}}^T \cdot \left(a_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (\bar{\gamma}, \bar{\delta}) \cdot a_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + (\bar{\gamma}, \bar{\delta}) \cdot a_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 (\bar{\gamma}, \bar{\delta}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + a_2 (\bar{\gamma}, \bar{\delta}) \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 \langle \psi | \varphi_1 \rangle + a_2 \langle \psi | \varphi_2 \rangle$$

■

3) $\langle a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2|\varphi\rangle = \bar{a}_1\langle\varphi_1|\varphi\rangle + \bar{a}_2\langle\varphi_2|\varphi\rangle$

Lösung

LHS: $\langle a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2|\varphi\rangle = \langle a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2||\varphi\rangle$

$$= \left(\langle a_1\cdot\varphi_1| + \langle a_2\cdot\varphi_2|\right)|\varphi\rangle$$

skalar produkt linear

$$\overset{?}{=} \left(\bar{a}_1\langle\varphi_1| + \bar{a}_2\langle\varphi_2|\right)|\varphi\rangle$$

$$= \bar{a}_1\langle\varphi_1||\varphi_1\rangle + \bar{a}_2\langle\varphi_2||\varphi\rangle$$

$$= \bar{a}_1\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle + \bar{a}_2\langle\varphi_2|\varphi\rangle \quad \boxtimes$$

4) $\|\varphi_1\|_2^2 = \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle \geq 0$

Lösung

LHS: $\|\varphi_1\|_2^2 = |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = \bar{\alpha}_1\cdot\alpha_1 + \bar{\beta}_1\cdot\beta_1 = (\overline{\alpha_1, \beta_1})\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle$

$\geq 0 \; \boxtimes$

RHS: $\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle \not< 0$. (durch den absoluten betrag quadrat).

$$\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = \overline{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = \bar{\alpha}_1\cdot\alpha_1 + \bar{\beta}_1\cdot\beta_1 = |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = \|\varphi_1\|_2^2 \quad \boxtimes$$

f) Geben Sie bitte die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $H: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ an, die die Rechenbasis $\{|0\rangle, |1\rangle\} \simeq \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ auf die Vorzeichenbasis. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right\} \simeq \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ transformiert.

Lösung

Sei $|+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ benannt als measuring the plus state

$|-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ benannt als measuring the minus state.

$$\Rightarrow |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Also die Abbildungsmatix ist $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Bestimmen Sie:

1) die Determinante $\det(H)$:

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{-1}}$$

2) die Eigenwerte und Eigenvektoren von H

Lösung

• Eigenwerte

• Characteristische polynom:

$$\det(H-\lambda\cdot I_2) = p(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda} + \lambda^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \lambda^2 - 1$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \underline{\underline{\pm 1}}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von H: $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$.

• Eigenzustand/Vektor zum Eigenwert $\lambda = +1$

Sei $|q_1\rangle := \begin{pmatrix} q_1^x \\ q_1^y \end{pmatrix}$ ein eigenvektor.

z.z. ist $(H-\lambda_1\cdot I_2)\cdot\vec{q}_1 \overset{!}{=} 0$ $(H|q_1\rangle = \lambda_1\cdot|q_1\rangle)$.

$$(H-\lambda_1\cdot I_2)|q_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} q_1^x \\ q_1^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) & 0 \end{array}\right)}_{(*)} \quad \text{(Homogenes LGS)}$$

Lösen der LGS; $(*)$

Nebenrechnung: $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Gauß algorithmus liefert:

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}\cdot\sqrt{2}]{\mathrm{I}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)} \begin{pmatrix} \left(\cancel{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\right)\left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}}\right) & \left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}\right) \\ \left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{1}\right) & -\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{1}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-\sqrt{2}} \\ 1 & -(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{tausche I und II}} \begin{pmatrix} 1 & -(1+\sqrt{2}) \\ 1 & \frac{1}{1-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -(1+\sqrt{2}) \\ \underbrace{1-1}_{=0} & \underbrace{\left(-\frac{1-\sqrt{2}}{1}\right)-\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)}_{=\frac{(-1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})-1}{(1-\sqrt{2})} = \frac{(-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+2)-1}{(1-\sqrt{2})} = \frac{1-1}{(1-\sqrt{2})} = \frac{0}{(1-\sqrt{2})}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(1+\sqrt{2}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow q_1^y$ ist frei wählbar; $q_1^y := t \in \mathbb{C}$.

$1 \cdot q_1^x - (1+\sqrt{2}) \cdot q_1^y = 0$

$q_1^x - (1+\sqrt{2}) \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{q_1^x = (1+\sqrt{2}) \cdot t}}$.

$\Rightarrow |q_1\rangle = \begin{pmatrix} q_1^x \\ q_1^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} t$, mit $t \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow \| |q_1\rangle \| = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+2+1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Wähle speziell $t := \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \Rightarrow |q_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$

- Eigenvector zum Eigenwert $\underline{\underline{\lambda_2 = -1}}$.

Sei $|q_2\rangle := \begin{pmatrix} q_2^x \\ q_2^y \end{pmatrix}$ ein eigenvektor.

z.z. ist $(H - \lambda_2 \cdot I_2) \cdot \vec{q}_2 \overset{!}{=} 0$ $(H|q_2\rangle = \lambda_2 \cdot |q_2\rangle)$.

$$(H - \lambda_2 \cdot I_2) \cdot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - (-1) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - (-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_2^x \\ q_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix}}_{(*)} \cdot \begin{pmatrix} q_2^x \\ q_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung: $\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Löse der LGS (*):

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) \\ \mathrm{II} \cdot (\sqrt{2}) \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} \left(\frac{\cancel{1+\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{1+\sqrt{2}}}\right) & \left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}\right) \\ \left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{1}\right) & \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{1}\right) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Vertausche I und II}} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1 & \frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}-\mathrm{II} \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1-1 & \underbrace{(-1+\sqrt{2}) - \frac{1}{1+\sqrt{2}})}_{=\frac{(-1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})-1}{1+\sqrt{2}} = \frac{(-1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+2)-1}{1+\sqrt{2}} = \frac{(2-1)-1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-1}{1+\sqrt{2}} = \frac{0}{1+\sqrt{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow q_2^y$ ist frei wählbar; $q_2^y := t \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot q_2^x + (-1+\sqrt{2}) q_2^y = 0 \\ 0 \quad + \quad 0 \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow q_2^x + (-1+\sqrt{2}) t = 0 \Rightarrow q_2^x = (1-\sqrt{2}) t$.

$\Rightarrow |q_2\rangle = \begin{pmatrix} q_2^x \\ q_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$, mit $t \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \| |q_2\rangle \| = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{1^2 - 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

wähle speziell $t := \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$.

$\Rightarrow |q_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$

Probe: $$(H - \lambda_2 \cdot I_2)|q_2\rangle = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)}^{= -\frac{1}{\sqrt{8-4\sqrt{2}}}} + \overbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)}^{\frac{1}{\sqrt{8-4\sqrt{2}}}} \\ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)}_{= \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{8-4\sqrt{2}}}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)}_{\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{8-4\sqrt{2}}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

<u>Zusammenfassung</u>

Es gibt 2 verschiedene Eigenwerte $\to$ also 2 Eigenräume.

- Jeder Eigenraum ist 1-dimensional → unendlich viele Eigenvektoren (aber alle auf einer linie).
- Insgesamt:
- Unendlich viele Eigenvektoren,
- aber 2 linear unabhängige Eigenvekoren. (die Beide obige Eigenvektoren sind linear unabhängig weil sie zu zwei verschiedene Eigenvectoren gehören und ihre summe ≠ 0.

3- das Ergebniss der Matrixmultiplikation $\bar{H}^T \cdot H$ und $H \cdot \bar{H}^T$

Lösung. $\bar{H}^T \cdot H$.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ (Begründung: $\bar{H}$ ist die Komplex konjugierte Matrix und in diesem Fall den imaginären Teil = 0.)

$$\Rightarrow \bar{H}^T \cdot H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{I} := (\text{Identitätsmatrix})}$$

$\Rightarrow \bar{H}^T \cdot H = \mathbb{I}$ also H ist unitaire und ist der Hadarmand matrix.

- $H \cdot \bar{H}^T$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$ und aus 3i) ist $\bar{H}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow H \cdot \bar{H}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}.$$

Zusammenfassung: die 2 Bedingungen für Unitäre matrixen sind erfüll.

und man kann sogar sagen $\bar{H}^T = H^{-1}$

also die Konjugierte Transpose unitäre Matrix = Inverse Unitäre Matrix.

Aufgabe 1-4 :

(a) Section 1.2.1 Splitting information into bits – Quick Exercises:

1. Think of a number and try to write it down in binary.
2. If you have n bits, how many different states can they be in?

a)

1-Lösung

$$100_{10} = 64 + 32 + 4$$
$$= 2^6 + 2^5 + 2^4$$
$$= (01110000)_2.$$

2- Lösung

Jedes bit hat 2 Zustände $\{0,1\}$.

Also n bits hat 2^n Zustände..

(siehe Basiszustände $|j\rangle$, $j = \{0, \cdots, 2^n-1\}$ im Skript Kapitel 1).

(b) Section 1.3.1.3 Classical vs. Quantum Bits - Exploring Qubits with Qiskit: Run the Python Qiskit Codes not only for the given qubit $|q_0\rangle$ but also for $|\psi_1\rangle$ and $|\psi_3\rangle$ (from BEISPIEL 1.3.2).

Gegeben:

$$|\psi_1\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot|1\rangle \, ; \quad |\psi_3\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}\cdot|1\rangle \, , \quad |q_0\rangle = |0\rangle.$$

Lösung

Nach Satz 1.5.1 : Mess regel - gilt:

$$P_\psi(|x\rangle) = |\langle x|\psi\rangle|^2 \quad , \text{ bei } |\psi\rangle = \alpha|0\rangle, \beta|1\rangle, \; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

für ψ_1:

$$\Rightarrow P_{\psi_1}(|0\rangle) = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{|i|^2}{|\sqrt{3}|^2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

ein global phase $e^{i\theta}$ ändert die Mess wahrscheinlichkeit nicht.

$$P_{\psi_1}(|1\rangle) = \left|e^{i\pi/3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2 = \underbrace{\left|e^{i\pi/3}\right|^2}_{1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1^2 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

für ψ_3:

$$P_{\psi_0}(|0\rangle) = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$$

$$P_{\psi_1}(|1\rangle) = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

Jeder Zustand lässt sich schreiben als:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \qquad \text{(siehe Skript Bloch-Parameter).}$$

d.h θ und ϕ sind Kugelkoordinaten auf der Bloch-Späre.

Also $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$

Für ψ_1:

$$|\psi_1\rangle = e^{i\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + e^{i(\pi/3 - \pi/2)}\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) = e^{i\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + e^{i(-\pi/6)}\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right)$$

Da $-\pi/6$ und $11\pi/6$ dieselbe Phase module 2π sind, ist:

$\phi_1 = \frac{11\pi}{6}.$

$\theta_1 = 2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 1.91063$

$\Rightarrow \left(1.91063, \frac{11}{6}\pi\right).$

Für ψ_3:

Beide Amplituden sind reell ≥ 0, also keine zusätzliche globale Phase nötig.

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$, $\theta = 2\arccos(\sqrt{3}/2) = 2\arcsin(1/2) = \pi/3$

- $\phi = \arg\left(\frac{1}{2}\right) - \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 - 0 = 0.$

$\Rightarrow$ punkt $(\pi/3, 0).$

(c) Section 1.3.2.1 The Rules of Measurement: Normalisation – Quick Exercises:

1. Create a state vector that will give a $\frac{1}{3}$ probability of measuring $|0\rangle$.
2. Create a different state vector that will give the same measurement probabilities.
3. Verify that the probability of measuring $|1\rangle$ for these two states is $\frac{2}{3}$.

1- Lösung

Gesucht ist $\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, sodass

$\mathbb{P}_{\psi_0}(|0\rangle) = \frac{1}{3}.$

Aus dem Skript, $\mathbb{P}_{\psi_x}(|x\rangle) = |\langle x|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2$

Sei $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle.$

$\Rightarrow \mathbb{P}_{\psi_0}(|0\rangle) = \left|\sqrt{\frac{1}{3}}\right|^2 = \frac{1}{3}$ ✓

2 Lösung.

Sei nun $\alpha := \frac{i}{\sqrt{3}}$ und $|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}|0\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle.$

$\Rightarrow \mathbb{P}_{\psi_0}(|0\rangle) = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}\right| \overset{|i|^2=1}{=} \frac{1}{3}$ ✓

3. Lösung

- Für ψ_1:

$\mathbb{P}_{\psi_1}(|1\rangle) = \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ ✓

- Für ψ_2:

$\mathbb{P}_{\psi_2}(|1\rangle) = \left|i\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2 = |i|^2 \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ ✓

(e) Section 1.3.3.2 The Bloch Sphere: Visually Representing a Qubit State – Quick Exercises:
Use `plot_bloch_vector()` or `plot_bloch_vector_spherical()` to plot a qubit in the states:

1. $|0\rangle$,
2. $|1\rangle$,
3. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$,
4. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$,
5. $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{i}{1}$.

Sei $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$.

mit

$\theta = 2\arccos(\alpha)$, $\phi = \arg(\beta) - \arg(\alpha) \pmod{2\pi}$. ; $\vec{r} := (x, y, z) = (\sin\theta\cos\theta, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$

1) Lösung

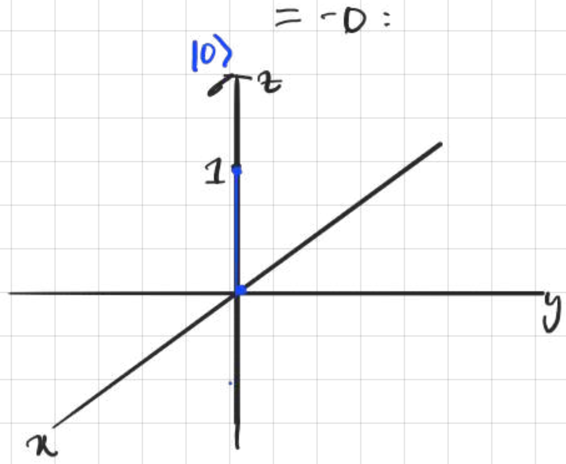
$|0\rangle = \alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow \theta = 2\arccos(1) = 0$, und somit $\phi = \arg(0) - \arg(1)$
$= -\arg(1)$
$= -0$:

$\sin\theta = \sin(0) = 0$

$\cos\theta = \cos(0) = 1$

$\cos\phi = \cos(0) = 1$, $\sin\phi = \sin(0) = 0$

$\Rightarrow \vec{r} = (0\cdot 1, 0\cdot 0, 1) = (0, 0, 1)$.



2) Lösung

$|1\rangle$

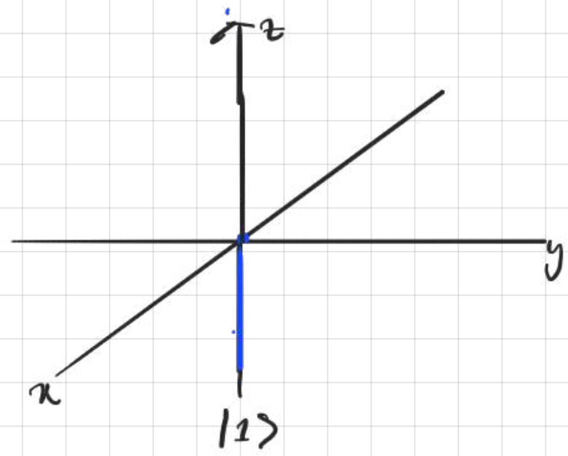
$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$ und $\theta = 2\arccos(0) = \pi$, $\phi = \arg(1) - \arg(0)$
$= 0$.

$\sin\theta = \sin(\pi) = 0$, $\sin\phi = \sin(0) = 0$

$\cos(\theta) = \cos(\pi) = -1$, $\cos\phi = \cos(0) = 1$.

$\Rightarrow \vec{r} = (0\cdot -1, 0\cdot 0, -1)$

$\vec{r} = (0, 0, -1)$



3) $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

Lösung

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\phi = \sin(0) = 0$

$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\phi = \cos(0) = 1$

$\Rightarrow \vec{r} = (1\cdot 1, 1\cdot 0, 0)$
$= (1, 0, 0)$.

4) $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$.

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{-i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \arg(-i) - \arg(1) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) - 0 = -\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\phi = \sin(-\pi/2) = -1$.

$\cos\theta = \cos(\pi/2) = 0$, $\cos\phi = \cos(-\pi/2) = 0$.

$\Rightarrow \vec{r} = (1\cdot 0, 1\cdot -1, 0) = \underline{\underline{(0, -1, 0)}}$.

5) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|0\rangle + |1\rangle \right).$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{i}{\sqrt{2}},\ \beta = 1 \Rightarrow \theta = 2\arccos\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right),\ \phi = \arg(1) - \arg(i) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi/2$$

$$= -\pi/2.$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sin(-\pi/2) = -1,\quad \sin\phi = \sin(\pi/2) = 1$$

$$\cos\theta = \cos(-\pi/2) = 0,\quad \cos\phi = \cos(\pi/2) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} = (-1\cdot 0,\ -1\cdot 1,\ 0)$$

$$= \underline{\underline{(0, -1, 0)}}$$

Das ist exakt dasselbe Zustand wie in 4) bis auf globale Phase. daher den gleichen Bloch-punkt.