Übungsaufgabe 2.1

Beweisen Sie bitte die folgenden vier Aussagen aus LEMMA 1.4.1 allgemein für eine unitäre Transformation $U \in \mathbb{C}^{N\times N}$ für $N \in \mathbb{N}$:

(1) Es ist $|\det(U)| = 1$ für $N \in \mathbb{N}$.

(2) Die Operation $U|\psi\rangle$ kann für $N = 2$ geometrisch als eine Drehung/Rotation der BLOCH'schen Sphäre veranschaulicht werden.

(3) Alle Eigenwerte λ von U haben den komplexen Betrag 1, d.h. unitäre Transformationen operieren auf den zugehörigen Eigenvektoren $\lambda = e^{i\vartheta}$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ wie eine Drehung auf der BLOCH'schen Sphäre im Falle $N = 2$.

(4) Für zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind die beiden zugehörigen Eigenzustände (Eigenvektoren) $|e_j\rangle$, $j \in \{1, 2\}$, orthogonal, d.h. es gilt $\langle e_1|e_2\rangle = 0$.

Lösung

Lemma 1.4.1: Eine Operation oder Transformation U eines qubits (Quantenzustands) $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ für $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ muss normerhaltend, also unitär sein, was auch als 3. Grundpostulat der Quantenmechanik bezeichnet wird d.h. es muss:

$$U^*U = UU^* = E_n$$

gelten.

Beweis:

i) $|\det(U)| = 1$.

Lösung

Sei U eine Unitäre Matrix.

$$|\det(U^+U)| = |\det(U^+)\cdot\det(U)| \overset{\text{eigenchaft von n}}{=} |\det(U^+)|\cdot|\det(U)|$$

$$= |\det(\bar{U}^T)|\cdot|\det(U)| \overset{\text{eigenchaft unitäre Matrix}}{=} |\det(\bar{U})|\cdot|\det(U)|$$

$$= \overline{|\det(U)|}\cdot|\det(U)|$$

$$= |\det(U)|^2$$

$U^+U = E_n$. $\overset{*}{=} \det(E_n)$

$$= 1 \quad ✓.$$

$\Rightarrow |\det(U)| = 1$

$\varnothing$

ii) Lösung

$N = 2$: $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $|\psi\rangle := \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$.

Sei $U := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ $\quad = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Bitte } U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \text{ benutzen.}}$ *

$$\Rightarrow U|\psi\rangle = U\cdot\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

der bloch'schen Sphäre besagt: (Siehe Skript von Prof. Dr. Marcus Martin Kapitel 1 S. 33):

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = r_\alpha e^{i\varphi_\alpha}\cdot|0\rangle + r_\beta e^{i\varphi_\beta}\cdot|1\rangle = e^{i\varphi_\alpha}\cdot\left(r_\alpha|0\rangle + r_\beta e^{i(\varphi_\beta-\varphi_\alpha)}|1\rangle\right)$$

$$\overset{|e^{i\varphi_\alpha}|=1}{\hat{=}} r_\alpha\cdot|0\rangle + r_\beta e^{i(\varphi_\beta-\varphi_\alpha)}\cdot|1\rangle$$

$$\overset{\left\{\begin{array}{l} r_\alpha=\cos(\frac{\theta}{2}),\ r_\beta=\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \phi=\varphi_\beta-\varphi_\alpha \end{array}\right.}{\hat{=}} \cos(\tfrac{\theta}{2})\cdot|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\tfrac{\theta}{2})|1\rangle \quad (*)$$

$$\Rightarrow U|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta}{2}) \\ e^{i\phi}\cdot\sin(\theta/2)\end{pmatrix}$$

$$\hat{=} \begin{pmatrix} a_{11}\cdot\cos(\frac{\theta}{2}) + a_{12}\cdot e^{i\phi}\cdot\sin(\frac{\theta}{2}) \\ a_{21}\cdot\cos(\frac{\theta}{2}) + a_{22}\cdot e^{i\phi}\cdot\sin(\frac{\theta}{2})\end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{\hat{=}} \underbrace{\left[a_{11}\cdot\cos(\tfrac{\theta}{2}) + a_{12}e^{i\phi}\cdot\sin(\tfrac{\theta}{2})\right]}_{=:\alpha_1}\cdot|0\rangle + \underbrace{\left[a_{21}\cdot\cos(\tfrac{\theta}{2}) + a_{22}\cdot e^{i\phi}\cdot\sin(\tfrac{\theta}{2})\right]}_{=:\beta_1}|1\rangle$$

$$= \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$$

was wieder die bloch'sche Sphäre entspricht. Somit entspricht jeder Einwirkung U (bis auf globale Phase) entspricht einer Drehung der Bloch'sche Sphäre.

iii) Beweis

Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein EW und $|\psi\rangle$ ein EV eines Unitären Abbildungsmatrix. U, d.h

$U|\psi\rangle = \lambda\cdot|\psi\rangle$, d.h $\langle\psi|U^* = \overline{(\lambda|\psi\rangle)}^T = \bar{\lambda}\langle\psi|$

Somit gilt wegen $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ schließlich:

$$\langle\psi|U^*U|\psi\rangle = \langle\psi|E_n|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

$$\overset{!}{=} \bar{\lambda}\langle\psi|\cdot\lambda\cdot|\psi\rangle = \bar{\lambda}\cdot\lambda\langle\psi|\psi\rangle$$

$$= |\lambda|^2\cdot 1 = |\lambda|^2.$$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1$ also $|\lambda| = 1$ für jeden Eigenwert einer Unitären Abbildungsmatrix.

iv) Beweis

Für zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit normierten Eigenvektoren $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ sind diese orthogonal, d.h $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$,

Denn:

Betrachte: $\langle\psi_1|U|\psi_2\rangle \overset{(a)}{=} (\langle\psi_1|U)|\psi_2\rangle = (U^*|\psi_1\rangle)^*|\psi_2\rangle = (\bar{\lambda}_1|\psi_1\rangle)^*|\psi_2\rangle$

$$= \bar{\bar{\lambda}}_1\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \lambda_1\langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

$$\overset{(b)}{=} \langle\psi_1|(U|\psi_2\rangle) = \langle\psi_1|(\lambda_2|\psi_2\rangle) = \lambda_2\langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

(a) - (b):

$$\underbrace{0 = \underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}\cdot\langle\psi_1|\psi_2\rangle}_{\Rightarrow \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0.}$$

☒

Übungsaufgabe 2.2
Bewiesen Sie bitte LEMMA 1.4.2, nach dem

(a) die vier PAULI-Quantengatter I, X, Y und Z unitäre Matrizen sind,

(b) eine Basis des $\mathbb{C}^{2\times 2}$ bilden und

(c) dem Zusammenhang $XYZ = iI$ genügen.

Lemma 1.4.2: Die vier PAULI-Quantengatter I, X, Y und Z sind unitäre Matrizen, bilden eine Basis des $\mathbb{C}^{2\times 2}$ und genügen dem Zusammenhang $XYZ = iI$.

a) Lösung

Bedingungen von Unitäre Matrizen: (siehe Skript von Prof. Dr. Marcus Martin Kapitel 1).

A square matrix U having complex number entries is unitary if it satisfies the equations:

$$UU^{+} = \text{I} \qquad (3)$$
$$U^{+}U = \text{II}$$

- I = identity matrix
- U^{+} = conjugate transpose of U

z.z: Die PAULI-Quantengatter die obige Gleichungen erfüllen:

- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

siehe begründung auf blatt 1.

$$I^{+} = \bar{I}^{T} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{T} \stackrel{\leftarrow}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \cdot I^{+} = I \cdot \bar{I}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{I} \checkmark \\ I^{+}\cdot I = \bar{I}^{T}\cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{II} \checkmark \end{cases}$$

Bedingungen I und II sind erfüllt $\Rightarrow$ I ist ein Unitäre Matrix.

- $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung.

wegen imaginäre Teil = 0.

$$X^{+} = \bar{X}^{T} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{i}: X\cdot X^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{I}. \checkmark \\ \text{ii}: X^{+}\cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{I} \checkmark \end{cases}$$

Bemerkung: Da die PAULI-Quantengatter quadratische Matrixen sind die Berechnungen der Matrizen sind ähnlich.

• $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Lösung.

Komplex Konjugierte Transformation.

$$Y^+ = \bar{Y}^T = \overline{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}^T \stackrel{\swarrow}{=} \begin{pmatrix} 0 & -(-i) \\ -i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i: \; Y \cdot Y^+ = Y \cdot \bar{Y}^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + -i \cdot i & 0\cdot(-i) + (-i)\cdot 0 \\ i\cdot 0 + 0 \cdot i & i\cdot(-i) + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix} \\ \quad = \begin{pmatrix} -(-1) & 0 \\ 0 & -(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \checkmark \\ ii: \; Y^+ \cdot Y = \bar{Y}^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + -i\cdot i & 0\cdot(-i) + (-i)\cdot 0 \\ i\cdot 0 + 0\cdot i & i(-i) + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix} \\ \quad \stackrel{i^2=-1}{=} \begin{pmatrix} -(-1) & 0 \\ 0 & -(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \checkmark \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Y ist ein Unitaire Matrix. ▨

• $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lösung.

imaginäre Teil = 0

$$Z^+ = \bar{Z}^T = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^T \stackrel{\swarrow}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i: \; Z \cdot Z^+ = Z \cdot \bar{Z}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 0 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \checkmark \\ ii: \; Z^+ Z = \bar{Z}^T \cdot Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 0 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \checkmark \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Z ist eine Unitäre Matrix.

Wichtiger Bemerkung: * (überprüfen und richtig schreiben!.

Eine Matrix, die nicht Quadratisch ist kann nicht unbedingt Unitäre sein da $M \cdot M^+ = \mathbb{I}$ gelten kann aber $M^+ \cdot M \neq \mathbb{I}$.

b) Lösung.

Sei $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, eine Matrix.

Z.z ist i) $\mathbb{I}, X, Y, Z$ Linear unabh sind und.

ii) $A = a_{11} \cdot \mathbb{I} + a_{12} \cdot X + a_{21} \cdot Y + a_{22} \cdot Z$ gilt.

i) Matrizen sind linear unabhängig, wenn die lineare Kombination ihre Vektoren $\neq 0$ gilt.

$a_{11} \cdot \mathbb{I} + a_{12} \cdot X + a_{21} \cdot Y + a_{22} \cdot Z$:

$$= a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ia_{21} \\ ia_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+a_{22} & a_{12}-ia_{21} \\ a_{12}+ia_{21} & a_{11}-a_{22} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen mit der Nullmatrix liefert das lineare Gleichungssystem.

$a+d=0,\ a-d=0,\ b-ic=0\ ,\ b+ic=0$.

Aus der den ersten beiden folgt $a=d=0$; es folgt $b=c=0$.

$\Rightarrow a=b=c=d=0$ also sind I, X, Y, Z linear unabhängig.

ii) „Existenz der Darstellung"

Sei $A := \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ beliebig. Wir suchen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit

$A = \alpha I + \beta X + \gamma \cdot Y + \delta \cdot Z = \begin{pmatrix} \alpha+\delta & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & \alpha - \delta \end{pmatrix}$.

Gleichsetzen liefert:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta = p \\ \alpha - \delta = s \\ \beta - i\gamma = q \\ \beta + i\gamma = r \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{p+s}{2},\ \delta = \frac{p-s}{2},\ \beta = \frac{q+r}{2} \text{ und } \gamma = \frac{r-q}{2i}$$

Damit existieren für jedes A passende Koeffiziente $\Rightarrow \{I, X, Y, Z\}$ spannt $\mathbb{C}^{2\times 2}$ auf.

iii) Eindeutigkeit der Darstellung.

Ang es gäbe zwei Darstellungen

$A = \alpha I + \beta X + \gamma \cdot Y + \delta \cdot Z = \alpha' I + \beta' \cdot X + \gamma' \cdot Y + \delta' \cdot Z$, mit $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$, $\gamma \neq \gamma'$ und $\delta \neq \delta'$.

$\Rightarrow I(\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') \cdot X + (\gamma - \gamma') \cdot Y + (\delta + \delta') \cdot Z = 0$

wegen i) linear unabh. $\Rightarrow (\alpha + \alpha') = 0,\ (\beta + \beta') = 0,\ \gamma + \gamma' = 0,\ (\delta + \delta') = 0$ also
$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \delta = \delta'$ ↯

$\Rightarrow I, X, Y, Z$ bilden eine Basis des $\mathbb{C}^{2\times 2}$. ☒.

c) Lösung

$XYZ:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

da Matrix multiplikation kummutativ ist $\Rightarrow$

$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$.

also $X \cdot Y:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1 \cdot i & 0 \cdot (-i) + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot i & 1 \cdot (-i) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Somit $X \cdot Y \cdot Z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cdot 1 + 0 \cdot 0 & i \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-i) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= i \cdot I$ ☒ ✓

Übungsaufgabe 23
Wir üben in dieser Aufgabe des Rechnen mit unitären Matrizen aus $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

(a) Zeigen Sie bitte, dass eine reellwertige unitäre Matrix $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (also mit ausschließlich reellen Einträgen) immer eine der folgenden beiden Formen

$$U_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

mit α und β aus $\mathbb{R}$ und $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ besitzt.

(b) Für α und β aus $\mathbb{C}$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ zeigen Sie bitte, dass die folgenden beiden Matrizen unitär sind:

$$U_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad U_4 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & -\overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie bitte, dass die Matrix

$$U_5(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}e^{it} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}e^{it} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ unitär ist.

a) Lösung

Beweis durch Widerspruch:

Ang es gäbe eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $S \neq U_1$ und $S \neq U_2$. mit α und β aus $\mathbb{C}$ und $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Sei $S := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [u_1, u_2]$, $u_1 := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $u_2 := \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Eigenschaften von unitäre matrizen. (siehe lema 1.4.1)

Da S unitär und reell ist gilt: $S^T \cdot S \overset{!}{=} I$, also sind die spalten orthonormal : (Reell unitär $\Rightarrow$ orthonormal)

$\|u_1\| = \|u_2\| = 1$, $u_1 \cdot u_2 = 0$.

d.h. $a^2 + c^2 = 1$ und $b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$ $(*)$.

Der lineare Unterraum $U_1^{\perp} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + cy = 0\}$ ist eindimensional und wird von $(-c, a)$ aufgespannt $(-c, a) \cdot (a, c) = -ca + ac = 0\}$.

Daher gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $u_2 = (b, d) = t(-c, a)$. (die algrebraische Form von $(*)$).

Aus $\|u_2\| = 1 \Rightarrow 1 = \|u_2\|^2 = \|t(-c, a)\|^2 = t^2(a^2 + c^2) = t^2 \cdot 1$

$\Rightarrow t = \pm 1$

Also $(b, d) = (-c, a)$ oder $(b, d) = (c, -a)$.

$\Rightarrow$
- Falls $(b, d) = (-c, a)$ dann:
  $S = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & a \end{pmatrix}$, $\alpha := a$, $\beta := -c$).
  mit $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + c^2 = 1$ also $S = U_1$.
- Falls $(b, d) = (c, -a)$ dann:
  $S = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha := a$, $\beta := -c$.
  mit $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + c^2 = 1$, also $S = U_2$.

In Beiden Fällen erhält man genau eine der geforderten Normalformen.

was ein Widerspruch zur Annahme ist.
Also es kann keine solche Matrix S nicht geben. $\boxtimes$

b) <u>Lösung</u>

z.z: U_3 und U_4 unitäre Matrizen sind.

Also z.z sind dass für U_3 und U_4 folgende zwei Gleichungen gelten:

i) $U \cdot U^+ = \mathbb{I}$

ii) $U^+ \cdot U = \mathbb{I}$

- für U_3:

$$U_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$U_3^+ = \bar{U}^T = \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ (\overline{-\bar{\beta}}) & (\bar{\bar{\alpha}}) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$$

$\alpha^2 + \beta^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \alpha \cdot \bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cdot\; U_3 \cdot U_3^+ = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \bar{\alpha} + \beta(-\bar{\beta}) & \alpha(-\beta) + \beta \cdot (\bar{\alpha}) \\ (-\bar{\beta})(\bar{\alpha}) + \bar{\alpha} \cdot (\bar{\beta} & (-\bar{\beta})(-\beta) + \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} \end{pmatrix} \overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & -\alpha\beta + \bar{\alpha}\beta \\ -\bar{\alpha}\bar{\beta} + \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} & |\beta|^2 + |\alpha|^2 \end{pmatrix} \\ \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \checkmark \\ \cdot\; U_3^+ \cdot U_3 = \bar{U}_3^T \cdot U_3 = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}\alpha + (-\beta)(-\bar{\beta}) & \bar{\alpha}\beta + (-\beta) \cdot \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \cdot \alpha + \alpha(-\bar{\beta}) & \bar{\beta} \cdot \beta + \alpha \cdot \bar{\alpha} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$|\beta^2| + |\alpha|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$\overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 + |\alpha|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \checkmark$$

$\Rightarrow U_3$ ist eine unitäre Matrix.

- für U_4.

$$U_4 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$U_4^+ = \bar{U}^T = \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ (\bar{\bar{\beta}}) & (\overline{-\bar{\alpha}}) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \beta \\ \bar{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_4 \cdot U_4^+ = U_4 \cdot \bar{U}_4^T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \beta \\ \bar{\beta} & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \bar{\alpha} + \beta \cdot \bar{\beta} & \alpha \cdot \beta + \beta \cdot (-\alpha) \\ \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha} - \bar{\alpha}\bar{\beta} & \bar{\beta} \cdot \beta + (-\bar{\alpha}) \cdot (-\alpha) \end{pmatrix} \\ \quad = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 + |\alpha|^2 \end{pmatrix} \overset{|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 = |\beta|^2 + |\alpha|^2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \checkmark \end{cases}$$

$$U_4^+ \cdot U_4 = \overline{U}_4^T \cdot U_4 = \begin{pmatrix} \bar\alpha & \beta \\ \bar\beta & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & -\bar\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar\alpha\cdot\alpha + \beta\cdot\bar\beta & \bar\alpha\cdot\beta + \beta(-\bar\alpha) \\ \bar\beta\cdot\alpha + (-\alpha)\cdot\bar\beta & \bar\beta\cdot\beta + (-\alpha)(-\bar\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 + |\alpha|^2 \end{pmatrix} \overset{|\beta|^2+|\alpha|^2 = |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ U_4 ist ebenfalls eine unitäre Matrix.

c) z.z ist

$$U_5(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt3}{2}e^{it} \\ -\frac{\sqrt3}{2} & \frac{1}{2}e^{it} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2}$$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ unitär ist.

Beweis:

$$U_5(t)^+ = \left(\overline{U_5(t)}\right)^T = \overline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt3}{2}e^{it} \\ -\frac{\sqrt3}{2} & \frac{1}{2}e^{it} \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt3}{2}e^{-it} \\ -\frac{\sqrt3}{2} & \frac{1}{2}e^{-it} \end{pmatrix}$$

Prüfen der Eigenschaften:

1. $$U_5(t)\cdot U_5^+(t) = U_5(t)\cdot \overline{U}_5^T(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt3}{2}e^{it} \\ -\frac{\sqrt3}{2} & \frac{1}{2}e^{it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt3}{2} \\ \frac{\sqrt3}{2}e^{-it} & \frac{1}{2}e^{-it} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac12\right)\left(\frac12\right) + \left(\frac{\sqrt3}{2}e^{it}\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}e^{-it}\right) & \left(\frac12\right)\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt3}{2}e^{it}\right)\left(\frac12 e^{-it}\right) \\ \left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\frac12\right) + \left(\frac12 e^{it}\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}e^{-it}\right) & \left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right) + \left(\frac12 e^{it}\right)\left(\frac12 e^{-it}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac14 + \frac{(\sqrt3)(\sqrt3)}{4}e^{+it-it} & -\frac{\sqrt3}{4} + \frac{\sqrt3}{4}e^{it-it} \\ -\frac{\sqrt3}{4} + \frac{\sqrt3}{4}e^{+it-it} & \frac{(-\sqrt3)(-\sqrt3)}{4} + \frac14 e^{it-it} \end{pmatrix}$$

$$\overset{e^{it-it}=1}{=} \begin{pmatrix} \frac14 + \frac34 & -\frac{\sqrt3}{4} + \frac{\sqrt3}{4} \\ -\frac{\sqrt3}{4} + \frac{\sqrt3}{4} & \frac34 + \frac14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$$

2. $$U_5^+(t)\cdot U_5(t) = \overline{U_5(t)}^T \cdot U_5(t) = \begin{pmatrix} \frac12 & -\frac{\sqrt3}{2} \\ \frac{\sqrt3}{2}e^{-it} & \frac12 e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac12 & \frac{\sqrt3}{2}e^{it} \\ -\frac{\sqrt3}{2} & \frac12 e^{it} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac12\right)\left(\frac12\right) + \left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right) & \left(\frac12\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}e^{it}\right) + \left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\frac12 e^{it}\right) \\ \left(\frac{\sqrt3}{2}e^{-it}\right)\left(\frac12\right) + \left(\frac12 e^{-it}\right)\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right) & \left(\frac{\sqrt3}{2}e^{-it}\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}e^{it}\right) + \left(\frac12 e^{-it}\right)\left(\frac12 e^{it}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac14 + \frac34 & \frac{\sqrt3}{4}e^{+it} - \frac{\sqrt3}{4}e^{it} \\ \frac{\sqrt3}{4}e^{-it} - \frac{\sqrt3}{4}e^{it} & \frac{(\sqrt3)(\sqrt3)}{4}e^{-it+it} + \frac14 e^{-it+it} \end{pmatrix}$$

$$\overset{e^{-it+it}=e^0=1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \quad \checkmark$$

das heißt für alle $t \in \mathbb{R}$ $U_5(t)$ ist unitär da hier $e^{it-it} = e^0 = 1$ gilt.

$\Rightarrow$ $U_5(t)$ ist unitäre.

durch, der basierend auf den dargestellten Informationen für Sie nun hoffentlich leichter zugänglich sein sollte. Führen Sie bitte nach Installation von Qiskit auch alle dort beschriebenen Python-Implementierungen und Übungen durch!

(a) Section 1.4.2 Digression: The X-, Y- & Z-Bases – Quick Exercises:

1. Verify that $|+\rangle$ and $|-\rangle$ are in fact eigenstates of the X-gate.
2. What eigenvalues do these states have?
3. Find the eigenstates of the Y-gate, and their coordinates on the BLOCH sphere.

Es seien $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. und

$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

1- Lösung

$$X|+\rangle = X \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X|0\rangle + X|1\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \underbrace{|+\rangle}_{\text{eigen zustand}}. \checkmark$$

$$X|-\rangle = X \cdot \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X|0\rangle - X|1\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |0\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = -\underbrace{|-\rangle}_{\text{eigen zustand}}. \checkmark$$

2- Lösung

Eigenwerte:

es gilt $\cdot X|+\rangle = \lambda_1 \cdot |+\rangle$.

Aus 1) ist $X|+\rangle = +1 \cdot |+\rangle \Rightarrow \lambda_1 = +1$.

- $X|-\rangle = \lambda_2 \cdot |-\rangle$

aus 1) $X|-\rangle = -1 \cdot |-\rangle$

$\Rightarrow \lambda_2 = -1$

Also die Eigenwerte sind $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$

3- Lösung

Sei $|y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle)$.

$$Y|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y|0\rangle + i \cdot Y|1\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle + i(-i)|0\rangle)$$
$$= |y_+\rangle \quad \checkmark$$

$$Y|y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y|0\rangle - iY|1\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle - i(-i)|0\rangle)$$
$$= -|y_-\rangle$$

Also $|y_+\rangle$ ist eigenzustand zu $+1$

$|y_-\rangle$ ist eigenzustand zu -1.

* Bloch-Parameter:

Sei $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ die Standard Form mit

$\vec{r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$.

Weiter hin gilt für beide Zustände: $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

- Für $|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$:

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$ und somit

Blochvektor

$\vec{r} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0,1,0)$.

- Für $|y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = -\frac{i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = -\pi/2$. und somit

Bloch-Vektor:

$\vec{r} := \left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \cos\frac{\pi}{2}\right)$

$= \underline{\underline{(0,-1,0)}}$

(b) Section 1.4.3 The HADAMARD Gate – Quick Exercises:

1. Write the H gate as the outer products of vectors $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|+\rangle$ and $|-\rangle$.
2. Show that applying the sequence of gates HZH, to any qubit state is equivalent to applying an X-gate.
3. Find a combination of X, Z and H-gates that is equivalent to a Y-gate (ignoring global phase).

1) Lösung

- $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |+\rangle$
- $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle$

$\Rightarrow |+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1| = |+\rangle \cdot |0\rangle^+ + |-\rangle \cdot |1\rangle^+$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \;\; 0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(0 \;\; 1)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ -1\cdot 0 & -1\cdot 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}$ ☒

Da H unitär ist ($H = H^+$) gilt ebenso:

$H = |0\rangle\langle +| + |1\rangle\langle -|$ ☒

2. Lösung

$Z \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot 1 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$H \cdot Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + -1\cdot 0 & 1\cdot 0 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H\cdot Z\cdot H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1\cdot 1) & 1\cdot 1 + (-1)(-1) \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{2} \\ \frac{2}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{X}$ ✓ ☒