II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Objetivos de aprendizaje:

Que el alumno…

- Comprenda la diferencia entre tasa de interés y tasa de descuento.
- Sea capaz de calcular tasas equivalentes a partir de una tasa nominal o efectiva.
- Sea capaz de calcular cualquier tasa efectiva que se requiera a partir de una tasa nominal.
- Comprenda la capitalización continua.
- Comprenda el verdadero poder adquisitivo de las inversiones y sea capaz de calcular tasa reales.
- Sea capaz de incorporar el efecto fiscal al calcular tasa netas.
- Sea capaz de desarrollar una fórmula para Interés Compuesto cuando las tasas de interés son variables por periodo.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Valor Presente

Un peso hoy vale más que un peso mañana (un flujo en el futuro vale menos que un flujo similar en el presente) porque:

- **Preferencia Consumo.** Los individuos prefieren consumo presente a consumo futuro
- **Inflación.** El valor de la moneda decrece en el tiempo. Entre mayor es la inflación mayor será la diferencia entre un peso hoy y un peso mañana.
- **Incertidumbre (riesgo).** Cualquier incertidumbre asociada con un flujo de efectivo en el futuro reduce el valor de dicho flujo.

➢ El proceso por el cual los flujos de efectivo futuros son ajustados para reflejar los factores mencionados, se conoce como **descontar**, la magnitud de estos factores es reflejado en la **tasa de descuento**.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Tasa de Descuento

Es la tasa a la cual los flujos de efectivo futuros y presentes son intercambiados. Incorpora:

- La preferencia del consumo presente (mayor preferencia...mayor tasa de descuento)
- Inflación Esperada (mayor inflación...mayor tasa de descuento)
- Incertidumbre de flujos de efectivo futuros (mayor riesgo...mayor tasa de descuento)

Una **mayor** tasa de descuento implicará un valor presente de flujos de efectivo futuros **menor**.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Tasa Efectiva de Descuento

Como ya se había mencionado, la tasa de interés efectiva es la medida de interés que se paga al final del período. Por otro lado, la tasa de descuento efectiva, que se denota por la letra d, es la medida de interés que se paga al inicio del período.

La tasa efectiva de descuento "d" es el cociente de la cantidad de interés ganada durante el período (a veces denominada cantidad de descuento o sólo descuento) y la cantidad invertida al final del período.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Sea d_n la tasa de descuento efectiva durante el n-ésimo período desde la fecha de inversión. Por tanto:

$$d_n = \frac{A(n)-A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)}$$

Ejemplo:

Si un individuo pide prestado al banco \$100 por un año a una tasa efectiva de descuento del 6%, entonces el banco cobrará el interés del 6% al principio y por tanto sólo dará al individuo \$94. Al final del año el individuo regresará \$100 al banco.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Tasas Equivalentes

Dos tasas de interés se dice que son equivalentes si una cantidad dada de Principal o Inversión producen el mismo valor acumulado para el mismo tiempo (por ejemplo un año).

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = \left(1+\frac{i^{(n)}}{n}\right)^n$$

Donde:
m, n: períodos de capitalización
$i^{(m)}$, $i^{(n)}$: tasas nominales anuales con capitalización m-ésima o n-ésima

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Tasas Equivalentes (En general…)

- Se dice que **dos tasas de interés son equivalentes** si dado un monto de dinero $C, éste se invierte y ambas tasas producen el mismo valor futuro al final de un mismo período de inversión, o ambas tasas producen el mismo interés efectivo en el mismo plazo de inversión. Esto es,

$$C\left(1+\frac{i_p^{(m)}}{m}\right)^{mt} = C\left(1+\frac{i_q^{(n)}}{n}\right)^{ns} \qquad (*)$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Donde:

- $i_p^{(m)}$: Tasa nominal del período p capitalizable m veces en el período
- $i_q^{(n)}$: Tasa nominal del período q capitalizable n veces en el período
- m: Número de veces que se reconoce el interés en el período p
- n: Número de veces que se reconoce el interés en el período q
- t, s: Factor que se emplea para expresar ambas inversiones al final del mismo período de inversión

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

- Tal que $i_p^{(m)}$ y $i_q^{(n)}$ son tasas nominales equivalentes
- De la fórmula (*), se obtienen las tasas nominales equivalentes,

$$i_p^{(m)} = \left[\left(1 + \frac{i_q^{(n)}}{n} \right)^{\frac{ns}{mt}} - 1 \right] m$$

$$i_q^{(n)} = \left[\left(1 + \frac{i_p^{(m)}}{m} \right)^{\frac{mt}{ns}} - 1 \right] n$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Tasas Nominales de Interés y Descuento

El término **"efectivo"** es usado para tasas de interés y descuento en las cuales el interés es pagado una vez por período medido. (al final del período o al principio del período según sea el caso)

En los problemas en los cuales el interés es pagado más frecuentemente que una vez en cada período medido. En este caso las tasas de interés y descuento se llaman **"nominales"**

Los términos: Pagadero, Convertible, Compuesto son equivalentes.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

El símbolo para una tasa nominal de interés pagadera "m" veces por período es $i^{(m)}$, m>1 (entero)

Por una tasa nominal de interés $i^{(m)}$ se dice que es una tasa pagadera m veces al período, es decir:

$i^{(m)}/m$ (para cada m-ésimo)

Ejemplo: Una tasa nominal anual de interés del 8% convertible trimestralmente. Calcular la tasa trimestral y anual (efectiva).

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

El símbolo para una tasa nominal de descuento pagadera m-veces al período es $d^{(m)}$. Es la medida del interés pagado al principio de m-ésimos de período.

La tasa efectiva de descuento para cada m-ésimo del período es:

$d^{(m)}/m$

Por tanto:

$1-d=(1-(d^{(m)}/m))^m$

Ambos lados de la ecuación dan como resultado el valor presente de $1 que será pagado al final del período de medida

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Interés Continuo:

Cada instante de tiempo se reconoce el interés

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e$$

$$VF=VPe^{it}$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Derivación fórmula:

Partiendo de $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e$ (Número de Euler $e=2.7182$) (Esta demostración la hicieron en Cálculo), se tiene que:

$$VF=\lim_{m\to\infty}VP\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

$$VF=VP\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

Sea $x=\frac{\mathrm{m}}{i}$ Entonces la expresión anterior se puede reescribir como:

$$VF=VP\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{mt}$$

donde: $m=xi$, si m tiende a infinito entonces también x tiende a infinito

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Derivación fórmula:

$$VF = VP \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{xit}$$

Por propiedad de límites:

$$VF = VP \left(\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} \right)^{it} = VP(e)^{it}$$

$$VF = VPe^{it}$$

$$VF = VPe^{it}$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Tasa Nominal, Tasa Real:

- *Tasa Nominal (estipulada)*. Es la tasa a la cual está pactado un instrumento financiero
- *Tasa Real*. Es la tasa que mide el rendimiento de una inversión, una vez que se han descontado los efectos de la inflación

$$(1 + r_{real})(1 + \pi) = (1 + r_{nom})$$

$$r_{real} = \frac{1 + r_{nominal}}{1 + \pi} - 1$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Tasa Bruta, Tasa Neta:

Es necesario obtener la tasa neta que pagan las inversiones. Las tasa que ofrecen las instituciones financieras por lo general están en términos brutos. La tasa neta es aquélla que se obtiene una vez que a la tasa bruta se quita el efecto del impuesto.

$$r_{neta} = r_{bruta}(1 - t_x)$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Interés Variable

Cambios en la tasa efectiva de interés

$$a(t) = (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\cdots(1+i_t) = \prod_{k=1}^{t}(1+i_k)$$

$$a^{-1}(t) = (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}(1+i_3)^{-1}\cdots(1+i_t)^{-1} = \prod_{k=1}^{t}(1+i_k)^{-1}$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

- Si la tasa de interés es constante:

$$VP = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{Cn}{(1+r)^n}$$

$$VP = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^j}$$

$$VP = C_1 a^{-1}(1) + C_2 a^{-1}(2) + C_3 a^{-1}(3) + \cdots + C_n a^{-1}(n)$$

$$a^{-1}(t) = (1+i)^{-t}$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

- Ahora, si las tasas de interés varían cada período:

$$VP = \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_1)(1+r_2)} + \frac{C_3}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{Cn}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_n)}$$

$$VP = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{\prod_{i=1}^{j}(1+r_i)}$$

$$VP = C_1 a^{-1}(1) + C_2 a^{-1}(2) + C_3 a^{-1}(3) + \cdots + C_n a^{-1}(n)$$

$$a^{-1}(t) = (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}(1+i_3)^{-1}\cdots(1+i_t)^{-1} = \prod_{k=1}^{t}(1+i_k)^{-1}$$

- **VP(A+B)=VP(A)+VP(B)**

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Valor Presente Neto

- Si se tiene una inversión inicial:

$$VPN = -I_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^j}$$

$$VPN = -I_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{\prod_{i=1}^{j}(1+r_i)}$$