II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Objetivos de aprendizaje:

- Que el alumno comprenda ¿qué es el interés?
- Comprenda la diferencia entre tasas efectivas y nominales.
- Sea capaz de explicar la diferencia entre interés simple e interés compuesto.
  - Pueda desarrollar la ecuación para calcular Valor Futuro y Valor Presente.
- Sea capaz de platear funciones de acumulación.
- Comprenda qué es una Ecuación de Valor y aprenda a plantear estas ecuaciones para la solución de problemas reales.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Definiciones

INTERÉS

Es la compensación que el prestatario paga al prestamista por el uso del capital.

Existen dos tipos de interés:

- Interés Simple
- Interés Compuesto

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Interés Simple

- Al final el prestatario paga el capital y el interés.

Interés Compuesto

- Cada período se genera interés, el cual se reinvierte para generar nuevos intereses.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

FUNCIÓN DE ACUMULACIÓN

Una empresa ahorrará su dinero en una cuenta en el banco. La cantidad inicial de dinero ahorrada (capital) se le denomina **"Principal"** y el monto total recibido después de un período de tiempo se le denomina **"Valor Acumulado"**

La diferencia entre el Valor Acumulado y el Principal se llama **"Interés ganado durante el período de ahorro"**.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Sea t variable que mide el tiempo en diferentes unidades: días, meses, trimestres, décadas, etc. A esta variable se le denomina Período, el más común es el año.

Suponga una unidad de Principal que se ahorra. Podemos definir una *función de acumulación* a(t), con la cual podrá obtenerse el valor acumulado al tiempo $t \geq 0$ de una cantidad original de $1

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Propiedades de la Función de Acumulación

1. a(0)=1
2. a(t) es generalmente una función creciente

FUNCIÓN DE MONTO A(t)

Con la cual se obtendrá el valor acumulado al tiempo $t \geq 0$ de un ahorro original de $K

Por tanto:

$$A(t)=K*a(t)$$
$$A(0)=K$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Denotemos el interés en dinero ganado en el n-ésimo período, a partir de la fecha de inversión como I_n. Entonces:

$$I_n=A(n)-A(n-1) \quad n\geq 1, \text{ n es entero}$$

Actualmente, la función de acumulación es un caso especial de la función de monto cuando K=1

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Tasa Efectiva de Interés

Interés efectivo es la cantidad de dinero que una unidad ahorrada al principio de un período ganará durante el período, donde el interés es pagado al final del período.

Generalmente la palabra efectivo es usada para tasas de interés en las cuales el interés es pagado una vez por período medido.

Lo cual estará en contraste con Tasas Nominales, en las cuales el interés es pagado más frecuentemente que una vez en el período de medida.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

La Tasa Efectiva de Interés "**i**", es el interés que ganará durante el período, una unidad invertida ($1) al inicio del período, donde el interés es pagado al final del período.

En términos de la función de acumulación esta definición es equivalente a decir:

$$i=a(1)-a(0)$$

que es lo mismo que decir:

$$a(1)=1+i$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

La tasa de interés efectiva puede definirse en términos de la función de monto como:

$$i=(1+i)-1 = \frac{a(1)-a(0)}{a(0)} = \frac{A(1)-A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)}$$

Por tanto, la tasa de interés efectiva es el cociente entre la cantidad de interés ganada durante el período y el principal ahorrado al inicio del período.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

La tasa de interés efectiva durante el n-ésimo período desde la fecha de inversión es:

$$i_n = \frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}$$

Por tanto, la tasa de interés efectiva es el cociente entre la cantidad de interés ganada durante el período y el principal ahorrado al inicio del período.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Valor Presente

Sea (1+i) Factor de Acumulación.

Frecuentemente se requiere conocer cuánto debe ahorrar una persona de tal manera que al final del período obtenga $1, la respuesta es:

$$(1+i)^{-1}$$

Por lo tanto, sea v=1/(1+i) <u>Factor de Descuento</u>

Este descuenta el valor de una inversión del final al inicio del período

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Notación:

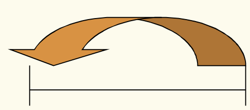
- VP = Valor Presente
- C = Capital Ahorrado
- VF = Valor Futuro
- P ó R = Pago o Renta
- i ó r = Tasa de Interés
- t ó n = Tiempo
- m = Períodos de Capitalización
- I = Interés en Pesos

Instituto Tecnológico Autónomo de México
TÓPICOS DE NEGOCIOS I

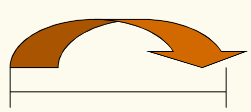
II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Flujos:

- El proceso de Descontar Flujos, expresa los flujos en términos de valor presente



- El Proceso de Inversión (Acumulación), convierte los flujos presentes en flujos futuros



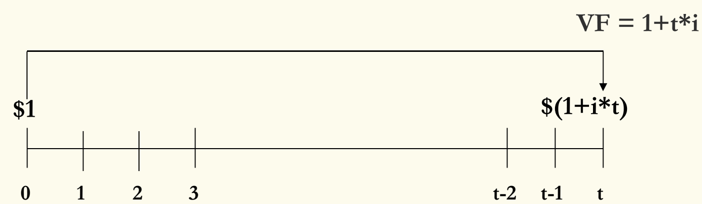
Dra. Juliana Gudiño

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

INTERÉS SIMPLE

- Considere la inversión de una unidad, tal que la cantidad de interés ganada durante cada período sea constante, es decir, el valor acumulado de $1 al final del primer período es 1+i, al final del segundo período es 1+2i, etc.

  En general:



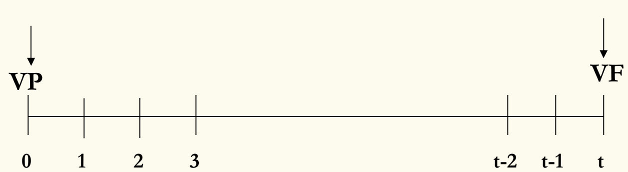
II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Si se ahorra VP, se obtiene:

VF = VP+Interés, donde Interés = VP*i*t

Por tanto:

$$\boxed{VF = VP*(1+i*t)}$$



II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Valor Presente

Sea $(1+i^*t)$ Factor de Acumulación

Frecuentemente se requiere conocer cuánto debe ahorrar una persona de tal manera que al final del período obtenga $1, la respuesta es:

$$(1+i^*t)^{-1}$$

Por lo tanto, sea $v=1/(1+i^*t)$ Factor de Descuento

Este descuenta el valor de una inversión del final al inicio del período

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Por tanto, $\mathbf{VP = VF/(1+i^*t)}$

<u>Función de Acumulación</u>:

$a(t)=1+i^*t$

$$a^{-1}(t)=\frac{1}{(1+i^*t)}$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

INTERÉS COMPUESTO

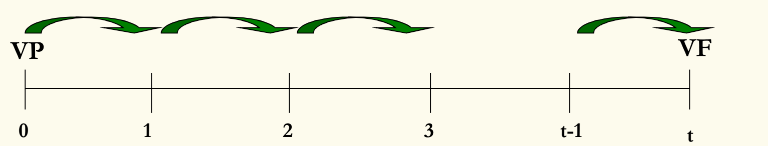
Definición

El interés simple tiene la característica de que el interés **<u>no</u>** se reinvierte para generar intereses adicionales

El interés compuesto supone, que el interés ganado es automáticamente reinvertido

La palabra “compuesto”, se refiere al proceso de los intereses que son reinvertidos para ganar intereses adicionales, es decir, el interés que se genera cada período se incorpora al capital

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS



1	2	3	t-1	t
VP+VPi VP(1+i)	VP(1+i)+ VP(1+i)i=	$VP(1+i)^2$ + $VP(1+i)^2$ i=	$VP(1+i)^{t-2}$ + $VP(1+i)^{t-2}$ i=	$VP(1+i)^{t-1}$ + $VP(1+i)^{t-1}$ i=
	VP(1+i)(1+i)=	$VP(1+i)^2(1+i)$=	$VP(1+i)^{t-2}(1+i)$=	$VP(1+i)^{t-1}(1+i)$=
	$VP(1+i)^2$	$VP(1+i)^3$	$VP(1+i)^{t-1}$	$VP(1+i)^t$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Generalización:

$$VF = VP(1+i)^t$$

NOTA: t siempre corresponderá a la forma como esté expresada i

Existen dos tipos de interés compuesto:

- Interés con composición o capitalización
- Interés continuo

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Función de Acumulación:

$$a(t)=(1+i)^t$$

$$a^{-1}(t)= \frac{1}{(1+i)^t} = v^t$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Interés con Composición o Capitalización

El interés se reconoce en períodos menores a un año

Composición:

m= períodos de capitalización

Composición	m
Diaria	360
Semanal	52
Mensual	12
Cuatrimestral	3
Trimestral	4
Semestral	2

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

$$VF = VP\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{mt}$$

NOTA: t siempre corresponderá a la forma como esté expresada i

Aquí se habla de ***tasa efectiva***:

$$(1+i) = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

Donde:

$i^{(m)}$ es una tasa nominal del período (año) con composición m-ésima; i es tasa efectiva del período (año)

Por ejemplo, $i^{(12)}$: tasa nominal anual con composición mensual

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Ecuación de Valor

En casi todos los problemas de Matemáticas Financieras se plantea una ***Ecuación de Valor***.

Una **Ecuación de Valor** es la igualdad de dos series de obligaciones valuadas a la **"misma fecha"**. Es muy importante que las dos series estén expresadas en la misma fecha de valuación, pues se debe considerar el costo del dinero en el tiempo.

La Fecha de Valuación puede ser cualquiera que se elija, pues esto no modificará los resultados. Es conveniente emplear aquélla que simplifique la solución del problema.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Ejemplo:

Un individuo deberá pagar $10,000 dentro de 3 años, $5000 dentro de 5 años y $2,500 dentro de 6 años. Si realiza un pago de $1,800 dentro de un año, otro de $3,600 dentro de cuatro años. ¿Cuánto debería pagar al final del quinto año para saldar sus compromisos? La tasa de interés es del 15% anual capitalizable anualmente. **Nota: Todas las deudas y pagos se realizan al final del año.**

Solución: Primero planteamos la ecuación de valor correspondiente. Se tienen dos series diferentes: la primera se refiere a las deudas que debe liquidar el individuo y la otra a los pagos que debe realizar para cumplir con sus obligaciones.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Por tanto, igualamos la deuda total con los pagos totales, en la misma fecha de valuación (t=0):

$$\frac{10,000}{(1+0.15)^3}+\frac{5,000}{(1+0.15)^5}+\frac{2,500}{(1+0.15)^6}=\frac{1,800}{(1+0.15)}+\frac{3,600}{(1+0.15)^4}+\frac{P}{(1+0.15)^5}$$

Se despeja P y se obtiene:

P=13,110.7018