II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Objetivos de aprendizaje. Que el alumno…

- Comprenda la diferencia entre anualidades anticipadas y vencidas.
- Que resuelva problemas complejos que involucren anualidades anticipadas y vencidas.
- Comprenda el concepto y uso de anualidades diferidas y sea capaz de resolver de diferentes formas problemas usando estas anualidades.
- Que sea capaz de representar fórmulas que involucren anualidades anticipadas, vencidas y diferidas en una línea de tiempo.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

ANUALIDADES

Definición

Una anualidad puede definirse como una serie de pagos (rentas) realizados a intervalos iguales de tiempo

Notación:

R, P: Renta o Pago
t ó n: Tiempo
VP: Valor Presente
VF: Valor Futuro

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Anualidad Cierta:

Cuando los pagos se realizan con certeza durante un periodo preestablecido de tiempo.

Ejemplo: pagos de una hipoteca.

Anualidad Contingente:

Cuando la realización de los pagos está sujeta a que se cumpla una condición contingente.

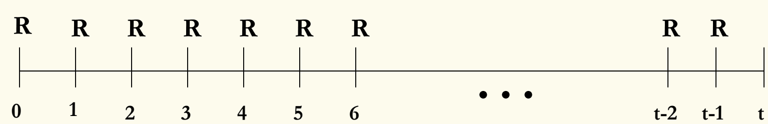
Ejemplo: una pensión, los pagos se hacen solo si la persona está viva.

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Anualidades Anticipadas (*annuity-due*)

El pago o renta se realiza al principio de cada período

En un diagrama de tiempo se verá:



Período: Año, Semestre, Cuatrimestre, Trimestre, Mes, Quincena, Semana, Día

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Por tanto, el valor presente en t=0 (momento en donde se realiza el primer pago o renta) de las rentas es:

$$VP = \frac{R}{(1+i)^0} + \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{t-1}}$$

Despejando de la ecuación anterior R,

$$VP = R\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^{t-1}}\right] = R\left[\frac{1-v^n}{d}\right]$$

$$R = \frac{VPi(1+i)^{t-1}}{(1+i)^t - 1} = \frac{VP * d}{1-v^n}$$

Instituto Tecnológico Autónomo de México
TÓPICOS DE NEGOCIOS I

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

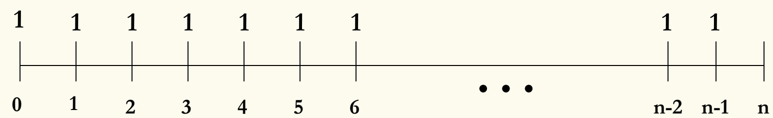
***Notación*:**

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ → Valor Presente de la anualidad al principio del período en el cual se realiza el primer pago o renta

$\ddot{S}_{\overline{n}|}$ → Valor Acumulado de la anulidad al final del período donde finaliza el plazo de la anualidad

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Si la renta es de \$1 (R=\$1) y se tienen n períodos:



Período: Año, Semestre, Cuatrimestre, Trimestre, Mes, Quincena, Semana, Día

El valor presente de la anualidad en momento en el cual se realiza el primer pago o renta:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \qquad (1)$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Como ya se había definido, v es el conocido como el Factor de Descuento:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} \qquad (2)$$

p.d.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Demostración:

Instituto Tecnológico Autónomo de México
TÓPICOS DE NEGOCIOS I

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Dra. Juliana Gudiño

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Si las rentas son de $R:

$$R\,\ddot{a}_{\overline{n}|} = R\left[\frac{1-v^n}{d}\right]$$

Si R es la incógnita:

$$R = \frac{R\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\left[\frac{1-v^n}{d}\right]}$$

Donde:

$R\,\ddot{a}_{\overline{n}|}$: Valor presente de rentas al incio del primer período (en este caso es conocido)

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Monto Acumulado con R=$1:

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^n$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{1-v^n}{d}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n-1}{d}$$

Por tanto :

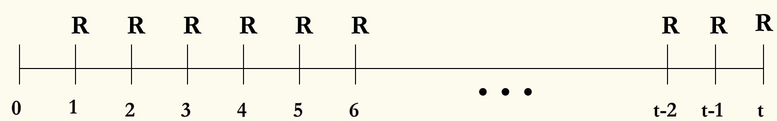
$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n-1}{d} = \frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i}$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Anualidades Vencidas o Regulares (*annuity immediate*)

El pago o renta se realiza al final de cada período

En un diagrama de tiempo se verá:



Período: Año, Semestre, Cuatrimestre, Trimestre, Mes, Quincena, Semana, Día

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Por tanto, el valor presente en t=0 (principio del período donde se realiza el primer pago o renta) de las rentas es:

$$VP = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^t}$$

Despejando de la ecuación anterior R,

$$VP = R\left[\frac{1}{i} - \frac{1}{i(1+i)^t}\right] = R\left[\frac{1-v^n}{i}\right]$$

$$R = \frac{VPi(1+i)^t}{(1+i)^t - 1} = \frac{VPi}{1-v^n}$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

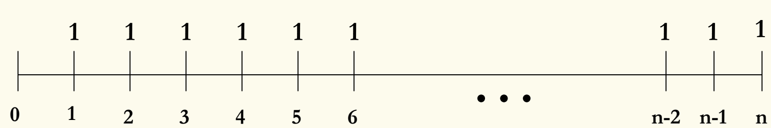
***Notación*:**

$a_{\overline{n}|} \rightarrow$ Valor Presente de la anualidad al principio del período en el cual se realiza el primer pago

$S_{\overline{n}|} \rightarrow$ Valor Acumulado de la anulidad al final del período donde finaliza el plazo de la anualidad

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Si la renta es de \$1 (R=\$1) y se tienen n períodos:



Período: Año, Semestre, Cuatrimestre, Trimestre, Mes, Quincena, Semana, Día

El valor presente de la anualidad al principio del período en el cual se realiza el primer pago o renta:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} \qquad (1)$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Como ya se había definido, v es el conocido como el Factor de Descuento:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n \qquad (2)$$

p.d.

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i} = \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i(1+i)^n} \right)$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Demostración:

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Si las rentas son de $R:

$$Ra_{\overline{n|}} = R\left[\frac{1-v^n}{i}\right]$$

Si R es la incógnita:

$$R = \frac{Ra_{\overline{n|}}}{\left[\frac{1-v^n}{i}\right]}$$

Donde:

$Ra_{\overline{n|}}$: Valor presente de rentas al incio del primer período (en este caso es conocido)

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Monto Acumulado con R=$1:

$$S_{\overline{n}|} = 1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}$$

$$S_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{1-v^n}{i}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Por tanto:

$$S_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Relación Anualidad Anticipada y Vencida:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = S_{\overline{n}|}(1+i)$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = S_{\overline{n+1}|} - 1$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Anualidades Diferidas

- El primer pago se realiza dos o más periodos después del primer período
- Se pueden emplear tanto anualidades vencidas como anticipadas para su valuación

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

En General,

El valor presente de una anualidad vencida diferida m períodos con un término de n años después del período diferido:

$$a_{\overline{n}|}v^{m} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$$

II. MATEMÁTICAS FINANCIERAS

El valor acumulado de una anualidad de n períodos, m períodos después de la última fecha de pago:

$$S_{\overline{n|}}(1+i)^{m} = S_{\overline{m+n|}} - S_{\overline{m|}}$$