



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Informática y Telecomunicaciones

Doble Grado de Ingeniería
Informático y Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Estudio de la información
mutua y el test delta como
criterios para la selección de
variables.

Presentado por:

Iñaki Madinabeitia Cabrera

Curso académico 2019-2020

Estudio de la información mutua y el test delta como criterios para la selección de variables.

Iñaki Madinabeitia Cabrera

Iñaki Madinabeitia Cabrera *Estudio de la información mutua y el test delta como criterios para la selección de variables..*

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2019-2020.

**Responsable de
tutorización**

Alberto Guillén Perales
*Departamento de Arquitectura y Tecnología
de Computadores*

Doble Grado de Ingeniería
Informática y Matemáticas
Facultad de Ciencias
Escuela Técnica Superior
de Ingeniería Informática y
Telecomunicaciones
Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Iñaki Madinabeitia Cabrera

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2019-2020, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 5 de septiembre de 2019

Fdo: Iñaki Madinabeitia Cabrera

Dedicatoria (opcional)

Ver archivo preliminares/dedicatoria.tex

Índice general

Agradecimientos	xiii
Summary	xv
Introducción	xvi
I. Resumen.	1
II. Objetivos.	3
1. Objetivos	4
III. Estado del arte.	5
2. Información Mutua	6
2.1. Resultados previos	6
2.2. Entropía de Shannon y entropía conjunta	6
2.3. Divergencia de Kullback-Leibler	7
2.4. Definición y propiedades de la Información Mutua	8
3. Test Delta	11
3.1. Test Delta	11
3.1.1. Estimación de la varianza del ruido	11
3.1.2. Vecino más cercano	12
3.1.3. Definición de Test Delta	12
3.1.4. Demostración del Test Delta como buen estimador	13
3.2. Test Delta para la selección de variables	14
3.2.1. Estudio lineal	15
3.2.2. Análisis del Test Delta	15
3.2.3. Observación final	16
IV. Problema de la selección de variables.	17
4. Problema de la selección de variables	18
4.1. Maldición de la dimensionalidad	18
4.2. Selección de variables	18
4.3. Ejemplo de algoritmo que usa Información Mutua: mRMR	19
4.3.1. Extensiones	19

V. Estimadores de información mutua	21
5. Información mutua para dos variables	22
6. Optimizaciones y propuestas	23
6.1. Entropía para una variable	23
6.2. Entropía para dos variables	23
6.3. Información mutua entre dos variables	24
7. Información mutua en un conjunto de variables	25
7.1. La suma	25
7.2. La media	25
7.3. La extensión teórica más convincente	26
7.3.1. Problemas con la implementación	27
7.4. Estimación a la información mutua multivariante	27
VI. Cálculo del Test Delta	29
8. K-ésimo vecino más cercano	30
9. Test Delta	31
10. Algoritmo Fuerza Bruta del Test Delta	32
VII. Construcción de modelos a determinar el subconjunto de variables más adecuado	33
VIII. Propuesta de combinación de Test Delta con Información Mutua.	35
11. Propuesta de combinación de Test Delta con Información Mutua	36
IX. Implementación.	37
12. Algoritmo optimizado de Fuerza Bruta	38
12.1. Conceptos	38
12.2. Implementación	38
X. Experimentos.	41
XI. Análisis.	43

XII. Conclusiones.	45
A. Primer apéndice	46
Glosario	47
Bibliografía	48

Agradecimientos

Agradecimientos del libro (opcional, ver archivo preliminares/agradecimiento.tex).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex

Introducción

De acuerdo on la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex

Parte I.

Resumen.

Si el trabajo se divide en diferentes partes es posible incluir al inicio de cada una de ellas un breve resumen que indique el contenido de la misma. Esto es opcional.

Parte II.

Objetivos.

1. Objetivos

Los objetivos clave que se abordan en este proyecto son los siguientes:

- Análisis comparativo de estimadores de información mutua.
- Optimización de estimadores de información mutua.
- Idea e implementación de un cálculo óptimo del Test Delta en un espacio de $2^d - 1$ soluciones, donde d es la dimensión del problema.
- Análisis comparativo entre la información mutua y el Test Delta.
- Construcción de modelos que determinen el subconjunto de variables más adecuado para problemas de regresión.
- Propuesta de integración de la información mutua y el test Delta.
- Análisis de dicha propuesta.

Parte III.

Estado del arte.

2. Información Mutua

2.1. Resultados previos

Teorema 2.1. Teorema de Radon-Nikodym. Sea (X, E) un espacio medible, con dos medidas σ -finitas μ y ν . Si ν es absolutamente continua respecto de μ , entonces existe una función medible $f : X \rightarrow [0, \infty[$ tal que para todo conjunto medible $A \subset X$:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

Definición 2.1. La f definida en el **Teorema 2.1** es única casi por doquier. A esta función se le denomina **la derivada de Radon-Nikodym**.

2.2. Entropía de Shannon y entropía conjunta

La idea básica de la entropía en teoría de la información es que un mensaje contiene mayor entropía cuanto más sorpresa genere su contenido. En otras palabras, si un evento es muy probable que ocurra, dicho evento tiene poca entropía pues si ocurriese no generaría ningún especial interés, ya que ocurrió lo que se esperaba.

Antes de preguntarnos cómo medir esta información sobre una variable aleatoria, vamos a preguntarnos cómo podemos medir la información que nos proporciona un suceso. En computación, resulta interesante expresar la información en unidades de bits, luego esto nos motiva a utilizar el logaritmo en base de 2. Sin embargo, ¿cuál es el parámetro en dicho logaritmo en base 2? Teniendo una probabilidad, junto con lo dicho en el anterior párrafo de que un suceso nos da más información cuanto menos probable es que ocurra (inversamente proporcional a la probabilidad del suceso), nos queda que:

Definición 2.2. Sea un suceso E y una probabilidad P (cuyo dominio contiene a E), definimos el **contenido de la información** del suceso bajo probabilidad P como: [McMo8]

$$I(E) := \log_2 \left(\frac{1}{P(E)} \right) = -\log_2 (P(E))$$

Procedemos a establecer cómo medir la información que nos da una variable aleatoria, mediante la entropía de Shannon:

Definición 2.3. Sea una variable aleatoria X que toma valores x_i con $i = 1, 2, \dots, n$, y sea P una distribución de probabilidad (cuyo dominio contiene a los valores de X), definimos la **entropía de Shannon**: [Sha8x]

$$H(X) := E[-\log_2(P(X))] = -E[\log_2(P(X))]$$

Vemos que en el caso discreto, siendo p la función masa de probabilidad de P (esto es, $p(x_i) = P[X = x_i]$), nos queda que:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2(p(x_i))$$

Habiendo definido la entropía de una variable aleatoria, podemos extender la definición a una pareja de variables aleatorias de forma sencilla: podemos tomar dicha pareja como un vector de variables aleatorias.

Definición 2.4. La **entropía conjunta** de dos variables aleatorias X e Y con una distribución conjunta P es definida como: [CT]

$$H(X, Y) := -E[\log_2(P(X, Y))]$$

Vemos que en el caso discreto, siendo p la función masa de probabilidad de P (esto es, $p(x, y) = P[X = x, Y = y]$), nos queda que:

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log_2(p(x, y))$$

Notación. De ahora en adelante, nos referiremos a \log como \log_2 .

2.3. Divergencia de Kullback-Leibler

En estadística, la divergencia de Kullback-Leibler entre dos distribuciones de probabilidad es una cantidad que mide cuán diferente es una distribución respecto de la otra [KL68].

Definición 2.5. Sean P y Q distribuciones de probabilidad que toman valores en el mismo espacio X , y además P es absolutamente continua respecto de Q ($\forall x \in X, Q(x) = 0 \implies P(x) = 0$), la **divergencia de Kullback-Leibler** es la esperanza de la diferencia logarítmica entre P y Q , donde se toma la esperanza usando las probabilidades de P . Es decir:

$$D_{KL}(P||Q) = \int_X \log\left(\frac{dP}{dQ}\right) dP$$

donde $\frac{dP}{dQ}$ es la derivada de Radon-Nikodym (Def. 2.1) de P respecto de Q .

2. Información Mutua

Notación. Sea X una variable aleatoria y P una distribución de probabilidad, nos referimos con $P(x_i)$ a $P[X = x_i]$.

En el caso discreto, tenemos que la divergencia de Kullback-Leibler es:

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_{x \in X} P(x) \log \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$$

Que equivalentemente es:

$$D_{KL}(P||Q) = - \sum_{x \in X} P(x) \log \left(\frac{Q(x)}{P(x)} \right)$$

Pues:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} P(x) \log \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) &= \sum_{x \in X} P(x) \left(-\log \left(\frac{Q(x)}{P(x)} \right) \right) \\ &= \sum_{x \in X} -P(x) \log \left(\frac{Q(x)}{P(x)} \right) = - \sum_{x \in X} P(x) \log \left(\frac{Q(x)}{P(x)} \right) \end{aligned}$$

En el caso continuo, tenemos que:

$$D_{KL}(P||Q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) dx$$

donde p y q son las funciones densidad de P y Q .

2.4. Definición y propiedades de la Información Mutua

La información mutua entre dos variables aleatorias es una medida que cuantifica la cantidad de información (en bits) que se obtiene de una variable aleatoria observando la otra.

Definición 2.6. Sean X e Y dos variables aleatorias cuya distribución conjunta es $P_{X,Y}$ y cuyas distribuciones marginales son P_X y P_Y respectivamente, se define la **información mutua** como:

$$I(X, Y) := D_{KL}(P_{X,Y} || P_X P_Y)$$

En el caso discreto, si X toma n valores e Y toma m valores, tenemos que

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log \left(\frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} \right)$$

En el caso continuo, siendo p la función de densidad de P , tenemos que

$$I(X, Y) = \int_X \int_Y p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right) dx dy$$

La idea clave para entender la información mutua es la siguiente: la información mutua entre dos variables aleatorias es la intersección entre la entropía de una y la entropía de la otra. Es decir, $I(X, Y) = H(X) \cap H(Y)$. En la figura **Figura 2.1** podemos visualizar esta idea.

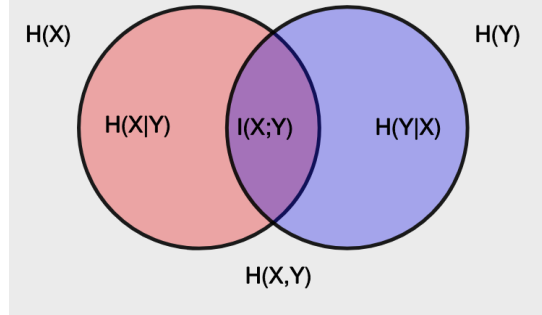


Figura 2.1.: Información mutua como intersección de $H(X) \cap H(Y)$ [Mac].

Esto también se puede ver de la forma: $I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$.

Proposición 2.1.

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} & H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ &= - \sum_{x \in X} p(x) \log(p(x)) - \sum_{y \in Y} p(y) \log(p(y)) + \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log(p(x, y)) \end{aligned}$$

Usando una propiedad de las probabilidades marginales, que es $p(x) = \sum_y p(x, y)$

$$\begin{aligned} &= - \sum_x \sum_y p(x, y) \log(p(x)) - \sum_x \sum_y p(x, y) \log(p(y)) + \sum_x \sum_y p(x, y) \log(p(x, y)) \\ &= \sum_x \sum_y p(x, y) (\log(p(x, y)) - \log(p(x)) - \log(p(y))) \end{aligned}$$

Usando la propiedad del logaritmo de $\log(a) - \log(b) = \log(a/b)$

$$\begin{aligned} &= \sum_x \sum_y p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right) \\ &= I(X, Y) \end{aligned}$$

2. *Información Mutua*

En definitiva, la información mutua mide el grado de dependencia estadística entre dos variables, luego es una medida que reduce la incertidumbre sobre el valor de una variable conociendo el valor de la otra variable.

3. Test Delta

Una técnica que no usa la información mutua y que al igual que la información mutua sirve para realizar una selección de variables, que veremos más adelante, es el **Test Delta**.

3.1. Test Delta

El Test Delta es una técnica para estimar la varianza del ruido, o el error cuadrático medio (MSE), que se puede lograr sin sobreajustamiento [Jon04]. Es útil para evaluar la correlación no lineal entre dos variables aleatorias, que son las parejas de entradas y salida. Es una generalización del enfoque propuesto en [Jon04], que básicamente se basa en el hecho de que la esperanza condicional se acerca la varianza del ruido cuando la distancia entre los puntos de los datos tiende a cero. Veremos esto más adelante.

El Test Delta trabaja bajo la suposición de que si dos puntos están cerca en el espacio de entrada, entonces sus correspondientes puntos de salida deben estar cerca. Si no es así, asumimos que es debido al ruido [KWW].

El único requisito es que el sistema sea suave (que la transformación de entrada a salida sea continua y que la primera derivada parcial respecto del espacio de entrada esté acotada) [KWW].

3.1.1. Estimación de la varianza del ruido

Sea el conjunto de datos de la forma:

$$\{(x_i, y_i), 1 \leq i \leq N\}$$

donde x_i la entrada como vector en \mathbb{R}^d y y_i la salida como escalar en \mathbb{R} , asumimos con sistema suave que los valores de salida siguen la siguiente forma:

$$y_i = f(x_{i1}, \dots, x_{id}) + r_i$$

donde f es una función suave (derivadas continuas en cualquier orden) y r_i es un valor aleatorio que representa el ruido [KWW]. Los términos del ruido r_i asumimos que son independientes idénticamente distribuidos con media cero [ELL⁺].

La estimación de la varianza del ruido es el estudio que trata de dar una estimación de la varianza del ruido dado algunos datos sin considerar aspectos específicos de la función f [ELL⁺].

3. Test Delta

3.1.2. Vecino más cercano

El estimador de la varianza del ruido considerado está basado en una aproximación mediante el vecino más cercano. El NN (*nearest neighbour*, vecino más cercano) de un punto x está definido como el *único* punto que minimiza la distancia métrica respecto a x en el espacio de entrada [ELL⁺].

$$NN(i) := \arg \min_{j \neq i} \|x_i - x_j\|^2$$

Observamos que $NN(i)$ devuelve el índice j del x_j más cercano a x_i .

En este contexto, usamos la distancia euclídea como distancia métrica.

3.1.3. Definición de Test Delta

El Test Delta se basa en realizar una estimación del ruido entre pares de puntos de entrada y salida, y aplicar el Test Delta para obtener el conjunto de variables que minimice el ruido entre los puntos.

Definición 3.1. Sea X una variable que toma N valores en \mathbb{R}^d (cada elemento es un vector de dimensión d), sea Y una variable que toma N valores en \mathbb{R} , donde N es el número de muestras y d la dimensión de la entrada, y sea $NN(i, k)$ el índice del k -ésimo vecino más cercano a x_i ; se define el **Test Delta** como: [PP94]

$$\delta_{N,k} := \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \left(y_i - y_{NN(i,k)} \right)^2$$

Luego para el vecino más cercano, nos quedaría ($k = 1$):

$$\delta_N := \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \left(y_i - y_{NN(i)} \right)^2$$

Es decir, aproximamos la varianza del ruido considerando la diferencia de las salidas asociándolo con la cercanía de los puntos en el espacio de entrada [ELL⁺]. Es decir:

$$Var(r) \approx \delta_N$$

3.1.4. Demostración del Test Delta como buen estimador

Acotación.

Sean X_i ($1 \leq i \leq M$) variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas de acuerdo a una acotada probabilidad de densidad p (por ejemplo, $p \leq \|p\|_\infty$), siendo M el número de muestras. Asumimos que el rango de las variables está incluida en un conjunto compacto C contenido en \mathbb{R}^n . Con $NN(i, k)$ denotamos el k -ésimo vecino más cercano de X_i , y $d_{i,k}$ es $\|X_i - X_{NN(i,k)}\|$ con la norma euclídea. Sean $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|x - x_0\| < r\}$ bolas de vecindario en \mathbb{R}^n , definimos la función:

$$\omega_{x_0}(r) = \int_{B(x_0, r)} p(x) dx$$

que corresponde a la probabilidad de que un punto de C esté contenido en la bola $B(x_0, r)$.

Proposición 3.1. Para cada $\alpha > 0$

$$E[\omega_{X_i}(d_{i,k})^\alpha | X_i] = \frac{\Gamma(k + \alpha)\Gamma(M)}{\Gamma(k)\Gamma(M + \alpha)}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma y α se refiere al α -ésimo momento de las distribuciones de la distancia al vecino más cercano [Eva],[KSG].

La demostración está basada en las propiedades de la función Beta establecidas en [Eva], donde también se muestra que

$$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M + \alpha)} = M^{-\alpha} + O(M^{-\alpha-1})$$

denotando el término constante

$$c(k, \alpha, n) := \frac{\Gamma(k + \frac{\alpha}{n})}{\Gamma(k)}$$

y V_n como la medida de Lebesgue de la bola unidad en \mathbb{R}^n (su volumen).

Con todo esto, pasamos a demostrar la proposición que necesitamos.

Proposición 3.2. Para la constante $c(k, \alpha, n) \geq 1$,

$$E[d_{i,k}^\alpha] \geq c(k, \alpha, n) V_n^{-\alpha/n} \|p\|_\infty^{-\alpha/n} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M + \alpha/n)}$$

3. Test Delta

Demostración. Una manipulación algebraica de $E[d_{i,k}^\alpha]$ nos lleva a

$$E[d_{i,k}^\alpha] \geq L(X_i)^{-\alpha/n} E[\omega_{X_i}(d_{i,k})^{\alpha/n} | X_i]$$

donde

$$L(x) = \sup_{0 < r < \infty} \omega_x(r) / r^n$$

Con la proposición 1,

$$E[\omega_{X_i}(d_{i,k})^{\alpha/n} | X_i] = c(k, \alpha, n) \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M + \alpha/n)}$$

De $L(X_i) \leq \|p\|_\infty V_n$ sacamos que

$$E[(d_{i,k}^\alpha) | X_i] \geq c(k, \alpha, n) V_n^{-\alpha/n} \|p\|_\infty^{-\alpha/n} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M + \alpha/n)}$$

El hecho de que $E[d_{i,1}]$ es del orden de $M^{-1/n}$ nos muestra que cuando la dimensión del espacio de entrada crece, la distancia media al vecino más cercano tiende lentamente a cero cuando el número de muestras incrementa.

3.2. Test Delta para la selección de variables

En esta sección vamos a seguir el razonamiento de [Eir], aportando la base teórica que nos permite afirmar que el Test Delta es capaz de identificar el mejor subconjunto de variables para modelar. Como el propósito del Test Delta es trabajar con datos con ruido, es imposible formular una afirmación matemática sólida que muestre que el Test Delta siempre va a elegir las variables apropiadas. Por tanto vamos a hablar de esperanza, y mostraremos que la esperanza del Test Delta es mínima en el conjunto de las mejores variables, asumiendo primero que el número de datos M es suficientemente grande.

Vamos a suponer M variables aleatorias X_i , con $i = 1, \dots, M$, que son independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo a una probabilidad p . p es una probabilidad continua en un abierto acotado $C \subset \mathbb{R}^d$ y $p(x) > 0 \forall x \in C$.

Sea $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y las variables aleatorias $Y_i = f(X_i) + r_i$, donde los r_i están independientemente distribuidos de acuerdo a una distribución de media 0 y varianza σ^2 . Sea $I = \{1, \dots, d\}$ el conjunto de variables de entrada, y \tilde{I} los subconjuntos de I que corresponden a las posibles selecciones de variables. Redefinimos el Test Delta:

$$\begin{aligned} \delta : P(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \delta(\tilde{I}) &:= \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^M \left(y_i - y_{NN_{\tilde{I}}(i)} \right)^2 \\ NN_{\tilde{I}}(i) &:= \arg \min_{j \neq i} \|x_i - x_j\|_{\tilde{I}}^2 \end{aligned}$$

$$\|x_i - x_j\|_{\tilde{I}}^2 := \sum_{k \in \tilde{I}} \left(x_i^{(k)} - x_j^{(k)} \right)^2$$

donde $x_i^{(k)}$ simboliza la componente k -ésima de x_i .

3.2.1. Estudio lineal

Como el Test Delta está basado en el vecino más cercano, que es un fenómeno local, el método puede ser analizado localmente para dar una vista intuitiva de su comportamiento.

Asumimos que los datos $x_i \in (0, 1)^d \forall i \in \{1, \dots, M\}$ son i.i.d. con la distribución uniforme en el hipercubo unidad sin bordes. Sea $y_i = f(x_i) + r_i \forall i \in \{1, \dots, M\}$, con $f(x_i) = a_0 + \sum_{k=1}^d a_k x_i^{(k)}$. Es decir, es una combinación lineal de x_i añadiéndole ruido.

Sea $D \in P(\{1, \dots, d\})$ el conjunto de variables que realmente afectan a la salida, $D = \{kt.q.\partial_k f \text{ no es zero en alguna parte}\} = \{kt.q.a_k \neq 0\}$.

Proposición 3.3. $S \neq D \implies E[\delta(S)] > E[\delta(D)]$

Demostración. Página 16 [Eir]

Podemos extender el resultado anterior a funciones diferenciables con distribuciones continuas. Aplicamos el Teorema del Valor Medio para dar un punto \tilde{x}_i que pertenece al segmento que une x_i y $x_{NN_S(i)}$.

3.2.2. Análisis del Test Delta

Entonces tenemos que si $\tilde{x}_i = (x_i^{(\tilde{I}_1)}, x_i^{(\tilde{I}_2)}, \dots)$ es la proyección de cada punto al subespacio correspondiente a las variables seleccionadas, y \tilde{x}'_i corresponde a los componentes que no están en \tilde{I} y es la proyección al subespacio correspondiente a $I \setminus \tilde{I}$, definimos

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \int_C f(\tilde{x}, \tilde{x}') \tilde{p}(\tilde{x}') d\tilde{x}'$$

donde $\tilde{p}(\tilde{x}')$ es la marginal

$$\tilde{p}(\tilde{x}') = \int_C p(\tilde{x}, \tilde{x}') d\tilde{x}$$

Ahora podemos ver $\tilde{f}(\tilde{x}_i)$ como la mejor aproximación a y_i usando solamente las variables en \tilde{I} , pues

$$\tilde{f}(\tilde{x}_i) = E[Y_i | \tilde{X}_i = \tilde{x}]$$

Con todo esto dicho, pasamos a dos importantes proposiciones.

Proposición 3.4. Si \tilde{I} es de tal forma que existe un $x_0 \in C$ donde $\tilde{f}(\tilde{x}_0) \neq f(x_0)$, entonces, para un M suficientemente grande, $E[\delta(\tilde{I})] > E[\delta(I)]$

3. Test Delta

Demostración. Página 18 [Eir].

Proposición 3.5. Si \tilde{I} y \hat{I} son de tal forma que $\forall i : \tilde{f}(\tilde{x}_i) = \hat{f}(\hat{x}_i) = f(x_i)$ (ambos son suficientes para explicar f), y $\#\tilde{I} < \#\hat{I}$, entonces para un M suficientemente grande, $E[\delta(\tilde{I})] < E[\delta(\hat{I})]$.

Demostración. Página 19 [Eir].

Con todo lo explicado, podemos pasar al teorema importante.

Teorema 3.1. Asumiendo un número suficientemente grande de puntos, la esperanza del Test Delta alcanza el mínimo con el subconjunto más pequeño de I que pueda explicar completamente f en c .

Demostración. Teniendo un número suficientemente grande de puntos, por la segunda proposición la selección que minimiza debe ser capaz de explicar f , y por la tercera proposición debe ser la más pequeña.

3.2.3. Observación final

En [Eir] se muestra que la varianza del Test Delta converge a 0 cuanto más crece M . Como la esperanza del Test Delta bajo las asunciones reflejadas alcanza el mínimo por la 'mejor' selección, esto significa que la probabilidad de que el método seleccione las variables indicadas incrementa cuanto más crece el número de muestras.

Parte IV.

Problema de la selección de variables.

4. Problema de la selección de variables

La selección de variables (*input selection*) es uno de los mayores problemas en Aprendizaje Automático, especialmente cuando el número de características es relativamente grande comparado con el número de observaciones.

Matemáticamente hablando, un conjunto finito de variables es suficiente para extraer un modelo exacto de infinitas observaciones. En la práctica, no tenemos infinitas observaciones, por tanto el tamaño necesario de variables incrementa drásticamente con el número de observaciones. [RHJL]

4.1. Maldición de la dimensionalidad

En estadística, la maldición de la dimensionalidad se refiere a varios fenómenos que ocurren al analizar y organizar datos de grandes dimensiones que no suceden en dimensiones pequeñas.

Un ejemplo es que, si quisiéramos hallar cuántos puntos son suficientes para representar un cubo unidimensional (equivalentemente, un intervalo de longitud 1) para que la distancia entre cualesquiera dos puntos cercanos sea 10^{-2} , tendríamos que resolver esta simple ecuación (siendo $x > 0$ la cantidad de puntos):

$$\frac{1}{x} = 10^{-2}$$

luego bastan 10^2 puntos, pues $1/10^2 = 10^{-2}$. Sin embargo, si nos preguntamos lo mismo pero en el caso de un hipercubo de diez dimensiones, resolveríamos la misma ecuación por cada dimensión y entonces bastarían $10^{2 \cdot 10} = 10^{20}$ puntos.

En aprendizaje automático se da el **fenómeno de Hughes** [Hug59], que nos dice que teniendo el número de muestras de entrenamiento fijo, el poder predictivo del clasificador o regresor primero tiene una relación directamente proporcional al número de dimensiones (aumenta cuando aumenta el número de dimensiones), pero luego se vuelve indirectamente proporcional (disminuye al aumentar el número de dimensiones).

4.2. Selección de variables

Ahora, añadimos la premisa fundamental para resolver la maldición de dimensionalidad seleccionando variables:

Premisa 4.1. Los datos contienen características que son redundantes o irrelevantes. Por tanto, dichas características pueden ser eliminadas sin que esto conlleve a una gran pérdida de información.

En aprendizaje automático y en estadística, la selección de variables consiste en escoger un subconjunto de características relevantes, evitando aquellas redundantes o irrelevantes. Además de evitar la *maldición de la dimensionalidad*, también encontramos estas propiedades:

- Simplifica modelos.
- Agiliza los períodos de entrenamiento.
- Favorece la generalización y evita el sobreentrenamiento.

4.3. Ejemplo de algoritmo que usa Información Mutua: mRMR

Mínima redundancia máxima relevancia, o también conocido como **mRMR**, es un algoritmo que selecciona un subconjunto de características que mejor caracteriza las propiedades estadísticas de una variable de clasificación objetivo (target), sujeto a las restricciones de que estas características sean tan diferentes entre sí como sea posible, pero marginalmente sean lo más similar posible a la variable de clasificación objetivo. Es decir, que estén muy alejadas unas características de las otras pero que guarden una alta correlación con la variable de clasificación. Esta correlación puede verse estimada con la dependencia estadística entre las variables. La información mutua puede ser usada para cuantificar dicha dependencia, pues mRMR puede verse como una aproximación de maximizar la dependencia entre las distribuciones conjuntas de las características seleccionadas y de la variable de clasificación [ALC10].

Para características continuas, el *F-statistic* puede ser usado para calcular la correlación de la clase (relevancia) y el coeficiente de correlación de Pearson puede ser usado para calcular la correlación entre las características (redundancia). Luego, las características pueden ser seleccionadas una por una mediante una búsqueda *greedy* que optimice la función objetivo. Dos tipos de funciones objetivo comúnmente usados son **MID (criterio de Mutual Information Difference)**, que representa la diferencia de la relevancia entre las características, y **MIQ (criterio de Mutual Information Quotient)** que representa el cociente de la redundancia entre las características [RGFO 9].

4.3.1. Extensiones

Seleccionar variables puede no ser una tarea trivial: por ejemplo en el estudio sobre expresiones genéticas se tiene el carácter temporal de los datos. Sin embargo, la mayoría de los enfoques de selección de características desarrollados para datos de microarrays no pueden manejar datos multivariantes temporales sin un aplanamiento previo de datos, lo que resulta en una pérdida de información temporal. Extendiendo mRMR, se propuso un enfoque temporal de mínima redundancia máxima relevancia (TMRMR) que tuvo buenos resultados [RGFO 9].

Parte V.

Estimadores de información mutua

5. Información mutua para dos variables

Para simplificación del modelo, de ahora en adelante vamos a tomar la definición de la información mutua (y por tanto de la entropía de Shannon) tomando p como la probabilidad uniforme, donde $p(x) = P[X = x]$, $p(x, y) = P[X = x, Y = y]$. Por tanto, sea X una variable aleatoria discreta que toma n valores, la probabilidad $p(x)$ donde $x \in X$ es

$$p(x) = \frac{K(x)}{N}$$

donde $K(x)$ es la aplicación que determina cuántas veces aparece x en X . Se podría ver como la intersección entre X y una variable que toma el elemento x n veces, o se podría ver como una operación lógica 'AND' entre el vector X y otro vector con el elemento x n veces.

6. Optimizaciones y propuestas

Se ha basado y optimizado las funciones disponibles en [MM] de 'single_entropy' (entropía de una variable), 'entropy' (entropía entre dos variables) y 'mutual_information' (información mutua entre dos variables).

6.1. Entropía para una variable

Como se ha explicado con anterioridad, al trabajar con la probabilidad uniforme debemos contar cuántas veces aparece x en la variable X . La optimización en este caso viene por parte de la misma estructura de datos. Se ha transformado X en un diccionario cuyas claves son los distintos elementos que tiene X , y cuyos valores son las veces que aparece cada clave en X . Por tanto, $p(x)$ son los valores de la clave x dividido por el número de elementos de X .

6.2. Entropía para dos variables

La entropía para dos variables se puede ver de la siguiente manera, tal y como se visualiza en [MM]: $\forall x \in X, \forall y \in Y, p(x, y)$ es el número de elementos que hay en la intersección (entendiéndose como operación lógica 'AND') dividido por el número de elementos que contienen las variables X e Y .

A nivel de implementación, la traducción de lo explicado acaba en dos bucles anidados que recorren X e Y , respectivamente. La propuesta de optimización en este caso se basa en la transformación de dos bucles anidados que recorren X e Y , a dos bucles anidados que recorren X y otro que como máximo recorre las posiciones donde X es x de forma factorial:

$\forall x \in X$, obtenemos los lugares donde aparece x en X . Ahora, si llamamos P_x a la variable que nos indica dichos lugares, $\forall p \in P_x$, mientras que P_x no esté vacío, seleccionamos la y en la posición p de Y , borramos la posición p de P_x y llevamos el contador a 1, y ahora recorreremos el resto de posiciones: si se repite la y de la nueva posición con la y de la posición p , aumentamos el contador en 1 y borramos la posición de P_x , y sino seguimos recorriendo. Entonces aplicamos la fórmula de la entropía donde $p(x, y)$ es el contador dividido por el número de elementos que tiene X e Y (tras esto volvemos a la parte de 'mientras que P_x no esté vacío').

En Python, el código queda de la siguiente manera:

6. Optimizaciones y propuestas

```
for x in set(X):
    posiciones_x = where(X[:,0]==x)[0].tolist()
    while len(posiciones_x) > 0:
        y = X[:,1][posiciones_x[0]]
        cont_y = 1
        del posiciones_x[0]
        # We get the first y_i, count it (uniform probability)
        # and we remove the position from posiciones_x.
        y = X[:,1][posiciones_x[0]]
        cont_y = 1
        del posiciones_x[0]
        # We iterate in posiciones_x in a specific way: if we remove a
        # position then we don't update i, else i += 1.
        # Note that len(posiciones_x) is being updated inside the loop.
        i = 0
        while i < len(posiciones_x):
            # We find y_j.
            z = X[:,1][posiciones_x[i]]
            # If y_i == y_j, then we count it and remove.
            if y == z:
                cont_y += 1
                del posiciones_x[i]
            # Else, we iterate to the next element.
            else:
                i += 1
        # p(x,y) with uniform probability.
        pxy = cont_y / n_rows
        if pxy > 0.0:
            summation += pxy * math.log(pxy, log_base)
    if summation == 0.0:
        return summation
    else:
        return - summation
```

En un caso con dos variables arbitrarias, esta propuesta sería con mucha probabilidad más ineficiente que la opción dada, ya que pasamos de un algoritmo cuadrático $O(n^2)$ a uno $O(n(m!))$, con $m < n$, y generalmente $n(m!) > n^2$ (para $n = 4$ y $m = 3$ ya se da). Sin embargo, no trabajamos con dos variables arbitrarias: cuando apliquemos la entropía entre dos variables, lo haremos sobre una variable X y la variable de clasificación Y , que usualmente sus elementos diferentes son pocos comparado al abanico de posibilidades de X . Es por tanto que dejamos implementado y propuesto este algoritmo.

6.3. Información mutua entre dos variables

Esta optimización es justo la unión de la primera optimización y la propuesta en el apartado anterior, ya que están basadas en $p(x)$ y $p(x,y)$, y ambas aparecen en la definición de información mutua.

7. Información mutua en un conjunto de variables

Con la información mutua entre dos variables definida, es de gran utilidad preguntarnos cuál es la información mutua en un conjunto de variables. Es decir, sea $X = \{X_1, \dots, X_N\}$, con cada X_i siendo una variable que puede tomar n valores, y sea Y la variable de clasificación (sin pérdida de generalidad podemos agrupar X e Y y llamar X_N a Y), ¿qué información mutua hay entre X e Y ?

Vamos a indicar las opciones que hemos valorado a lo largo del proyecto, y la respuesta final.

7.1. La suma

La primera opción que tomamos fue la suma:

$$I(X_1, X_2, \dots, X_N) := \sum_{i=1}^N I(X_i, X_N)$$

Sin embargo, es un mal planteamiento: por definición, ni siquiera podemos volver a escribir la información mutua en base a entropías, y por la idea que vendrá más adelante de la selección de variables. Sobre esto último, más adelante seleccionaremos las variables que del conjunto de variables dé una información mutua mayor, pues serían las variables que más nos aporta información sobre Y sin conocerla. Imaginemos ahora un caso en el que Y dependa de dos variables de X , pero X está compuesto de 5 variables. Esta mala extensión de la información mutua multivariante nos llevaría a seleccionar un subconjunto de X como las variables que más información nos dan sobre Y sin poder justificar que realmente sea así. En la práctica, hemos hecho esta misma comprobación y cuantas más variables habían, mayor era la información mutua, y seleccionaba todo el conjunto X .

7.2. La media

$$I(X_1, X_2, \dots, X_N) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(X_i, X_N)$$

Esta opción es digna de mención pues, aunque sea una mala extensión con mucho parecido a lo anterior, en realidad el segundo criterio de descarte es contrario. Es decir, volvemos a no poder escribir la información mutua en base a entropías, pero ahora la selección de variables cambia drásticamente: al realizar la media, ahora la variable de X que devolverá

7. Información mutua en un conjunto de variables

mayor información mutua (como la que más explica la variable Y) sí tendrá relación con Y , pero el subconjunto que dará mayor información mutua siempre consistirá de una sola variable, independientemente de si está basado o no de más variables. Es decir, si por ejemplo Y está basado en las variables X_0 y X_1 , y $I(X_0, Y) > I(X_1, Y)$, como Y está basado en X_0 y X_1 se tiene que $I(X_i, Y) > I(X_j, Y)$ con $i = 0, 1$ y $j = 2, \dots, N$; y como $I(X_0, Y) > I(X_1, Y)$, se tiene que

$$I(X_0, Y) = \frac{I(X_0, Y)}{1} = \frac{2 * I(X_0, Y)}{2} = \frac{I(X_0, Y) + I(X_0, Y)}{2} > \frac{I(X_0, Y) + I(X_1, Y)}{2}$$

Luego siempre tendríamos que la variable X_0 , la variable que da mayor información mutua en solitario, sería la seleccionada.

7.3. La extensión teórica más convincente

Volvamos a ver cómo podemos escribir la información mutua en base a entropías. Como hemos demostrado en 2 dimensiones, la extensión natural a 3 dimensiones sería la siguiente:

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2, X_3) \\ = H(X_1) + H(X_2) + H(X_3) - H(X_1, X_2) - H(X_2, X_3) - H(X_1, X_3) + H(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

donde la extensión de la entropía es natural viniendo de la extensión de una variable a dos:

$$H(X_1, X_2, X_3) = -E[\log(P(X_1, X_2, X_3))] = - \sum_{x \in X_1} \sum_{y \in X_2} \sum_{z \in X_3} p(x, y, z) \log(p(x, y, z))$$

Es decir, que para n variables, la información mutua multivariante sería:

$$MMI(X_1, \dots, X_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{M \subseteq \{1, \dots, n\}, |M|=k} H(X_{M_1}, X_{M_2}, \dots, X_{M_k})$$

donde el interior de la suma se toma con todos los posibles índices tomados desde 1 hasta n de cardinalidad k . Esta definición nos lleva a la definición de McGill (1954) y Fano (1961)[BGMS].

7.3.1. Problemas con la implementación

Pese a que teóricamente parece que la información mutua multivariante está hallada, nos encontramos con la dificultad de implementar la entropía multivariante. Es decir, la expresión es la siguiente:

$$H(X_1, \dots, X_N) = - \sum_{(x_1, \dots, x_N) \in (X_1, \dots, X_N)} p(x_1, \dots, x_N) \log(p(x_1, \dots, x_N))$$

Concretamente, el problema subyace en la expresión $p(x_1, \dots, x_N)$. Recordando la discusión de la entropía para dos variables del capítulo anterior, lo que tendríamos que implementar es: $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X_2, \dots, \forall x_N \in X_N, p(x_1, \dots, x_N)$ es el número de elementos que hay en la intersección (entendiéndose como operación lógica 'AND') dividido por el número de elementos de X_1 .

Tras la tremenda dificultad de intentar encontrar una optimización para reducir tantos bucles anidados, hallamos una estimación de la información mutua multivariante, que de hecho es la más utilizada y mucho más sencilla.

7.4. Estimación a la información mutua multivariante

También llamado correlación total, multiinformación, interacción estocástica e integración, la primera extensión de la información mutua multivariante fue expresada como [\[BGMS\]](#):

$$MI(X_1, \dots, X_n) = \left(\sum_{i=1}^n H(X_i) \right) - H(X_1, \dots, X_n)$$

Esta estimación de la información mutua multivariante es la implementada en [\[BV\]](#). Sobre el problema de la entropía, se ha usado el estimador del k vecino más cercano, ya que la otra forma lleva a muchos cálculos y, además, en el caso de variables continuas a integrales. Por tanto, se escoge un criterio de aproximación para evaluarlos numéricamente. La base subyace en estimar la entropía con la media de las distancias al k vecino más cercano [\[SHL\]](#).

Parte VI.

Cálculo del Test Delta

8. K-ésimo vecino más cercano

Para el cómputo del Test Delta necesitamos hallar el k -ésimo vecino más cercano. Para ello, elaboramos la función con entrada el índice de la variable a la que se hallará dicho vecino, y el parámetro k . Hemos usado la función 'NearestNeighbors' del paquete 'sklearn.neighbors', con número de vecinos $k + 1$ y con norma L_2 (norma euclídea). Lo ajustamos a nuestro conjunto de datos X , y con este objeto llamamos a la función 'kneighbors' con la variable en forma de lista (bajo 'reshape(1,-1)'). Devolvemos el k -ésimo elemento.

La razón por la que pedimos $k + 1$ vecinos y devolvemos el k -ésimo elemento es porque en la definición de 'NearestNeighbors', éste no elimina el propio elemento del conjunto de búsqueda, luego siempre se da que el vecino más cercano es él mismo.

9. Test Delta

Para el Test Delta, pedimos como parámetro k . Inicializamos la suma a 0, y por cada variable (columna) del conjunto de datos, hallamos el k -ésimo vecino más cercano, y actualizamos la suma con

$$suma = suma + (y_i - y_{NN(x_i)})^2$$

donde $NN(x_i)$ es el índice del k -ésimo vecino más cercano de x_i .

Al finalizar el bucle, devolvemos la suma dividido por $2n$, donde n es el número de variables.

10. Algoritmo Fuerza Bruta del Test Delta

Parte VII.

Construcción de modelos a determinar el subconjunto de variables más adecuado

Parte VIII.

Propuesta de combinación de Test Delta con Información Mutua.

11. Propuesta de combinación de Test Delta con Información Mutua

Sabiendo las ventajas que nos aporta la información mutua, en concreto la selección de variables y los algoritmos basados en ella para sacar las características que reflejen mínima redundancia y máxima relevancia, así como las ventajas del rápido cálculo del Test Delta como propia técnica de selección de variables, surge la siguiente idea.

Combinar la información mutua con el test Delta.

A priori, una técnica de selección de variables que escoja un subconjunto que refleje las propiedades estadísticas de la variable de clasificación, que entre ellas sean tan diferentes entre sí como sea posible pero que marginalmente sean lo más similar posible, y que además las variables seleccionadas minimizan el ruido entre la entrada y la salida, nos hace pensar que puede obtener mejores resultados que la Información Mutua y el Test Delta por separado.

Parte IX.

Implementación.

12. Algoritmo optimizado de Fuerza Bruta

En nuestros experimentos, vamos a comparar los resultados obteniendo siempre el conjunto de variables que proporciona mayor información mutua o menor Test Delta de entre todos los posibles subconjuntos de X . También aplicaremos la misma idea para la propuesta de integración de MI con Delta, y en este apartado quedará explicado.

12.1. Conceptos

Si X tiene d variables, al querer obtener todos los posibles subconjuntos de X , cada subconjunto posible está determinado por si X_0 aparece o no aparece en el subconjunto, si X_1 aparece o no aparece... así sucesivamente hasta X_d . Es decir, por cada posible subconjunto de X , cada variable X_i tiene únicamente dos posibilidades: aparecer o no aparecer. Por tanto, hay 2^d posibles conjuntos en un principio.

Sin embargo, hay un conjunto en concreto que nunca aparecerá entre los posibles subconjuntos de X . El conjunto vacío: el conjunto en las que no aparece ninguna de las variables de X . Por tanto, ahora sí, nos quedan $2^d - 1$ posibles subconjuntos de X , luego es un problema con un espacio de soluciones de $2^d - 1$.

12.2. Implementación

Como cada variable tiene únicamente dos posibilidades, elegimos representar el problema con bits. Es decir, si $d = 7$, la información mutua que obtendremos en la posición 5 es en realidad la información mutua obtenida de 0000101; esto es, la información mutua entre la antepenúltima y la última variable de X . Por lo explicado con anterioridad, tendremos un vector de $2^d - 1$ elementos.

La idea es la siguiente: guardamos en la primera posición la información mutua de X con todas sus variables, y sea i desde 1 hasta $2^d - 1$, hallamos el número i en binario, le añadimos a la izquierda tantos 0 como hagan falta para que sea un número de $2^d - 1$ bits, y ahora por cada 1 que encontremos en el número en binario, añadimos su posición a un vector. Tras acabar este pequeño bucle, realizamos la información mutua con las variables que señala el vector de posiciones con X , y guardamos estas informaciones mutuas en otro vector.

Al terminar de recorrer los $2^d - 1$ números, hallamos la posición del máximo (en caso de la información mutua) o la del mínimo (en caso del Test Delta), transformamos dicha posición a binario y volvemos a indicar las posiciones donde se encuentran los 1 del número binario. Y se devuelven dichas posiciones, pues son las variables que han alcanzado el óptimo.

13.

Parte X.

Experimentos.

Parte XI.

Análisis.

Parte XII.

Conclusiones.

A. Primer apéndice

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/apendice01.tex`

Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: glosario.tex

\mathbb{R} Conjunto de números reales.

\mathbb{C} Conjunto de números complejos.

\mathbb{Z} Conjunto de números enteros.

Bibliografía

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.

- [ALC₁₀] B. Auffarth, M. Lopez, and J. Cerquides. Comparison of redundancy and relevance measures for feature selection in tissue classification of ct images. *advances in data mining. applications and theoretical aspects*. <http://www.csc.kth.se/~auffarth/publications/redrel.pdf>, 2010. [Citado en pág. 19]
- [BGMS] Kenneth R. Ball, Christopher Grant, William R. Mundy, and Timothy J. Shafer. A multivariate extension of mutual information for growing neural networks. *Neural Networks*, 95:29–43. [Citado en págs. 26 and 27]
- [BV] R. Brette and G. Varoquaux. Non-parametric computation of entropy and mutual-information. <https://gist.github.com/GaelVaroquaux/ead9898bd3c973c40429>. [Citado en pág. 27]
- [CT] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Hoboken, New Jersey: Wiley. [Citado en pág. 7]
- [Eir] Emil Eirola. Variable selection with the delta test in theory and practice. *Helsinki University of Technology, Master's thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Technology in the Degree Programme of Engineering Physics and Mathematics.*, pages 553–558. [Citado en págs. 14, 15, and 16]
- [ELL⁺] Emil Eirola, Elia Liitiinen, Amaury Lendasse, Francesco Corona, and Michel Verleysen. *Using the Delta Test for Variable Selection*. European Symposium on Artificial Neural Networks - Advances in Computational Intelligence and Learning Bruges (Belgium). [Citado en págs. 11 and 12]
- [Eva] D. Evans. *Data-derived estimates of noise for unknown smooth models using nearneighbour asymptotics*. PhD Thesis, Cardiff University. [Citado en pág. 13]
- [Hug59] G.F. Hughes. On the mean accuracy of statistical pattern recognizers. *IEEE Transactions on Information Theory*, 14(1):55–63, 1968, doi:10.1109/TIT.2005.844059. [Citado en pág. 18]
- [Jono4] A. J. Jones. New tools in non-linear modeling and prediction. *Computational Management Science*, 1(2):109–149, 2004. [Citado en pág. 11]
- [KL68] S. Kullback and R.A. Leibler. On information and sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):79–86, 1951, doi:10.1214/aoms/1177729694, MR 0039968. [Citado en pág. 7]
- [KSG] A. Kraskov, H. Stgbauer, and P. Grassberger. *Estimating mutual information*. *Phys. Rev. E*, 69:066138. [Citado en pág. 13]
- [KWW] S. E. Kemp, I. D. Wilson, and J. A. Ware. A tutorial on the gamma test. *School Of Computing*, 6(1 and 2):67–75. [Citado en pág. 11]
- [Mac] D.J.C. Mackay. *Information theory, inferences, and learning algorithms*. [Citado en pág. 9]

- [McMo8] David M. McMahon. *Quantum Computing Explained*. Hoboken, New Jersey: Wiley-Interscience, 2008. [Citado en pág. 6]
- [MM] Roberto Maestre and Bojan Mihaljevic. Script to calculate mutual information between two random variables. https://github.com/rmaestre/Mutual-Information/blob/master/it_tool.py. [Citado en pág. 23]
- [PP94] H. Pi and C. Peterson. Finding the embedding dimension and variable dependencies in time series. *Neural Computation*, 6(3):509–520, 1994. [Citado en pág. 12]
- [RGFO 9] Milos Radovic, Mohamed Ghalwash, Nenad Filipovic, and Zoran Obradovic. Minimum redundancy maximum relevance feature selection approach for temporal gene expression data. *BMC Bioinformatics*, 18(9), 2017, doi:10.1186/s12859-016-1423-9. [Citado en pág. 19]
- [RHJL] Nima Reyhani, Jin Hao, Yongnan Ji, and Amaury Lendasse. *Mutual Information and Gamma Test for Input Selection*. Helsinki University of Technology - Neural Network Research Center. [Citado en pág. 18]
- [Sha8x] Claude E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, 1948, doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x. [Citado en pág. 7]
- [SHL] Antti Sorjamaa, Jin Hao, and Amaury Lendasse. Mutual information and k-nearest neighbors approximator for time series prediction. *Neural Network Research Centre*, pages 553–558. [Citado en pág. 27]

