

Jariakin Biskoso Eta Konprimaezina MAC Metodoarekin

Amaia Elizaran, Maite Larrarte eta Iñaki Fernandez

2021.eko ekainaren 11



Gaien Aurkibidea

1	Sarrera	3
1.1	Helburua	3
1.2	Metodoa	3
2	Garapena	8
2.1	1.Bertsioa, Martxoak 27	8
2.2	2.Bertsioa, Apirilak 6	9
2.3	3.Bertsioa, Apirilak 10	9
2.4	4.Bertsioa, Apirilak 24	9
2.5	5.Bertsioa, Apirilak 25	10
2.6	6.Bertsioa, Apirilak 27	10
2.7	7.Bertsioa, Maiatzak 1	10
2.8	8.Bertsioa, Maiatzak 8	11
2.9	9.Bertsioa, Maiatzak 8	11
2.10	10.Bertsioa, Maiatzak 15	11
2.11	11.Bertsioa, Maiatzak 28	11
3	Ondorioak	13
3.1	Emaitzak	13
3.2	Edukiarekin lotutako ondorioak	15
3.3	Zailtasunak eta ikasketa orkorak	15

1 Sarrera

1.1 Helburua

Proiektu honen helburua jario biskoso eta konprimaekin baten bilakaera aztertzea da, abiadura hori lortzeko, Navier-Stokes-en ekuazioak erabili ditugu, izan ere, Navier-Sokes-en ekuazioak fluido biskoso baten bilakaera deskribatzen duten bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazio ez linealak dira. Ekuazio hauek hainbat fluido ezberdinetarako aplikatu daitezke, gure kasuan, hots, bi dimentsioko espazioan fluido biskoso eta konprimaekin baten kasuan hain zuzen, hiru ekuazio nagusi ditugu [1]:

1. Jarraitutasun ekuazioa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1)$$

2. Momentuaren ekuazioa X norabidean

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

3. Momentuaren ekuazioa Y norabidean

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Ekuazioetan hiru aldagai ditugula ikusten dugu, presioa, p , X norabideko abiadura, u , eta Y norabideko abiadura, v , horiek izan dira proiektuan aztertu ditugunak. Honez gain, jariakinarekin loturiko Reynolds-en zenbakia ere agertzen da.

1.2 Metodoa

Fluido biskoso eta konprimaekin baten bilakaera deskribatzen duten Navier-Stokesen ekuazioak numerikoki aztertzeko hainbat metodo ezberdin ezagutzen dira. Nolanahi ere, guk garatu dugun metodoa The MAC Method, The Marker and Cell Method, edo “MAC metodoa”, izan da.

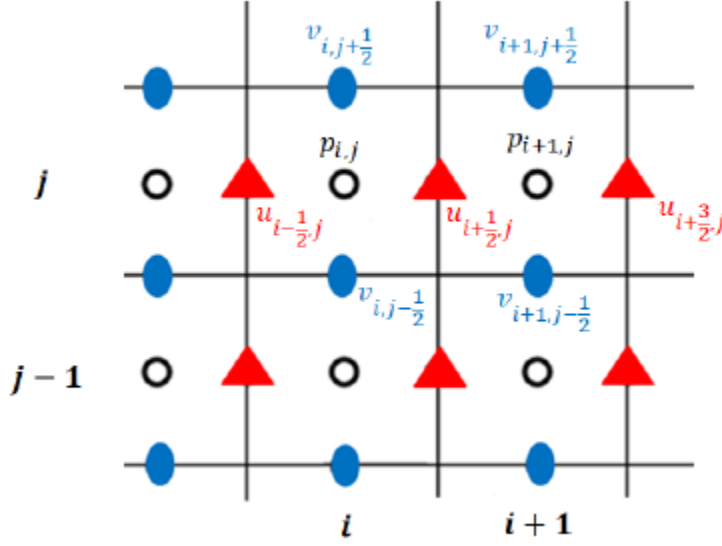
Metodo hau diferentzia finituen bidezko ekuazio diferentzial partzialen ebazpenean oinarritzen da. Izenak esaten duen bezala, beraz, diferentzia finituak erabili ditugu, hau da, gure eremua, erreka jariora “erortzen” den karratua, espazioko tarte finituetan, laukitxoetan, diskretizatu dugu, bai X eta bai Y ardatzetan, bi dimentsiotan hain zuzen ere; bi dimentsioetako diskretizazioa berdina izan da, hau da, eremua karratutzat hartu dugue, bai X eta bai Y norabideetako diskretizatu beharreko tarte berdina da, eta bi norabideetan pausu berbera hartu dugu. Diskretizazio honek aldagaiak bata bestearen alboko puntuetan ezartzea ahalbidetzen du, geroago azalduko dugun eran, eta honek oszilazioak eta albo-efektuak ekiditen ditu.

Espazioa diferentzia finituetan banatzerakoan gure aldagaietako bakoitzaren posizioa ondorengo eran hartu dugu.

1. Irudian ikus dezakegun eredua MAC metodoan erabiltzen den eredu klasikoa da, non presioa diskretizatutako tarteen erdian dagoen, abiadura horizontala lauki bakoitzaren bi aldeetan eta bertikal lauki bakoitzaren gaineko eta azpiko lerroetan. Jakin badakigu espazioa diskretizatzerako orduan aldagaiak beste era batzuetan jartzea ere posible dela, baina guk azaldu dugun eran defintu ditugu aldagaiak.

Bestalde, diskretizatutako eremuko aldagaien bilakaera, esan bezala, Navier-Stokes ekuazioak askatuz lortu dugu eta horretarako inplementazioa matrizeen bidez egin dugu.

Aldagaietako bakoitza matrize ezberdin batekin deskribatu dugu eremu osoan, beraz, hiru matrize nagusi erabili ditugu: presioarena, abiadura horizontalarena eta abiadura bertikalarena. 1. Irudian ikus daiteke nola, irudia matrize batekin deskribatuko bagenu, presioak, laukien erdian dagoen aldagaiak,



Irudia 1: Espazioaren diskretizazioa [2]

matrizeetako (i,j) osagaiei dagozkienak deskribatzen dituela, eta beraz, u eta v , abiaduraren aldagaiak, matrizean gorantz eta beherantz, edo alboetarantz, “desplazatuta” egongo liratekeen aldagaiak direla. Beraz, pentsa dezakegu, presioaren matrizearekiko abiadurei dagozkien matrizeek indize erdiosoak dituztela, eta ondorioz, matrizeen arteko desfase hori kontuan hartu behar izan dugu.

Desfase horri aurre egiteko, aurrez aipatu dugun bezala, aldagaietako bakoitzarentzat matrize bat erabili dugu, kontuan izanik beti ere, abiaduraren matrizeetako osagaiek erlazio hauek betetzen dituztela presioaren matrizearen posizioekiko, hau da, (i,j) posizioekiko.

$$u(i,j) = \frac{u_{aur}(i,j) + u_{atz}(i,j)}{\Delta x}$$

$$v(i,j) = \frac{v_{aur}(i,j) + v_{atz}(i,j)}{\Delta y}$$

Non kasu honetan u_{aur} eta u_{atz} , aurreratutako eta atzeratutako abiadurak diren, hurrenez hurren.

Notazioa errazteko ondorengo aldaketak egingo ditugu,

$$u_{aur} \equiv u_f$$

$$u_{atz} \equiv u_b$$

$$v_{aur} \equiv v_f$$

$$v_{atz} \equiv v_b$$

(1), (2) eta (3) ekuazioak diskretizatzeke, diferentzia finituak erabiliko ditugu. Deribatuak kalkulatzeko honako formuletak baliatuko gara,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

Beraz, Navier-Stokes-en ekuazioak diferentzia finituetan idatzi ditugu, gure kabuz jarraitutasun ekuazioa diskretizatu ahal izan dugu [2]:

1. Jarraitutasunaren ekuazioa era diskretuan (i,j) puntuarekiko

$$\frac{u_f(i, j) - u_b(i, j)}{\Delta x} + \frac{v_f(i, j) - v_b(i, j)}{\Delta y} \quad (4)$$

Bestalde, momentuaren ekuazioei dagokienean, diskretizazioaren ondorioz ondorengo adierazpenak lortzen dira, zeintzuek abiaduraren osagaietako bakoitzaren bilakaera deskribatzen duen algoritmoa inplementatzea ahalbidetzen duten:

2. Momentuaren X ardatzeko ekuazioa era diskretuan (i,j) puntuarekiko

$$u_f^{n+1}(i, j) = F_f^n(i, j) - \frac{\Delta t}{\Delta x} [p(i+1, j) - p(i, j)]^{n+1} \quad (5)$$

non

$$F_f^n(i, j) = u_f^n(i, j) + \Delta t \left[\frac{u_f(i+1, j) - 2u_f(i, j) + u_b(i, j)}{Re\Delta x^2} + \frac{u_f(i, j-1) - 2u_f(i, j) + u_f(i, j+1)}{Re\Delta y^2} \right]^n \\ + \Delta t \left[-\frac{u^2(i+1, j) - u^2(i, j)}{\Delta x} - \frac{[uv]_{ff}(i, j) - [uv]_{fb}(i, j)}{\Delta y} \right]^n$$

3. Momentuaren Y ardatzeko ekuazioa era diskretuan (i,j) puntuarekiko

$$v_f^{n+1}(i, j) = G_f^n(i, j) - \frac{\Delta t}{\Delta x} [p(i, j+1) - p(i, j)]^{n+1} \quad (6)$$

non

$$G_f^n(i, j) = v_f^n(i, j) + \Delta t \left[\frac{v_f(i+1, j) - 2v_f(i, j) + v_f(i-1, j)}{Re\Delta x^2} + \frac{u_f(i, j+1) - 2v_f(i, j) + v_b(i, j)}{Re\Delta y^2} \right]^n \\ + \Delta t \left[-\frac{v^2(i, j+1) - v^2(i, j)}{\Delta x} - \frac{[uv]_{ff}(i, j) - [uv]_{fb}(i, j)}{\Delta y} \right]^n$$

Nabarmena den bezala, aurreko adierazpenetan abiadura bertikalaren eta horizontalaren arteko hainbat biderketa ezberdin agertzen dira, horiek ondorengo eran egin ditugu

$$[uv]_{ff}(i, j) = \left(\frac{u_f(i, j) - u_f(i, j+1)}{2} \right) \left(\frac{v_f(i, j) + v_f(i+1, j)}{2} \right) \\ [uv]_{fb}(i, j) = \left(\frac{u_f(i, j) - u_f(i, j-1)}{2} \right) \left(\frac{v_f(i, j-1) + v_f(i+1, j-1)}{2} \right) \\ [uv]_{bf}(i, j) = \left(\frac{u_f(i-1, j) - u_f(i-1, j+1)}{2} \right) \left(\frac{v_f(i, j) + v_f(i-1, j)}{2} \right) \\ u^2(i+1, j) = \left(\frac{1}{2}[u(i+1, j) + u(i, j)] \right)^2 \\ u^2(i, j) = \left(\frac{1}{2}[u(i, j) + u(i-1, j)] \right)^2 \\ v^2(i, j+1) = \left(\frac{1}{2}[v(i, j+1) + v(i, j)] \right)^2 \\ v^2(i, j) = \left(\frac{1}{2}[v(i, j) + v(i, j-1)] \right)^2$$

Orain arte deskribatutako adierazpenak jada Navier-Stokes ekuazioen soluzioak dira, diferentzia finituetan ekuazio sistema konputazionalki askatzea ahalbidetzen digutenak. Nolanahi ere, ekuazio sistema osatzeko beste ekuazio bat beharrezkoa da, hau presioarentzako Poisson-en ekuazioa da [2]:

$$\left[\frac{p(i-1, j) - 2p(i, j) + p(i+1, j)}{\Delta x^2} + \frac{p(i, j-1) - 2p(i, j) + p(i, j+1)}{\Delta y} \right]^{n+1} = \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{F_f(i, j) - F_b(i, j)}{\Delta x} + \frac{G_f(i, j) - G_b(i, j)}{\Delta y} \right]^n$$

Aurreko kasuetan ez bezala, adierazpen honek ez digu zuzenean presioaren bilakaera implementatzea ahalbidetzen. Horregatik, Poisson-en ekuazioa ebatzea ezinbestekoa izan da. Horretarako erabili dugun metodoa erlaxazio metodoa izan da, eta era honetan garatu dugu: gure helburua $\nabla^2 p = F$ betetzen duen p presioaren balio bat lortzea da. Honetarako t matematikoki erabilgarria den gezurrezko denbora bat asmatuko dugu eta $t \rightarrow \infty$ eramango dugu, gure Poisson-en ekuazioa difusio ekuazio bihurtuz, hau da, $\frac{\partial p}{\partial t}$ sartuz. Ekuazioa erlaxatzen denean $\frac{\partial p}{\partial t} \rightarrow 0$ joko du. Hau diskretizatuz honako ekuazioa lortzen dugu,

$$\left[\frac{p(i-1, j) - 2p(i, j) + p(i+1, j)}{\Delta x^2} + \frac{p(i, j-1) - 2p(i, j) + p(i, j+1)}{\Delta y^2} \right]^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{F_f(i, j) - F_b(i, j)}{\Delta x} + \frac{G_f(i, j) - G_b(i, j)}{\Delta y} \right]^n = \frac{p(i, j)^{n+1} - p(i, j)^n}{\Delta t}$$

Gain erlaxazioan lan eginez, hau da,

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \left(\frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

Simetria inposatuz, $\Delta x = \Delta y$ eta

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \leq \frac{1}{4}$$

Honako ekuazioa lortzen dugu,

$$p^{n+1}(i, j) = \frac{1}{4} (p^n(i-1, j) + p^n(i+1, j) + p^n(i, j-1) + p^n(i, j+1)) - \frac{1}{\Delta x} [F_f(i, j) - F_b(i, j)]^n - \frac{1}{\Delta x} [G_f(i, j) - G_b(i, j)]^n \quad (8)$$

Jakina den bezala, ekuazio sistemarekin amaitzeko, egonkortasun baldintzak ezartzea beharrezkoa da, izan ere, emaitza egonkorra izan dadin ondorengo erlazioa betetzea ezinbestekoa da:

$$\frac{\Delta t}{Re \Delta x} \leq \frac{1}{4}$$

Bigarren ordenako ekuazio diferentzial partzialetako sistema askatzeko, jakina den bezala, hasierako eta mugalde baldintzak finkatzea ezinbestekoa da.

Hiru aldagaien matrizeen dimentsioei dagokienez, M diskretizatutako zati kopurua izanik,

$$p \rightarrow M \times M$$

$$u \rightarrow M - 1 \times M$$

$$v \rightarrow M \times M - 1$$

Abiadurari dagokionez, hiru pareta izango ditugu, zeinetan jariakina ez den beste aldera joango, ondorioz Dirichlet-en eta Neumann-en mugalde baldintzak ezarri beharko ditugu.

$$v(i, M-1) = 0$$

$$v(1, j) = -v(2, j)$$

$$v(M, j) = -v(M-1, j)$$

$$u(1, j) = 0$$

$$u(i, M) = u(i, M-1)$$

$$u(M-1, j) = 0$$

Laugarren paretan berriz, jariakina pasa daiteke beste aldera, beraz, Neumann-en mugalde baldintzak ezarri beharko ditugu,

$$u(i, 1) = u_{erreka}$$

$$v(i, 1) = v(i, 2)$$

Azkenik, presioak Neumann-en mugalde baldintzak bete beharko ditu lau paretetan

$$p(1, j) = p(2, j)$$

$$p(M, j) = p(M-1, j)$$

$$p(i, 1) = p(i, 2)$$

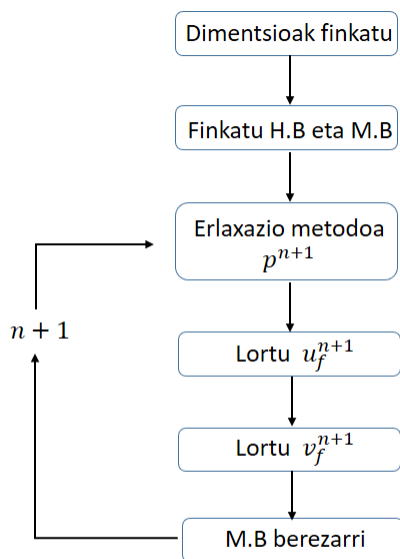
$$p(i, M) = p(i, M-1)$$

Hasierako balioei dagokienez, p, v matrizeak guztiz nuloak izango dira eta u-ren lehenengo errenkadaren balioak, "erreka"ren abiadurarenak izango dira puntu guztietan, homogeneouski.

2 Garapena

Hasteko, sarreran aipatutako metodoa ulertzen eta matrizeak nola planteatu pentsatzen izan genituen zailtasun handienak, izan ere, matrizeetako indize erdiosoen eta indize osoen arteko erlazioa barnera-tzea nahiko zaila egin zitzaigun, batez ere, ekuazio eta adierazpenetako gaiak zeintzuk ziren ulertzerako orduan. Horregatik, hasierako bertsioetan oso tamaina txikiko matrizeekin egin genuen lan, gure iru-dimena eta abstrakzioa pixka bat gehiago garatzea eta proiektuaren nondik norako nagusiak finkatzea lortu genuen arte.

Behin hori eginda, ekuazio eta adierazpen guztietako matrizeetako osagaiak behin finkatuta, ekua-zioak pixkanaka pixkanaka implementatzen joan ginen. Ondoren, proiektuaren eskema nagusia definitu genuen, 2. irudian ikusten den moduan.



Irudia 2: Ebazteko algoritmoa

Egin beharreko pausuak finkatuta izanda, Poissonen ekuazioa ebazten izan genituen arazoak, batez ere, erlaxazio metodoa ulertu eta honen algoritmoa implementatzerako orduan.

Ondoren, bertsioz bertsio proiektuaren bilakaera nolakoa izan den azaldu dugu, bakoitzean izan ditugun zailtasunak eta aurrerapenak azalduz.

2.1 1.Bertsioa, Martxoak 27

Lehenengo bertsioari dagokionez, esan bezala, oraindik tamaina txikietako matrizeak erabiltzen genituen. Hasieran jarraitu genuen planteamendua ondorengoa izan zen:

Alde batetik, hiru aldagaien matrizeak dimentsio txikietako matrize bezala hartu genituen eta hauei hasierako baldintzak finkatu genizkien. Ondoren, aldagai bakoitzarentzat mugalde baldintzak ezarteko modulo bat egin genuen eta hasierako baldintzak zituen matrizeari mugalde baldintzak ezarri genizkion, gero matrize horietako bakoitza fitxategi batean idatzi genuen.

Beste alde batetik, F eta G funtzioak implementatu genituen beste bi modulutan, bakoitza batean. Esan beharra dago, hasieran ez genituela funtzio hauek guztiz ondo ulertu, jada aipatu dugun bezala,

ez baikenuelako ongi ulertzen zein zen indize erdiosoen eta osoen arteko erlazioa. Horren ondorioz, Fa, Fb, Ga eta Gb funtzioak inplementatu genituen, indize erdioso positibo eta negatiboentzako “ezberdinak” ziren funtzioak. Gainera, aipatu beharra dago, funtzio horietako bakoitzak matrize bat bueltatzen zuela uste genuela hasieran, beraz, era horretan inplementatu genituen.

Hori guztia egin ostean, fitxategietan idatzita genituen U eta V matrizeak irakurri genituen eta programa nagusi batean Ga funtzioak ematen zigun matrizea inprimatu genuen.

2.2 2.Bertsioa, Apirilak 6

Bigarren bertsioan bi aldaketa nagusi egin genituen lehenengo bertsioarekin alderatuz.

Horietako lehenengoa hasierako egoera egonkor batetik abiatzea ezinbestekoa dela ohartzea eta hori lortzen saiatzea izan zen. Izan ere, hasierako errekaaren abiadurari dagokionez, egoera egonkor batetik hasteko, amaieran infinituraino egonkorra den funtzio baten bilakaera hartu eta egonkortzerakoan, erreka abiadura horizontalari balio hori finkatu genion.

Hasierako balintzei dagokienean, errekaaren hasierako abiadura horizontala finkatzeko, hasiera batean $\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ funtzioa aukeratu genuen, eta hori inplementatu genuen. Hala ere, hurrengo bertsioetan hau galdu egin genuen, beranduago berreskuratu genuen.

Aipatutako bigarren aldaketa nagusia matrizeen dimentsioekin erlazionatutakoa da. Izan ere, presioaren matrizearekiko abiaduren matrizeek duten “desfase” horren ondorioz errenkada edo zutabe kopuru handiagoak zituztela ohartu ginen. Abiaduraren osagai horizontalaren matrizeari dagokionez, p-ren dimentsioa $M \times M$ bada, U-rena $(M - 1) \times (M)$ da, eta abiaduraren osagai bertikalaren matrizeari dagokionez, V-rena $(M) \times (M - 1)$. Honekin, mugalde baldintzak jartzeko beharrezkoak diren “domeinuz kanpoko balioak” kontsideratu genituen.

2.3 3.Berstioa, Apirilak 10

Bertsio honetan aurreko bertsioan egindako aldaketak txukundu eta exekutatu genituen programa nagusi batean, eta Fa, Fb, Ga eta Gb, guretzako oraindik matrizeak zirenak, pantailan inprimatu genituen.

Aipatu beharra dago bai bertsio honetan eta bai aurrekoan ez genuela presioan erreparatu eta abiadurarekin zerikusia zuten F eta G funtzioekin aritu ginela.

2.4 4.Bertsioa, Apirilak 24

Bertsio honetan jada presioa kontsideratu genuen lehenengo aldiz eta Poisson-en ekuazioa askatzen saiatu ginen erlaxazio metodoaren bitartez.

Gainontzekoari dagokienean oraindik dimentsio txikietako matrizeak hartzen genituen kontuan eta orain arte bezala, lehenengo, matrizeei hasierako baldintzak ezartzen genizkien, ondoren, mugalde baldintzak aplikatu eta azkenik fitxategi batean idazten genituen.

Laugarren bertsioa programa nagusian, alde batetik, presioaren matrizea inprimatzen genuen, eta beste alde batetik, orain arteko bertsioetan bezala Fa, Fb, Ga eta Gb matrizeak. Presioaren matrizeari dagokienean, oraindik ez ginen ohartu erlaxazio metodoa aplikatzeko denborako iterazioak beharrezkoak zirela eta beraz, ez genuen ondo ebatzen Poisson-en ekuazioa. Egiten genuena zera zen, erlaxazio metodoaren biartez lortutako azken adierazpena inplementatu baina benetan erlaxazio metodoa aplikatu gabe.

Nolanahi ere, presioaren ebazpena egokitzen hartu genuen eta beraz, denbora aldiune bakoitzeko abiadura horizontala eta bertikalaren denboraren garapena adierazten duten ekuazioak, presioaren denboraren menpeko ebazpenaren menpekoak direnak, inplementatu genituen bi modulutan. Hala ere, ez genituen program nagusi batean exekutatu.

2.5 5.Bertsioa, Apirilak 25

Bertsio honetan ohartu ginen matrizeak fitxategietan idaztea ez zela batere eraginkorra gure proiektuari dagokionean, beraz, hasierako baldintzak aplikatzeko modulu bat sortu genuen, eta honen bitartez programa nagusian bertan finkatzen genituen bai hasierako eta bai mugalde baldintzak.

Bestalde, lehenengo aldiz matrizeak allocatable bezala definitu genituen eta bakoitzaren dimentsioak programa nagusian bertan ezarri. Hori aurrerapauso handia izan zen, izan ere, etorkizuneko programetan, matrizeen dimentsio handiagoak ezartzeko oso erabilgarria izan baitzen.

Bostgarren bertsioan ez genituen laugarren bertsioan egindako aurrerapenak gehitu, hau da, presioa ez genuen sartu eta denboraren garapenak ere albo batera utzi genituen.

2.6 6.Bertsioa, Apirilak 27

Bertsio honetan, aurrera pauso handia egin genuen, izan ere, 2.irudian agertzen den eskema lehenengo aldiz inplementatu genuen, orain arte garatutako modulo guztiak erabiliz.

Alde batetik, mugalde baldintzak inposatzen zituen modulo bat garatu genuen. Honekin batera, hasierako egoera finkatzen zuen moduloa ere garatu genuen. Gainera, lehenengo aldiz, u^{n+1} eta v^{n+1} matrizeak lortzeko moduloak egin genituen.

Bestalde, F eta G funtzioak lehenengo aldiz ondo ulertzea eta inplementatzea lortu genuen. Momentura arte egiten genuen Fa, Fb, Ga eta Gb bereizketarekin bukatu genuen, eta gai izan ginen bi alboetako, eta goiko eta beheko, indize erdiosoek betetzen zituzten F eta G-ren adierazpenak bateratzeko.

Bertsioak zenbait errore garrantzitsu zituen. Alde batetik, Poisson-en ekuazioa gaizki ari ginen ebazten, izan ere, ez genuen erlaxazio metodoa ondo aplikatzen. Proiektuaren aldiune honetan ez genuen erlaxazio metodoa guztiz ondo barneratuta, hau da, erabili beharreko metodologia ez genuen ondo ulertzen.

Beste aldetik, u^{n+1} eta v^{n+1} matrizeak lortzeko, gaizki ebatzitako presioaren matrizea erabiltzen genuen, ondorioz lortzen genituen emaitzak zentzu gabekoak ziren.

Hala ere, txukuntasunean garapen nabarmena izan genuen bertsio honetan. Gainera, algoritmo nagusiaren eskema finkatzea, hurrengo bertsioetarako oso lagungarri izan zen, izan ere, eskema berdina jarraitu baikenuen hurrengo bertsioetan.

2.7 7.Bertsioa, Maiatzak 1

Bertsio honek bi aurrerapen nagusi ditu. Lehenengoari dagokionez, Poisson-en ekuazioa ebatzi genuen presioarentzat $\nabla^2 P = F$, erlaxazio metodoa ondo inplementatu genuen.

Bestealde, hasierako baldintzetan "errekaren"abiadura egonkor bat finkatzea lortu genuen errore funtzioaren bidez, errore funtzioa arkutangentearena baino eraginkorragoa zela ohartu ginelako.

2.8 8.Bertsioa, Maiatzak 8

Bertsio honetan, 6. eta 7.bertsioetan lortutako guztia inplementatu eta hobetu genuen, modulo guztiak 5 parametrotara orokortuz M , p , u , v , τ , Δx eta Re , diskretizatutako espazio kopurua, presioaren matrizea (Poisson ebatzi ostekoa), X ardatzeko abiaduraren matrizea, Y ardatzeko abiaduraren matrizea, denbora pausua, espazio pausua eta Reynolds-en zenbakia hurrenez hurren.

Honekin batera, programa nagusian, lortutako emaitzak irudikatzeko alortimoa ere inplementatu genuen. Bertsio honen aurrerapen garrantzitsuenetako bat txukuntasuna izan zen.

2.9 9.Bertsioa, Maiatzak 8

Nabarmena den bezala, 8. eta 9.bertsioak aldeberean egin genuten, baina bertsio honetan estrategia pixka bat aldatu genuen proiektua guztiz borobiltzen joateko eta emaitzak lortzen haste aldera. Izan ere, bagenekien abiaduraren eboluzioa presioaren zuzenketarik gabe lor daitekeela eta beraz, hori izan zen 9.bertsio honen planteamendua eta helburua.

Horretarako, presioarekin lotutako funtzio eta modulo guztiak ezabatu genituen. Hori horrela, abiaduraren denboraren garapena behatu ahal izan genuen, bai X eta bai Y ardatzetako abiadurena, presioaren zuzenketarik gabe. Horretarako, 8.bertsioan emaitzak irudikatzeko garatutako algoritmoa erabili genuen.

Bertsio honetan egindako lanak abiaduraren ebazpenean genituen akatsak zuzentzeko balio izan zigun, oso erabilgarria izan zen, aurrera begira, bertsio honetan garatutakoa presioarekin batera jarzterako orduan.

2.10 10.Bertsioa, Maiatzak 15

Bertsio honetan jada, aurreko bertsioetako aurrerapen guztiak uztartu genituen, batez ere, 9.bertsioa abiadurarentzat solik garatutakoa eta presioa. Presioa, jakina den moduan, Poisson-en ekuazioa erlaxazio-metodoaren bitartez ebazten lortu genuen. Horrez gain, bertsio honetako punturik garrantzitsuen denbora aldiune bakoitzerako irudia egin genuela izan zen. Horrela, jariakina eremu karra-turantz "erortzen" zihuan heinean, aldiune bakoitzean nola aldatzen zen ikusi ahal izan genuen.

Esan beharra dago, bertsio honetan planteatutakoa 8.bertsioaren oso antzekoa dela, baina desberdinatsun bat dauka, aurreko paragrafoan aipatutakoaz gain, mugalde baldintzak ezartzeko moduan dago aldaketa. Izan ere, orain arteko bertsioetan, 6.bertsiotik aurrera, mugalde baldintzak modulo batean definitzen genituen eta modulo hori deituz finkatzen genituen iterazio bakoitzean. Bertsio honetan, ordea, mugalde baldintzak funtzioetan definitu genituen, abiadura horizontalaren eta abiadura bertikalaren denboraren garapena inplementatuta dagoen moduluetan.

2.11 11.Bertsioa, Maiatzak 28

Orain arte landutako bertsio guztiekin proiektuari amaieran izango duen forma ematea lortu genuen, nolanahi ere, behin 10.bertsioa bukatuta ez genituen espero genituen emaitzak lortzen, eta orduan hasi zen proiektuaren azkenengo erroka, erroreak aurkitu eta konpontzea. Hortaz, azken bertsio honetan garatu duguna horixe izan da, orain arte egindako guztia txukundu eta akatsak aurkitu eta konpontzea hain zuzen ere. Hainbat aldaketa egin behar izan ditugu helburu horrekin.

Hasteko, ohartu ginen orain arte inplementatutako F eta G -ri dagokionez notazo desegokia erabili genuela. Bestalde, irudiak sortzeko algoritmoari dagokionean ere zenbait akats eta kontraesan aurkitu genituen.

Mugalde baldintzak ezartzerako orduan ere orain arte genituenak aldatu ditugu. Abiaduraren kasuan, eremuko paretetan abiadura nulutzat jo dugu eta hormaren alde batean eta bestean aurkako zeinuko eta modulo bereko abiadura ezarri. Presioari dagokionean hormaren bi aldeetan presio berbera ezarri dugu.

Eraitza definitiboak bertsio honetatik lortu ditugu.

3 Ondorioak

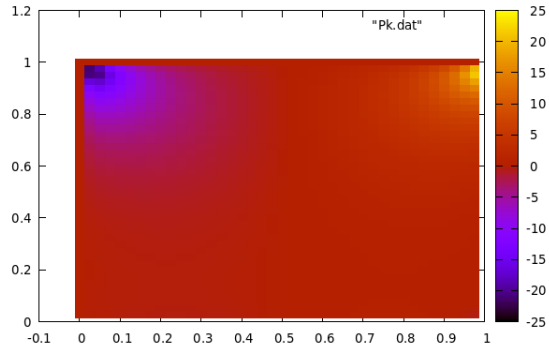
Proiektua garatu ostean hainbat ondorio atera ditzakegula esan dezakegu, izan ere, proiektua garatu dugun denboran zehar, proiektua bera landu eta emaitza batzuk lortzeaz gain, hainbat gauza ikasi ditugu. Ikasitako eta barneratutako ezagutzak hainbat motatakoak izan dira, horietako batzuk proiektuaren edukiarekin zerikusia dutenak, fisikarekin zerikusia dutenak alde batetik, eta konputazioarekin zerikusia dutenak bestetik; eta besteak epe luzeko proiektu bat talde lanean egitearekin lotura dutenak. Beraz, ondorioak hiru bloke ezberdinetan banatuko ditugu, lehenengoan, lortutako emaitzak eta horiekin lotutako ondorioak aipatuko ditugu, bigarrenetan, proiektuaren edukiaz eta ikasitako fisikaz eta programazioaz arituko gara, eta hirugarrenean honek sortu dizkigun zailtasunetaz eta irabazi ditugun gaitasunetaz.

3.1 Emaitzak

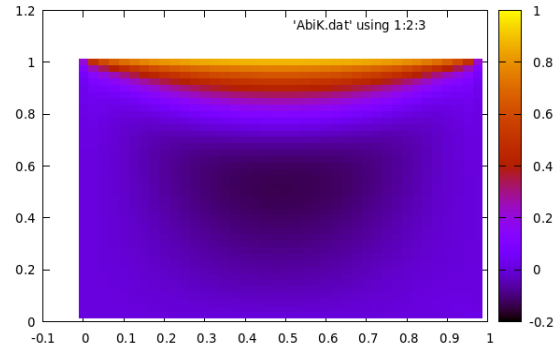
Proiektu honekin hasi ginenean lortu behar genituen emaitzak zeintzuk ziren argi ez genuen arren, ideia nagusia zein zen burutan genuen, bagenekien zurrumbilo itxurako irudiak lortu behar genituela. Programa garatu dugun moduarengatik, gure emaitzak hiru parametro ezberdinen arabera dira, horiek M , espazioa diskretizatzeko erabilitako zati kopurua, Re , fluidoaren Reynolds-en zenbakia eta i , denborako iterazio kopurua dira, denbora pausuaren tamaina definitzeko parametroa.

Garapenean aipatu dugun bezala, 11.bertsiora arte ez ditugu zurrumbilo itxurako simulazioak lortu, baina behin dena konponduta eta txukun jarrita, aipatutako parametro horiek aldatzen joan gara eta ondorengo irudiak lortzeko gai izan gara. Ondoren jarri ditugun irudi guztiak kasu bakoitzeko azkenengo iteraziokoak dira. Printzipioz ezin ditugu hiru parametroak edozein modutan aldatu, eta gainera, aldatzen ditugun moduaren arabera programak behar duen konpilatzeko denbora aldatu egiten da, parametroen balioak geroz eta handiagoak izan orduan eta denbora gehiago behar du programak. Horrez gain, ohartu gara ezin dugula edozein Reynolds-en zenbaki erabili, kasu horietan programa ez delako presioarentzako Poissonen ekuazioa ondo ebazteko gai, ez du konbergitzen.

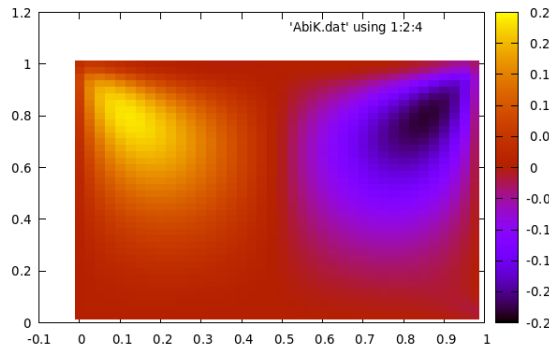
Ondorengo irudietan, 3. eta 4.Irudietan, parametro ezberdinen arabera lortutako irudiak jarri ditugu, irudi guzti hauek programaren azken iterazioan lortutakoak dira. 3.Irudian $Re=1$, $M=40$ eta $i=1000$ parametroekin lortzen den eboluzioko azken aldiuneko irudiak jarri ditugu, eta 4.Irudian $Re=1$, $M=60$ eta $i=10000$ parametroekin lortutako eboluzioko azken aldiuneko irudiak.



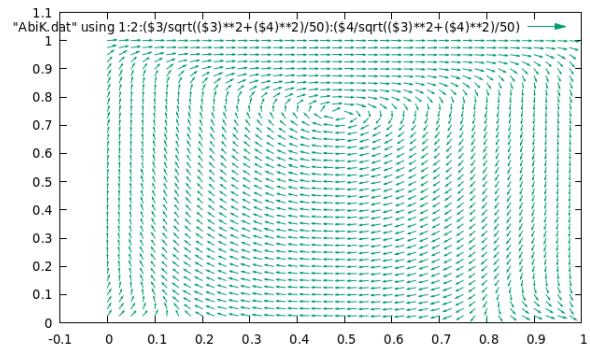
((a)) M=40,i=1000,Re=1,Presioa



((b)) M=40,i=1000,Re=1,Abiadura horizontala

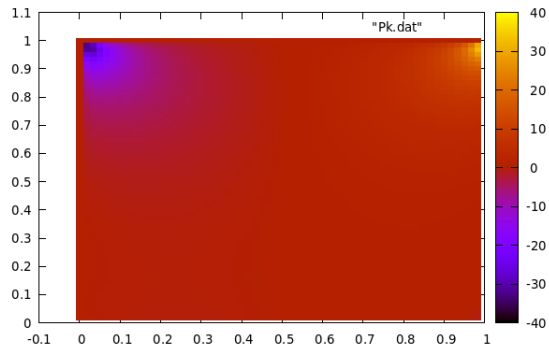


((c)) M=40,i=1000,Re=1,Abiadura bertikala

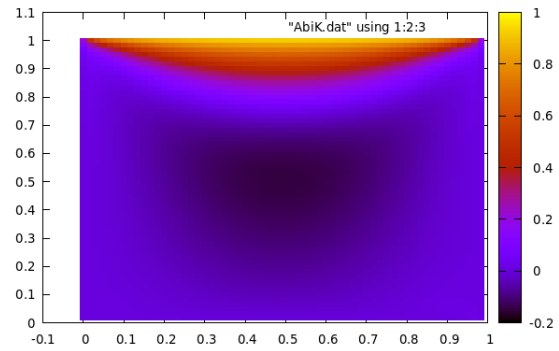


((d)) M=40,i=1000,Re=1,Zurrumbiloa

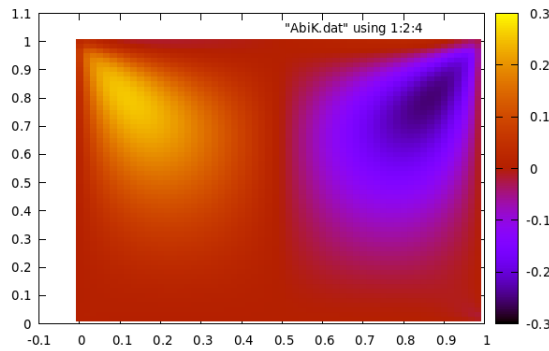
Irudia 3: M=40, i=1000 eta Re=1 parametroekin (a)Presioa (b)Abiadura horizontala (c)Abiadura bertikala (d)Zurrumbiloa



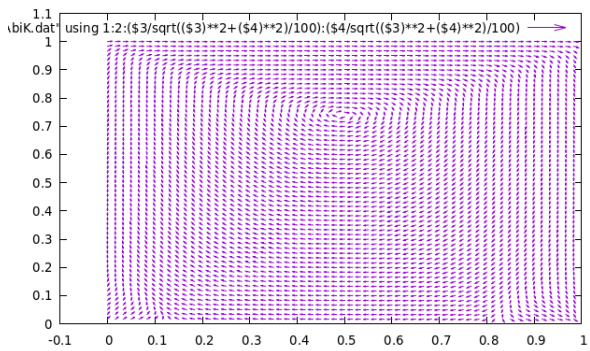
((a)) M=60,i=10000,Re=1,Presioa



((b)) M=60,i=10000,Re=1,Abiadura horizontala



((c)) M=60,i=10000,Re=1,Abiadura bertikala



((d)) M=60,i=10000,Re=1,Zurrumbiloa

Irudia 4: M=60, i=10000 eta Re=1 parametroekin (a)Presioa (b)Abiadura horizontala (c)Abiadura bertikala (d)Zurrumbiloa

3.2 Edukiarekin lotutako ondorioak

Jariakin biskoso eta konprimaezinaren bilakaera aztertzea hasieran sekulako erronka iruditu zitzaigun, ez genuelako inoiz jariakinen fisikarekin erlazionatutako gairik landu, eta beraz, arlo hau guztiz berria zen guretzat. Horren ondorioz, esan dezakegu, proiektu honek jariakinen fisikarako sarrera moduan balio izan digula.

Alde batetik, jariakinen fisikarekin lotutako ekuazio garrantzitsuenak ezagutu eta landu ditugu, Navier-Stokes-en ekuazioak hain zuzen ere. Ekuazio hauek jariakin biskosoen fluxu ez lineala deskribatzen duten bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazio multzoa direla ikasi dugu. Ekuazio hauen funtsa bi kontserbazio printzipio dira, bata masaren kontserbazioa edo jarraitutasunaren ekuazioa eta bestea, fisikan hain oinarritzkoa den momentuaren kontserbazioa.

Bestetik, jariakinen fisikan oinarri oinarritzkoa den magnitudea ezagutu dugu, Reynolds-en zenbakia hain zuzen. Reynolds-en zenbakia fluidoaren mekanikan definitzen eta erabiltzen den magnitude adimentsional bat da, aztertzen ari garen fluidoaren izaeraren berri ematen diguna. Reynolds-en zenbaki handiagoa duten fluidoek portaera turbulentoagoa dute.

Behin fisikarekin erlazionatutako ikasketak aipatu ditugula, konputazio aldetik lortutako gaitasunak aipatuko ditugu. Proiektuaren edukiarekin gertatu zitzaigun bezala, hasieran, konputazionalki proiektua garatzea erronka handia izan zen guretzat.

Aipatu beharra dago, proiektu hau garatzearekin batera, hainbatetan aipatutako indize erdiosoen kontura beharrezkoa den abstrakzio maila lortu dugula. Bertsioen garapenean ikusi ahal izan dugun bezala, esaterako hasieran F eta G "eskuinerantz" eta "ezkerrerantz" funtzio bakoitzaren bi bertsio ezberdin, Fa, Fb, Ga eta Gb zeudela uste genuen. Horrek, argi erakusten du, lanean aurrera egin ahala abstrakzio maila hori lantzen eta lortzen joan garela.

Abstrakzioaren garapenarekin lotuta, bi dimentsiotan lan egiten trebatu garela esan dezakegu. Izan ere, matrizeekin garatu baitugu proiektu guztia, eta beste behin, bertsioen garapenean ikus daitekeen moduan, lanean denbora bat pasa arte, ez genuen dimentsio handiko matrizeak erabiltzeko beharrezkoa zen abstrakzioa garatu.

Deribatu partzialetako ekuazio diferentzialen ebazpenari dagokionean, proiektuarekin hasi ginenean ez genuen honetarako ezagutza nahikorik eta pixkanaka pixkanaka hau ere ikasten eta barneratzen joan gara. Poisson-en ekuazioa ebazteko erabilitako metodoarekin, erlaxazio metodoarekin trebatzea lortu dugu, eta baita honek inposatzen dituen egonkortasun baldintzekin lan egitea.

Ondorio bloke honekin amaitzeko, ideia nagusi bezala, konputazioari dagokionez asko ikasi dugula eta hasieran genuenarekin alderatuz, gure trebetasuna asko garatu dugula azpimarratuko genuke.

3.3 Zailtasunak eta ikasketa orkorrak

Orain arte aipatutako ondorioez gain, proiektuan zehar izandako zailtasun nagusiak eta talde moduan egindako ikasketa orokorrak aipatzea ezinbestekoa deritzogu. Hain zuzen ere, konputazionalki lortutako emaitza eta garatutako lan guztiaz gain beste hainbat ezagutza barneratu ditugulako, epe luzeko lan bat planteatzerako orduan baliagarriak direnak eta etorkizunerako proiektuei begira asko lagunduko digutela deritzogunak.

Nolanahi ere, zailtasunak aipatzen hasiko gara. Proiektu honen zailtasun nagusia eta beraz erronka handiena suposatu diguna ia-ia zerotik hasi behar izatea izan da. Aurreko atalean aipatu bezala hasieran bai fisikarekin eta bai behar genuen konputazio mailarekin lotutako ezagutzak urriak baitziren. Horren ondorioz, talde moduan kideetako bakoitzaren ikasketa erritmoa errespetatzen ikasi behar izan dugu, eta pixkanaka-pixkanaka bata besteari lagunduz, guztiok ezagutza maila antzekoetara iristea. Gainera, elkarrekin lan egiteko erabili dugun baliabide nagusia Skype-a izan da, gaur egungo egoeraren ondorioz hein handi batean, eta horrek komunikazioa zaildu egin du gure artean, elkar entzutea,

ulertzea eta nork bere burua ulertaraztea ez dira batere errazak izan.

Aipatu nahi dugun beste zailtasun garrantzitsu bat proiektuaren amaieran izan dugu. Izan ere, amaiera aldera iristerakoan, ez baikenituen zentzuzko emaitzak lortzen eta hori konpontzea nahiko erronka handia izan da guretzat. Proiektuaren garapena bera ondo zegoela ikusten genuen, ondorioz, akatsak aurkitzea nahiko zaila izan da. Bestalde, proiektuaren azken bertsioa zein izango zen zehazteak nahiko lan suposatu digu, aipatu berri dugunaren ondorioz, akatsa ezin aurkitzearen ondorioz.

Azkenik, proiektu honekin ikasitakoa aipatzea gustatuko litzaiguke. Horrelako epe luzeko proiektu bat taldean egin izanak ekarri dizkigun aberasgarritasunak hainbat izan dira. Elkar ulertzea eta bakoitzaren ikasketa erritmoak errespetatzea lortu baitugu, izandako zailtasunak gaindituz. Bestalde, proiektua aurrera eramateko egiten genituen aurrerapenetan taldekideen arteko adostasuna bermatu dugu uneoro eta egindakoa guztiok ulertzen eta partekatzen genuela. Benetan uste dugu zentzu honekin ikasitakoa etorkizunerako baliagarria izango dela.

Erreferentziak

- [1] CLIVE A. J. FLETCHER *Computational techniques for fluid dynamics* New York, New York, USA, Volume 2, (Springer Series in Computational Physics) , 1990.
- [2] MOHAMED MOHSEN AHMED, *Report: Application of Projection Method and Staggered Grid to Incompressible Navier-Stokes Equations*, Kansas State University, Manhattan, Kansas, USA