

分类号:TP30

10710-2015132038



長安大學

硕士学位论文

基于等效电路模型的锂离子电池模型
参数辨识算法对比研究

黑文洁

导师姓名职称	汪贵平 教授		
申请学位类别	硕士	学科专业名称	导航、制导与控制
论文提交日期	2018 年 4 月 9 日	论文答辩日期	2018 年 6 月 5 日
学位授予单位	长安大学		

Comparison of Lithium Ion Battery Model Parameter Identification Algorithms Based on Equivalent Circuit Model

A Thesis Submitted for the Degree of Master

Candidate: Hei Wenjie

Supervisor: Prof. Wang Guiping

Chang'an University, Xi'an, China

论文独创性声明

本人声明：本人所呈交的学位论文是在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除论文中已经注明引用的内容外，对论文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本论文中不包含任何未加明确注明的其他个人或集体已经公开发表的成果。

本声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名：黑文浩

2018 年 6 月 6 日

论文知识产权权属声明

本人在导师指导下所完成的论文及相关的职务作品，知识产权归属学校。学校享有以任何方式发表、复制、公开阅览、借阅以及申请专利等权利。本人离校后发表或使用学位论文或与该论文直接相关的学术论文或成果时，署名单位仍然为长安大学。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

论文作者签名：黑文浩

2018 年 6 月 6 日

导师签名：

江平

2018 年 6 月 6 日

摘 要

随着科技的不断进步和人们经济水平的日益提高，新能源汽车产业应运而生并发展迅猛，因此对于动力电池的研究也逐步深入，尤其是对于锂离子电池管理系统的研究。而在锂离子电池管理系统建立的过程中，最基础也至关重要的一个步骤便是建立一个准确有效的电池模型并对于电池模型的参数进行准确的辨识。本文以锂离子电池为研究对象建立等效电池模型以及其改进模型，并采用不同参数辨识算法进行了深入对比研究。

所做的主要工作如下：

(1) 基于对于研究对象锂离子电池的基本分析以及对于现有的常见锂离子电池模型的分析总结，建立了本文所使用的电池模型结构，即在适用范围广泛的 Thevenin 模型的基础上，增加一个 RC 回路，构成了一个双极化电池等效模型，并在此基础上对于该等效模型进行了基本的理论分析；

(2) 基于所构建的电池等效模型，分别采用含遗忘因子递推最小二乘法、贝叶斯辨识算法、卡尔曼滤波算法这三种算法进行模型参数辨识，详细地分析了辨识算法的实现步骤及推导过程。并使用 Matlab 进行编程仿真，对于辨识结果进行对比分析，发现卡尔曼滤波算法相较于其他算法辨识速度快，抗干扰能力强，精度高，误差控制在 2% 以内；

(3) 针对现有电池模型大多需要做实验获取开路电压信息的问题，本文采用了一种电池模型参数直接辨识的方法，对于所设计的双极化电池等效模型进行了改进，并对于所新构造的模型参数可识别性进行了分析，验证了该模型的参数可识别性；并基于改进模型采用非线性最小二乘法进行参数辨识，与前三种算法从参数收敛性、预估精确性以及算法的复杂度等角度进行对比分析，发现基于改进模型的直接参数辨识算法参数收敛速度快，精度高，复杂度低，误差控制在 1.5% 以内，具有显著优势及运用前景。

关键词：锂离子电池；等效电路模型；参数辨识；电池模型参数直接辨识算法

Abstract

With the continuous progress of science and technology and the increasing economic level of people, the new energy automotive industry has emerged and developed rapidly. Therefore, the research on the power battery has gradually deepened, especially for lithium-ion battery management system research. In the process of establishing a lithium-ion battery management system, one of the most fundamental and crucial steps is to establish an accurate and effective battery model and accurately identify the battery model parameters. In this paper, the equivalent battery model and its improved model of the lithium-ion battery as the research object is established, and the use of different parameter identification algorithms are deeply compared and studied.

The main work is done as follows:

(1) Based on the basic analysis of the research object lithium-ion battery and the analysis of the existing common lithium-ion battery model, the battery model structure used in this paper is established, which is based on the wide range of Thevenin models, a dual-polarized battery equivalent model is constituted by adding an RC circuit, and on this basis, a basic theoretical analysis of the equivalent model is performed.

(2) Based on the constructed battery equivalent model, three parameters including forgetting factor recursive least square method, Bayesian identification algorithm and Kalman filter algorithm are used to identify the model parameters, and the realization of the identification algorithm is analyzed in detail. Matlab is used for programming simulation and after the contrasting of the identification results, it is found that the Kalman filter algorithm has faster identification speed, strong anti-interference ability and high precision than other algorithms, and the error is controlled within 2%;

(3) For the most of existing battery models, experiments are needed to obtain the open-circuit voltage information. In this paper, a direct identification method of battery model parameters is adopted. The designed dual polarization battery equivalent model is improved, and the recognizability of the newly constructed model parameters is analyzed, and the parameters' identifiability of the model was verified. The nonlinear least squares method was used to identify the parameters based on the improved model. The parameters convergence and accuracy were compared with the first three algorithms. Comparing with the angle of complexity of the algorithm, it is found that the direct parameter identification algorithm based on the improved model has the advantages of fast convergence speed, high accuracy, low complexity, error control within 1.5%, and significant advantages and application prospects.

Key Words: Lithium-ion Battery; Equivalent Circuit Model; Parameter Identification; Battery Model Parameter Direct Identification Algorithm

目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 国内外研究现状	3
1.3 本文主要研究内容	6
第二章 锂离子电池模型	8
2.1 锂离子电池概述	8
2.2 常见电池模型	9
2.3 电池模型设计	14
2.3.1 电池模型结构设计	14
2.3.2 电池模型理论分析	15
2.4 本章小节	18
第三章 常用参数辨识算法	20
3.1 模型参数辨识	20
3.2 含遗忘因子递推最小二乘法	21
3.2.1 含遗忘因子最小二乘法	21
3.2.2 含遗忘因子递推最小二乘法	24
3.3 贝叶斯辨识算法	29
3.3.1 贝叶斯辨识算法基础	29
3.3.2 基于最小二乘模型的贝叶斯辨识	32
3.4 卡尔曼滤波算法	36
3.4.1 卡尔曼预测公式	36
3.4.2 卡尔曼滤波公式	37
3.5 本章小结	41
第四章 电池模型参数直接辨识	42
4.1 电池模型改进分析	42
4.2 参数可辨识性分析	44
4.3 非线性最小二乘法参数辨识	46
4.4 本章小结	48

第五章 电池模型参数辨识仿真实验及分析..... 49

5.1 含遗忘因子递推最小二乘法参数辨识..... 49

5.1.1 仿真实验过程..... 49

5.1.2 实验结果分析..... 49

5.2 贝叶斯算法参数辨识..... 54

5.2.1 仿真实验过程..... 54

5.2.2 实验结果分析..... 54

5.3 卡尔曼滤波算法参数辨识..... 57

5.3.1 仿真实验过程..... 57

5.3.2 实验结果分析..... 57

5.4 电池模型参数直接辨识..... 59

5.4.1 仿真实验过程..... 59

5.4.2 实验结果分析..... 60

5.5 参数辨识算法比较..... 62

5.6 本章小结..... 65

第六章 总结与展望..... 67

参考文献..... 68

攻读学位期间取得的研究成果..... 72

致谢..... 73

第一章 绪论

1.1 研究背景

随着科技的不断发展，人们的经济水平都日益提高，对于出行的需求也更加渴望，从而带动了我国汽车销量的飞速发展，已经连续多年位居世界第一。从而，也导致了我国面对的一个严峻问题，就是机动车的保有量持续攀升给交通运输业带来了巨大负担，同时，也对于我国能源消费结构有着重要的影响，导致交通能源消耗占比迅猛增加。

在 2013 年，交通运输业成为了我国最大的石油消费者，而我国石油的供应主要靠进口，预计 2020 年石油的对外依存度将达到 65%-70%^[1]。可见，我国汽车保有量的增长给我国石油资源带来的严重负担，已经威胁到了我国的能源安全。

为了能在一定程度上降低我国能源的消耗，同时减少汽车发展所带来的环境污染，人们开始越来越注意环保以及绿色能源问题，新能源汽车也应运而生。新能源汽车是近年来低碳经济背景下的发展产物，在全球范围内，对于这个概念没有一个统一的定义，国内学者普遍比较认同的对于新能源汽车的定义来源于 2009 年我国工业和信息化部制定的《新能源汽车生产企业及产品准入管理规则》，在这个规则中将新能源汽车定义为：使用非常规的车用燃料作为其动力来源（或使用常规的车用燃料、采用新型车载动力装置），结合车辆在动力控制和驱动方面的先进技术，形成技术原理先进、具备新结构、新技术的汽车^[2]。

在上述指出目前新能源汽车主要分为纯电动汽车、混合动力汽车、燃料电池电动汽车、氢发动机汽车、增程式汽车以及其他能源汽车。在上述多种新能源汽车中，在市场上最主流、最常见的为纯电动汽车和混合动力汽车两种。下面就这两种新能源汽车进行简单的分析。

（1）纯电动汽车

纯电动汽车（BEV）是指使用电力作为汽车动力来源的新能源汽车，蓄电池为汽车的驱动系统供电，通过电动机来促使汽车前进。在纯电动汽车中，由蓄电池取代了传统能源汽车的油箱，汽车驱动系统则变成了从电能转化为动能的发动机，在一定程度上简化了汽车的结构。

就目前的发展来看，纯电动汽车的发展的主要技术难题便是蓄电池。现有的蓄电池

储电能力与尺寸重量成正比，且储电量少，充电时间长，成本又高，导致纯电动车的性价比整体不高。

（2）混合动力汽车

混合动力汽车（HEV）是指拥有两套或两套以上能同时运行的联合式驱动系统，能相互切换亦或同时工作为汽车提供动力。现有的常见混合动力汽车一般都是油电混合动力，在结构上同时具有发动机与电动机，两者相互配合来提高启程性能，并降低耗油量，使汽车能够保持良好的运行状态，并有效延长了汽车的寿命。

混合动力车作为传统汽车与纯电动汽车之间的过渡车型，有效解决了当前传统汽车以及纯电动汽车存在的问题，既降低了汽车的尾气排放，又降低了汽车对于蓄电池的依赖性。但同时，蓄电池的发展仍然是其发展的核心要素。

综上所述，在新能源汽车的发展历程中，蓄电池的研究至关重要，即车用动力电池的研究。要想在较大范围内应用，甚至普及新能源汽车，就需要依靠更加安全、可靠、价格低廉、持久运行的动力电池。动力电池的种类众多，其中，锂离子动力电池具有单体电压高、比能量大、比功率高、自放电小、无记忆效应、循环特性好、可快速充放电、能量效率高等优点，目前已经成为较有前景的新能源汽车储能方案。在铅酸、镍镉和镍氢电池之后，锂离子动力电池被业界认为是现代新能源汽车动力电池的发展方向，实践也证明锂离子动力电池已经具备了实际应用的条件，今后必将成为新能源汽车应用中的主流方向^[3]。

但同时，锂离子电池也存在着一些问题，锂离子电池的功率密度、安全性能、循环寿命、成本等诸多因素仍很大程度制约电动汽车发展，这就需要电池管理系统（Battery Management System, BMS）对电池进行有效的管理和控制^[4]。BMS 既是新能源汽车的关键组成部分，也是整车能源系统的智能核心和重要组成部分。电池管理系统的主要功能为以下四个部分：

- （1）估算电池剩余电量；
- （2）检测电池工作状态；
- （3）电池组的均衡控制；
- （4）整体系统通信功能^[5]。

其中，BMS 的首要功能就是准确估计电池的荷电状态（State of Charge, SOC），只

有在准确荷电状态估计的前提下,才能够实现电池管理系统的正常运行。而在实现 SOC 估计之前,首要任务便是进行电池的建模,电池建模的准确度大大影响了电池 SOC 估计准确性,从而影响到 BMS 的正常运行。

本文的主要研究内容就是锂离子电池的建模以及参数辨识,作为建立电池管理系统的重要前提,该研究内容非常具有研究的必要性,且有很重大的研究意义,需要更多的学者们去研究。

1.2 国内外研究现状

电池作为一种复杂的非线性系统,通常会运用一些物理或者化学性能的参数来描述电池的性能特点,这些性能参数中常见的主要有:容量、倍率、温度、效率、寿命等。这些性能参数都可以从某种程度来描述电池性能。但为描述电池的这些特性来表征电池,就需要建立一个可靠的电池模型。对于电池模型的设计主要需要注意以下几个方面:

(1) 选择合适模型类型

根据电池自身性能特点、用途以及对于模型精度的需求等方面,可以大体上确定电池建模技术路线。然后,可以在所有合适的模型集内选择合适的具体模型,而所选择的模型集通常是一个黑箱模型结构,该黑箱模型结构可以具有根据模型机理分析所得的未知参数模型结构或者是待定参数,最后通过已有的数据进行拟合获得具体的符合需求的电池模型。

(2) 设计实验辨识模型参数

电池模型参数的辨识需要依据实际的测量数据来实现,这就首先需要设计实验方案,获得用于电池模型参数辨识的实验数据。而模型参数的辨识目的是使拟合的曲线与实测的曲线误差最小,常用的模型参数辨识方法主要有最小二乘法、遗传算法、神经网络算法、卡尔曼滤波算法等。

(3) 验证模型准确性

常见的验证模型准确性的方式主要有以下几种,从宏观角度看,大致可分为理论分析以及实验验证两类,具体方法如下:

1) 利用先验知识验证,即根据对系统已有知识去判断模型是否实用,例如所获得的电池元件的参数是否符合实际情况;

2) 利用一组数据辨识得到一个模型后, 通过另外一组未参与电池模型参数辨识的数据去验证模型的适用性, 从而判断模型的准确性。

锂离子电池因为其功率密度高、循环寿命长、自放电率低等优点, 已成为从消费电子到电气化交通、智能电网等诸多领域最具吸引力的储能方式^[6, 7]。科技越来越迅猛的发展激发了人们对先进的锂离子电池管理的研究的强烈兴趣, 现有的工作主要集中在充电状态 (SOC) 估计^[8-13]、健康状况 (SOH) 估计^[14-19]、最优充电策略设计^[20, 21]、电池平衡^[22]和电池热管理等^[23]。

在国外诸多相关研究内容的文献中, 等效电路模型 (ECM) 被广泛用作上述基于模型的估计和控制的基础, 例如上述的这些参考文献以及这些文献的参考文献。等效电路模型通常主要由电阻元件、电容元件和电压源元件组成, 用来模拟锂离子电池的电流-电压动态特性。这种电池模型简洁的结构带来了重要的数学简单性和使用便利性。而如今等效电路模型已经得到很大的普及, 在诸多关于电池管理系统的研究文献中, 所使用的电路模型大多都是等效电路模型。众所周知, 在将等效电路模型应用于估算和控制任务之前, 它们必须是明确可用的, 即模型中的参数必须是可知的。根据这点, 引出了一个重要的问题, 即如何使用锂离子电池的操作数据来辨识等效电路模型的参数。而所说的电池操作数据, 就是可以在电池实验中直接测量操作得到物理量数据, 如电池的终端电流、终端电压、环境温度等。

而在很多外文文献中, 包含了一些在实验环境中解决这个问题的研究。例如, B. Schweighofer 和 K. M. Raab 等人的文献中, RC 参数通过分析锂离子电池在恒定或脉冲电流等特定激励下的电压响应获得^[24, 25]。在等效电路模型中的电压源通常代表锂离子电池的开路电压 (OCV), 该参数的数值取决于 SOC。而参数化的 SOC-OCV 关系可以通过锂离子电池使用小电流充电或放电来识别, 所以大多文献中都使用该方法来求取锂离子电池的开路电压^[26]。虽然使用这种方法直截了当, 但是, 这些方法是经验和临时的, 而不是通过分析所获取的, 这就意味着具有更少的准确性。与此同时, 所涉及的实验需要耗费大量的时间以及成本, 所以使用该方法的真正研究效率并不会很高。例如, 一个基本的 SOC-OCV 校准实验通常都需要几个小时, 尤其是需要对大规模的锂离子电池进行测试的时候, 这种方法基本上是无法承受的。也因此, 激发了人们对于更有效的电池开路电压的参数识别方法的研究。

在 C. Birkl 和 D. Howey 等人的文献中, 基于电流脉冲测量和电化学阻抗谱(EIS), 提出了一种用于动态模型识别和 LiFePO₄ 电池参数估计的方法。在建模过程中, 工作的重点是扩散作为与电池管理系统相关的主要动态过程。在该文献中, 采用了等效电路模型方法, 参数的辨识主要取决于温度和充电状态 (SOC) ^[27]。

在 T. Hu 和 H. Jung 等人的文献中, 提出了一种计算放电电池戴维宁等效电路模型参数的简单明确公式。普通戴维宁等效电路模型有 n 对并联电阻和电容 (n 阶模型)。新方法背后的主要思想是通过一些变量的变化, 将求解高阶多项式方程组的问题转化为求解几个线性方程组和一个单变量 n 阶多项式方程的问题^[28]。使用该方法的前提是, 已经获取到了电池的欧姆内阻、开路电压等重要信息, 在此基础上, 建立了电池等效电路模型, 并对于该模型进行了参数辨识。

在国内也有很多文献对于电池的模型进行了各种的改进与设计, 同时也相对应的提出了很多电池模型参数辨识的方法。

在夏飞、袁博等人的文献中, 针对所构建的三阶 RC 等效电路模型存在的过拟合和模型复杂度较高等问题, 提出了一种将信息量准则和粒子群优化相结合的方法, 对锂离子电池的模型进行精准切换, 在保证模型的拟合度、精确度同时, 降低了模型复杂度, 提高了模型的容错率^[29]。

在庞辉的文献中, 为了精确识别电动汽车锂离子电池的关键状态参数, 基于多孔电极理论和浓度理论, 建立了一种考虑液相动力学行为的扩展单粒子模型。基于所建立的模型, 提出简化的参数灵敏度分析方法和有效的锂电池参数识别策略, 用来确定特定工况下高灵敏度的待识别参数, 最后利用了遗传算法来实现模型参数的优化求解^[30]。

在项宇, 刘春光等人的文献中, 为了提高锂离子电池仿真模型的精度, 提出了一种基于改进的粒子群优化卡尔曼滤波(IPSO-KF)算法来辨识电池模型参数。基于卡尔曼滤波算法, 根据电池端电压、电流, 估计电池二阶 RC 模型参数。然后利用改进的粒子群算法来优化卡尔曼滤波中的协方差矩阵, 进而提高模型参数的辨识精度, 最终建立精确的电池模型^[31]。

根据国内外电池模型研究现状, 依据不同的目的, 电池模型的建立形式不同。表 1.1 显示不同类型电池模型特点的比较分析。

表 1.1 电池模型比较分析表

	机理模型	经验模型
优点	分析电池工作过程的内部反应，模型精确，物理意义明确	由等效电路元件模拟电池；参数不完全依赖厂商，适用性强；不需特定仪器辨识模型参数，实现在线辨识，数据处理过程相对简单
缺点	电池特性依赖厂商；模型参数多难以辨识；实用性比较差	模型仅对电池输入输出数据处理，未深入研究电池内部电化学反应；依赖大量实验数据，实验周期长
应用	电池设计	电动汽车电池管理系统
模型要求	模型准确；模型参数不完全依赖厂商；考虑模型外界约束条件及范围；模型的计算方法不宜过于复杂	

综合分析各类模型的优缺点，考虑目前电池模型应用领域，为了建立能实现参数辨识算法研究的电池模型，本次课题主要研究时域内等效电路模型，此类模型常见的主要是有内阻模型，RC 模型，Thevenin 模型，PNGV 模型及其不同模型的组合等，在后面的章节中会详细进行介绍。

1.3 本文主要研究内容

本文将以锂离子电池作为研究对象，把电池等效模型参数辨识算法作为主要研究内容。通过建立一个有效的电池等效模型，并对其进行深入分析后，分别采用了含遗忘因子的递推最小二乘法、贝叶斯辨识算法、卡尔曼滤波算法等常规的参数辨识算法以及改进的非线性最小二乘法参数辨识算法，对于电池等效模型的参数辨识算法进行了深入研究，以达到构造准确电池等效模型的目的。

本文的具体章节内容安排如下：

第一章为绪论，首先介绍了该选题的研究背景，从新能源汽车角度引入到了常用的动力电池，并阐述了对于锂离子电池管理系统的建立过程中，一个有效的电池模型建立的必要性，从而引入到电池模型的参数辨识；然后分析了国内外关于锂离子电池模型研究的研究现状以及所存在的问题；最后对于本文的主要研究内容进行简要分析介绍。

第二章为锂离子电池模型的建模，首先对于锂离子电池进行了简单的概述，分析了其分类、结构、原理以及特点；然后对于现有的电池模型分类进行介绍，并综合以上常见的电池模型，提出了本文所采用的电池模型结构，并对于该电池等效模型进行了初步

的分析，为后期参数辨识工作打好基础。

第三章为常用参数辨识算法研究，首先对于模型参数辨识这一概念进行了简要的介绍；然后从含遗忘因子递推最小二乘法、贝叶斯辨识算法以及卡尔曼滤波算法这三种算法，逐步深入地介绍了算法的实现步骤及过程，为后期仿真实验建立理论基础。

第四章为电池模型参数直接辨识，首先对于电池模型进行了改进，然后对于所新构造的模型参数可识别性进行了分析，在验证了参数可识别后，采用非线性最小二乘法对于等效模型进行了参数辨识。

第五章为电池模型参数辨识仿真实验及分析。基于美国宇航局的电池研究实验数据，使用三四两章中所设计的算法，分别进行了电池等效模型的参数辨识，并对参数辨识结果进行了分析；然后，使用相同输入观测使用所求模型参数生成的输出曲线与观测出的输出曲线是否重叠，从而验证模型的有效性，同时对于构建电池模型的误差进行了分析；最后，对比了四种算法，比较出四种算法的优缺点。

第六章为本文的总结与研究展望，在该章节中对于本文所做的各项工作进行总结，并对后续的研究内容进行了展望。

第二章 锂离子电池模型

2.1 锂离子电池概述

在各种新型绿色能源中，锂离子电池由于其工作电压高、比能量大、循环寿命长、对环境无污染等诸多优秀性能，自 1992 年开始量产以来得到迅速发展，目前已在很多领域逐步替代其他类型二次电池，成为小型电子电源装置中的主导产品^[32]。锂离子电池开始逐步成为代表未来发展方向的绿色能源电池，在未来科技发展的诸多领域都有良好的应用前景。

在二十世纪七十年代，锂离子电池的研究工作由于当时能源危机的存在得到了促进，以 Li 或 Li-Al 合金作为负极材料，具体包括 Li/MnO₂、Li/I₂、Li-SOCl₂ 等锂原电池相继出现并发展^[33]。1970 年日本松下公司在美国获得 Li-CF(n)电池的专利，这种电池在放电过程中，CF(n)被锂化生成 C 和 LiF，并且这样的反应不具有可逆性，所以当时的锂原电池属于一次性电池。

而真正意义上的锂离子电池是在 1976 年由 M.S. Whittingham 首次提出的。Whittingham 发现在室温下，层状的 TiS₂ 可以与金属锂产生电化学反应，并且首次把能量存和插入反应有机结合在一起。他所研制的 Li/TiS₂ 电池的负极材料是金属态的锂，这种电池的充电性能在当时已经非常不错，但是充电极容易造成电池内部电路的短路。1982 年，伊利诺伊理工大学的科研人员在研究锂离子电池时有了突破性的发现：通过研究发现，石墨可以成为锂离子的优良导体，这样的反应过程速度快且可逆。科研人员充分利用这一特性，进一步来制作研究可充电电池，并最终由贝尔实验室首次成功研制了可用、稳定的锂离子石墨电极。1992 年日本索尼公司发明了真正意义上的锂离子电池，该电池的负极主要材料是炭，正极主要材料则是含锂化合物，在整个反应过程中并没有出现金属态的锂，而是锂离子在电池内部传递^[34]。

根据锂离子电池所用电解质材料不同，锂离子电池可以分为液态锂离子电池(lithium ion battery，简称为 LIB)和聚合物锂离子电池(polymer lithium ion battery，简称为 LIP)这两大类。一般意义上的电池主要由正极、负极、隔膜和电解质四部分组成，示意图如图 2.1 所示。锂离子电池的正负极均为能够可逆嵌锂-脱锂的化合物。

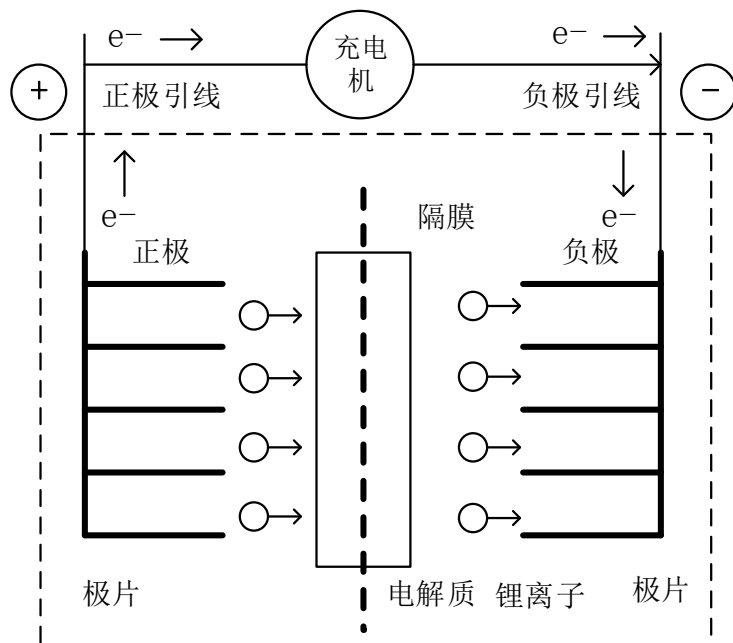


图 2.1 锂电池示意图

锂离子电池实的本质是一种锂离子浓差电池，它依靠锂离子穿过电解液、隔膜和电解液在正负极材料之间嵌入和脱出进而达到充放电的目的，因此也被称为“摇椅式电池”^[35]。锂离子电池充电时，锂离子从正极材料中脱出，进入到电解液中，穿过隔膜再经过电解液，向负极材料方向移动，最后嵌入到负极材料的层间或晶格中，此时正极处于贫锂状态，而负极处于富锂状态；反之，锂离子电池放电时与充电同理，锂离子从负极材料的层间或晶格中脱出，进入到电解液中，同样穿过隔膜和电解液，最终嵌入正极材料的晶格中^[36]。同时，为了保持电荷平衡，相同数量的电子在锂离子嵌入和脱出的过程中经过外电路传递，电子的得失使正极和负极发生相应的氧化和还原反应^[37]。由于电池在充放电过程是通过锂离子在正负极之间的来回移动而实现的，在电池中并没有锂单质的存在，因此被称作为“锂离子电池”。

2.2 常见电池模型

电池模型的建立对于整个电池管理系统的意义非同一般，而由于现有的电池种类多种多样，对于不同的电池需要不同的电池模型来进行研究分析。国内外的学者多年来提出了各种电池模型，总的来说，主要有三大类型，分别为：电化学模型，解析模型以及等效电路模型^[38]。

(1) 电化学模型

电化学模型的构建原理,是将电池内部的化学反应过程使用非线性微分方程来表达,使用这种模型通常可以准确地抓住电池的特征,该方法主要被用于设计电池。然而,这种模型的建立需要非常详细的参数,如电池结构、化学材料、工作温度等^[39],同时,这种模型还需要解决复杂的微分方程,在实际应用中很难,并不是很常见。

(2) 解析模型

解析模型的构建原理,是通过使用等效的数学方程来代替上述电化学模型中复杂的运算过程,这类电池模型在预测电池的容量、工作时间、荷电状态等方面有着很大的作用。不足的地方在于,这种模型忽略了电池的一些电路特征,比如电池开路电压、电池输出电压、电池内阻、暂态响应等,不能够灵活地用于仿真,也不利于硬件电路设计和多个电池组的管理^[40, 41]。

(3) 等效电路模型

等效电路模型的构建原理,是通过将电路中电子元件和电池的基本特征相互结合。例如,一个电压源可以等效为电池的开路电压;电池的容量可以使用一个大电容来表示;电池的内阻可以使用一个可变电阻来表示等。使用这种模型,可以形象生动地描绘出电池的非线性动态特征,非常适用于仿真研究中。

下面就几种常见的等效电路模型进行详细的介绍。

(1) 内阻模型

内阻模型是由美国爱达华国家实验室所提出的,如图 2.2 所示。内阻模型是等效电路模型中最简单的一个,也是最理想化的一个电路模型,该电路模型忽略了许多电池内部参数,仅仅适合用于理解电池的工作原理。

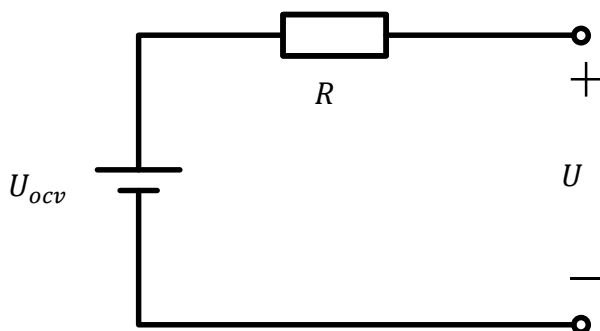


图 2.2 内阻模型示意图

在电池内阻模型的示意图中, U 表示电池的端电压; U_{ocv} 表示理想的电压源, 等效

于开路电压； R 表示为电池内阻。所以，该内阻模型的等效表达式为：

$$U = U_{ocv} - IR \quad (2.1)$$

$$U_{ocv} = f(SOC) \quad (2.2)$$

$$R = \frac{\Delta U}{I} \quad (2.3)$$

$$SOC = SOC_0 - \int_0^t Idt \quad (2.4)$$

(2) RC 模型

RC 模型由生产厂商 SATF 公司设计提出的，如图 2.3 所示。该模型相对于内阻模型，较为复杂，但是使用的范围仍然不广泛。

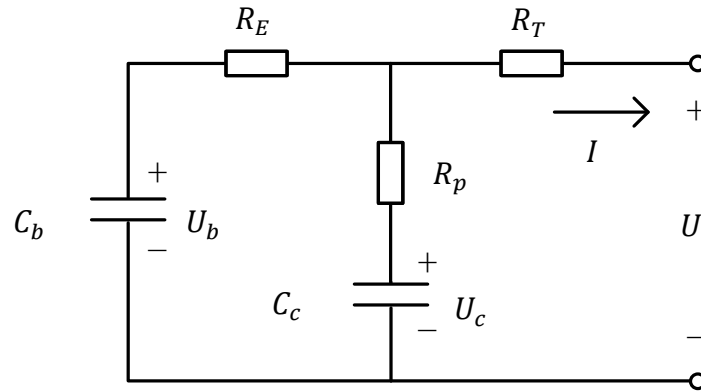


图 2.3 RC 模型示意图

在 RC 模型示意图中， U 表示电池的端电压； C_b 是一个大电容，通常设定在法拉数量级，用来表示电池的储能能力，该电容对应的端电压为 U_b ；电容 C_c 的容值相较于 C_b 小很多，用来表示电池的表层电容以及由于扩散而引起的电容，即极化电容，该电容对应的端电压为 U_c ；电阻 R_E 、 R_T 和 R_p 分别表示电池的终止电阻、端电阻和极化电阻。

RC 模型的等效表达式可以使用状态方程来表示，具体如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_b \\ \dot{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_b(R_E + R_p)} & \frac{1}{C_b(R_E + R_p)} \\ \frac{1}{C_b(R_E + R_p)} & \frac{-1}{C_b(R_E + R_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ U_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-R_p}{C_b(R_E + R_p)} \\ \frac{-R_E}{C_b(R_E + R_p)} \end{bmatrix} [I] \quad (2.5)$$

$$[U] = \begin{bmatrix} \frac{R_p}{R_p + R_E} & \frac{R_E}{R_p + R_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ U_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_T & -\frac{R_p R_E}{R_p + R_E} \end{bmatrix} [I] \quad (2.6)$$

在上述的状态方程中， U_b 以及 U_c 很难通过测量得到，从而不利于该模型的有效推广使用。

(3) Thevenin 模型

Thevenin 模型如图 2.4 所示，可以说是被使用的最多的一种模型，现有的很多模型都是在这个模型的基础上进行改进而来的。

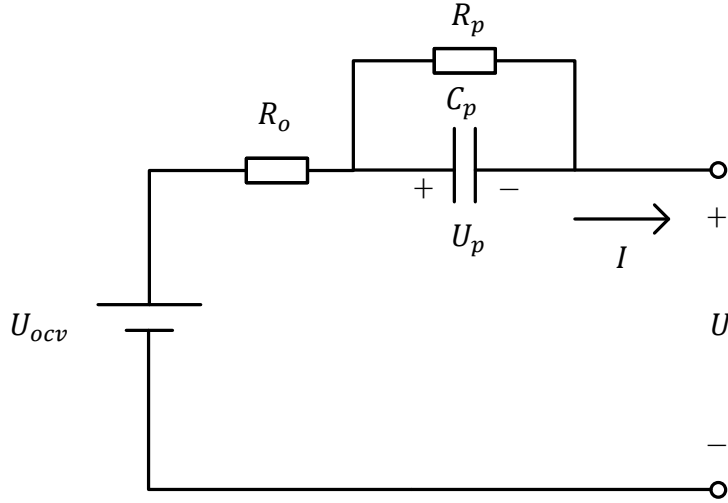


图 2.4 Thevenin 模型示意图

在 Thevenin 模型示意图中， U 表示电池的端电压； U_{ocv} 表示电池的开路电压； R_o 表示电池的欧姆内阻； R_p 和 C_p 分别表示电池的极化电阻以及极化电容，由这两个元件构成的回路用于表示电池的暂态反应，所对应的端电压为 U_p 。

Thevenin 模型的等效表达式为：

$$U = U_{ocv} - U_p - IR_o \quad (2.7)$$

$$\dot{U}_p = -\frac{U_p}{R_p C_p} + \frac{I}{C_p} \quad (2.8)$$

由 Thevenin 模型的示意图可知，当电池由静止状态变为工作状态时，或者由工作状态转为静止状态时，电阻 R_o 可以形象地表现出电池电压的突变特征；在电池停止工作的瞬间， R_p 和 C_p 所构成的回路可以形象地表现出电池电压缓慢恢复的过程。只要通过实时观测电池的端电压 U ，以此作为估算 SOC 值模型的输入变量，建立出 SOC 和电池开路电压 U_{ocv} 之间的状态方程，便能够有效地估算出 SOC 值。同时，该模型具有一定的局限性，如不能够预测电池的充放电时间，也不能表现电池的支流相应，不能考虑环境温度对于电池的影响，所以在使用该模型时应当注意这些问题。

(4) PNGV 模型

PNGV 模型就是在 Thevenin 模型的基础上修改而得到的一种新型模型，如图 2.5 所示，该模型加入了用于表现开路电压随负载电流积分变化的电容 C_o ，所对应的端电压为 U_o 。

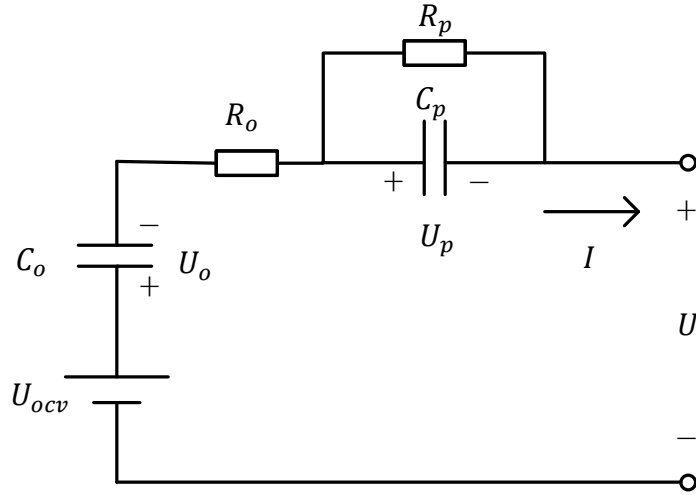


图 2.5 PNGV 模型示意图

在 PNGV 模型示意图中, U 表示电池的端电压; U_{ocv} 表示电池的开路电压; R_o 表示电池的欧姆内阻; R_p 和 C_p 分别表示电池的极化电阻以及极化电容, 所对应的端电压为 U_p 。

PNGV 模型对应的表达式为:

$$U = U_{ocv} - U_o - U_p - IR_o \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_o \\ \dot{U}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_p C_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ U_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_o} \\ \frac{1}{C_p} \end{bmatrix} [I] \quad (2.10)$$

PNGV 模型属于低阶模型, 但由于相较于 Thevenin 模型多了一个电容, 因此会比前面的模型们的精度高, 该模型广泛应用于电动汽车中。

(5) GNL 模型

GNL 模型就是在 PNGV 模型的基础上加入一个 RC 回路以及表示电池自放电的电阻 R_s , 如图 2.6 所示。该电路模型相对于 PNGV 模型, RC 的阶次高, 电池模型的准确性有所提高, 但同样, 对于参数辨识的难度也会大大提高。

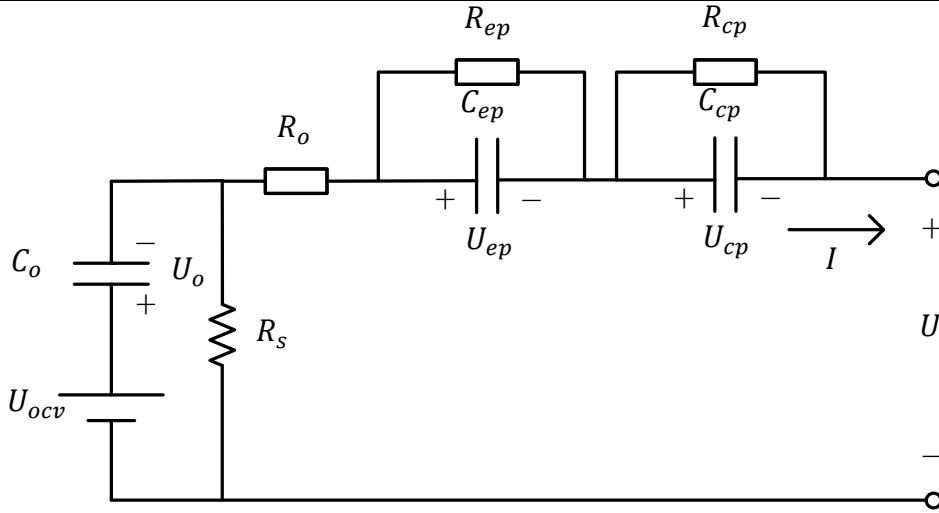


图 2.6 GNL 模型示意图

在 GNL 模型的示意图中， U 表示电池的端电压； U_{ocv} 表示电池的开路电压； R_o 表示电池的欧姆内阻； R_{ep} 和 C_{ep} 组成一对 RC 回路，对应端电压为 U_{ep} ； R_{cp} 和 C_{cp} 组成一对 RC 回路，对应端电压为 U_{cp} 。

GNL 模型对应的表达式为：

$$U = U_{ocv} - U_o - U_{cp} - U_{ep} - IR_o \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{ep} \\ \dot{U}_{cp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_{ep}C_{ep}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_{cp}C_{cp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ep} \\ U_{cp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{ep}} \\ \frac{1}{C_{cp}} \end{bmatrix} [I] \quad (2.12)$$

$$\dot{U}_o = -\frac{U_o}{C_o R_s} + \frac{U_{ocv}}{C_o R_s} + \frac{1}{C_o} \quad (2.13)$$

2.3 电池模型设计

2.3.1 电池模型结构设计

如上所述介绍了常见的五种电池模型，这五种电池模型各有优缺点，尤其是后三种模型，在常见的电池研究中应用广泛。而本文主要研究内容为捕获在恒流放电和电压恢复过程中的锂离子电池的行为，从而推导出锂离子电池端电压与模型参数之间的明确关系，进而为后面的参数辨识提供良好的基础。

而在上述的五种电池模型中，内阻模型简单且理想化，没有考虑电池的极化特性，因此模型精度较低；Thevenin 模型在内阻模型的基础上增加了关于电池极化的因素考虑；PNGV 模型在 Thevenin 的基础上增加了负载电流对电池 OCV 影响的考虑，但在本文中

负载电流是恒定的，其变化可以基本上忽略不计；GNL 模型电路和 PNGV 模型类似，同样是在 Thevenin 模型的基础上，增加了表征电池容量和开路电压变化的电容，来弥补 Thevenin 模型的不足，从而能更好表现电池的暂态响应和稳压时刻的电流电压特性。但是，该模型在开路电压与 SOC 之间非线性关系的变现方面精度有限。

本文选取了模型结构简单，适用范围广泛的 Thevenin 模型。基础的 Thevenin 模型大多假定其开路电压是固定的，在这里可以认为该模型中的开路电压是变化的，也就可以替代了 PNGV 模型和 GNL 模型中的大电容，用更为精确的 SOC-OCV 关系函数来获取预估的开路电压，不仅使得精确度高，还简化了电路的结构。所以综上，该模型相比较于其他模型具有结构简单且电路设计完整性良好的优点。此外，在之前所描述过的基础 Thevenin 模型的基础上，增加一个 RC 回路，即使用了两个 RC 电路，分别表示为 R1-C1 回路和 R2-C2 回路。从而最终构成了一个双极化电池模型，使得这个模型可以同时提供足够的完整性和简洁性，具体模型示意图如图 2.7 所示。

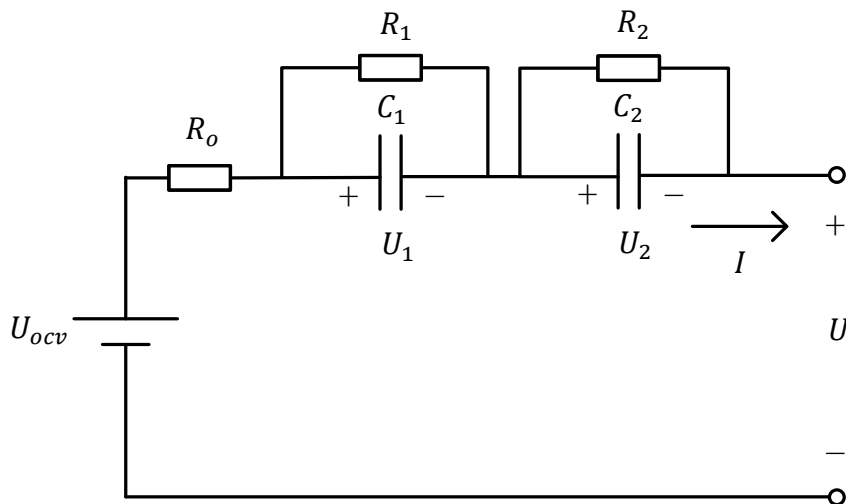


图 2.7 设计电池模型示意图

在设计的电池模型示意图中， U 表示电池的端电压； U_{ocv} 表示电池的开路电压； R_o 表示电池的欧姆内阻； R_1 和 C_1 组成一对 RC 回路，对应端电压为 U_{e1} ； R_2 和 C_2 组成一对 RC 回路，对应端电压为 U_2 。其中，R1-C1 回路分别表示了电化学极化内阻和电化学极化电容，R2-C2 回路分别表示了浓差极化内阻和浓差极化电容，这两个 RC 回路的引入，可以用两种极化过程来更准确的表达电池的动态特性。

2.3.2 电池模型理论分析

所设计电池模型对应的表达式为：

$$U = U_{OCV} - U_1 - U_2 - IR_o \quad (2.14)$$

该表达式通过基尔霍夫定律以及拉布拉斯变化可以推导出对应的频域表达式为：

$$U_{OCV}(s) - U(s) = I(s)(R_o + \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 s} + \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 s}) \quad (2.15)$$

令 $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$, 将上式进行通分, 则可以整理成如下等式:

$$\begin{aligned} & \tau_1 \tau_2 U_{OCV} s^2 + (\tau_1 + \tau_2) U_{OCV} s + U_{OCV} \\ &= \tau_1 \tau_2 R_o I s^2 + [R_1 \tau_2 + R_2 \tau_1 + R_o (\tau_1 + \tau_2)] I s \\ &+ (R_o + R_1 + R_2) I + \tau_1 \tau_2 U s^2 + (\tau_1 + \tau_2) U s + U \end{aligned} \quad (2.16)$$

为方便后面的参数估计, 作如下参数设定, 引入 a 、 b 、 c 和 d 这四个参数:

$$a = \tau_1 \tau_2 \quad (2.17)$$

$$b = \tau_1 + \tau_2 \quad (2.18)$$

$$c = R_1 \tau_2 + R_2 \tau_1 + R_o (\tau_1 + \tau_2) \quad (2.19)$$

$$d = R_o + R_1 + R_2 \quad (2.20)$$

$$s = [x(k) - x(k-1)]/T \quad (2.21)$$

$$s^2 = [x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)]/T^2 \quad (2.22)$$

通过如上参数设定进行变化, 则可将频域表达式转变为如下:

$$\begin{aligned} U_{OCV}(k) - U(k) &= \frac{-bT - 2a}{T^2 + bT + a} [U_{OCV}(k-1) - U(k-1)] \\ &+ \frac{a}{T^2 + bT + a} [U_{OCV}(k-2) - U(k-2)] + \frac{cT^2 + dT + aR_o}{T^2 + bT + a} I(k) \\ &+ \frac{-dT_s - 2aR_o}{T^2 + bT + a} I(k-1) + \frac{aR_o}{T^2 + bT + a} I(k-2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

那么, 对于上述差分表达式, 也可以参数做出如下的设定:

$$\alpha_1 = \frac{-bT_s - 2a}{T^2 + bT + a} \quad (2.24)$$

$$\alpha_2 = \frac{a}{T^2 + bT + a} \quad (2.25)$$

$$\alpha_3 = \frac{cT^2 + dT + aR_o}{T^2 + bT + a} \quad (2.26)$$

$$\alpha_4 = \frac{-dT_s - 2aR_o}{T_s^2 + bT + a} \quad (2.27)$$

$$\alpha_5 = \frac{aR_o}{T^2 + bT + a} \quad (2.28)$$

假设 $V(s) = U_{OCV}(s) - U(s)$, 则可以得到该电池模型所对应的差分方程, 该差分方

程也是后面参数辨识中主要用到的方程：

$$V(k) = \alpha_1 V(k-1) + \alpha_2 V(k-2) + \alpha_3 I(k) + \alpha_4 I(k-1) + \alpha_5 I(k-2) \quad (2.29)$$

上式可通过使用参数辨识的算法，估计出等式中的参数 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 和 α_5 ，从而最终实现电池模型的参数辨识。具体算法的实现会在接下来的一章中进行详细的叙述。

锂离子电池的荷电状态 SOC 和开路电压 U_{ocv} 、寿命 L 以及工作温度 Tem 都有关系，并且这几个变量都是时间 t 的函数，因此可以定义函数：

$$U_{ocv} = f(SOC(t), Tem(t), L(t)) \quad (2.30)$$

对该函数关于时间 t 求导则可得：

$$\frac{dU_{ocv}}{dt} = \frac{\partial U_{ocv}}{\partial SOC} \frac{\partial SOC}{\partial t} + \frac{\partial U_{ocv}}{\partial Tem} \frac{\partial Tem}{\partial t} + \frac{\partial U_{ocv}}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.31)$$

因为电池在浮充的状态下，处于采样时间 T 内，消耗的电量与冲入的电量相比较于电池本身的额定容量可以忽略不计，所以电池的荷电状态关于时间 t 的偏导数为 0，即 $\frac{\partial SOC}{\partial t} = 0$ ；电池的工作环境温度，在采样时间内可以认为是固定不变的，所以温度对于时间的偏导数也为 0，即 $\frac{\partial Tem}{\partial t} = 0$ ；又因为在采样时间内，电池寿命变化相对于电池的总寿命来说也可以忽略不计，所以电池的寿命对于时间的偏导数也为 0，即 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ 。所以，综上，上述公式可以变化为：

$$\frac{dU_{ocv}}{dt} = 0 = \frac{U_{ocv}(k) - U_{ocv}(k-1)}{T} = \frac{U_{ocv}(k-1) - U_{ocv}(k-2)}{T} \quad (2.32)$$

从上述等式中可以推导出：

$$U_{ocv}(k) - U_{ocv}(k-1) = U_{ocv}(k-1) - U_{ocv}(k-2) = 0 \quad (2.33)$$

将上述等式带入到之前所推出的差分方程中，并将差分方程中的 $V(k)$ 展开为 $U_{ocv}(k) - U(k)$ ，则可得到如下差分方程：

$$\begin{aligned} U_{ocv}(k) - U(k) &= \alpha_1 [U_{ocv}(k-1) - U(k-1)] \\ &+ \alpha_2 [U_{ocv}(k-2) - U(k-2)] + \alpha_3 I(k) + \alpha_4 I(k-1) + \alpha_5 I(k-2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

最后，根据 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 、 α_5 和电池模型之间的关系可以得到这五个具体对应的电路参数值，具体的推导过程如下：

在这里，引入一个新的参数 α_0 ，并让其满足如下等式：

$$\alpha_0 = T^2 + bT + a \quad (2.35)$$

由此可以显然看出 α_0 与 α_1 、 α_2 存在如下关系：

$$\alpha_0 = T^2 / (1 + \alpha_1 + \alpha_2) \quad (2.36)$$

那么，可以由 α_0 、 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 和 α_5 这六个参数来表示出 a 、 b 、 c 和 d 这四个参数，具体表达式如下：

$$a = \alpha_0 \alpha_2 \quad (2.37)$$

$$b = -\alpha_0(\alpha_1 + 2\alpha_2) / T \quad (2.38)$$

$$c = \alpha_0(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) / T^2 \quad (2.39)$$

$$d = \alpha_0(\alpha_4 + 2\alpha_5) / T \quad (2.40)$$

再由以上四个参数，可以推导出电池模型中的五个参数，即 R_o 、 R_1 、 R_2 、 C_1 和 C_2 ，具体的表达式如下：

$$R_o = \frac{aR_o}{T^2 + bT + a} / \frac{a}{T^2 + bT + a} = \alpha_5 / \alpha_2 \quad (2.41)$$

由 $a = \tau_1 \tau_2$ 和 $b = \tau_1 + \tau_2$ 联立解方程组可得：

$$\tau_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} \quad (2.42)$$

$$\tau_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} \quad (2.43)$$

将另外两个参数 c 和 d 代入到上面已经求得电池模型参数中，则可得：

$$R_1 = (\tau_1 c + \tau_2 R_o - d) / (\tau_1 - \tau_2) \quad (2.44)$$

$$R_2 = d - R_o - R_1 \quad (2.45)$$

$$C_1 = \frac{\tau_1}{R_1} \quad (2.46)$$

$$C_2 = \frac{\tau_2}{R_2} \quad (2.47)$$

2.4 本章小节

本章对于研究对象锂离子电池进行了一些简要的分析，了解其结构、原理等，并对于现有的常见锂离子电池模型分别进行分析总结，最终确定了本文所使用的电池模型结构，即在适用范围广泛的 Thevenin 模型的基础上，增加一个 RC 回路，构成了一个双极化电池等效模型。

此外，对于该模型进行了基础性分析，通过将电池模型的频域表达式进行不断的变换，并两次引入了不同的参数来替代最初的电路元件参数，最终得到了可以便于后期进

行参数辨识的差分方程，并求解出差分方程中参数与最初电池模型的电路元件参数的关系，为后期的电池模型参数辨识做了良好的基础准备。

第三章 常用参数辨识算法

3.1 模型参数辨识

模型的参数辨识就是通过提供的输入输出数据，在某种准则下对于系统模型中的未知参数进行估计。其中，输入输出的数据是参数辨识的基础，辨识准则则是辨识的方法和目标^[42]。模型的参数辨识基本原理如下图 3.1 所示。

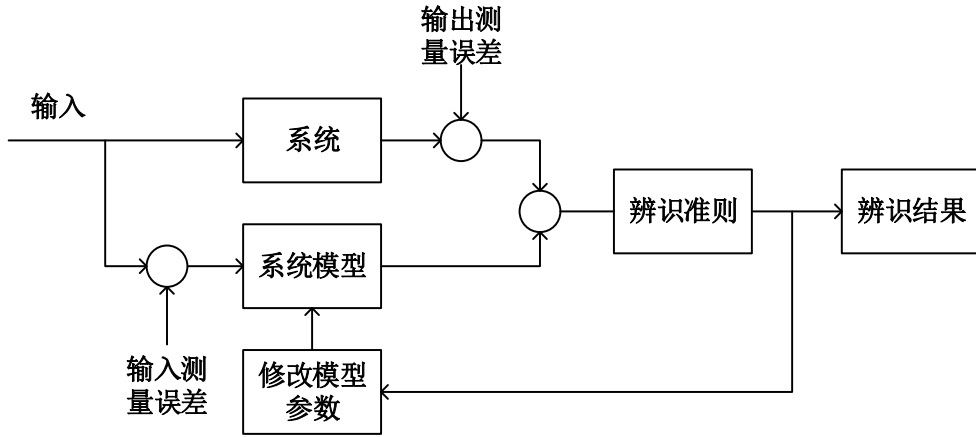


图 3.1 模型参数辨识原理图

假设，需要参数辨识的模型表达式如下：

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \xi(k) \quad (3.1)$$

将上式转换为最小二乘格式，可得：

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta + \xi(k) \quad (3.2)$$

其中：

$$\begin{cases} \varphi^T = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n_a), \\ u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_b)] \\ \theta = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}]^T \end{cases} \quad (3.3)$$

为了得到参数估计值 θ ，可以使用逐步逼近的方法，即根据 $k-1$ 时刻的参数估计值 $\theta(k-1)$ 与当前时刻和历史输入输出数据 $\varphi(k)$ ，计算出系统在 k 时刻的输出预期值，即：

$$y_e(k) = \varphi^T(k)\theta(k-1) \quad (3.4)$$

同时，可以计算出预估的误差值：

$$e(k) = y(k) - y_e(k) \quad (3.5)$$

其中， $y(k)$ 是系统的实际输出值，将所得到的预估误差值 $e(k)$ 反馈到辨识算法中，

使用算法准则，计算出 k 时刻的参数估计值 $\theta(k)$ ，并将所获取的参数估计值更新到系统模型中去。通过循环迭代，直到误差准则函数取到最小值。当误差准则函数取得最小值后，最新的系统模型的输出值最接近真实的输出值。

模型参数辨识的方法有很多，常见的有最小二乘法、极大似然法、遗传算法、卡尔曼滤波算法、神经网络算法等。在本章中，主要对于含遗忘因子最小二乘法、贝叶斯算法和卡尔曼滤波算法等，进行了详细的理论分析。

3.2 含遗忘因子递推最小二乘法

最小二乘法，又被称为最小平方法，是一种常见的数学优化技术。该方法通过最小化误差的平方和来寻找数据的最佳函数匹配。利用最小二乘法可以简便地求得未知的数据，并使得这些求得的数据与实际数据之间误差的平方和为最小。最小二乘法还通常被用于曲线拟合，具有原理简单、变成易实现、辨识收敛性快等优点，被广泛地用于系统参数辨识中^[43]。

最小二乘法大多用于理论推导中，因为在实际使用的过程中，占用内存大，计算量大，不适合系统的在线参数辨识。所以，为了能够实时地进行动态系统的参数辨识，在使用最小二乘法进行参数估计的同时，将之转化成为一种更加有效且计算量小的参数递推估计。

含遗忘因子递推最小二乘法的实现原理，就是当需要进行辨识的系统在运行过程中，每获得一次新的观测数据后，就在之前所估计结果的基础上，利用新获得的观测数据对之前所估计的结果利用递推算法进行修正，从而递推得出新的参数估计值。这样，随着新的观测数据的不断引入，一次次对于需要辨识系统进行新的参数估计，直到所得参数值能够达到满意的精确程度。综上所述，含遗忘因子递推最小二乘法的基本原理可以简单概括为如下公式（3.6）：

$$\text{新的参数估计值} = \text{旧的参数估计值} + \text{修正项} \quad (3.6)$$

3.2.1 含遗忘因子最小二乘法

假设需要进行参数辨识的系统模型为：

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \varepsilon(k) \quad (3.7)$$

其中， $u(k)$ 和 $y(k)$ 为已知的系统输入量和输出量， $\varepsilon(k)$ 为噪声，并且有：

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \\ B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} \end{cases} \quad (3.8)$$

在上式中, n_a, n_b 都为已知量, 可将上述模型改写为最小二乘的形式, 即:

$$\begin{aligned} y(k) = & -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_0 u(k-1) \\ & + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} y(k-n_b) = \varphi(k)\theta + \varepsilon(k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中, $\varphi(k)$ 为数据向量, θ 为待估计的参数向量, 其详细表达式为:

$$\begin{cases} \varphi(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n_a), \\ \quad u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_b)]^T \\ \theta = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_0, b_1, \dots, b_{n_b}]^T \end{cases} \quad (3.10)$$

假设有 N 组输入输出观测数据 $(u(k), y(k))$, 其中 $k = 1, 2, \dots, N$, 则可以将上式转换成线性方程组的形式, 即:

$$Y = \Phi(k)\theta + \varepsilon_N(k) \quad (3.11)$$

其中,

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_N = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(0) & \dots & -y(1-n_a) & -u(0) & \dots & -u(1-n_b) \\ -y(1) & \dots & -y(2-n_a) & -u(1) & \dots & -u(2-n_b) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(N-1) & \dots & -y(N-n_a) & -u(N-1) & \dots & -u(N-n_b) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

此外, 假设模型的噪声 $\varepsilon(k)$ 可以用一阶、二阶的统计矩阵来描述, 即设置噪声的均值矩阵和协方差矩阵分别为:

$$E\{\varepsilon_N\} = [E\{\varepsilon(1)\}, E\{\varepsilon(2)\}, \dots, E\{\varepsilon(N)\}]^T = 0 \quad (3.15)$$

$$\text{cov}\{\varepsilon_N\} = E\{\varepsilon_N \varepsilon_N^T\} = \begin{bmatrix} E\{\varepsilon^2(1)\} & E\{\varepsilon(1)\varepsilon(2)\} & \dots & E\{\varepsilon(1)\varepsilon(N)\} \\ E\{\varepsilon(2)\varepsilon(1)\} & E\{\varepsilon^2(2)\} & \dots & E\{\varepsilon(2)\varepsilon(N)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{\varepsilon(N)\varepsilon(1)\} & E\{\varepsilon(N)\varepsilon(2)\} & \dots & E\{\varepsilon^2(N)\} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

为了评价最小二乘估计的性质, 还需要在此基础上, 进一步假设噪声 $\varepsilon(k)$ 是不相关的, 并且是同分布的随机变量。简而言之, 就是假设 $\varepsilon(k)$ 是一个白噪声序列, 即:

$$\begin{cases} E\{\varepsilon_N\} = 0 \\ \text{cov}\{\varepsilon_N\} = \sigma_n^2 I \end{cases} \quad (3.17)$$

其中, σ_n^2 是 $\varepsilon(k)$ 的方差, I 是单位矩阵。

此外, 还需要假设噪声 $\varepsilon(k)$ 与输入 $u(k)$ 是不相关的, 即满足如下等式:

$$E\{\varepsilon(k)u(k-n)\} = 0, \quad \forall k, n \quad (3.18)$$

最后, 需要考虑以下数据长度 N 的选取。所构造的线性方程组具有 N 个方程, 其中, 包含了 $n_a + n_b$ 个待求的未知参数, 这就意味着如果 $N < n_a + n_b$, 方程的个数小于方程中未知数的个数, 那么参数则不能唯一确定, 这是一定不能出现的情况; 如果 $N = n_a + n_b$, 则只有当 $\varepsilon_N = 0$ 的时候, 才能得到参数的唯一解; 如果 $\varepsilon_N \neq 0$, 那么只有 $N > n_a + n_b$ 时, 才能够确定出一个最优的模型参数。所以为了保证模型参数辨识的精度, 通常会令数据长度 N 的取值充分大。

综上所述, 可知第 k 次的观测值估计输出为:

$$\hat{y}(k) = \varphi^T(k)\hat{\theta} \quad (3.19)$$

其中, $\hat{\theta} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{n_a}, \hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{n_b}]^T$ 。

通过系统实际输出值与估计输出值做差就可得到噪声 $\varepsilon(k)$ 的表达式:

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta} \quad (3.20)$$

对于 N 次观测, 设计准则函数, 并引入一个遗忘因子 $\Lambda(k)$, 表达式具体如下:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=1}^N \Lambda(k) \varepsilon^2(k) = \sum_{k=1}^N \Lambda(k) [y(k) - \varphi^T(k)\theta]^2 \\ &= (Y - \Phi\theta)^T \Lambda_N (Y - \Phi\theta) \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中, 在遗忘因子 $\Lambda(k)$ 中, 要求对于所有的 k , $\Lambda(k)$ 都是一个正数。如果想要实现现在时刻数据的加权值大于过去时刻数据的加权值, 那么可以令 $\Lambda(k) = \mu^{N-k}$, 并且让 $0 < \mu < 1$ 。这样, 当 $k = 1$ 时, $\mu^{N-1} \ll 1$; 当 $k = N$ 时, $\mu^{N-N} = 1$ 。可见, 当 k 越大时, 所对应的加权值越大, 体现了对于不同时刻的数据值所给予的不同信任度。而对于 $\Lambda(k)$ 的选取, 则没有固定规律, 取决于人的主观因素。

化简上述的准则函数可得:

$$J = (Y - \Phi\theta)^T \Lambda_N (Y - \Phi\theta) \quad (3.22)$$

其中, Λ_N 一般为正定矩阵, 其与遗忘因子 $\Lambda(k)$ 的关系为:

$$\Lambda_N = \text{diag}[\Lambda(1), \Lambda(2), \dots, \Lambda(N)] \quad (3.23)$$

在上述的准则函数中, 显然可知 $\Phi\theta$ 表示的是模型的实际输出, 也就是我们对于系统输出的估计值, 那么, 准则函数 $J(\theta)$ 就可以被看作是用来衡量实际输出与模型输出的接近程度的函数, 所以, 目的就是将准则函数 $J(\theta)$ 的值取到最小, 此时所取到的对应参数 θ 的估计值, 将会是模型的最优参数, 能够使得模型的输出与实际的输出最为贴近。

假设存在一个 $\hat{\theta}$ 使得 $J(\theta)|_{\hat{\theta}}$ 取得最小值, 那么此时会满足如下表达式:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \theta} [(Y - \Phi\theta)^T \Lambda_N (Y - \Phi\theta)] = 0 \quad (3.24)$$

用与之前相同的方法将上述表达式展开, 则可得到一个正则方程, 即:

$$(\Phi^T \Lambda_N \Phi) \hat{\theta} = \Phi^T \Lambda_N Y \quad (3.25)$$

当 $\Phi^T \Lambda_N \Phi$ 是正则矩阵的时候, 就有

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Lambda_N \Phi)^{-1} \Phi^T \Lambda_N Y \quad (3.26)$$

并且, 此时, 还满足如下不等式:

$$\left. \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \right|_{\hat{\theta}} = 2\Phi^T \Lambda_N \Phi > 0 \quad (3.27)$$

那么, 可以得出满足上述等式要求的 $\hat{\theta}$ 即为所要求的使 $J(\theta)$ 取得最小值的参数, 并且这个最优的参数值是唯一的。

3.2.2 含遗忘因子递推最小二乘法

将所求得的含遗忘因子最小二乘法最优参数公式引入, 并进行相应的修改, 具体表达式如下:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= (\Phi^T \Lambda_N \Phi)^{-1} \Phi^T \Lambda_N Y = P(N) \Phi^T \Lambda_N Y \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \Lambda(i) \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \Lambda(i) \varphi(i) y(i) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中, 对于表达式中的矩阵 P 有如下定义:

$$\begin{cases} P^{-1}(k) = \Phi_k^T \Lambda_k \Phi_k = \sum_{i=1}^k \Lambda(i) \varphi(i) \varphi^T(i) \\ P^{-1}(k-1) = \Phi_{k-1}^T \Lambda_{k-1} \Phi_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \Lambda(i) \varphi(i) \varphi^T(i) \end{cases} \quad (3.29)$$

其中,

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(k) \end{bmatrix}, \Lambda_k = \begin{bmatrix} \Lambda(1) & & & 0 \\ & \Lambda(1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda(k) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\Phi_{k-1} = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(k-1) \end{bmatrix}, \Lambda_{k-1} = \begin{bmatrix} \Lambda(1) & & & 0 \\ & \Lambda(1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

其中, $\varphi(i)$ 是一个列向量, 具体对应的是 Φ_N 矩阵中第 i 行向量的转置; $P(k)$ 是一个仿真, 其维数取决于未知参数的数目, 而与观测值的数目无关。例如在第二章中所建立的锂电池模型中, 具有五个未知的参数, 那么, 所对应的 $P(k)$ 的维数应当就是 5×5 。

通过对于矩阵 P 的定义, 可以对其进行如下变化:

$$\begin{aligned} P^{-1}(k) &= \sum_{i=1}^k \Lambda(i) \varphi(i) \varphi^T(i) = \sum_{i=1}^{k-1} \Lambda(i) \varphi(i) \varphi^T(i) + \Lambda(k) \varphi(k) \varphi^T(k) \\ &= P^{-1}(k-1) + \Lambda(k) \varphi(k) \varphi^T(k) \end{aligned} \quad (3.32)$$

假设 $y_{(k-1)}$ 满足如下等式:

$$y_{(k-1)} = [y(1), y(2), \dots, y(k-1)]^T \quad (3.33)$$

那么, 就能相应地得到如下参数估计 $\hat{\theta}(k-1)$:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k-1) &= (\Phi_{k-1}^T \Lambda_{k-1} \Phi_{k-1})^{-1} \Phi_{k-1}^T \Lambda_{k-1} Y_{k-1} \\ &= P(k-1) \left[\sum_{i=1}^{k-1} \Lambda(i) \varphi(i) y(i) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

结合上式, 可得

$$P^{-1}(k-1) \hat{\theta}(k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} \Lambda(i) \varphi(i) y(i) \quad (3.35)$$

假设 y_k 满足如下等式:

$$y_k = [y(1), y(2), \dots, y(k)]^T \quad (3.36)$$

那么, 同理也可以得到如下的参数估计 $\hat{\theta}(k)$:

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}(k) &= (\Phi^T \Lambda_N \Phi)^{-1} \Phi^T \Lambda_N Y = P(k) \left[\sum_{i=1}^k \Lambda(i) \varphi(i) y(i) \right] \\
 &= P(k) [P^{-1}(k-1) \hat{\theta}(k-1) + \Lambda(k) \varphi(k) y(k)] \\
 &= P(k) \{ [P^{-1}(k) - \Lambda(k) \varphi(k) \varphi^T(k)] \hat{\theta}(k-1) + \Lambda(k) \varphi(k) y(k) \} \\
 &= \hat{\theta}(k-1) + P(k) \Lambda(k) \varphi(k) [y(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta}(k-1)]
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

在此，引入增益矩阵 $K(k)$ ，并具体定义如下：

$$K(k) = P(k) \Lambda(k) \varphi(k) \tag{3.38}$$

那么就可将上述参数估计 $\hat{\theta}(k)$ 简化为：

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k) [y(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta}(k-1)] \tag{3.39}$$

又由之前的 $P^{-1}(k)$ 的推导表达式可以得到相应的 $P(k)$ 的表达式为：

$$P(k) = [P^{-1}(k-1) + \Lambda(k) \varphi(k) \varphi^T(k)]^{-1} \tag{3.40}$$

套用矩阵的如下反演公式：

$$(A + CC^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(I + C^T A^{-1}C)^{-1}C^T A^{-1} \tag{3.41}$$

则可将 $P(k)$ 的表达式变为如下：

$$\begin{aligned}
 P(k) &= P(k-1) - P(k-1) \varphi(k) \varphi^T(k) P(k-1) \left[\varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k) + \frac{1}{\Lambda(k)} \right]^{-1} \\
 &= \left[I - \frac{P(k-1) \varphi(k) \varphi^T(k)}{\varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k) + \Lambda^{-1}(k)} \right] P(k-1)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

将上式进行整理后代入得到增益矩阵的对应表达式：

$$K(k) = P(k-1) \varphi(k) \left[\varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k) + \frac{1}{\Lambda(k)} \right]^{-1} \tag{3.43}$$

综合以上所推导出的所有表达式，则可以得到含遗忘因子的最小二乘参数估计递推算法的重要三个表达式：

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k) [y(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta}(k-1)] \\ K(k) = P(k-1) \varphi(k) \left[\varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k) + \frac{1}{\Lambda(k)} \right]^{-1} \\ P(k) = [I - K(k) \varphi^T(k)] P(k-1) \end{cases} \tag{3.44}$$

由上式可知，若对于任意的 k 都有 $\Lambda(k) = 1$ ，则可得到最小二乘参数估计地推算公式的表达式。其中，遗忘因子 $\frac{1}{\Lambda(k)}$ 的取值范围仍然在 $(0, 1]$ 内，若 $\frac{1}{\Lambda(k)} = 1$ 则表明所有采集到的数据都是等同加权的，无关先后；若 $\frac{1}{\Lambda(k)} \ll 1$ 则表明对最新获得的数据予以充分的

信任，从而削弱了之前所观测数据的作用。

在上述第一个表达式中，显然可知在 k 时刻的参数估计值 $\hat{\theta}(k)$ 等于在 $k-1$ 时刻的参数估计值 $\hat{\theta}(k-1)$ 加上一个修正项，而这个修正项与在 k 时刻的信息成正比，且其中的增益矩阵 $K(k)$ 是一个时变矩阵，所以，矩阵 $P(k)$ 为一个对称矩阵。而为了保证矩阵 $P(k)$ 的对称性，通常会将上述的第三个表达式进行修改，具体形式如下：

$$\begin{aligned} P(k) &= P(k-1) - \frac{[P(k-1)\varphi(k)][P(k-1)\varphi(k)]^T}{\varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k) + \frac{1}{\Lambda(k)}} \\ &= P(k-1) - K(k)K^T(k) \left[\varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k) + \frac{1}{\Lambda(k)} \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

经过如上的最小二乘参数估计递推算法的推导过程，可以得到整个递推过程的主要内容，即通过递推算法，进行多次根据前次观测数据 $\varphi(k-1)$ 和 $y(k-1)$ 所计算出的原有数据信息 $\hat{\theta}(k-1)$ 和 $P(k-1)$ ，计算出增益矩阵 $K(k)$ ，从而推算出新的数据信息 $\hat{\theta}(k)$ 和 $P(k)$ ，作为下一次递推计算过程的原有信息。

所以，在采用最小二乘参数估计递推算法时，要事先选择好初始参数 $\hat{\theta}(0)$ 和 $P(0)$ 。多余初始参数的选取，通常由以下两种方法。

(1) 使用数据预先求得

该方法即根据一批数据，利用一次完成算法，来预先求取如下量：

$$\begin{cases} P(L_0) = (\Phi_{L_0}^T \Lambda_{L_0} \Phi_{L_0})^{-1} \\ \hat{\theta}(L_0) = P(L_0) \Phi_{L_0}^T \Lambda_{L_0} y_{L_0} \end{cases} \quad (3.46)$$

其中， L_0 为选取的数据长度。为了方便计算，减少计算量，通常 L_0 都不会选得太大。

(2) 直接选取

直接选取参数的初始值，即直接令 $P(L_0)$ 和 $\hat{\theta}(L_0)$ 满足如下表达式：

$$\begin{cases} P(L_0) = \alpha^2 I \\ \hat{\theta}(L_0) = \varepsilon \end{cases} \quad (3.47)$$

其中， α 为充分大的实数； ε 为充分小的实向量。如此设置初始值的原因具体如下：

$$\begin{cases} P^{-1}(k) = \sum_{i=1}^k \Lambda(i) \varphi(i) \varphi^T(i) \\ P^{-1}(k) \hat{\theta}(k) = \sum_{i=1}^k \Lambda(i) \varphi(i) y(i) \end{cases} \quad (3.48)$$

因此，可得到如下参数估计值 $\hat{\theta}(k)$ 的表达式：

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k) &= \left[\sum_{i=1}^k \Lambda(i) \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^k \Lambda(i) \varphi(i) y(i) \right] \\ &= \left[P^{-1}(0) + \sum_{i=1}^k \Lambda(i) \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1} \left[P^{-1}(0) \hat{\theta}(0) + \sum_{i=1}^k \Lambda(i) \varphi(i) y(i) \right]\end{aligned}\quad (3.49)$$

采用遗忘因子递推最小二乘法实现电池模型参数辨识的具体实现，是使用的 Matlab 进行语言编程的方式，根据上述的理论推导，可以得到实际编程的核心流程图，如图 3.2 所示。

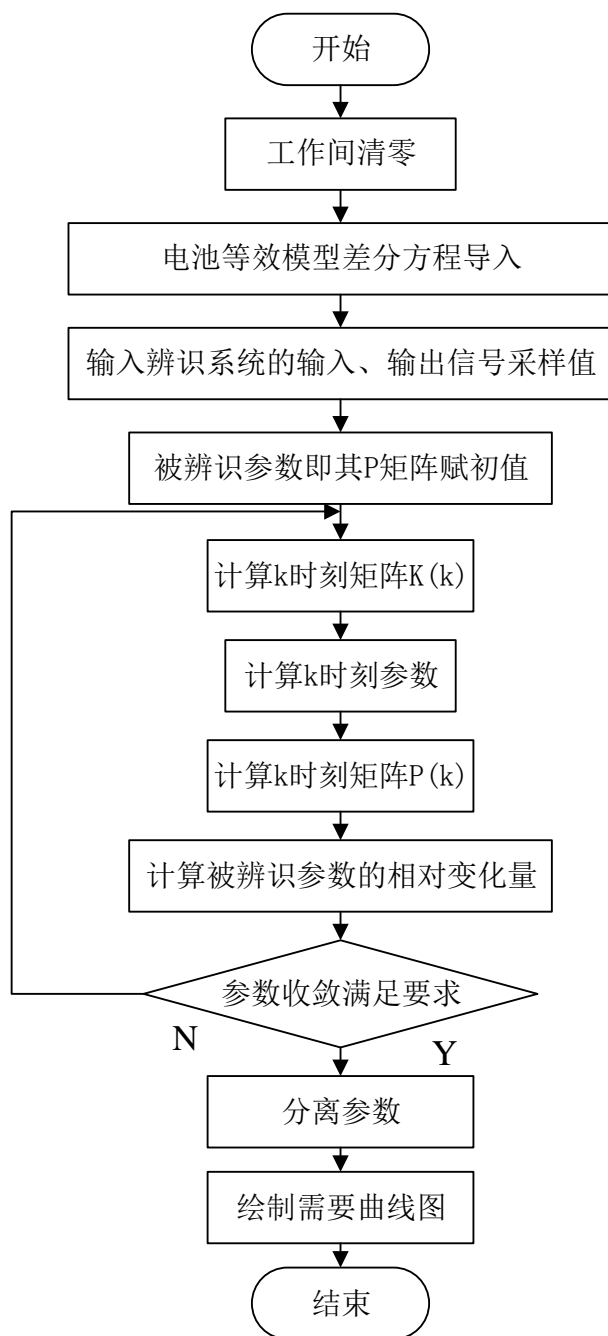


图 3.2 含遗忘因子递推最小二乘法实现流程图

3.3 贝叶斯辨识算法

3.3.1 贝叶斯辨识算法基础

贝叶斯辨识算法的核心思想，就是把待估计的参数当作随机变量，然后设法通过观测与该参数相关联的其他变量，最终实现对于所要估计参数的推断^[44]。

假设 μ 表示的是某一动态系统模型， θ 表示的是模型 μ 中的参数，反映在系统的输入输出观测值中。如果在参数 θ 及其历史记录 $D^{(k-1)}$ 条件下，系统的输出变量 $z(k)$ 的概率密度函数是已知的，并将其记作为 $p(z(k)|\theta, D^{(k-1)})$ ，其中 $D^{(k-1)}$ 表示 $(k-1)$ 时刻及其以前的输入输出数据集合。那么根据贝叶斯算法，对于参数 θ 的估计问题，可以看成是把参数 θ 当作具有某种先验概率密度 $p(\theta, D^{(k-1)})$ 的随机变量问题。如果系统的输入 $u(k)$ 是确定的变量，则利用贝叶斯公式可以把参数 θ 的后验概率密度函数表示成公式（3.50）。

$$\begin{aligned} p(\theta|D^k) &= p(\theta|z(k), u(k), D^{(k-1)}) = p(\theta|z(k), D^{(k-1)}) \\ &= \frac{p(z(k)|\theta, D^{(k-1)})p(\theta|D^{(k-1)})}{\int_{-\infty}^{\infty} p(z(k)|\theta, D^{(k-1)})p(\theta|D^{(k-1)})d\theta} \end{aligned} \quad (3.50)$$

其中，参数 θ 的先验概率密度函数 $p(\theta|D^{(k-1)})$ ，输出数据 $z(k)$ 的条件概率密度函数 $p(z(k)|\theta, D^{(k-1)})$ 是已知的， D^k 用于表示 k 时刻及其以前的输入输出数据集合，则可得 D^k 与 $D^{(k-1)}$ 的关系如公式（3.51）所示：

$$D^k = \{z(k), u(k), D^{(k-1)}\} \quad (3.51)$$

理论上来说，根据公式（3.50）就可以得到参数 θ 的后验概率密度函数，但实际上这是非常困难的，只有在参数 θ 与输出数据之间的关系是线性的，且系统噪声满足高斯分布的情况下，才有可能利用公式（3.50）的解析解得到参数 θ 的后验概率密度函数。只有在得到参数 θ 的后验概率密度函数之后，才可以进一步求得参数 θ 的估计值。对于参数 θ 的后验概率密度函数，常见的估计方法有两种，第一种为极大后验参数估计算法，第二种方法为条件期望参数估计算法，这两种方法统称为贝叶斯算法。

（1）极大后验参数估计算法

极大后验参数估计算法的原理，就是把后验概率密度函数 $p(\theta|D^k)$ 达到极大值来作为估计的准则。在该准则的基础下所求得的参数估计值，就是极大后验估计，符号记作 $\hat{\theta}_{MP}$ 。根据刚才的分析，显然可得所得的极大后验估计值满足如下公式：

$$\left. \frac{\partial p(\theta|D^k)}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}_{MP}} = 0 \quad (3.52)$$

或满足如下公式 (3.53):

$$\left. \frac{\partial \log p(\theta|D^k)}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}_{MP}} = 0 \quad (3.53)$$

这意味着在数据 D^k 的条件下, 模型参数 θ 落在 $\hat{\theta}_{MP}$ 邻域内的概率比落在其他区间内的概率大, 也就表明了 $\hat{\theta}_{MP}$ 很有可能就是参数 θ 最可能的聚集区域。

如果把公式 (3.50) 代入到公式 (3.53) 中, 并且考虑到在公式 (3.50) 中, 等式右边的分母部分与参数 θ 无关, 就能够将公式 (3.53) 进行如下的变换:

$$\left. \frac{\partial \log p(z(k)|\theta, D^{(k-1)})}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}_{MP}} + \left. \frac{\partial \log p(\theta|D^{(k-1)})}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}_{MP}} = 0 \quad (3.54)$$

若系统输出 $z(k)$ 是在独立观测条件下的输出样本时, 让公式 (3.54) 中左边的第一项等于 0, 则在此条件下所对应的估计值就是极大似然估计。由此可见, 相比较于极大似然估计, 极大后验参数估计考虑了参数的先验概率。通常情况下, 如果参数 θ 的先验概率密度函数 $p(\theta|D^{(k-1)})$ 是已知的, 那么采用极大后验参数估计方法比采用极大似然估计方法将会有更高的精确度。然而, 通常由于没有参数 θ 的先验概率知识, 再加上极大后验参数估计方法的计算更为复杂, 所以, 极大似然估计方法的使用比极大后验参数估计方法的使用更为普遍广泛。

如果参数 θ 的取值范围是均匀分布的, 那么参数 θ 的先验概率分布是近似服从协方差阵趋于无限大的正太分布, 那么, 参数 θ 的先验概率密度函数可以写为:

$$p(\theta|D^{(k-1)}) = \frac{2\pi^{-N/2}}{\sqrt{\det P_\theta}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\theta - \bar{\theta})^T P_\theta^{-1} (\theta - \bar{\theta}) \right\} \quad (3.55)$$

其中, N 表示多元参数 θ 的维度, 即 $N = \dim \theta$, $\bar{\theta}$ 表示参数 θ 的均值, P_θ 表示参数 θ 的协方差阵。那么根据协方差阵趋于无限大的正态分布的特点, 可知 P_θ^{-1} 趋于 0, 那么此时就可以得到公式 (3.54) 第二项为:

$$\left. \frac{\partial \log p(\theta|D^k)}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}_{MP}} = -P_\theta^{-1} (\hat{\theta}_{MP} - \bar{\theta}) \rightarrow 0 \quad (3.56)$$

可见, 此时极大后验参数估计变为了极大似然估计。

(2) 条件期望参数估计算法

条件期望参数估计算法的原理，是直接以参数 θ 的条件数学期望作为参数的估计值。即如公式 (3.57) 所示，用随机变量的均值作为了参数的估计值。

$$\hat{\theta}(k) = E\{\theta|D^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|D^k) d\theta \quad (3.57)$$

在公式 (3.57) 中的参数估计值 $\hat{\theta}(k)$ ，将等价于极小化参数估计误差的方差的结果，因此条件期望估计有时也被称作为最小方差估计，即此时的参数估计值 $\hat{\theta}(k)$ 满足公式 (3.58) 和公式 (3.59)。

$$E\left\{[\theta - \check{\theta}(k)]^T [\theta - \check{\theta}(k)] \middle| D^k\right\} \Big|_{\check{\theta}(k)=\hat{\theta}(k)} = \min \quad (3.58)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\theta - \check{\theta}(k)]^T [\theta - \check{\theta}(k)] p(\theta|D^k) d\theta \Big|_{\check{\theta}(k)=\hat{\theta}(k)} = \min \quad (3.59)$$

其中， $\check{\theta}(k)$ 表示参数 θ 的某种估计量，当 $\check{\theta}(k)$ 与 $\hat{\theta}(k)$ 相等时，公式 (3.59) 可达到最小值。此时的公式 (3.59) 将满足公式 (3.60)，即在取得最小值时关于参数 $\theta(k)$ 的偏导为 0。

$$\frac{\partial \int_{-\infty}^{\infty} [\theta - \check{\theta}(k)]^T [\theta - \check{\theta}(k)] p(\theta|D^k) d\theta}{\partial \theta(k)} \Big|_{\check{\theta}(k)=\hat{\theta}(k)} = 0 \quad (3.60)$$

对上式进行求导计算后，再处理可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(k) p(\theta|D^k) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|D^k) d\theta \quad (3.61)$$

又因为已知 $\int_{-\infty}^{\infty} p(\theta|D^k) d\theta = 1$ ，那么就可以最终得到如下的参数估计值 $\hat{\theta}(k)$ ：

$$\hat{\theta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|D^k) d\theta = E\{\theta|D^k\} \quad (3.62)$$

由此可见，公式 (3.57) 和公式 (3.58) 的定义是等价的。

此外，公式 (3.57) 中所定义参数估计值 $\hat{\theta}(k)$ 还可以使得参数估计误差的协方差矩阵取到极小值，即如公式 (3.63) 和公式 (3.64)

$$E\left\{[\theta - \check{\theta}(k)]^T [\theta - \check{\theta}(k)] \middle| D^k\right\} \Big|_{\check{\theta}(k)=\hat{\theta}(k)} = \min \quad (3.63)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\theta - \check{\theta}(k)] [\theta - \check{\theta}(k)]^T p(\theta|D^k) d\theta \Big|_{\check{\theta}(k)=\hat{\theta}(k)} = \min \quad (3.64)$$

达到最小值时，将满足如公式 (3.65) 的要求，即在参数估计值 $\hat{\theta}(k)$ 处偏导取得

0。

$$\left. \frac{\partial \int_{-\infty}^{\infty} [\theta - \check{\theta}(k)] [\theta - \check{\theta}(k)]^T p(\theta | D^k) d\theta}{\partial \check{\theta}(k)} \right|_{\check{\theta}(k) = \hat{\theta}(k)} = 0 \quad (3.65)$$

其中，将公式部分展开得公式（3.66）

$$\frac{\partial [\theta - \check{\theta}(k)] [\theta - \check{\theta}(k)]^T}{\partial \check{\theta}(k)} = \left[\frac{\partial [\theta - \check{\theta}(k)] [\theta - \check{\theta}(k)]^T}{\partial \check{\theta}_1(k)}, \dots, \frac{\partial [\theta - \check{\theta}(k)] [\theta - \check{\theta}(k)]^T}{\partial \check{\theta}_N(k)} \right] \quad (3.66)$$

将公式（3.66）中的第 i 个矩阵展开为：

$$\frac{\partial [\theta - \check{\theta}(k)] [\theta - \check{\theta}(k)]^T}{\partial \check{\theta}_i(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -[\theta_1 - \check{\theta}_1(k)] & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -[\theta_1 - \check{\theta}_1(k)] & \dots & -2[\theta_i - \check{\theta}_i(k)] & \dots & -[\theta_N - \check{\theta}_N(k)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -[\theta_N - \check{\theta}_N(k)] & 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

可见，由公式（3.65）必然能得到公式（3.64）。

3.3.2 基于最小二乘模型的贝叶斯辨识

假设具有如（3.68）形式的模型：

$$A(z^{-1})z(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (3.68)$$

其中， $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 为如下公式（3.69）的形式，且 n_a 和 n_b 为事先给定的模型阶数。

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \\ B(z^{-1}) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} \end{cases} \quad (3.69)$$

将形如公式（3.68）的模型改成最小二乘形式，则可以得到公式（3.70）

$$z(k) = h^T(k)\theta + v(k) \quad (3.70)$$

其中， $h(k)$ 和 θ 的定义如公式（3.71）， $v(k)$ 则为均值为0的服从高斯分布的白噪声。

$$\begin{cases} h(k) = [-z(k-1), \dots, -z(k-n_a), u(k-1), \dots, u(k-n_b)]^T \\ \theta = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}]^T \end{cases} \quad (3.71)$$

使用贝叶斯方法来对于模型参数 θ 进行辨识时，首先，要将待辨识的参数 θ 当作随机变量，然后利用公式（3.53）或公式（3.57）来确定参数 θ 的估计值。^[45]显然，无论是使用的极大后验参数估计方法的公式来求解，还是使用条件期望参数估计方法的公式来求解，都需要确定参数 θ 的后验概率密度函数 $p(\theta | D^k)$ 。

首先，对已知的参数 θ 的后验概率密度函数 $p(\theta|D^k)$ 进行变换，得到公式 (3.72)。所以，接下来的任务就是求出 $p(z(k)|\theta, D^{(k-1)})$ 以及 $p(\theta|D^{(k-1)})$ 的表达式，带入后求解出参数 θ 的后验概率密度函数。

$$p(\theta|D^k) = \frac{p(z(k)|\theta, D^{(k-1)})p(\theta|D^{(k-1)})}{p(z(k)|D^{(k-1)})} \quad (3.72)$$

假设参数 θ 在数据 D^0 条件下，所对应的先验概率分布为正态分布，其均值为 $\hat{\theta}(0)$ ，协方差矩阵为 $P(0)$ ，那么就能得到公式 (3.73)：

$$p(\theta|D^0) = \frac{2\pi^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det P(0)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta}(0))^T P^{-1}(0)[\theta - \hat{\theta}(0)]\right\} \quad (3.73)$$

其中， $N = \dim\theta$ ，那么，参数 θ 在数据 D^k 条件下，所对应的先验概率分布应当也为正态分布，其均值记作 $\hat{\theta}(k)$ ，对应的协方差矩阵记作 $P(k)$ 。

综上，可以显然得到参数 θ 在数据 D^{k-1} 条件下，对应的条件概率密度函数如公式 (3.74)。

$$p(\theta|D^{(k-1)}) = \frac{2\pi^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det P(k-1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\theta - \hat{\theta}(k-1)]^T P^{-1}(k-1)[\theta - \hat{\theta}(k-1)]\right\} \quad (3.74)$$

同时，由于噪声也服从正态分布，满足 $v(k) \sim N(0, \sigma_v^2)$ ，再结合模型最小二乘分布形式公式，可得 $z(k) \sim N(h^T(k)\theta, \sigma_v^2)$ 。同上，即可得到 $z(k)$ 所对应的条件概率密度函数如公式 (3.75)。

$$p(z(k)|\theta, D^{(k-1)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_v^2}[z(k) - h^T(k)\theta]^2\right\} \quad (3.75)$$

将所求得的 $p(\theta|D^{(k-1)})$ 和 $p(z(k)|\theta, D^{(k-1)})$ 代入到公式 (3.72) 中，即可得到如下公式：

$$p(\theta|D^k) = \frac{2\pi^{-\frac{N}{2}}}{p(z(k)|D^{(k-1)})\sqrt{2\pi\sigma_v^2\det P(k-1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_v^2}[z(k) - h^T(k)\theta]^2 - \frac{1}{2}[\theta - \hat{\theta}(k-1)]^T \times P^{-1}(k-1)[\theta - \hat{\theta}(k-1)]\right\} \quad (3.76)$$

因为后面有求导的步骤，所以将于参数 θ 无关的部分提取出来，设为变量 Norm，则 Norm 的定义如下：

$$\text{Norm} = \frac{2\pi^{-\frac{N}{2}}}{p(z(k)|D^{(k-1)})\sqrt{2\pi\sigma_v^2 \det P(k-1)}} \quad (3.77)$$

对公式 (3.76) 求取对数后展开可得：

$$\begin{aligned} \log p(\theta|D^k) = & \text{const} \\ & - \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{\sigma_v^2} P(k)h(k)z(k) - P(k)P^{-1}(k)\hat{\theta}(k-1) \right]^T \\ & \times P^{-1}(k) \left[\theta - \frac{1}{\sigma_v^2} P(k)h(k)z(k) - P(k)P^{-1}(k)\hat{\theta}(k-1) \right] \end{aligned} \quad (3.78)$$

其中，根据公式 $P^{-1}(k)$ 与 $P^{-1}(k-1)$ 之间的关系，如公式 (3.79)，可计算出 $P(k)P^{-1}(k)$ ，并将计算结果代入公式 (3.78)，前后抵消，最终可得到简化后的公式 (3.81)

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + -\frac{1}{\sigma_v^2} h(k)h^T(k) \quad (3.79)$$

$$P(k)P^{-1}(k-1) = I - \frac{1}{\sigma_v^2} P(k)h(k)h^T(k) \quad (3.80)$$

$$\log p(\theta|D^k) = \text{const} - \frac{1}{2} (\theta - \bar{\theta})^T P^{-1}(k) (\theta - \bar{\theta}) \quad (3.81)$$

其中， $\bar{\theta}$ 所对应的公式为：

$$\bar{\theta} = \hat{\theta}(k-1) + \frac{1}{\sigma_v^2} P(k)h(k)[z(k) - h^T(k)\hat{\theta}(k-1)] \quad (3.82)$$

按照之前的推导可知，当 $\hat{\theta}(k) = \bar{\theta}$ 时， $\log p(\theta|D^k)$ 可取得最大值，说明此时求取到了参数再 k 时刻的极大后验估计。

同时，根据公式 (3.81) 可以推导出 $p(\theta|D^k)$ 对应的公式 (3.83)

$$p(\theta|D^k) = \text{Norm} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\theta - \bar{\theta})^T P^{-1}(k) (\theta - \bar{\theta}) \right\} \quad (3.83)$$

根据条件期望参数估计方法的定义，可得到如下公式：

$$\hat{\theta}(k) = E\{\theta|D^k\} = \bar{\theta} \quad (3.84)$$

综上，可以显然看出，采用极大后验估计方法和条件期望参数估计方法，最终得到的估计值是相同的，但并不是对于所有的问题，这两个方法的估计值结果是一样的。一般来说，当 k 的取值比较小的时候，这两种方法结果不同；当 k 的取值很大的时候，这两种方法所得到的最终估计值就很接近。

最后，引入一个中间变量 $K(k)$ ，如公式 (3.85) 进行定义。综合以上推导过程，可以最终得到如公式 (3.86) 的贝叶斯算法参数递推过程，形如在上一节中推导过的递推

最小二乘法。

$$K(k) = \frac{1}{\sigma_v^2} P(k) h(k) \quad (3.85)$$

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)[z(k) - h^T(k)\hat{\theta}(k-1)] \\ K(k) = P(k-1)h(k) \left[h^T(k)P(k-1)h(k) + \frac{1}{\sigma_v^2} \right]^{-1} \\ P(k) = [I - K(k)h^T(k)]P(k-1) \end{cases} \quad (3.86)$$

通过 3.3.2 节的推导过程及其结果可以发现，采用贝叶斯算法实现电池模型参数辨识的步骤与采用含遗忘因子递推二乘法实现电池模型参数辨识的过程是类似的，在具体实现中同样是使用的 Matlab 进行语言编程的方式，根据上述的理论推导，可以得到实际编程的流程图，在这里只绘制了贝叶斯算法的核心部分，其余初始化相同步骤与最小二乘法相同，就不在此赘述，具体如图 3.3 所示。

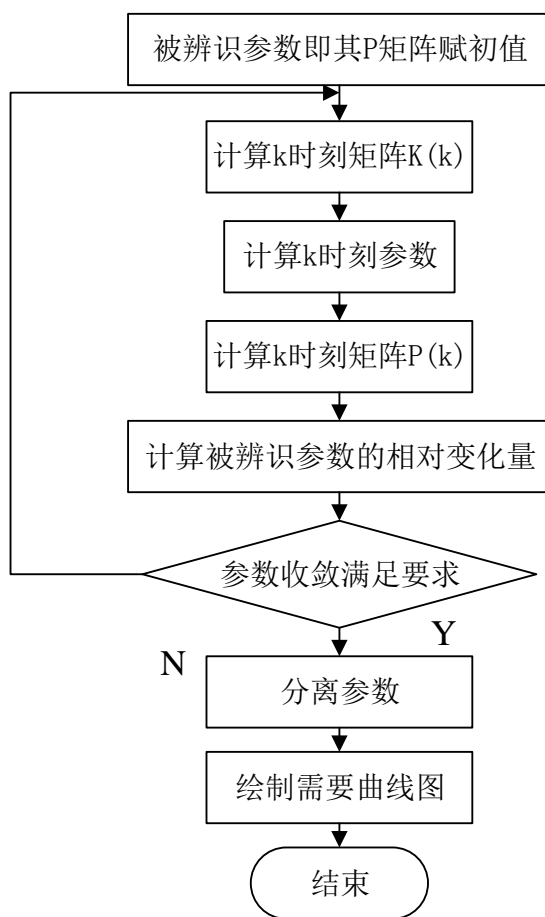


图 3.3 贝叶斯算法实现流程图

3.4 卡尔曼滤波算法

卡尔曼滤波算法的原理，就是把不可观测的待估计的参数变量 x 看作是随机变量，且这些随机变量与可观测的输入、输出数据是密切相关的。通过这些可观测的输入、输出去推断那些不可测的状态变量，就是卡尔曼滤波算法原理的核心。卡尔曼滤波算法除了可以用于动态系统的状态估计外，还可以用于动态系统参数的在线估计，特别是对于时变系统中参数的估计^[46]。

假设系统的状态方程和测量方程所构成的方程组如公式 (3.87)：

$$\begin{cases} x(k+1) = \varphi(k+1, k)x(k) + \eta(k)\omega(k) \\ z(k) = \vartheta(k)x(k) + v(k) \end{cases} \quad (3.87)$$

其中， $\omega(k)$ 与 $v(k)$ 都是服从高斯分布的噪声，并且有：

$$\begin{cases} \omega(k) = v(k) = 0 \\ cov[\omega(k), \omega(j)] = R_1(k)\delta_{kj} \\ cov[v(k), v(j)] = R_2(k)\delta_{kj} \\ var[x(0)] = Px(0) = P_0 \\ cov[\omega(k), v(j)] = cov[\omega(k), x(0)] = cov[v(k), x(0)] = 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

其中， $R_1(k)$ 和 P_0 为非负定矩阵， $R_2(k)$ 为正定矩阵。

3.4.1 卡尔曼预测公式

假设有 $k > j$ ，由系统的状态方程可知，对于 k 和 j 两个瞬态，满足方程 (3.89)：

$$x(k) = \varphi(k, j)x(j) + \sum_{i=j+1}^k \varphi(k, i)\eta(i-1)\omega(i-1) \quad (3.89)$$

若已知从开始到 j 时刻的实际测量输出值为：

$$y_j^T = (y^T(1), y^T(2), \dots, y^T(j)) \quad (3.90)$$

那么，可得系统状态 x 的最小均方预测值如公式 (3.91)。

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|j) &= E[x(k)|y_j] = E[x(k)|y(1), y(2), \dots, y(j)] \\ &= \varphi(k, j)E[x(j)|y_j] + \sum_{i=j+1}^k \varphi(k, i)\eta(i-1)E[\omega(i-1)|y_i] \end{aligned} \quad (3.91)$$

当 $k \geq j$ 时，根据一开始的基本设定，可得公式 (3.92) ~ 公式 (3.95)：

$$E[x(k) - \bar{x}(k)][\omega(k) - \bar{\omega}(k)]^T = 0 \quad (3.92)$$

$$E[\omega(k) - \bar{\omega}(k)][x(k) - \bar{x}(k)]^T = 0 \quad (3.93)$$

$$E[x(j) - \bar{x}(j)][\omega(k) - \bar{\omega}(k)]^T = 0 \quad (3.94)$$

$$E[\omega(k) - \bar{\omega}(k)][x(j) - \bar{x}(j)]^T = 0 \quad (3.95)$$

综合以上四个公式可得：

$$E[\omega(k)|y(1), y(2), \dots, y(j)] = E[\omega(k)] = 0 \quad (3.96)$$

将公式 (3.96) 代入公式 (3.91) 可对于状态预测公式进行如下简化：

$$\hat{x}(k|j) = \varphi(k, j)\hat{x}(j|j) \quad (3.97)$$

考虑到最小方差估计是一种无偏估计，所以上述的预测误差的方法可以写作如公式 (3.98)。

$$\begin{aligned} P(k|j) &= E[x(k) - \hat{x}(k|j)][x(k) - \hat{x}(k|j)]^T \\ &= E \left\{ \varphi(k, j)[x(j) - \hat{x}(j|j)] + \sum_{i=j+1}^k \varphi(k, i)\eta(i-1)E[\omega(i-1)|y_i] \right\} \\ &\quad \times \left\{ \varphi(k, j)[x(j) - \hat{x}(j|j)] + \sum_{i=j+1}^k \varphi(k, i)\eta(i-1)E[\omega(i-1)|y_i] \right\}^T \end{aligned} \quad (3.98)$$

又因为 $\omega(k)$ 是独立的，且 $E[x(i), \omega(i)] = 0$ ，所以上式可以进行简化：

$$P(k|j) = \varphi(k, j)P(j|j)\varphi^T(k, j) + \sum_{i=j+1}^k \varphi(k, i)\eta(i-1)R_1(i-1)\eta^{-T}(i-1)\varphi^T(k, i) \quad (3.99)$$

上式表明，想要获取预测状态和预测误差，就需要先求解出状态滤波和滤波误差的方差问题。卡尔曼滤波本质上就是一套递推线性滤波公式，递推的起始点是 $\hat{x}(0|0)$ 和 $P(0|0)$ ，每当实际测出一个输出 $y(k)$ 时，就可以利用上一时刻 $k-1$ 所对应的状态预测 $\hat{x}(k-1|k-1)$ 和误差的方差 $P(k-1|k-1)$ 计算出在 k 时刻的 $\hat{x}(k|k)$ 和 $P(k|k)$ 。

3.4.2 卡尔曼滤波公式

一步预测 $\hat{x}(k|k-1)$ 和误差的方差 $P(k|k-1)$ 则是卡尔曼滤波的中间结果。通过公式 (3.97) 和公式 (3.99)，可以得到状态的一步预测如公式 (3.100)，一步预测误差的方差如公式 (3.101)。

$$\hat{x}(k|k-1) = \varphi(k, k-1)\hat{x}(k-1|k-1) \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} P(k|k-1) &= \varphi(k, k-1)P(k-1|k-1)\varphi^T(k, k-1) \\ &\quad + \eta(k-1)R_1(k-1)\eta^{-T}(k-1) \end{aligned} \quad (3.101)$$

令根据 y_{k-1} 对 $y(k)$ 所计算出最小方差预测的误差为 $\tilde{y}(k)$ ，那么便有：

$$\begin{aligned}\tilde{y}(k) &= y(k) - E[y(k)|y_{k-1}] \\ &= y(k) - E[\vartheta(k)x(k)|y_{k-1}] - E[v(k)|y_{k-1}] \\ &= y(k) - \vartheta(k)\hat{x}(k|k-1)\end{aligned}\quad (3.102)$$

(1) 状态的最小方差预测 $\hat{x}(k|k)$

下面对于系统状态的最小方差预测进行分析：

$$\begin{aligned}\hat{x}(k|k) &= E[x(k)|y_k] = E[x(k)|y_{k-1}, y(k)] = E[x(k)|y_{k-1}, \tilde{y}(k)] \\ &= E[x(k)|y_{k-1}] + E[x(k)|\tilde{y}(k)] - \bar{x}(k) \\ &= \hat{x}(k|k-1) + cov[x(k), \tilde{y}(k)]var^{-1}[\tilde{y}(k)] \times [\tilde{y}(k) - E(\tilde{y}(k))] \\ &= \hat{x}(k|k-1) + K(k)[y(k) - \vartheta(k)\hat{x}(k|k-1)]\end{aligned}\quad (3.103)$$

(2) 滤波增益矩阵 $K(k)$

设滤波增益矩阵 $K(k)$ 为上式中的如下部分，则可对上式实现简化。

$$K(k) = cov[x(k), \tilde{y}(k)]var^{-1}[\tilde{y}(k)] \quad (3.104)$$

通过公式(3.103)可知，可以利用 $\tilde{y}(k)$ 对预测值 $\hat{x}(k|k-1)$ 进行修正，而滤波增益矩阵 $K(k)$ 就是修正的系数矩阵。下面对于滤波增益矩阵进行进一步的分析，从而最终得到易于获取的计算方式。

$$\begin{aligned}cov[x(k), \tilde{y}(k)] &= E[x(k) - \bar{x}(k)][\tilde{y}(k) - E(\tilde{y}(k))]^T \\ &= E[x(k) - \bar{x}(k) + \hat{x}(k|k-1) - \hat{x}(k|k-1)][\tilde{y}(k)]^T \\ &= E[\tilde{x}(k|k-1) + \hat{x}(k|k-1)][\tilde{y}(k)]^T + \bar{x}(k)[\tilde{y}(k)]^T \\ &= E[\tilde{x}(k|k-1) + \hat{x}(k|k-1)][\vartheta(k)x(k) + v(k) - \vartheta(k)\hat{x}(k|k-1)]^T \\ &= E[\tilde{x}(k|k-1) + \hat{x}(k|k-1)][\vartheta(k)\tilde{x}(k|k-1) + v(k)]^T\end{aligned}\quad (3.105)$$

其中， $\hat{x}(k|k-1)$ 是 y_{k-1} 的线性函数， $v(k)$ 与 y_{k-1} 相互独立，因此， $v(k)$ 与 $\hat{x}(k|k-1)$ 相互独立；此外， $v(k)$ 还与 $x(k)$ 相互独立， $\tilde{x}(k|k-1)$ 与 y_{k-1} 也相互独立，所以，最终可以推导出：

$$E[\tilde{x}(k|k-1)][\hat{x}(k|k-1)] = 0 \quad (3.106)$$

令 $P(k|k-1)$ 满足如下公式：

$$P(k|k-1) = E[\tilde{x}(k|k-1)][\tilde{x}(k|k-1)]^T = 0 \quad (3.107)$$

则有：

$$\text{cov}[x(k), \tilde{y}(k)] = P(k|k-1) \vartheta^T(k) \quad (3.108)$$

又因为:

$$\begin{aligned} \text{var}[\tilde{y}(k)] &= E[y(k) - \vartheta(k)\hat{x}(k|k-1)][y(k) - \vartheta(k)\hat{x}(k|k-1)]^T \\ &= E[\vartheta(k)\tilde{x}(k|k-1) + v(k)][\vartheta(k)\tilde{x}(k|k-1) + v(k)]^T \\ &= \vartheta(k)P(k|k-1)\vartheta^T(k) + R_2(k) \end{aligned} \quad (3.109)$$

将公式 (3.108) 和公式 (3.109) 代入到滤波增益矩阵 $K(k)$ 的求解公式中, 最终可得:

$$K(k) = P(k|k-1)\vartheta^T(k)[\vartheta(k)P(k|k-1)\vartheta^T(k) + R_2(k)]^{-1} \quad (3.110)$$

(3) 滤波误差的方差 $P(k|k)$

下面对于滤波误差的方差进行计算:

$$P(k|k) = E[\tilde{x}(k|k)][\tilde{x}(k|k)]^T \quad (3.111)$$

首先对于 $\tilde{x}(k|k)$ 进行分析:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k|k) &= x(k) - \hat{x}(k|k) \\ &= \tilde{x}(k|k-1) - K(k)[y(k) - \vartheta(k)\hat{x}(k|k-1)] \\ &= [I - K(k)\vartheta(k)]\tilde{x}(k|k-1) - K(k)v(k) \end{aligned} \quad (3.112)$$

因此将上述代入到公式 (3.111) 可得:

$$\begin{aligned} P(k|k) &= [I - K(k)\vartheta(k)]P(k|k-1)[I - K(k)\vartheta(k)]^T + K(k)R_2(k)K^T(k) \\ &= [I - K(k)\vartheta(k)]P(k|k-1) - P(k|k-1)\vartheta^T(k)K^T(k) \\ &\quad + K(k)[\vartheta(k)P(k|k-1)\vartheta^T(k) + R_2(k)]K^T(k) \end{aligned} \quad (3.113)$$

又因为根据公式 (3.110) 左右调换位置后代入上式可得:

$$P(k|k) = [I - K(k)\vartheta(k)]P(k|k-1) \quad (3.114)$$

综上, 就得到了完整的递推公式, 除此之外, 还需要确定滤波的初值 $\hat{x}(0|0)$ 和 $P(0|0)$ 。

(4) 滤波初值

首先, 分析一下滤波误差的均值公式:

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}(k|k)] &= E[x(k) - \hat{x}(k|k)] \\ &= \varphi(k, k-1)E[\tilde{x}(k-1|k-1)] - K(k)\vartheta(k)\varphi(k, k-1)E[x(k-1)\hat{x}(k-1|k-1)] \\ &= [I - K(k)\vartheta(k)]\varphi(k, k-1)E[\tilde{x}(k-1|k-1)] \end{aligned} \quad (3.115)$$

要使得在 k 时刻, 滤波误差的均值为 0, 这就要求在 $k-1$ 时刻的滤波误差均值为 0,

以此类推，这就需要在 $k=0$ 时的滤波无偏，所以因此：

$$\hat{x}(0|0) = E[x(0)] = m \quad (3.116)$$

$$P(0|0) = E[x(0) - m][x(0) - m]^T = P_0 \quad (3.117)$$

综上，得到了使用卡尔曼滤波算法的完整递推过程的所有公式，整理后如公式(3.118)

所示：

$$\begin{cases} \hat{x}(k|k-1) = \varphi(k, k-1)\hat{x}(k-1|k-1) \\ P(k|k-1) = \varphi(k, k-1)P(k-1|k-1)\varphi^T(k, k-1) \\ \quad + \eta(k-1)R_1(k-1)\eta^{-T}(k-1) \\ K(k) = P(k|k-1)\vartheta^T(k)[\vartheta(k)P(k|k-1)\vartheta^T(k) + R_2(k)]^{-1} \\ \hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)[y(k) - \vartheta(k)\hat{x}(k|k-1)] \\ P(k|k) = [I - K(k)\vartheta(k)]P(k|k-1) \end{cases} \quad (3.118)$$

通过 3.4.2 节的推导过程及其结果可以发现，卡尔曼滤波算法本质上是一种典型的贝叶斯算法，在具体实现中同样是使用的 Matlab 进行语言编程的方式，根据上述的理论推导，可以得到实际编程的核心流程图，在这里只放了卡尔曼滤波算法与其他算法不同的核心部分，其余的与前面的算法类似，就不在此赘述了具体如图 3.4 所示。

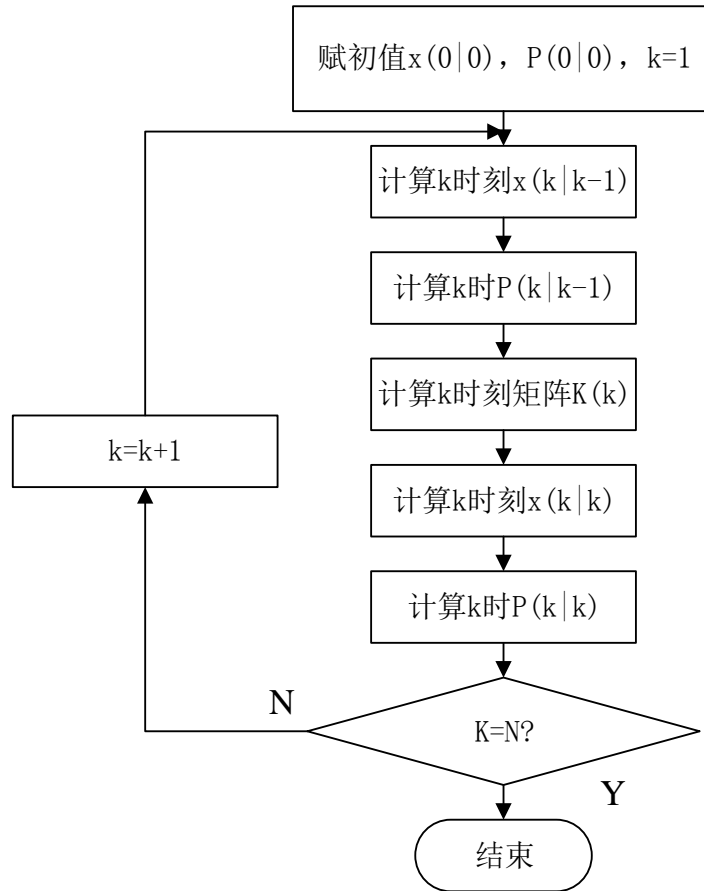


图 3.4 卡尔曼滤波算法实现流程图

3.5 本章小结

本章首先对于模型参数辨识这一概念进行了简要的介绍，并指出了常见的模型参数辨识方法。然后分别对于最小二乘法、贝叶斯辨识算法以及卡尔曼滤波算法这三种算法的参数辨识方法进行了详细的说明以及推导，并绘制出在进行电池模型参数编程过程中的核心流程图。这三种算法本身也有着内在的关联，通过对于这三种算法参数辨识算法的详细解析，便于后面仿真试验的实现。

第四章 电池模型参数直接辨识

4.1 电池模型改进分析

在第二章中，已经确定了电池等效电路的模型。该模型大体上由两部分组成：基于 OCV 的电压源和串联的 RC 部件。在充电或放电期间，OCV 与 SOC 以非线性方式变化，而且不是固定的。电池的 SOC 是用来反映电池的剩余容量状况，其数值定义为电池剩余容量占电池容量的比^[47]，即如公式（4.1）所示。

$$SOC = \frac{Q_c}{Q_I} \quad (4.1)$$

其中， Q_c 表示电池剩余电量， Q_I 表示电池以电流 I 放电时具有的额定容量。

在电池模型的设计中，RC 电路用于模拟锂电池的电压响应的瞬态行为，所以，所使用的 RC 电路越多，模型能捕捉到的不同时间尺度的瞬变越多。同样，RC 电路的数目增加也会使得电路模型的复杂程度越高。所以，本文使用了两个 RC 电路，分别表示为 R1-C1 和 R2-C2，因为它们可以同时提供足够的模型完整性和简洁性，对于这点，在许多论文中都得到了验证。

在本节中，对于第二章所设计的电池模型进行改进，将其改为只需要通过观测电流、观测电压值就可以对于电池模型参数进行辨识的模型，即要在模型中具体的体现出开路电压，欧姆电阻等电路重要信息^[48]，设计了一种新的电池模型，具体的模型推导过程如下。

根据基尔霍夫电路定律，模型方程可以表示为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} U_1 - \frac{1}{C_1} I \\ \dot{U}_2 = -\frac{1}{R_2 C_2} U_2 - \frac{1}{C_2} I \\ U = U_{OCV} - U_1 - U_2 - IR_o \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 U_1 和 U_2 分别是 $R_1 C_1$ 电路部分和 $R_2 C_2$ 电路部分所对应的电压， U 是端电压， U_{OCV} 是 OCV。如前所述， U_{OCV} 取决于 SOC。所以，它通常被参数化为关于 SOC 中的五阶多项式：

$$U_{OCV}(SOC) = \alpha_0 + \alpha_1 SOC + \alpha_2 SOC^2 + \alpha_3 SOC^3 + \alpha_4 SOC^4 + \alpha_5 SOC^5 \quad (4.3)$$

其中，对于 α_0 、 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 和 α_5 是多项式中 SOC 的系数。其中，应当指出，

$\alpha_0 = U_{ocv}(SOC = 0)$ 。即锂电池完全耗尽时， α_0 所对应的数值就是当时电池的 OCV。此外，如文献^[49-51]中提到的，虽然许多锂电池的 R_o 与 SOC 关系显著不同，但总体趋势都是 R_o 的阻值随着 SOC 的降低而增加。因此，对于 R_o 和 SOC 的关系，可以假设出如下的表达式：

$$R_o(SOC) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\beta_2 SOC} \quad (4.4)$$

其中， β_0 、 β_1 和 β_2 是电池 R_o 关于 SOC 的一组系数。

综上，可以形成一种新的电池模型。在这个模型中，参数包括 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 、 α_5 、 β_0 、 β_1 、 β_2 、 R_1 、 R_2 、 C_1 和 C_2 这 12 个。接下来，就需要确定这些参数与电压响应具有什么样的关联。

假设电池从完全充电到以恒定电流将电量完全耗尽，随后又经历了足够长的静置时间。因为这样的排放过程可能是在实验过程中最容易实现的，因此，在实践中通常被优先选择。在本文中，实验的数据是从美国宇航局埃姆斯研究中心进行的一个真实世界的实验中获得的，如图 4.1 所示，为这个过程中电压电流的变化情况。

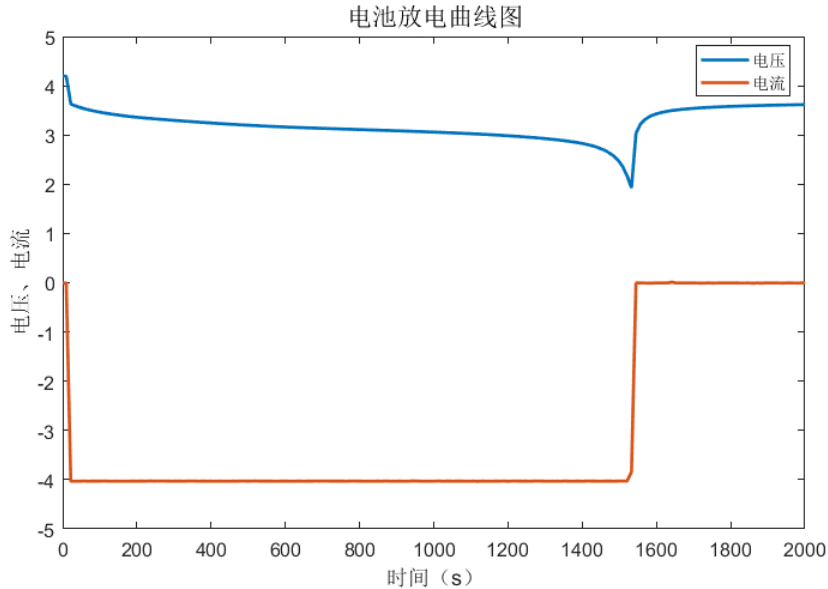


图 4.1 电池放电电压电流图

假设电池已经静置了足够长的时间，那么可以认为 C_1 和 C_2 是不带电的，这也就意味着 U_1 和 U_2 的初始值都为零。所以， U_1 和 U_2 随时间的变化的表达式也就可以如下进行表示：

$$U_1(t) = IR_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \right) \quad (4.5)$$

$$U_2(t) = IR_2 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} \right) \quad (4.6)$$

最终，将以上所有的表达式综合起来，就可以得到端电压 U 关于时间 t 的一个新的表达式，具体如下：

$$U(t) = \alpha_0 + \alpha_1 SOC(t) + \alpha_2 SOC^2(t) + \alpha_3 SOC^3(t) + \alpha_4 SOC^4(t) + \alpha_5 SOC^5(t) + IR_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C_1}}\right) + IR_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}\right) + I\beta_0 + I\beta_1 e^{-\beta_2 SOC(t)} \quad (4.7)$$

如果电池满足完全放电并且之后休息的时间足够长，那么此时 U_1 和 U_2 将接近零，端电压 U 将逐渐恢复并等于 U_{OCV} 。这也就意味着可以直接得到 SOC 等于 0 时候的 U_{OCV} ，即 α_0 。因此， α_0 可以直接从最终的电压测量中读取。

通过上式，可以充分地确定端电压 U 和参数 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 、 α_5 、 β_0 、 β_1 、 β_2 、 R_1 、 R_2 、 C_1 和 C_2 之间的关系。

这些参数是未知的，所以，接下来的主要问题，就是如何通过在放电周期中收集的端电压 U 和端电流 I 的测量值，最终辨识出这些参数的数值。并且，在实现参数辨识的过程之前，还需要确定端电压 U 对每个参数的变化是否足够敏感，使得所测量到的数据有足够信息以唯一地确定参数。这也就是所谓的参数可识别性分析。

4.2 参数可辨识性分析

当且仅当其参数可以由输入输出数据唯一确定时，模型结构才被认为是可识别的。换句话说，对于两组不同的参数值，当他们具有相同的输入时，对于一个可识别的模型，应当能够产生不同的输出序列，这样它们才可以实现相互区分。如参考文献^[52]所示，模型的局部可识别性可以通过敏感性分析来检验。在这里，敏感性指的是端电压 U 相对于参数变化的变化是否灵敏。为了便于接下来的分析，对于之前所推导出的电池模型，可进行如下的简化，表达式具体为：

$$U(t) = \varphi(\theta; t) \quad (4.8)$$

其中， θ 为电池模型的参数集，即有：

$$\theta = \left[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad R_1 \quad \frac{1}{R_1 C_1} \quad R_2 \quad \frac{1}{R_2 C_2} \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \right]^T \quad (4.9)$$

在上式中，函数 φ 表示从 θ 到 U 的映射。其中，为了符号书写的方便， I 被去掉了，因为通过前面的分析可知，它是恒定的。在这里，值得注意的是， θ 所包含的变量中，有 $\frac{1}{R_1 C_1}$ 以及 $\frac{1}{R_2 C_2}$ ，而不是 C_1 和 C_2 。这是因为电容至少比电阻的数值大三个数量级，所以，这

将会在数值的计算中引入显著的不准确^[53]。而利用如上所述选择的参数集 θ ，参数集中所有的元素都大致处于相同的数量级，这有利于后面的参数辨识。

端电压 U 相对于参数集 θ 变化的灵敏度，可以由以下矩阵 $S(\theta)$ 来进行表示：

$$S(\theta) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_{12}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

其中， t 对应于采样时刻，并且其对应值具体有：

前五个参数 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 和 θ_5 是关于 U_{OCV} 的计算，关于这五个参数的偏导计算分别为：

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_1} = SOC(t) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_2} = SOC^2(t) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_3} = SOC^3(t) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_4} = SOC^4(t) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_5} = SOC^5(t) \quad (4.15)$$

参数 θ_6 、 θ_7 、 θ_8 和 θ_9 这四个是关于两个 RC 电路的端电压 U_1 和 U_2 的，关于这四个参数的偏导计算分别为：

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_6} = I(1 - e^{-t\theta_7}) \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_7} = It\theta_6 e^{-t\theta_7} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_8} = I(1 - e^{-t\theta_9}) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_9} = It\theta_8 e^{-t\theta_9} \quad (4.19)$$

参数 θ_{10} 、 θ_{11} 和 θ_{12} 这三个是关于电阻 R_o 的计算的，关于这三个参数的偏导计算分别为：

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_{10}} = I \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_{11}} = I e^{-SOC(t)\theta_{12}} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_{12}} = ISOC(t)\theta_{11}e^{-SOC(t)\theta_{12}} \quad (4.22)$$

根据文献^[52]的分析, 如果 $S(\theta)$ 是满秩的, 那么 θ 就是局部可识别的。因此, 有必要确定每列之间的独立性。

首先, 需要注意的是第六列和第八列。如果 θ_7 和 θ_9 不同, 那么 $S(\theta)$ 的第六列 $\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_6}$ 和第八列 $\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_8}$ 的计算公式具有如上所示的相似形式, 并将彼此独立。而在实际上, θ_7 和 θ_9 也的确应当是不同的, 因为它们在不同时间尺度上与 RC 瞬态有关。而基于这一点, 根据 $S(\theta)$ 的第七列 $\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_7}$ 和第九列 $\frac{\partial \varphi(\theta; t)}{\partial \theta_9}$ 的计算公式可以进一步看出, $S(\theta)$ 的第七列和第九列之间的独立性是成立的。

最后, 把所有的列放在一起并观察它们, 可以显然看出它们都是线性无关的, 综上, 也就证明了 $S(\theta)$ 是满秩的, 即 θ 就是局部可识别的。在此基础上, 说明可以对于所构建的新模型进行参数辨识。

4.3 非线性最小二乘法参数辨识

由于所构建的电池模型含有十二个参数, 且为非线性的, 在这里就使用了 Matlab 软件的工具箱 Curve Fitting Toolbox 工具箱来实现复杂非线性系统的最小二乘法拟合。

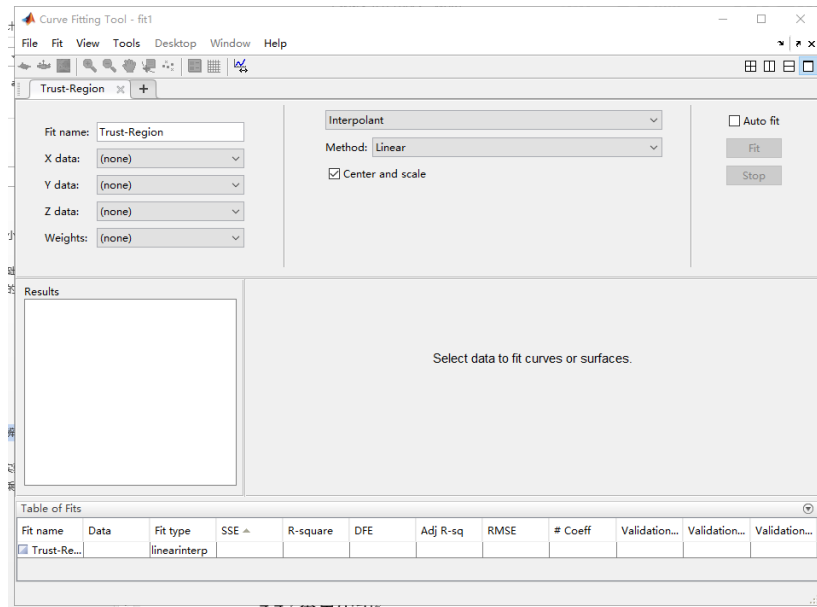


图 4.2 Curve Fitting Toolbox 界面图

Curve Fitting Toolbox 提供最广泛应用的拟合曲线和曲面数据的方法, 包括线性和非线性回归、样条和插值以及平滑。该工具箱提供稳健回归的选项, 以拟合包含偏值的

数据集。所有算法都可通过函数或 **Curve Fitting** 应用程序访问。

如图所示为工具箱的界面，在该工具箱中，可以直接导入需要进行参数辨识的模型观测值 **Xdata** 以及 **Ydata**，导入数据后就会在界面中绘制出相应的曲线，如图 4.3 所示。

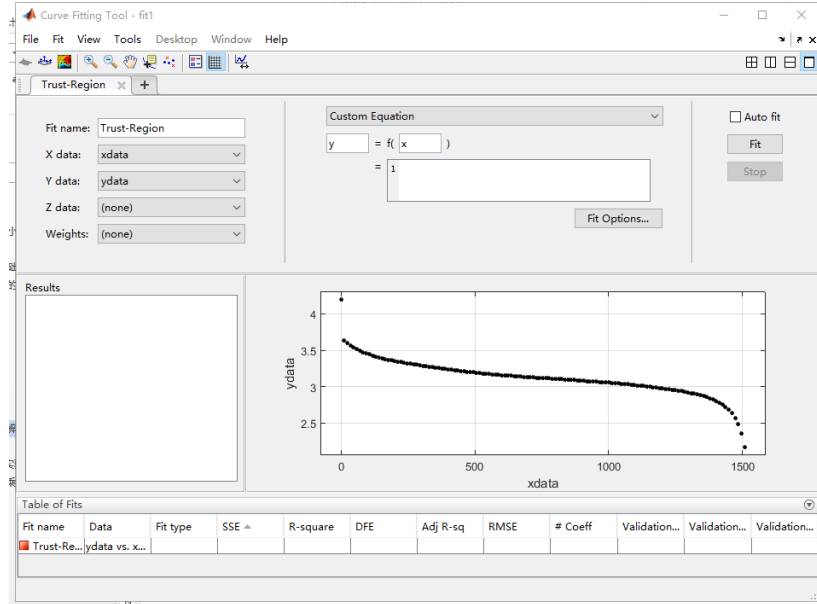


图 4.3 导入观测值后工具箱界面图

然后便可将在第一节中所改进的模型使用 **matlab** 语言，输入到方程界面，再选择不同的参数辨识算法，就可以获得相应的拟合曲线以及辨识出的参数。如图 4.4 所示可以用于参数辨识算法进行设计。在该界面中，可以选取辨识参数的算法，主要原理都为非线性最小二乘法，具体有 **Trust-Region** 算法以及 **L-M** 算法这两种。

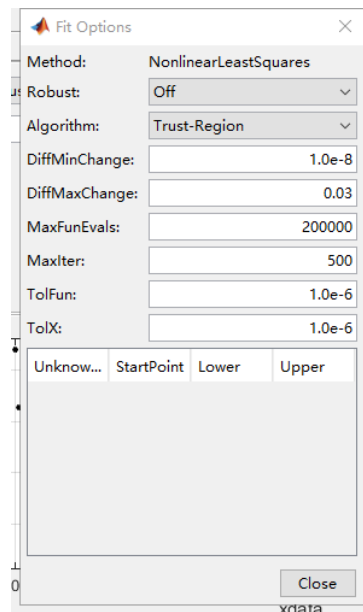


图 4.4 辨识算法设置界面图

在完成所有模型参数辨识设置后，点击界面右上方的“fit”按钮，即可开始参数的

辨识，辨识完毕后，会在界面的左下方文本框内显示出最终辨识出的参数值，以及辨识结果的分析。

如图 4.5 所示为采用 L-M 辨识算法所辨识出的结果界面图。在该界面图中，调出了辨识结果的误差分析图，在下方的误差分析图中可以清晰的看出所辨识出的模型的准确度。

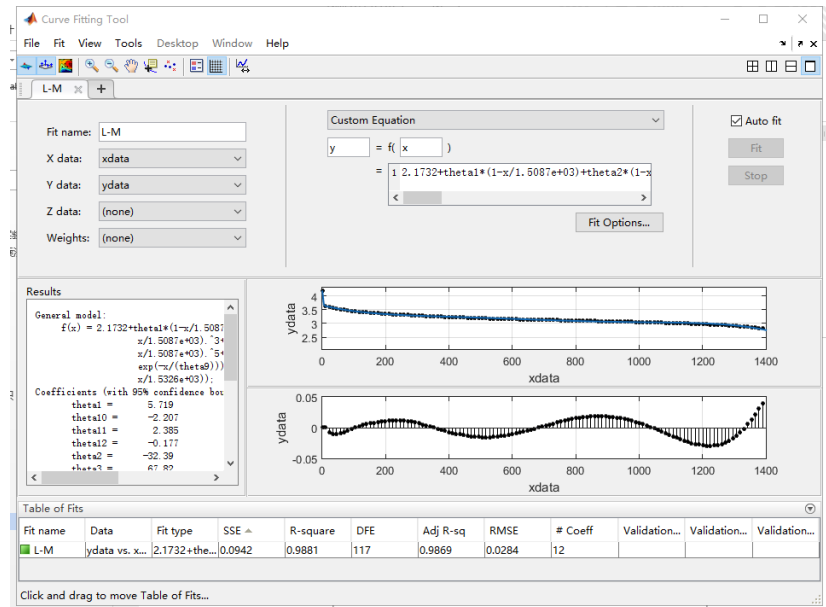


图 4.5 L-M 辨识算法辨识结果图

4.4 本章小结

本章采用了一种电池模型参数直接辨识的方法，该方法不需要根据实验所测得的 $SOC - OCV$ 曲线来推断出电池模型 OCV ，而是可以直接通过终端电压电流信号得到电池模型的参数。

首先对于电池模型进行了改进，将在原有的五个参数的基础上修改为了具有 12 个参数的新模型。然后对于所新构造的模型参数可识别性进行了分析，验证了该模型的参数可识别。最后使用 Matlab 的 Curve Fitting Toolbox 对于复杂的非线性模型实现了参数辨识。

第五章 电池模型参数辨识仿真实验及分析

5.1 含遗忘因子递推最小二乘法参数辨识

5.1.1 仿真实验过程

在辨识模型参数时，已知的数据是当前时刻工作电流 $I(k)$ 、工作电压 $U(k)$ ，前一时时刻工作电流 $I(k-1)$ 、工作电压 $U(k-1)$ 、前两时刻工作电流 $I(k-2)$ 、工作电压 $U(k-2)$ ，所求参数为电池模型中的五个参数，即 R_0 、 R_1 、 R_2 、 C_1 和 C_2 。在 Matlab 编程环境下，按照在 3.2.2 节中所详细介绍的含遗忘因子递推最小二乘法算法，大致的流程如下：

- (1) 系统初始化：确定系统的采样时间、初始电池荷电状态 $SOC(0)$ 、初始开路电压 $U_{ocv}(0)$ ；
- (2) 设置初始参数 $\hat{\theta}(0)$ 和 $P(0)$ 的大小；
- (3) 计算当前时刻电池荷电状态 $SOC(k)$ ，并求出当前时刻的开路电压 $U_{ocv}(k)$ ；
- (4) 通过遗忘因子递推最小二乘法计算参数；
- (5) 通过式 (2.36) ~ (2.48) 计算电路中各个参数值；
- (6) 对于辨识参数结果进行验证，并进行误差分析。

5.1.2 实验结果分析

进行实验的实验数据来自 NASA 埃姆斯研究中心的电池数据集^[54]，选择的是放电数据，即电池 33 号在 24 摄氏度的温度下，以 4A 的电流恒流放电，其中，电池的 129 次放电数据，电压、电流曲线图如下图 5.1 所示。在图中可以看出，端电压 U 的数值在放电过程逐步减小。在放电结束后，由于 RC 瞬变，端电压 U 的数值向上跳回，并最终逐渐接近稳定点。

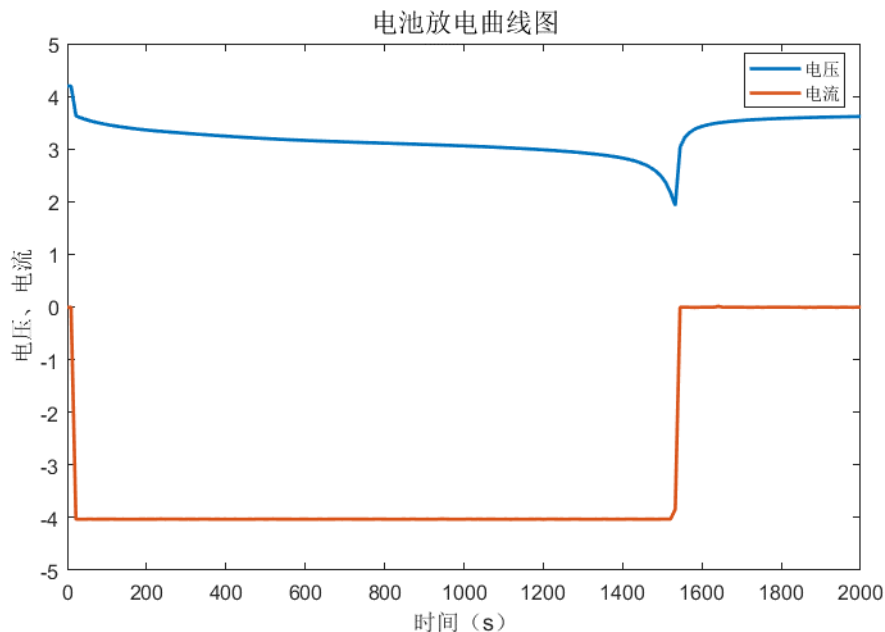


图 5.1 电池放电曲线图

通过上述的含遗忘因子递推最小二乘法算法,对于在第二章所描述的电池模型进行参数辨识,所得到的参数曲线图如图 5.2 所示。途中的五个参数分别对应如下公式(5.1)中的 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 和 α_5 。

$$V(k) = \alpha_1 V(k-1) + \alpha_2 V(k-2) + \alpha_3 I(k) + \alpha_4 I(k-1) + \alpha_5 I(k-2) \quad (5.1)$$

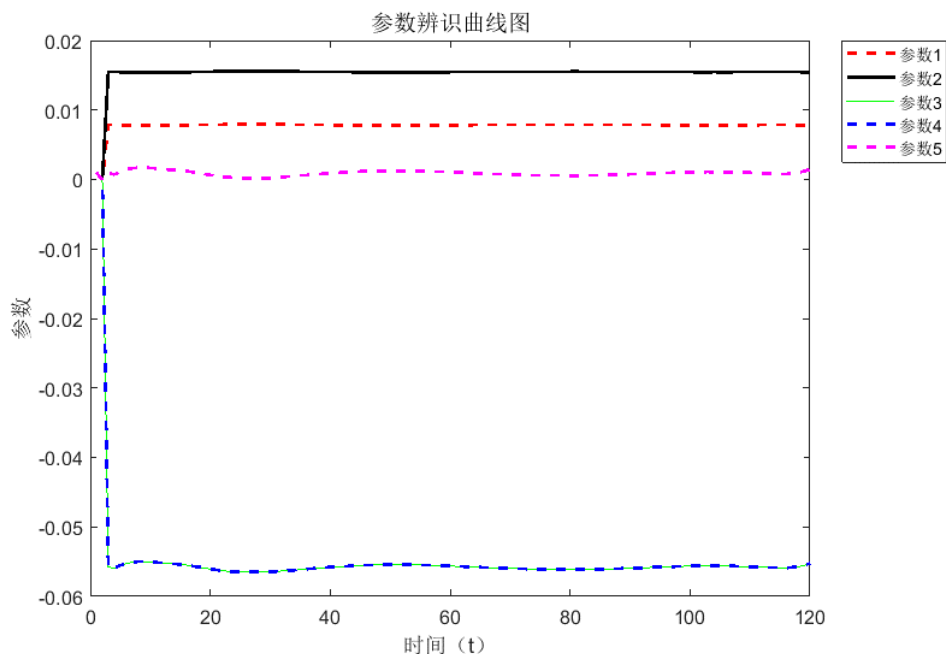


图 5.2 参数辨识曲线图

需要注意的是,在这里所求得的五个参数并不具有任何的物理意义。

这五个参数所对应的相对误差变化过程,其相对误差的计算方法如公式 5.2,如图

5.3 所示为参数收敛过程曲线图。其中，图例中的参数 1 至参数五对应为 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 和 α_5 ，在之后的图中同样如此，就不再赘述。

$$\text{相对误差} = (\text{当前参数值} / \text{上一次估计参数值}) * 100\% \quad (5.2)$$

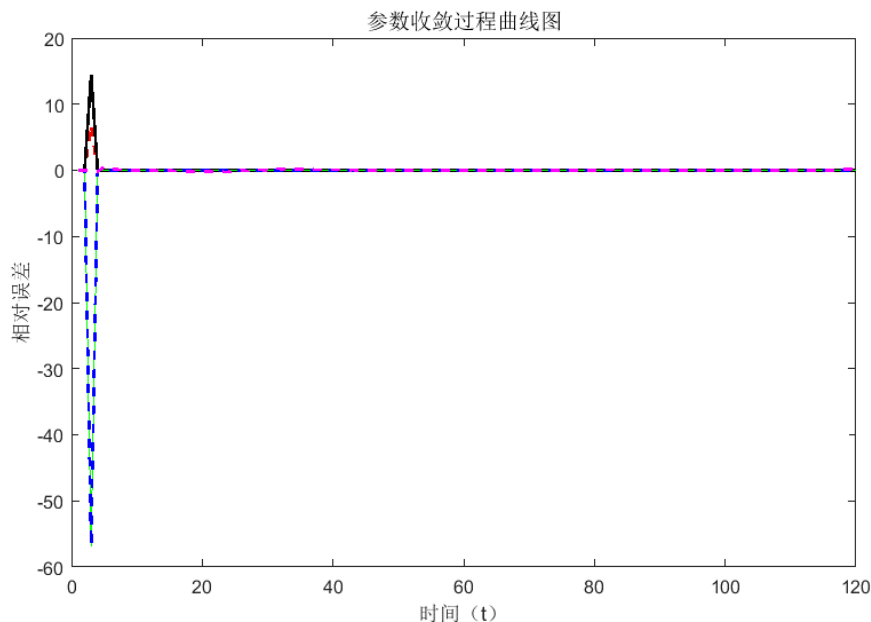


图 5.3 参数收敛过程曲线图

将上图部分放大后可得到图 5.4，在曲线图中可以显然看出，参数 1-4 在整个参数辨识过程中的波动很小，而参数 5 在整个过程中波动非常大，主要原因是这个参数值的大小非常接近于 1，所以参数变化的过程中，求解相对误差所对应的数值就会很大。

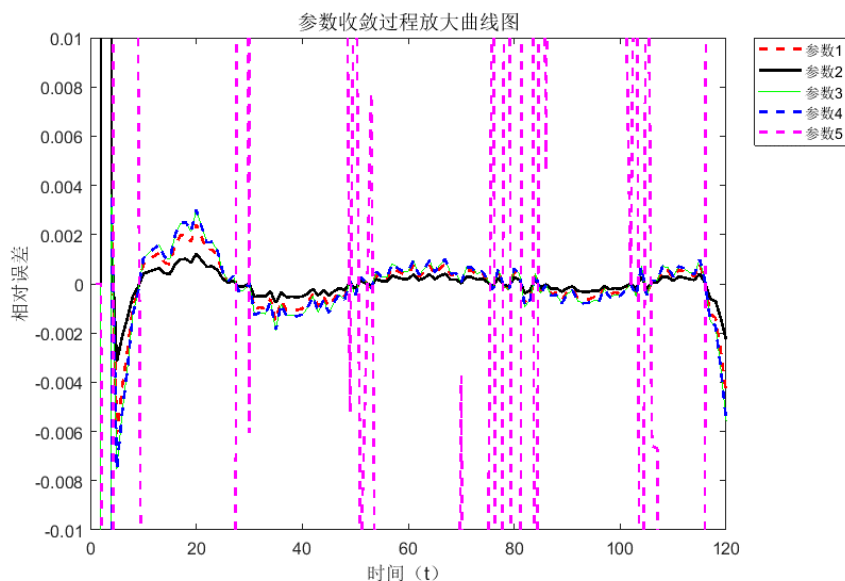


图 5.4 参数收敛过程放大曲线图

将刚才得到的直接进行参数辨识的参数，通过在第二章中所推导过的关系，就可以

得到了电池模型的五个参数，即 R_0 、 R_1 、 R_2 、 C_1 和 C_2 。在这里就省略了在推导过程中引入的另外四个参数 a 、 b 、 c 和 d 的参数辨识曲线图。上述五个参数的曲线图如图 5.5 所示：

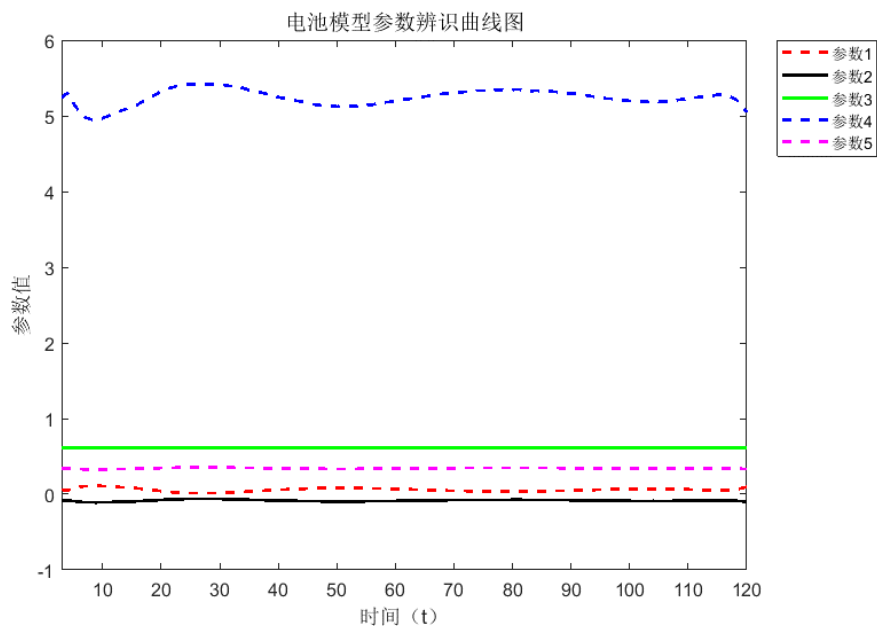


图 5.5 电池模型参数辨识曲线

最后，为了验证所求解的模型参数的正确性，将所求解出的参数带入到在第二章所构造的电池等效模型中，在相同的输入电流情况下，对比观测的模型输出值与通过等效模型计算得到的输出值，从而判断所获取参数的有效性。如图 5.6 所示为通过上述方法所绘制出的曲线图。在这里，所采用的电流电压数据与进行模型参数辨识所使用的输入输出端电流、端电压数据是不同的，为 33 号电池的第 101 次放电数据。

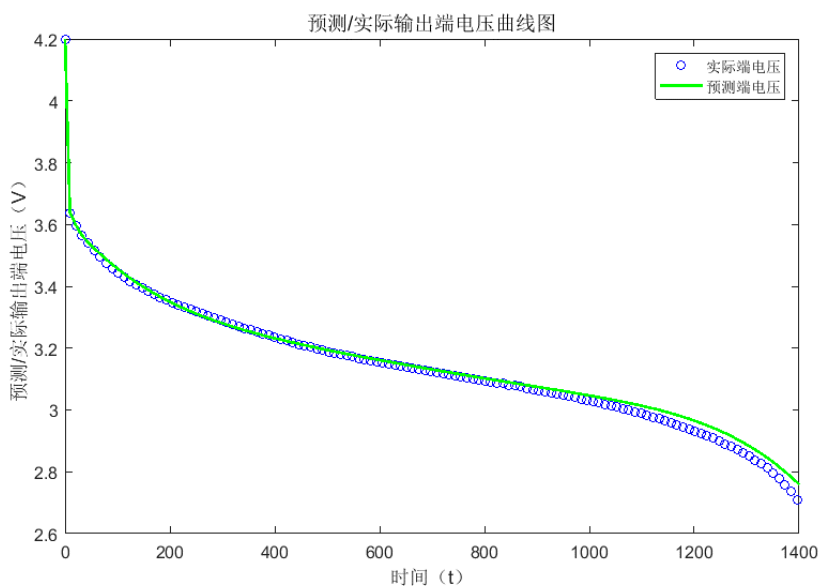


图 5.6 预测/实际输出端电压曲线图

通过观察上图可以显然看出，预测的输出端电压与实际输出的端电压基本上吻合，在最后的的部分有所不同，主要原因是在最后的时间出，放电已经结束，电流信号发生了变化，所以导致偏差变大。这一点在之前的参数相对误差曲线图中也有所体现。但总体来说，使用该方法所获得的预测输出端电压曲线与实际输出电压段曲线大体上基本一致，证明了该方法进行参数辨识的有效性。

对于上图中所得到的预估电压值求解其相对误差，以验证该算法的有效性。使用如下可计算出预估输出电压的相对误差大小。

$$\text{相对误差} = (\text{估计输出端电压} / \text{实际输出端电压}) * 100\% \quad (5.3)$$

其预估输出电压相对误差曲线如图 5.7 所示。

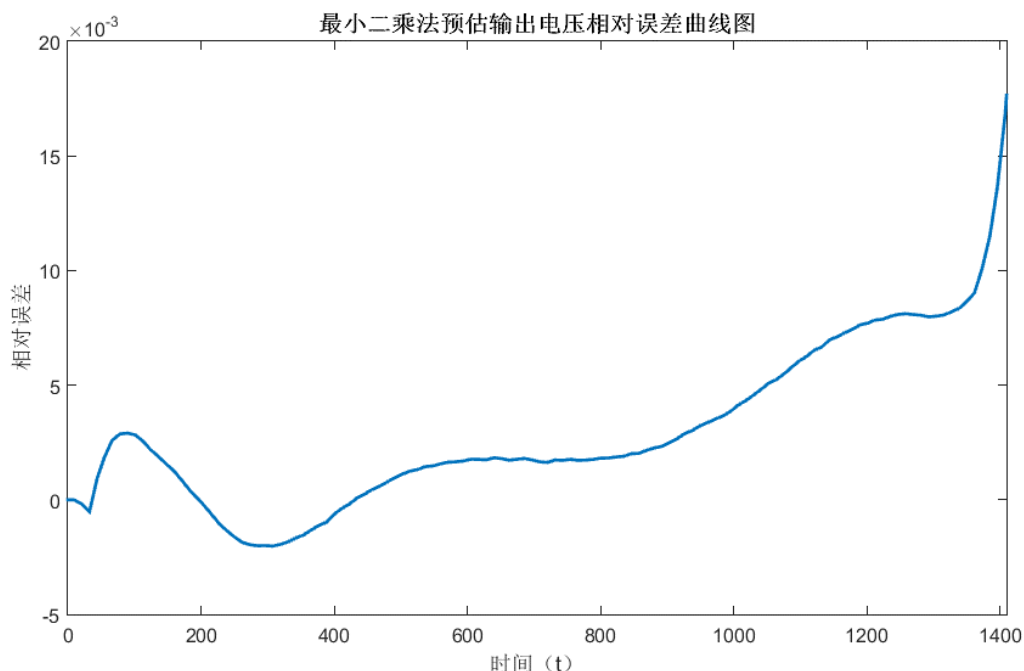


图 5.7 最小二乘法预估输出电压相对误差曲线图

通过观察图片可以看出，在整个参数辨识过程中，预估电压值相对于实际电压值的误差在开始时刻很小，且在正负 0.5% 的范围内上下波动，在 800 秒后，误差逐渐增大并最终达到了将近 1.5%。主要原因是因为在此时，电池内部参数变化剧烈，而采样的时间保持了固定的 10s，所以导致了误差的增大。在整个过程中，可以显然看出系统的误差控制在了 2% 以内，可见该方法具有不错的精确度。

5.2 贝叶斯算法参数辨识

5.2.1 仿真实验过程

在 Matlab 编程环境下，按照之前所详细介绍的贝叶斯算法，大致的计算流程如下：

- (1) 系统初始化：确定系统的采样时间、初始电池荷电状态 $SOC(0)$ 、初始开路电压 $U_{OCV}(0)$ ；
- (2) 设置初始参数 $\hat{\theta}(0)$ 和 $P(0)$ 的大小；
- (3) 计算当前时刻电池荷电状态 $SOC(k)$ ，并求出当前时刻的开路电压 $U_{OCV}(k)$ ；
- (4) 通过贝叶斯算法计算参数；
- (5) 对于辨识参数结果进行验证，并进行误差分析。

5.2.2 实验结果分析

通过上述的贝叶斯算法详细讲述，对于在第二章所描述的电池模型进行参数辨识，所得到的参数曲线图如图 5.8 所示。途中的五个参数 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 和 α_5 。

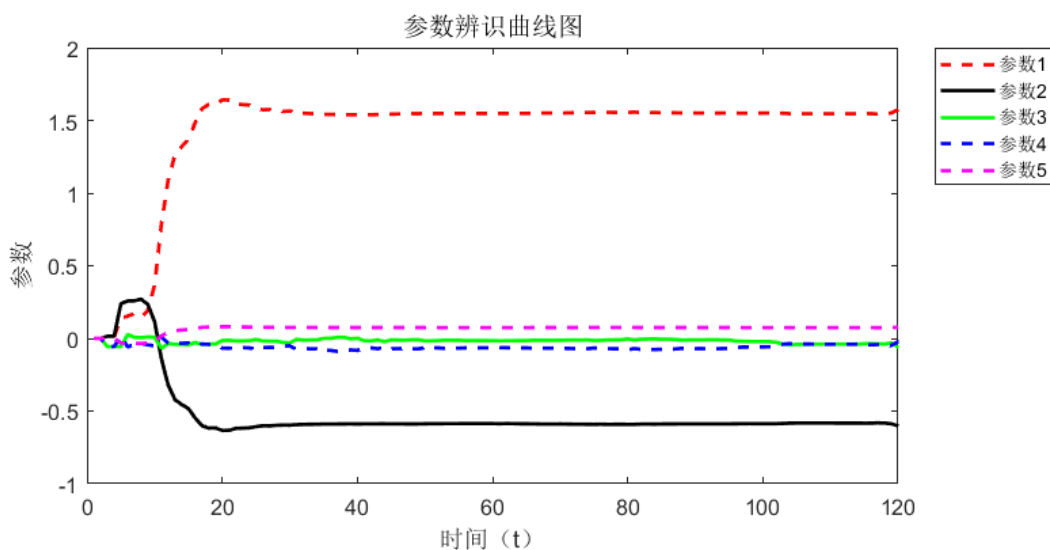


图 5.8 参数辨识曲线图

需要注意的是，在这里所求得的五个参数并不具有任何的物理意义。

这五个参数所对应的相对误差变化过程，其相对误差的计算方法如公式 5.2，如图 5.9 所示为参数收敛过程曲线图。

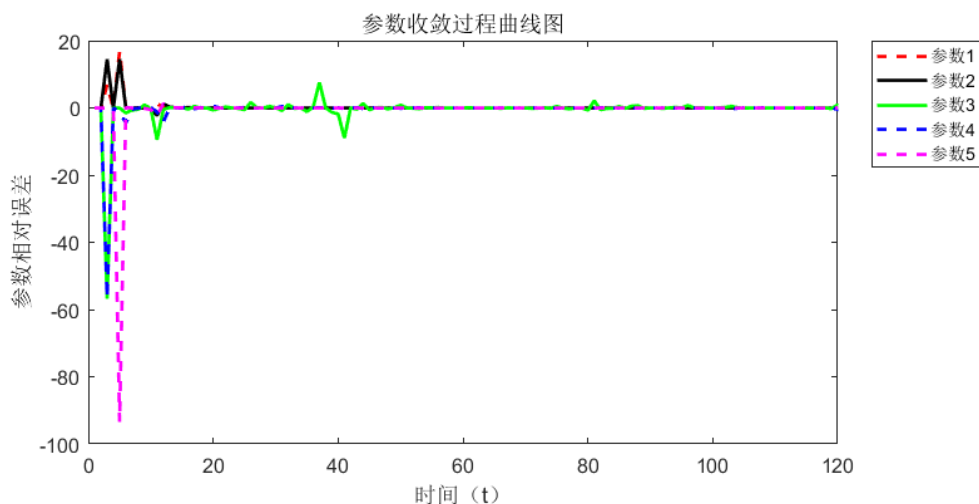


图 5.9 参数收敛过程曲线图

上图与使用递推最小二乘法所获得的曲线对比，可以发现因为引入了高斯噪声，所以在 20 秒后，参数 3 仍有明显波动，而且，前期的参数波动也更加明显。

将刚才得到的五个直接进行参数辨识的参数，通过在第二章中所推导过的关系，就可以得到了电池模型的五个参数，即 R_0 、 R_1 、 R_2 、 C_1 和 C_2 。上述五个参数的曲线图如图 5.10 所示：

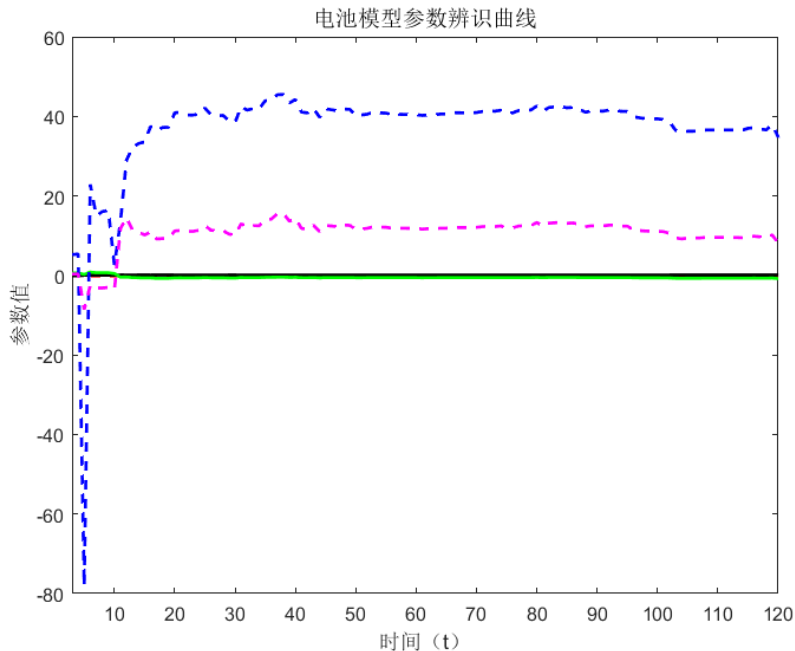


图 5.10 电池模型参数辨识曲线

最后，为了验证所求解的模型参数的正确性，将所求解出的参数带入到在第二章所构造的电池等效模型中，使用跟上一节相同的方法，得到了如图 5.11 所示的曲线图。

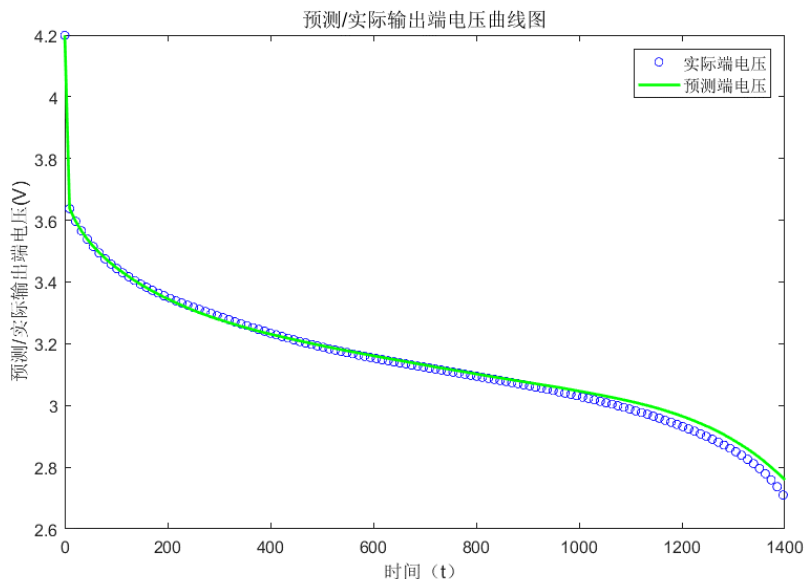


图 5.11 预测/实际输出端电压曲线图

通过观察上图可以显然看出，预测的输出端电压与实际输出的端电压基本上吻合，在最后的部份有所不同。但总体来说，使用该方法所获得的预测输出端电压曲线与实际输出电压段曲线大体上基本一致，证明了该方法进行参数辨识的有效性。

对于上图中所得到的预估电压值求解其相对误差，以验证该算法的有效性。使用公式 (5.3) 可计算出预估输出电压的相对误差大小。其预估输出电压相对误差曲线如图 5.12 所示。

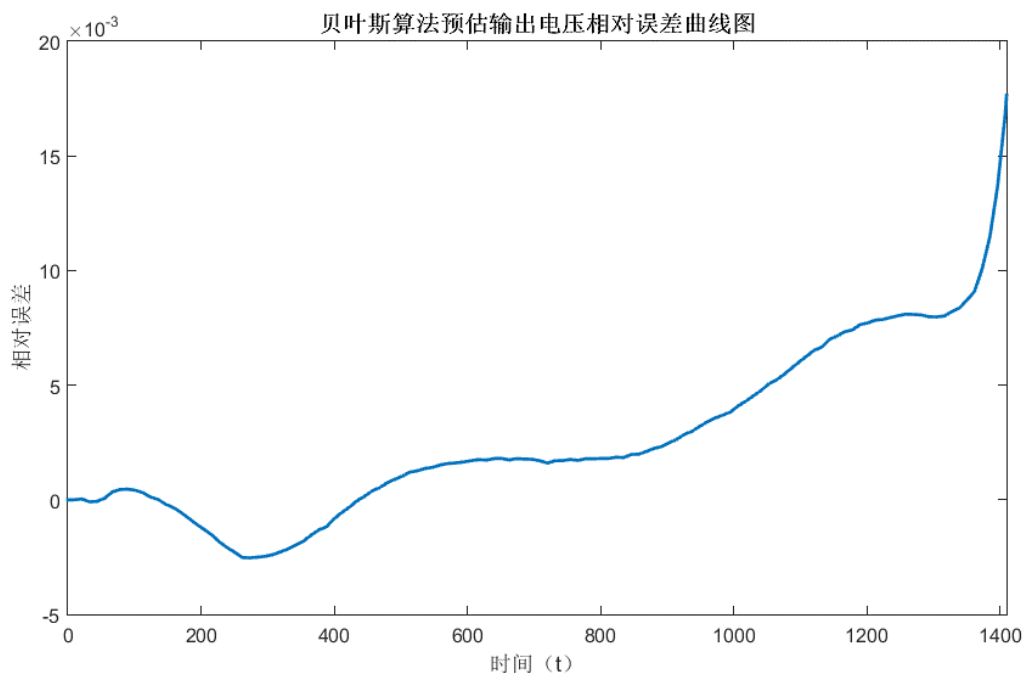


图 5.12 贝叶斯算法预估输出电压相对误差曲线图

通过观察上图可以看出,使用贝叶斯算法在前期 200 秒内的误差极小,大约在 0.1% 以内,是使用的三种算法中误差最小的一种;在 200 秒后误差增大,但也仍在 0.3% 以内,且非常稳定;1000 秒以后误差逐步增大,主要原因如之前所述,采样时间 10 秒不足以更好的检测出电池内部参数变化。总体来看,使用该算法将误差控制在了 2% 以内,可见该方法具有不错的精确度。并且,相比较于使用含遗忘因子递推最小二乘法,该方法在前期具有更小的误差,可见总体是优于含遗忘因子递推最小二乘法。

5.3 卡尔曼滤波算法参数辨识

5.3.1 仿真实验过程

在 Matlab 编程环境下,按照之前所详细介绍的卡尔曼滤波算法,大致的计算流程如下:

- (1) 系统初始化:确定系统的采样时间、初始电池荷电状态 $SOC(0)$ 、初始开路电压 $U_{ocv}(0)$;
- (2) 设置确定滤波的初值 $\hat{x}(0|0)$ 和 $P(0|0)$;
- (3) 计算当前时刻电池荷电状态 $SOC(k)$,并求出当前时刻的开路电压 $U_{ocv}(k)$;
- (5) 通过卡尔曼滤波算法计算参数;
- (6) 对于辨识参数结果进行验证,并进行误差分析。

5.3.2 实验结果分析

通过上述的卡尔曼滤波算法详细讲述,对于在第二章所描述的电池模型进行参数辨识,所得到的参数曲线图如图 5.13 所示。

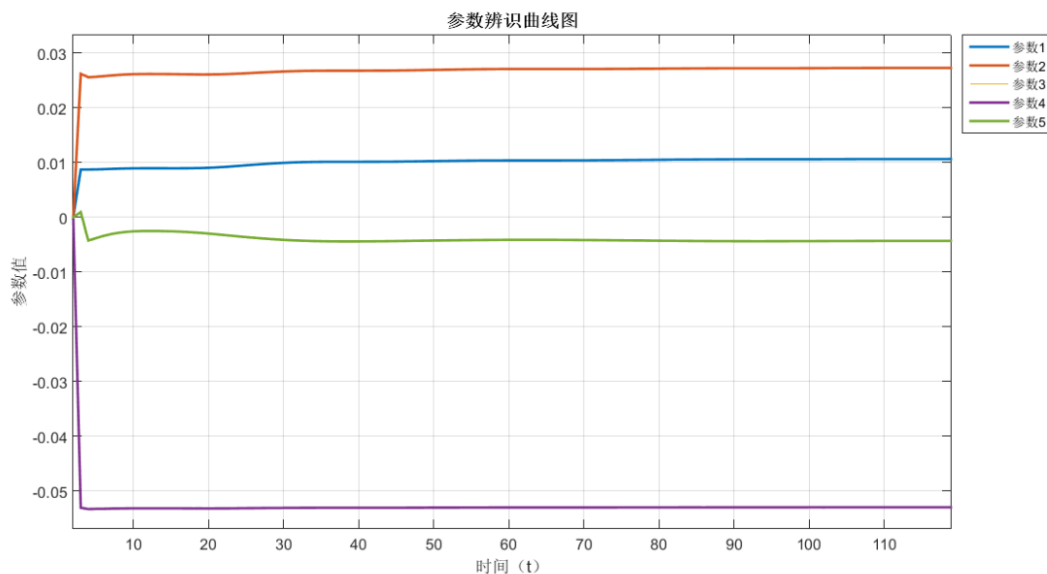


图 5.13 参数辨识曲线图

为了验证所求解的模型参数的正确性，将所求解出的参数带入到在第二章所构造的电池等效模型中，使用跟上一节相同的方法，得到了如图 5.14 所示的曲线图。

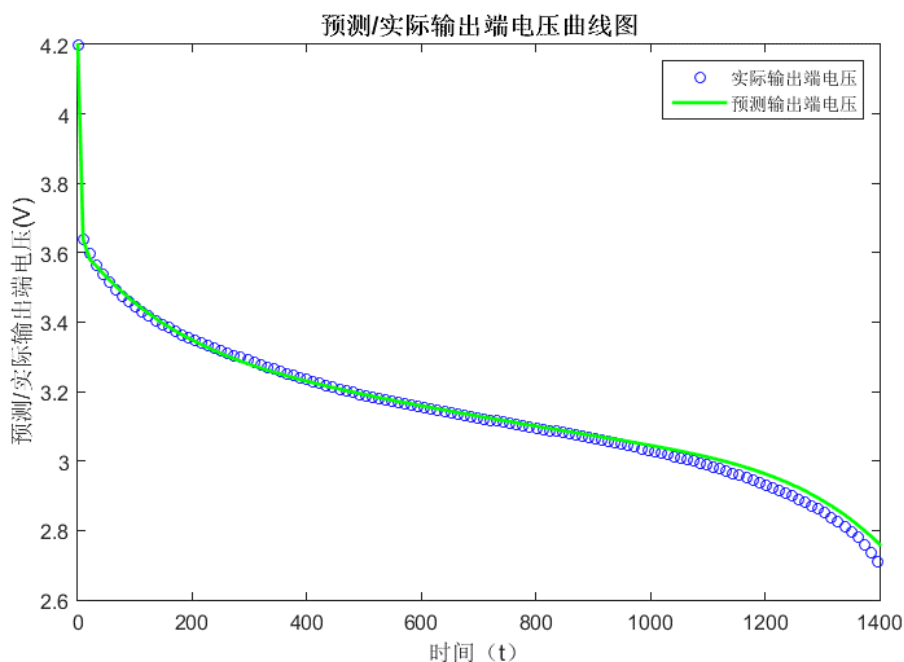


图 5.14 预测/实际输出端电压曲线图

通过观察上图可以显然看出，预测的输出端电压与实际输出的端电压基本上吻合，在最后的阶段有所不同。但总体来说，使用该方法所获得的预测输出端电压曲线与实际输出电压段曲线大体上基本一致，证明了该方法进行参数辨识的有效性。

对于上图中所得到的预估电压值求解其相对误差，以验证该算法的有效性。使用公

式 (5.3) 可计算出预估输出电压的相对误差大小。其预估输出电压相对误差曲线如图 5.15 所示。

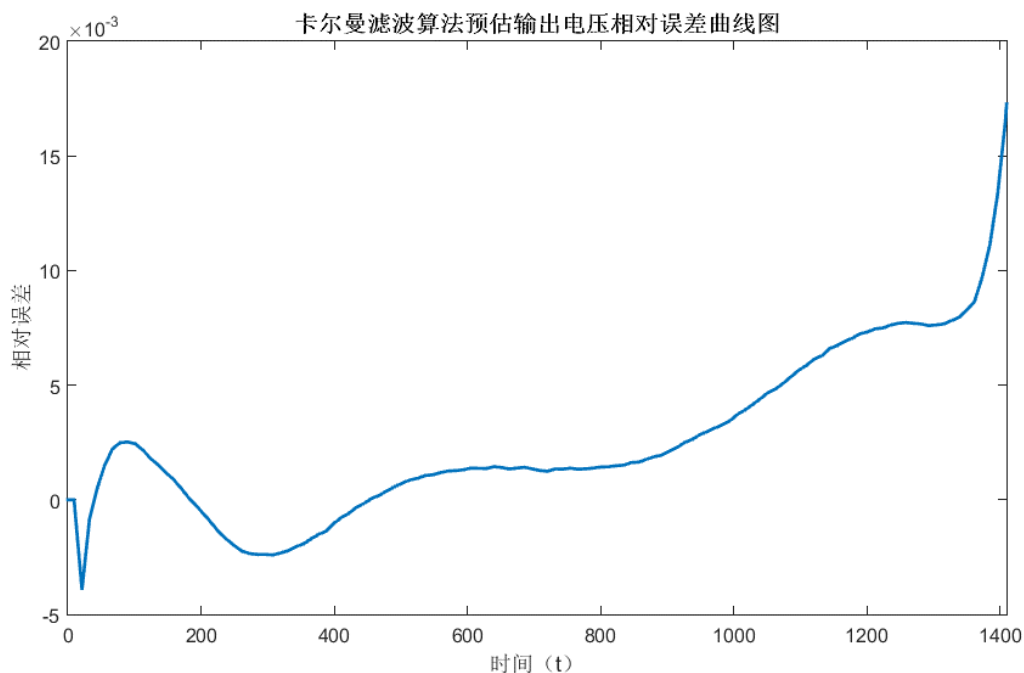


图 5.15 卡尔曼滤波算法预估输出电压相对误差曲线图

通过观察图片可以看出,使用卡尔曼滤波算法前期误差较大,在 0.5%左右上下波动,在 400 秒后,误差基本上稳定在 0.2%左右。在达到 1000 秒后,因为电池内部参数变化剧烈,而采样的时间保持了固定的 10s,所以导致了误差的增大。但总体来看,误差控制在 2%以内,可见该方法具有不错的精确度。并且,相比较于使用含遗忘因子递推最小二乘法,该方法所存在的误差基本上相同,但是,使用该方法引入了输入输出误差,可见该方法综合角度看更优。

5.4 电池模型参数直接辨识

5.4.1 仿真实验过程

在 Matlab 编程环境下,按照之前所详细介绍的模型直接参数辨识算法,大致的计算流程如下:

- (1) 电池模型的输入、输出数据的导入;
- (2) 计算当前时刻电池荷电状态 $SOC(k)$;
- (3) 确定辨识模型的形式,并确定待辨识参数;

(4) 通过 Matlab 工具箱辨识电池模型参数;

(5) 对于辨识参数结果进行验证, 并进行误差分析。

5.4.2 实验结果分析

电池 33 在环境温度为 24°C 的情况下, 以 4A 的恒定电流放电。电池循环实现完全充电/放电。在这里, 分别选取了电池 33 的第 129 次循环和第 101 次循环。如图 5.1 所示的放电方案是在电池 33 上进行的 129 次循环放电, 在该试验过程中, 以 4A 的恒定电流条件下电池从 $SOC = 1$ 放电到 $SOC = 0$ 。由于电池 33 的第 101 次循环遵循类似的放电方案, 其放电曲线在这里就省略。

接下来, 利用 Matlab 软件中自带求工具箱 “Curve Fitting Toolbox”, 对所设计的模型进行了非线性最小二乘法的参数辨识, 获取到了经过多次迭代所得到的最优参数估计。在工具箱界面中, 使用 Matlab 语言输入所设计的电池模型的函数 $f(x)$, 设置不同的辨识算法, 就可以得到不同的参数辨识曲线图, 如图 5.16 所示为使用 L-M 算法所对应的模型参数辨识结果图。

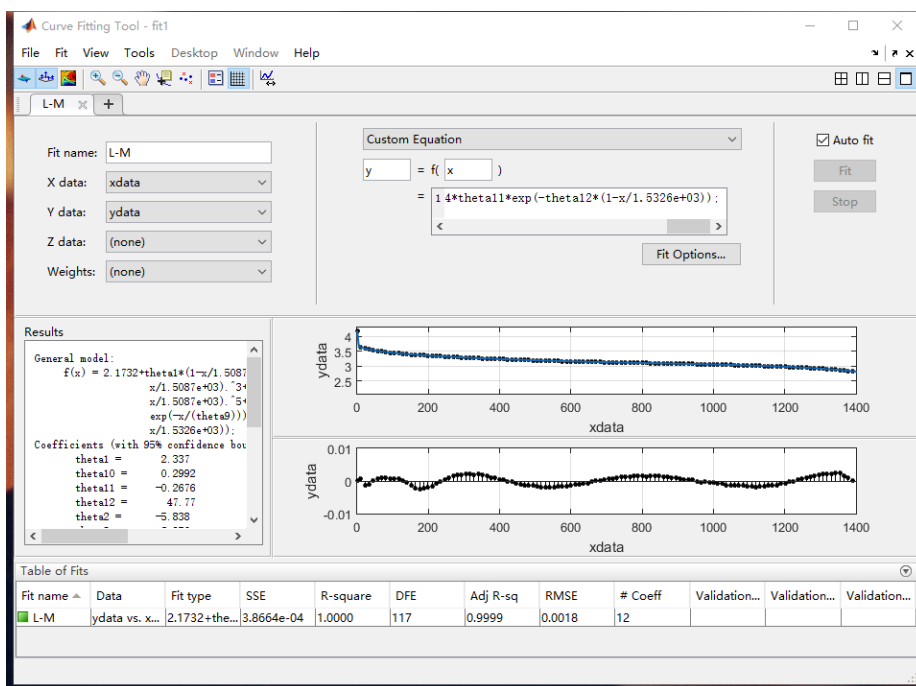


图 5.16 L-M 算法参数辨识结果图

如图 5.17 所示为使用 Trust-Region 算法所对应的模型参数辨识结果图。相比较于图 5.16, 可以显然发现, 使用 L-M 算法的整体误差明显小于使用 Trust-Region 算法, 尤其是在刚开始放电的时候以及快放完电的时候。

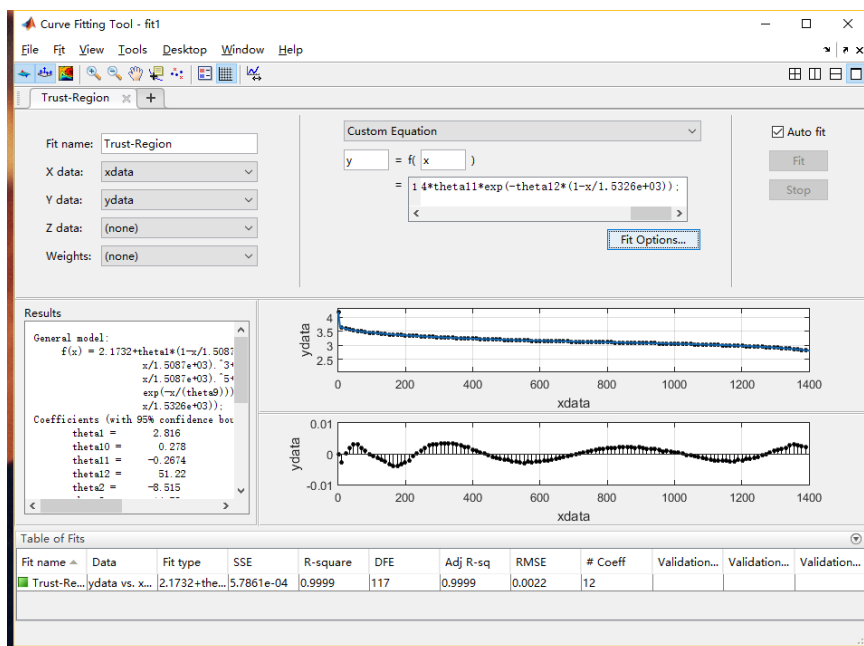


图 5.17 Trust-Region 辨识算法结果图

所以, 相比较于两种算法, 选取 L-M 算法的辨识结果作为最优估计参数。在求得了最优估计参数的基础上, 获得了预估/观测输出电压曲线的对比图。该图是将输入输出换成了 33 号电池的另一组数据, 该数据与之前一组数据相比, 具有相同的输出电流 4A, 相同的环境温度, 确保了输出的曲线不会收到其他外界环境因素影响, 在此基础上, 将该数据代入到电池模型中去, 得到了预估的输出电压曲线图, 如图 5.6 所示。同时, 将输出的观测电压曲线图同样在其中显示, 用于对比, 从而可以用于判断该电池模型参数辨识结果的准确性。

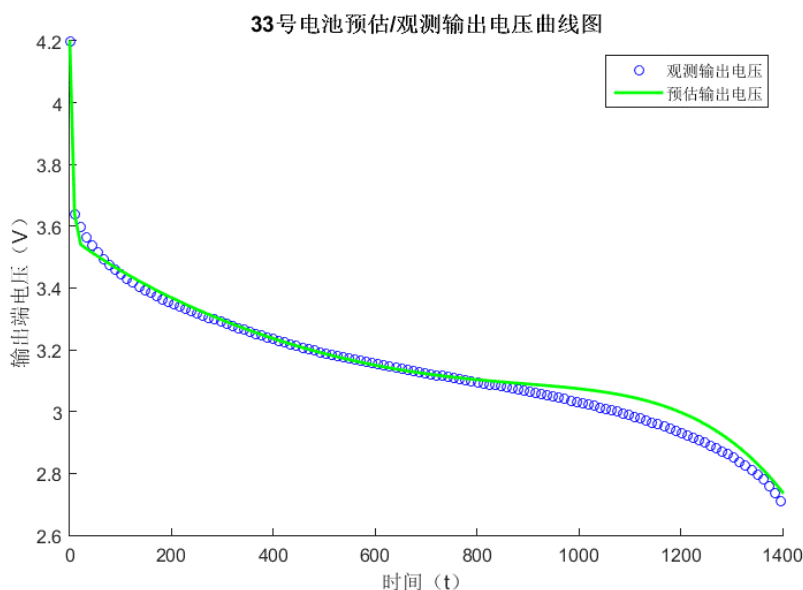


图 5.18 33 号电池预估/观测输出电压曲线图

通过观察该曲线，可以显然看出，实际输出的端电压与使用辨识的参数估计出的输出端电压大致上基本重合，可见该方法的有效性。

对于上图中所得到的预估电压值求解其相对误差，以验证该算法的有效性。使用如下可计算出预估输出电压的相对误差大小。其预估输出电压相对误差曲线如图 5.19 所示。

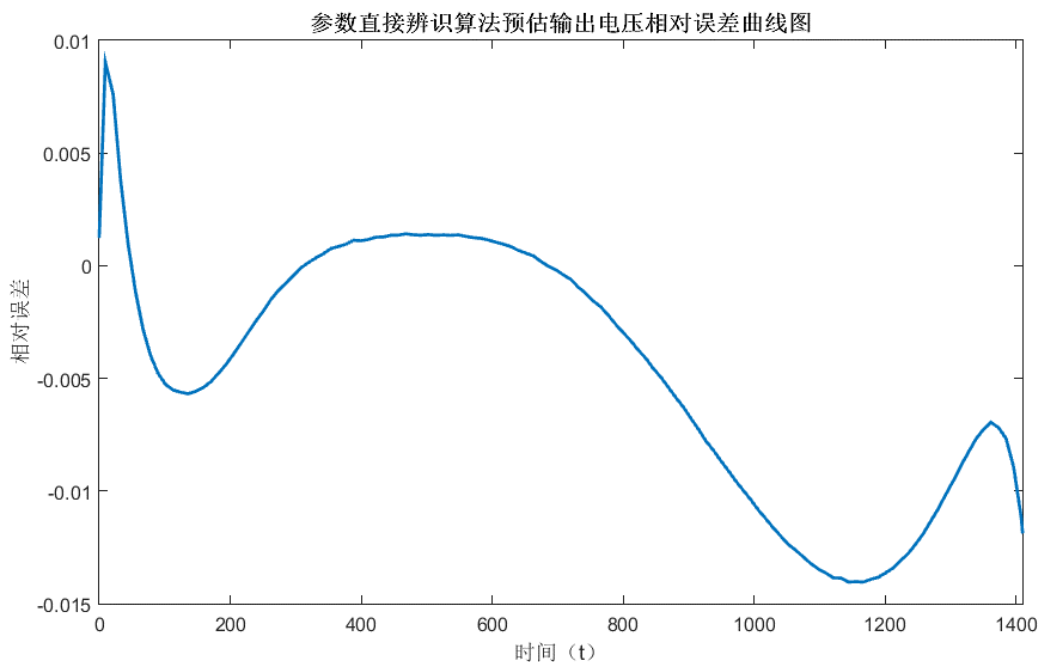


图 5.19 参数直接辨识算法预估输出电压相对误差曲线图

通过观察图片可以看出，在 200 秒以前，系统误差较大，可能与系统设计的初值有关，将系统初值优化后应有更好的效果图；在 200 秒以后，系统误差逐渐减小，且基本上稳定在很小的范围内，在这个时间段内是明显优于前三种算法的。在 900m 以后，系统误差明显增大，但在达到约 1.5% 的时候有明显的改善，误差不断减小，呈现出明显的收敛状态。总体来看，使用电池模型参数直接辨识算法使得系统误差控制在了 1.5% 以内，相较于其他三种算法，明显有着更好的精确度。

5.5 参数辨识算法比较

基于输入输出数据，利用辨识算法所得到的模型，由于所设计的模型结构只是对于实际过程的一种近似，所采用的实验数据会受随机噪声污染等原因，必然会有误差，这就需要对辨识的精度进行评价。辨识精度包括辨识模型精度、辨识模型阶次估计精度、辨识模型参数估计精度，或者辨识模型输出与实际系统输出的接近程度。而对于本文

中的锂离子电池，其模型结构和参数呈现出不确定性，且估计的模型结构或阶次也不一定准确。因此，把辨识精度解释为辨识模型输出与真实系统输出的接近程度。

由于真参数是未知的，即使获得参数估计，也无法通过计算得到参数估计误差，人们更感兴趣的还是知道参数估计误差的上界，参数估计误差上界可以间接说明参数估计精度，即参数估计的有界收敛性；对于有界收敛性，如果一个算法的误差上界较小，则该算法参数估计精度较高，算法具有较大的应用价值；反之，误差上界较大，就没有太大的应用价值。

通过之前四节的电池模型参数辨识仿真，可以发现这四种辨识方法各具有不同的特点。具体从以下几个角度来对于这四种参数辨识算法进行对比分析：

（1）算法的有效性：

通过对于四种电池模型参数辨识的实验结果分析，如图 5.20，可以显然发现，这四种算法所预测出的端电压基本上与实际输出的端电压吻合，可见，使用这四种参数辨识算法所辨识出的参数模型输出与真实系统输出的近似程度很高，可见都是有效的。

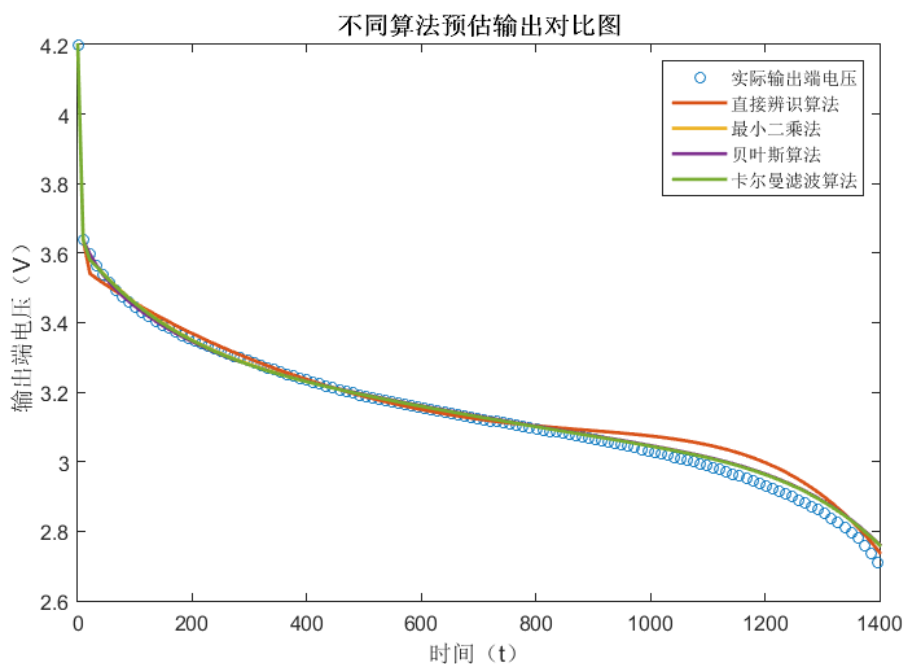


图 5.20 不同算法预估输出对比图

（2）算法的收敛速度：

对比前三种参数辨识算法，如图 5.21 所示，可以明显发现使用同一电池模型的三种算法在进行参数辨识过程中，参数收敛速度的不同。引入误差的贝叶斯辨识算法参数的收敛速度慢，且因为误差的引入而导致了参数的波动性大；含遗忘因子递推最小二乘

法中未引入误差，但引入了两种误差的卡尔曼滤波算法却仍然具有很好的参数收敛速度，在很短的时间内就获取了估计的参数，并且波动极小。可见这三种算法中，卡尔曼滤波算法最优。

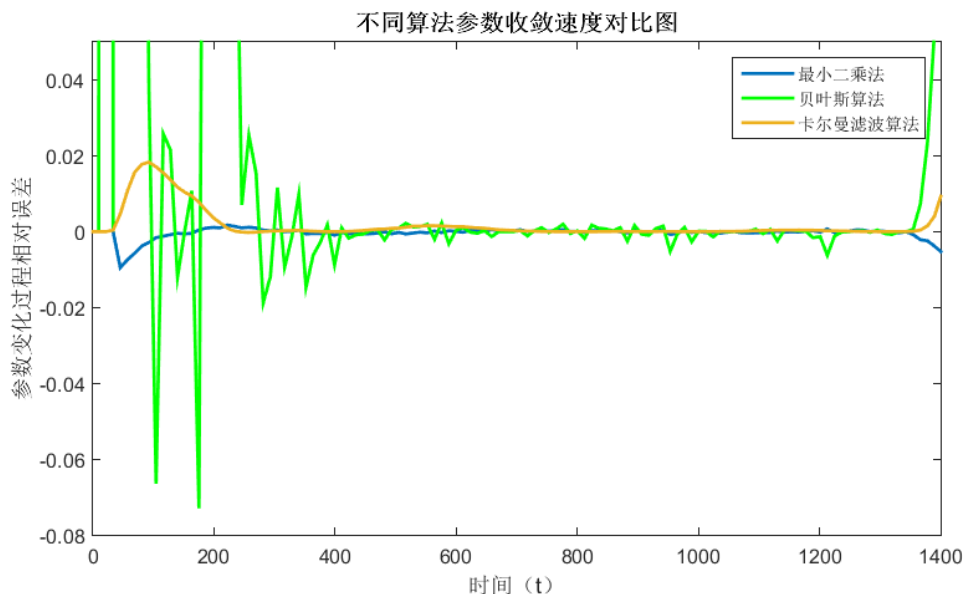


图 5.21 不同算法参数收敛情况对比图

(3) 算法的精确度:

通过对于四种电池模型参数辨识结果的误差分析,如图 5.22 所示,可以显然发现,这四种参数辨识的误差上届都控制在了 2%以内,可见,所辨识出的四种电池模型都是有效的、精确的。

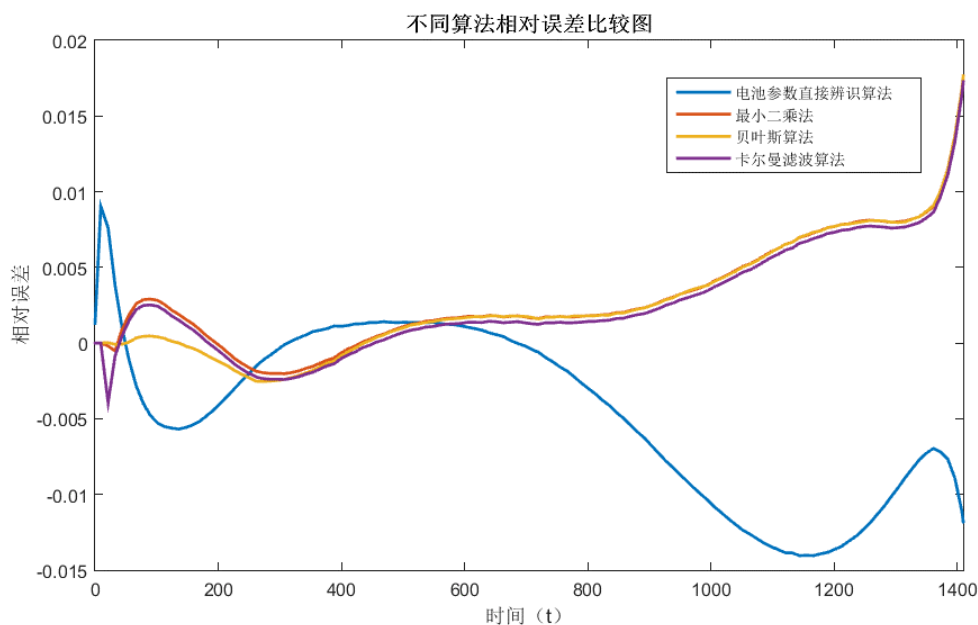


图 5.22 不同算法精度对比图

表 5.1 不同算法误差对比表

算法	T=1304s	T=1350s	T=1408s
含遗忘因子递推最小二乘法	0.008011154	0.008659084	0.016854337
贝叶斯算法	0.007974555	0.008705909	0.016845296
卡尔曼滤波算法	0.007625466	0.008275483	0.01646909
参数直接辨识算法	-0.009539463	-0.007264206	-0.011168657

而具体来说,前三种辨识算法的误差基本上类似,其中,贝叶斯辨识算法在刚开始的时候误差明显小于另外两种,体现出该方法的优越性,但以整体来说,显然从图中可以看出,卡尔曼滤波算法的整体误差是小于另外两种的。

但这三种误差在最后放电即将结束时,误差明显呈现出一种发散的状态,可见,后期的误差会越来越大,然而电池模型参数直接辨识算法所获取的辨识结果的相对误差曲线图中,在放电即将结束时,呈现出一种收敛的状态,且其误差上届在 1.5%以内,可见该方法整体上是精度是优于前三种算法的。

(4) 算法的复杂程度:

前三种算法在进行电池模型参数辨识时,都需要通过别的试验来获取电池的 SOC-OCV 关系曲线,从而计算出电池的开路电压;而采用电池模型参数直接辨识算法,则可直接通过端电压获得电池的开路电压。电池模型参数直接辨识算法实现步骤简单,具有良好的应用前景。

5.6 本章小结

本章中直接使用了美国宇航局埃姆斯研究中心测试的几个电池的模型研究实验数据,基于这些实验数据,借助 Matlab 实验平台,获取了含遗忘因子递推最小二乘法、贝叶斯算法、卡尔曼滤波算法以及电池模型参数直接辨识算法这四种算法的参数辨识结果。最后,在使用相同输入的条件下,观测使用所求模型参数生成的输出曲线,与实验所得观测出的输出曲线进行比对,从而验证模型参数辨识结果的有效性。

此外,对于输出的预估端电压进行误差分析,通过对比分析了四种不同的方法,从参数收敛性、预估精确性以及算法的复杂度等角度进行对比分析,发现基于改进模型的

直接参数辨识算法参数收敛速度快，精度高，复杂度低，误差控制在 1.5% 以内，具有显著优势及运用前景。

第六章 总结与展望

本文针对锂离子电池的电池等效模型及其参数辨识进行了总结与研究，主要包括几个部分：电池模型研究技术背景及研究现状、锂离子电池模型的设计及分析、电池模型参数辨识、模型仿真验证及对比。主要为以下几个方面工作。

(1) 本文对于现有的常见电池模型进行了分析，并在此基础上，选择设计了适用于本文研究内容的二阶电池模型，并对于二阶电池模型的参数进行分析，为后期参数辨识做好准备；

(2) 本文采用了含遗忘因子的递推最小二乘法、贝叶斯算法、卡尔曼滤波算法这三种算法，对于所设计的二阶电池模型进行了参数辨识，并通过使用相同电池的不同实验数据验证了所辨识模型的有效性；

(3) 本文采用了一种电池模型参数直接辨识方法，目的是建立一个易于运行的方法来提取电流电压数据的参数估计值。具体步骤为：首先对于常见的电池模型进行修改，并通过灵敏度分析对参数的可识别性进行了分析，说明了参数的局部可识别性。然后采用了非线性最小二乘法，基于 matlab 工具箱进行了数值优化。将所设计的方法用于识别在 NASA 埃姆斯研究中心测试的几个电池的模型，结果证明了该方法的有效性；

(4) 本文对比分析了四种基本的电池模型参数辨识算法，通过比较了试验结果以及误差分析等，发现了电池模型参数直接辨识算法是在综合算法的有效性、算法的收敛速度、算法的精确性以及算法的复杂度这四个方面，显现出了明显的优势。

本次课题需要完善，进一步工作研究方向如下：

(1) 对于常规的电池模型参数辨识，所采用的参数辨识算法有很多，可以在已研究过的四种基础算法的基础上，研究新的辨识算法，如关于神经网络、遗传算法等。

(2) 在电池模型参数直接辨识中，目前所建立的电池模型是 12 参数的，在此基础上，可以考虑更多关于电池模型的影响因素。现有模型是考虑了放电电压恒定，温度恒定等因素，可以对于这些环境因素进行改变，从而提高电池模型的复杂度。

(3) 对于电池模型参数直接辨识，所采用的是非线性最小二乘法中的 L-M 算法进行的参数辨识，对于该算法，也可以进行改进，或者可以研究新的非线性系统辨识算法，提高所构建模型的精确度。

参考文献

- [1] 严筱. 低碳交通背景下中国新能源汽车的市场扩散研究[D]. 中国地质大学, 2016.
- [2] 陈雅韵. 我国新能源汽车产业的发展研究[D]. 首都经济贸易大学, 2017.
- [3] 欧阳剑. 电动汽车用锂离子动力电池 SOC 估算和 SOF 评估的研究[D]. 华南理工大学, 2016.
- [4] 李思. 电动汽车锂离子电池等效电路模型的参数辨识研究[D]. 北京理工大学, 2015.
- [5] 王通. 电动汽车电池管理系统 SOC 估算及均衡控制研究[D]. 昆明理工大学, 2017.
- [6] J.-M. Tarascon and M. Armand. Issues and challenges facing rechargeable lithium batteries[J]. Nature, 2001, 414(6861): 359–367.
- [7] M. Armand and J.-M. Tarascon. Building better batteries[J]. Nature, 2008, 451: 652–657.
- [8] 胡小军. 基于无迹卡尔曼滤波的动力锂电池 SOC 估计与实现[D]. 中南大学, 2014.
- [9] 卢杰祥. 锂离子电池特性建模与 SOC 估算研究[D]. 华南理工大学, 2012.
- [10] 张持健, 陈航. 锂电池 SOC 预测方法综述[J]. 电源技术, 2016, (06): 1318-1320+1333.
- [11] 张冬梅. 基于改进卡尔曼滤波算法的 SOC 估计方法研究[D]. 西南交通大学, 2015.
- [12] 张树梅. 基于磷酸铁锂单体电池荷电状态的均衡算法研究[D]. 上海交通大学, 2015.
- [13] 周胜. 基于双卡尔曼滤波算法的磷酸铁锂电池建模及 SOC 估计[D]. 西南交通大学, 2017.
- [14] C. K. Lee M. Coleman, C. Zhu, and W. G. Hurley. “State-of-charge determination from emf voltage estimation: Using impedance, terminal voltage, and current for lead-acid and lithium-ion batteries[J]. Transactions on Industrial Electronics, 2007, 54: 2550–2557.
- [15] J. Kim S. Lee, J. Lee, and B. Cho. State-of-charge and capacity estimation of lithium-ion battery using a new open-circuit voltage versus state-of-charge[J]. Journal of Power Sources, 2008, 185: 1367–1373.
- [16] X. Zhao H. Fang, Y. Wang, Z. Sahinoglu, T. Wada, S. Hara, and R. A. de Callafon. Improved adaptive state-of-charge estimation for batteries using a multi-model approach[J]. Journal of Power Sources, 2014, 254: 258–267.

-
- [17] H. E. Perez and S. J. Moura, Sensitivity-based interval PDE observer for battery soc estimation[C]. //2015 American Control Conference, American, 2015.
 - [18] 李然. 锂动力电池健康度评价与估算方法的研究[D]. 哈尔滨理工大学, 2016.
 - [19] 裴磊. 基于平衡电压的电动汽车锂离子电池状态估计方法研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2016.
 - [20] H. Peng C.-C. Lin, J. W. Grizzle, and J.-M. Kang. Power management strategy for a parallel hybrid electric truck[J]. Transactions on Control Systems Technology, 2003, 11: 839–849.
 - [21] H. Fang Y. Wang, Z. Sahinoglu, T. Wada, and S. Hara. Adaptive estimation of the state of charge for lithium-ion batteries: Nonlinear geometric observer approach[J]. Transactions on Control Systems Technology, 2015, 23: 948–962.
 - [22] J. Chen Q. Ouyang, H. Liu, and H. Fang, Improved cell equalizing topology for serially connected lithium-ion battery packs[C]. //IEEE 55th Conference on Decision and Control, , 2016
 - [23] H. E. Perez X. Lin, S. Mohan, J. B. Siegel, A. G. Stefanopoulou, Y. Ding, and M. P. Castanier. A lumped-parameter electro-thermal model for cylindrical batteries[J]. Journal of Power Sources, 2014, 257: 1–11.
 - [24] K. M. Raab B. Schweighofer, and G. Brasseur. Modeling of high power automotive batteries by the use of an automated test system[J]. Transactions on Instrumentation and Measurement, 2003, 52: 1087–1091.
 - [25] S. Abu-Sharkh and D. Doerffel. “Rapid test and non-linear model characterisation of solid-state lithium-ion batteries[J]. Journal of Power Sources, 2004, 130: 266–274.
 - [26] A. A. Pesaran V. H. Johnson, and T. Sack, "Temperature-dependent battery models for high-power lithium-ion batteries'2001).
 - [27] C. Birkl and D. Howey, Model identification and parameter estimation for LiFePO₄ batteries[C]. // IET Hybrid and Electric Vehicles Conference, 2013.
 - [28] T. Hu and H. Jung. Simple algorithms for determining parameters of circuit models for charging/discharging batteries[J]. Journal of Power Sources, 2013, 233: 14 – 22.
 - [29] 夏飞, 袁博, 彭道刚, 等. 基于信息量准则的锂离子电池变阶 RC 等效电路模型建模及优化方法[J]. 中国电机工程学报: 1-10.
 - [30] 庞辉. 基于扩展单粒子模型的锂离子电池参数识别策略[J]. 物理学报, 2018: 1-11.
 - [31] 项宇, 刘春光, 李嘉麒. 基于卡尔曼滤波的锂离子电池模型参数辨识[J]. 兵器装备工程学报, 2016, (10): 147-151.

-
- [32] 平平. 锂离子电池热失控与火灾危险性分析及高安全性电池体系研究[D]. 中国科学技术大学, 2014.
 - [33] 王海腾. 基于石墨烯的锂离子电池负极材料的研究[D]. 北京交通大学, 2013.
 - [34] 李晓黔. 锂离子电池模型参数辨识及 SOC 预测仿真分析[D]. 兰州交通大学, 2016.
 - [35] 郭炳焜, 徐徽, 王友先等. 锂离子电池[M]. 中南大学出版社, 2002.
 - [36] Scrosati B. Bruce P. G., Tarascon J. M. Nanomaterials for rechargeable lithium batteries[J]. *Angewandte Chemie International Edition*, 2008, 47(16): 2930-2946.
 - [37] 蔡丹丹. 基于石墨烯的高性能锂离子电池负极材料的研究[D]. 华南理工大学, 2014.
 - [38] 杨阳. 电动汽车用磷酸铁锂电池模型研究[D]. 西安电子科技大学, 2015.
 - [39] L. Lu G. Liu, and M. Ouyang, Thermal Modeling of a Li Fe PO₄/Graphite Battery and Research on the Influence of Battery Temperature Rise on EV Driving Range Estimation[C]. // *Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC)*, 2013 IEEE, 2013.
 - [40] R. Peng and M. Pedram. An analytical model for predicting the remaining battery capacity of lithium-ion batteries[J]. *Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, 2006, 14: 441-451.
 - [41] D. N. Rakhmatov and S. B. K. Vrudhula, An analytical high-level battery model for use in energy management of portable electronic systems[C]. // *Proceedings of the 2001 IEEE/ACM international conference on Computer-aided design*, 2001.
 - [42] 潘俊铖. 基于粒子滤波的锂电池 SOC 估算及单体一致性评价研究[D]. 西南科技大学, 2017.
 - [43] 侯媛彬, 汪梅. 系统辨识及其 MATLAB 仿真[M]. 科学出版社, 2004.
 - [44] 侯媛彬, 周莉等. 系统辨识[M]. 西安电子科技大学出版社, 2014.
 - [45] 王晓侃. 基于最小二乘模型的 Bayes 参数辨识方法[J]. *新技术新工艺*, 2012, (06): 24-26.
 - [46] 王志贤. 最优状态估计与系统辨识[M]. 西北工业大学出版社, 2004.
 - [47] 孔伟伟, 杨殿阁, 李兵, 等. 汽车蓄电池管理方法的研究[J]. *汽车工程*, 2015, (05): 576-581.
 - [48] Yebin Wang Ning Tian, Jian Chen, On Parameter Identification of an Equivalent Circuit Model for Lithium-Ion Batteries[C]. // *2017 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, USA, 2017.
 - [49] G. Nagasubramanian B. Y. Liaw, R. G. Jungst, and D. H. Doughty. Modeling of lithium

-
- ion cells—a simple equivalent-circuit model approach[J]. Solid State Ionics, 2004, 175(1): 835–839.
- [50] X. Han L. Lu, J. Li, J. Hua, and M. Ouyang. A review on the key issues for lithium-ion battery management in electric vehicles[J]. Journal of Power Sources, 2013, 226: 272–288.
- [51] M. Chen and G. A. Rincon-Mora. Accurate electrical battery model capable of predicting runtime and IV performance[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2006, 21(2): 504–511.
- [52] Y. Wang H. Fang, Z. Sahinoglu, T. Wada, and S. Hara. State of charge estimation for lithium-ion batteries: An adaptive approach[J]. Control Engineering Practice, 2014, 25: 45–54.
- [53] A. Baba and S. Adachi, Simultaneous state of charge and parameter estimation of lithium-ion battery using log-normalized unscented Kalman filter[C]. // American Control Conference (ACC), American, 2015.
- [54] B. Saha and K. Goebel, 'Battery data set'(2007).

攻读学位期间取得的研究成果

- [1] 电机及运动控制虚拟仿真及快速原型实验平台. 获第十一届研究生电子设计竞赛西北赛区团队三等奖.2016.7
- [2] 太阳能光伏电板清洗机器人. 获第十二届研究生电子设计竞赛西北赛区团队三等奖.2017.7
- [3] 马丹萍, 黑文洁, 岳靖斐.基于 V 模式的两轮自平衡车控制器开发[J].长安大学研究生学术论文集.2015.340-344.
- [4] Danping Ma, Ziqiang Tang, Xianwu Gong, Wenjie Hei, Jingfei Yue.The Space Vector Control System for PMSM Implemented by Model-Based Design Techniques[C].2015 International Conference on Information Technology and Intelligent Transportation System ITITS,2015.
- [5] 黑文洁, 岳靖斐. 电机及运动控制虚拟仿真及快速原型实验平台[J].长安大学研究生学术论文集.2016.400-404.
- [6] 岳靖斐, 黑文洁. 基于模型设计的永磁同步电机快速原型实验平台[J].长安大学研究生学术论文集.2016.395-399.
- [7] 龚贤武, 黑文洁, 岳靖斐等. 电机及运动控制虚拟仿真与快速原型实验平台[C].2017 全国自动化教育学术年会,2017.
- [8] 汪贵平, 黑文洁, 黄鹤等. 参照产品谱系的自动化专业课程体系研究[C].2017 全国自动化教育学术年会,2017.
- [9] 岳靖斐, 黑文洁, 马力旺等. 一种定量精确配药装置 ZL 2015 2 1050449.5[P].2015.
- [10] 龚贤武, 唐自强, 黑文洁等. 一种电动汽车用永磁同步电机系统控制软件 2016SR040[P].2016.
- [11] 李园, 寇霜, 黑文洁等. 电动汽车充电桩系统软件 2017SR275895[P].2017.

致谢

时光荏苒，漫漫求学路，三年的硕士生活即将结束。回首点滴，恍如昨日，在长安大学求学三年，经历许多，收获很多，结识良师益友，这是我人生的珍贵财富。在此感谢在研究生期间帮助支持我的老师、家人、同学、朋友。

首先感谢我的导师汪贵平教授，老师学科知识渊博，严谨认真的治学态度，给我留下了深刻的印象，并成为了我在学业上不断前进的重要动力。生活上老师和蔼可亲，把我们当作孩子一样对待，尽最大努力关心我们、帮助我们。他们的处事风格，为人态度，教会了我很多东西，这将会是我一生的财富，能够遇到这样的导师，很幸运、很荣幸。

此外，特别感谢龚贤武老师，在龚老师出国访学期间对我学业上督促和帮助，同时为给我提供一个安静舒适的学习环境。感谢实验室的师兄师姐师弟师妹们，朝夕相处，相互学习、相互关心、相互帮助、相互打闹，和谐融洽，使我的求学之路丰富多彩。感谢读研期间我的同学们，他们给我研究生生活留下美好的回忆，感谢他们在生活上和学业上给我的帮助和鼓励。

感谢我的父母，是你们在背后默默的付出，支持我、鼓励我、陪伴我，在我因为学习、生活、找工作等焦头烂额的时候，给予我最大的支持。

衷心感谢在百忙之中对我论文进行审阅的专家教授。

最后感谢对我关心帮助的所有人。