

二項分布と正規分布の関係

稲積 泰宏 (いなづみ やすひろ)

今日の内容

- 二項分布の復習
- 正規分布による二項分布の近似
- 半整数値補正（連続性の修正）
- 近似を使った例題
- 近似の条件と注意点

二項分布の復習

定義： n 回の独立な試行で、各試行の成功確率が p のとき、成功回数 X は二項分布 $B(n, p)$ に従う

平均と分散：

- $E[X] = np$
- $V[X] = np(1 - p)$

二項分布の課題

n が大きくなると：

- 組み合わせ ${}_nC_k$ の計算が困難
- 確率の計算が複雑になる

例： $n = 100, p = 0.3$ のとき、 $P(X = 30)$ を求めるには？

$$P(X = 30) = {}_{100}C_{30}(0.3)^{30}(0.7)^{70}$$

計算が非常に困難！

正規分布による近似

n が十分大きいとき、二項分布 $B(n, p)$ は正規分布で近似できる

近似の目安：

- $np \geq 5$ かつ $n(1 - p) \geq 5$
- または $n \geq 30$ かつ $0.1 \leq p \leq 0.9$

半整数値補正（連続性の修正）

問題： 二項分布は離散分布、正規分布は連続分布

解決法： 半整数値補正

公式： $X \sim B(n, p), Y \sim N(np, np(1 - p))$ のとき

- $P(X = k) \approx P(k - 0.5 \leq Y \leq k + 0.5)$
- $P(X \leq k) \approx P(Y \leq k + 0.5)$
- $P(X \geq k) \approx P(Y \geq k - 0.5)$
- $P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0.5 \leq Y \leq b + 0.5)$

覚え方： 絵を描いて+0.5か-0.5かどうかを判断する！

例題8)

近似の精度

良い近似が得られる条件：

- n が大きい
- p が0.5に近い (0や1から離れている)
- np と $n(1 - p)$ が両方とも大きい

近似の精度が悪い場合：

- n が小さい
- p が0や1に近い (非常に小さいまたは非常に大きい)
- $np < 5$ または $n(1 - p) < 5$

理由： p が小さいと分布が左に偏り、 p が大きいと右に偏るため、対称な正規分布での近似が不適切になる

まとめ

- 二項分布 $B(n, p)$ は正規分布 $N(np, np(1 - p))$ で近似可能
- 近似条件： $np \geq 5$ かつ $n(1 - p) \geq 5$
- 半整数値補正が必要 (± 0.5 を加える)
- 大きな n に対する確率計算が簡単になる
- 次回までにBasic132-133をやっておいてください
- **レポートがあります**

感想などを会議のチャット欄に書いてください。