確率・統計　前期　第4回

ベイズの定理

稲積　泰宏（いなづみ　やすひろ）

条件つき確率の復習

事象Aが起こったときに事象Bが起こる確率：

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) > 0)$$

同様に，事象Bが起こったときに事象Aが起こる確率：

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) > 0)$$

ベイズの定理（公式）

事象A_1が起こったという情報があるとき，
事象Bが起こった確率を用いて事象A_1の確率を求める：

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1)P_{A_1}(B)}{P(B)}$$

分母は，全体の中でBが起こる確率である：

$$P(B)$$

P(B) の計算方法（前回の例題2（4）を参照）

Bが起こる確率 (P(B)) は，全ての原因となる事象A_1, A_2, ... の確率の合計：

$$P(B) = \sum_i P(A_i) P_{A_i}(B)$$

したがって，**ベイズの定理の一般形**は：

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k) P_{A_k}(B)}{\sum_i P(A_i) P_{A_i}(B)}$$

例題1)

> ある工場では、単位時間当たりM_1の機械には10個$$、M_2の機械には15個の速さで同じ製品を作っている。M_1による製品には3%、M_2による製品には4%の割合で不良品が含まれている。今、一定の時間にM_1とM_2により作られた製品全体の中から任意に取り出した1個が不良品であるとき、これがM_1により作られた製品である確率を求めよ。

例題2）

> ある国では、500人に1人の割合で、あるウイルスに感染しているという。このウイルスには2種類の株 A_1、A_2 があり、それらに感染する比率は3:1であるといわれている。検査薬を使うと、A_1、A_2に感染していれば、それぞれ$0.98, 0.90$の確率で陽性反応が出る。ただし、感染していなかった場合にも、0.01の確率で陽性反応が出るという。ある人に陽性反応が出たとき、この人がA_1の感染者である確率を求めよ。

まとめ

- 条件付き確率を使って「原因の確率」を逆算するのがベイズの定理。
- 質問、感想、わからなかったことなどをチャット欄に書いてください。
- 会議が閉じている場合は、チャットを送ってください。
- **次回までの課題：** 65~68 を解いておくこと。