確率・統計　前期　第12回

連続型確率分布の平均と分散・正規分布

稲積　泰宏（いなづみ　やすひろ）

今日の内容

- 連続型確率分布の平均（期待値）
- 連続型確率分布の分散
- 正規分布の導入
- 標準正規分布 N(0,1)

連続型確率分布の平均（期待値）

確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とするとき、平均（期待値）$E[X]$ は：

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- 離散型と同様の概念を連続型に拡張
- 和の代わりに積分を使用して計算

連続型確率分布の分散

分散 $V[X]$ は、$\mu = E[X]$とおくとき：

$$V[X] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

計算公式：

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

ここで、$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$

例題)：一様分布の平均と分散

区間 $[0, 1]$ の一様分布 $f(x) = 1\ (0 \le x \le 1)$ について：

平均：

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

分散：

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$V[X] = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

例題5）

> X の確率密度関数が
>
> $$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$
>
> で与えられるとき、Xの平均と分散を求めよ。

正規分布とは？

正規分布は自然界で最も重要な連続分布の一つ

📌 **現れる場面：**

- 測定誤差の分布
- 身長、体重などの生体データ

特徴：

- 釣鐘型（ベル型）の対称な分布
- 平均を中心とした左右対称
- 平均から離れるほど確率密度が小さくなる

正規分布

平均 μ、分散σ^2の正規分布を$N(\mu, \sigma^2)$で表す

確率密度関数：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

標準正規分布 N(0,1)

平均0、分散1の正規分布を**標準正規分布**といい、$N(0,1)$で表す

確率密度関数：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

標準正規分布の性質

- **平均：** $E[X] = 0$
- **分散：** $V[X] = 1$
- **標準偏差：** $\sigma = 1$
- **対称性：** $f(-x) = f(x)$
- **最大値：** $x = 0$ で最大値 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.399$

標準正規分布の確率計算

確率は積分で計算するが、正規分布では**正規分布表**を使用する

$$P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

重要

教科書の正規分布表は、上側確率を求めている！

例題6） Z が標準正規分布に従うとき、次の確率を求めよ。

> 1. $P(Z \geq 1.57)$
> 2. $P(0.61 \leq Z \leq 0.82)$
> 3. $P(Z \leq -2.06)$
> 4. $P(-1 \leq Z \leq 2)$

まとめ

- 連続型確率分布の平均と分散は積分で計算
- 標準正規分布N(0,1)は平均0、分散1の分布
- 確率計算には正規分布表を使用
- 次回までにBasic126-128をやっておいてください

感想などを会議のチャット欄に書いてください。