

いろいろな確率分布

稲積 泰宏 (いなづみ やすひろ)

今日の内容

- カイ二乗分布
- t分布

カイ二乗分布

定義

標準正規分布 $X \sim N(0, 1)$ に従う独立な確率変数

X_1, X_2, \dots, X_n に対して

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

は自由度 n のカイ二乗分布に従う

記号：

$$X \sim \chi^2(n)$$

例5)

問9)

不偏分散とカイ二乗分布の関係

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本に対して

$$\frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

重要なポイント

- 不偏分散 U^2 を標準化した統計量
- 自由度は $n - 1$ (標本平均を使うため)

問10)

t分布

定義

$Z \sim N(0, 1)$ 、 $X \sim \chi^2(n)$ が独立なとき

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$$

は自由度 n のt分布に従う

記号： $T \sim t(n)$

t分布の特徴

標準正規分布との比較

- 平均0、左右対称
- 裾が標準正規分布より厚い
- 自由度が大きくなると標準正規分布に近づく

自由度が大きいとき

$n \rightarrow \infty$ のとき $t(n) \rightarrow N(0, 1)$

実用上： $n \geq 30$ で正規分布で近似可能

t分布に従う統計量

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本に対して

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{U^2/n}} \sim t(n - 1)$$

重要な違い

母分散既知： $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$

母分散未知： $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{U^2/n}} \sim t(n - 1)$

なぜt分布を使うのか

母分散が未知の場合

実際の問題では σ^2 を知らないことがほとんど

不偏分散 U^2 で代用すると不確実性が増す

この不確実性を考慮したのがt分布

小標本の場合

特に n が小さいとき、正規分布とt分布の差が大きい

問11)

問12)

どの分布を使うべきか

条件	使用する分布	統計量
母分散既知・正規母集団	標準正規分布	Z
母分散未知・正規母集団・小標本	t分布	T
母分散未知・大標本($n \geq 30$)	正規分布で近似可	Z or T
分散に関する推測	カイ二乗分布	χ^2

まとめ

使い分け

- 母分散既知 → 標準正規分布
- 母分散未知 → t分布
- 分散の推測 → カイ二乗分布

次回までに：Basic 157-160

レポートあります

感想を会議のチャット欄へ