確率・統計　後期　第8回

母平均の検定

稲積　泰宏（いなづみ　やすひろ）

今日の内容

- 母平均の検定とは
- 母分散が未知の場合（t検定）
- 片側検定と両側検定
- 母分散が既知の場合（z検定）
- 検定の実施例

母平均の検定とは

目的

母集団の平均μが、ある特定の値μ_0に等しいかどうかを検定する

基本的な仮説設定

- 帰無仮説：$H_0 : \mu = \mu_0$
- 対立仮説：$H_1 : \mu \neq \mu_0$（両側）または $\mu > \mu_0, \mu < \mu_0$（片側）

検定方法の選択

母平均の検定方法は、**母分散が既知か未知か**で異なる

条件	検定方法	検定統計量の分布
母分散σ^2が未知	t検定	t分布
母分散σ^2が既知	z検定	標準正規分布$N(0,1)$

実務では

母分散が既知のケースは稀。通常はt検定を使用

t検定（母分散未知）

前提条件

- 母集団は正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従う
- 母分散σ^2は未知
- 標本から不偏分散U^2を計算して代用

検定統計量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{U^2/n}}$$

帰無仮説$H_0 : \mu = \mu_0$のもとで、$t \sim t_{n-1}$

表記の注意

- $\bar{X}, U^2$：確率変数（大文字）
- $\bar{x}, u^2$：実現値（小文字、実際のデータから計算した値）

t検定の手順（片側検定）

1. 仮説を設定：$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$（または$\mu < \mu_0$）
2. 有意水準αを決定
3. 標本平均$\bar{x}$と不偏分散U^2を計算
4. 検定統計量を計算： $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{u^2}{n}}}$
5. 自由度$n-1$のt分布でp値を計算
6. 判定：$p < \alpha$ならH_0を棄却

t検定の例題（片側検定）

例題1）

t検定の手順（両側検定）

1. 仮説を設定：$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$
2. 有意水準αを決定
3. 標本平均$\bar{x}$と不偏分散U^2を計算
4. 検定統計量を計算： $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{u^2}{n}}}$
5. 自由度$n - 1$のt分布でp値を計算
6. 判定：$p < \alpha$ならH_0を棄却

t検定の例題（両側検定）

問2）

片側検定と両側検定の違い

片側検定のp値

- 右側検定：$p = P(T > t)$
- 左側検定：$p = P(T < t)$

両側検定のp値

- $p = 2 \times P(T > |t|)$

両側検定と片側検定の比較

検定の種類	対立仮説	p値の計算	使用場面
右側検定	$\mu > \mu_0$	$P(T > t)$	増加を検証
左側検定	$\mu < \mu_0$	$P(T < t)$	減少を検証
両側検定	$\mu \neq \mu_0$	$2 \times P(T > \|t\|)$	変化の有無を検証

注意点

片側検定は検出力が高いが、仮説の方向を事前に決める必要がある

z検定（母分散既知）

前提条件

- 母集団は正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従う
- 母分散σ^2は既知
- または標本サイズnが十分大きい（$n \geq 30$程度）

検定統計量

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

帰無仮説$H_0 : \mu = \mu_0$のもとで、$z \sim N(0, 1)$

z検定の手順（両側検定）

1. 仮説を設定：$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$
2. 有意水準αを決定（例：$\alpha = 0.05$）
3. 標本平均$\bar{x}$を計算
4. 検定統計量を計算：$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2 / n}}$
5. p値を計算
6. 判定：$p < \alpha$ならH_0を棄却

z検定の問題

問3）

実践上の注意点

標本サイズの影響

- nが大きいほど、小さな差でも有意になりやすい
- 統計的有意性 ≠ 実質的な重要性

正規性の仮定

- t検定は正規性を仮定
- nが十分大きければ（$n \geq 30$程度）、中心極限定理により頑健

まとめ

母平均の検定

- 母分散未知 → t検定（t分布）
- 母分散既知 → z検定（標準正規分布）

重要な考え方

統計的に有意であることと、実質的に意味があることとは別

次回までに問題集203-204を解いておいてください

感想を会議のチャット欄へ