確率変数の関数

稲積　泰宏（いなづみ　やすひろ）

今日の内容

- 確率変数の関数とは
- 平均と分散の性質（1変数）
- 2つの確率変数の場合（独立）
- n個の場合

確率変数の関数とは

- 確率変数 X に関数 g を適用したものも確率変数
- 例：
  - X: サイコロの出目
  - $Y = X^2$: 出目を2乗した値

問1)

問2）

1変数の場合（平均）

$$Y = aX + b$$

平均

$$E[Y] = aE[X] + b$$

1変数の場合（分散）

$$Y = aX + b$$

分散

$$V[Y] = a^2 V[X]$$

- 定数項 b は分散に影響しない

なぜこうなるか？（1変数の分散）

定数項 b が分散に影響しない理由：

- 分散は「データの散らばり具合」を測る
- 全てのデータに同じ数を足しても、データ同士の差は変わらない
- 例：{1,2,3}に5を足すと{6,7,8}になるが、散らばり具合は同じ

係数が a^2 になる理由：

- データをa倍すると、散らばりもa倍になる
- 分散は「散らばりの二乗」なのでa^2倍になる

2変数の場合（平均）

$Y = aX_1 + bX_2 + c$のとき

$$E[Y] = aE[X_1] + bE[X_2] + c$$

X_1, X_2 が互いに独立であるならば

$$E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$$

問3）

問4）

2変数の場合（分散：独立）

X_1, X_2 が互いに独立であるならば

$$V[aX_1 + bX_2 + c] = a^2 V[X_1] + b^2 V[X_2]$$

なぜこうなるか？（2変数の分散）

独立性が重要な理由：

- 「独立」= 一方の結果がもう一方に全く影響しない
- サイコロの例：1回目が6でも、2回目が6になる確率は変わらない

分散が単純に足し合わさる理由：

- 独立だから、それぞれの「ばらつき」が素直に足し合わさる
- もし独立でなければ、この公式は使えない（より複雑になる）

問5）

n個の場合（まとめ）

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n + c$$

平均

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i] + c$$

分散（独立のとき）

$$V[Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V[X_i]$$

まとめ

- 確率変数の関数も確率変数
- 平均は **線形性** をもつ
  - 線形性 = 足し算と定数倍の法則が成り立つ
  - $E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$
- 分散は **独立なら分散の和** になる
- 次回までにBasic149-153をやっておいてください

感想などを会議のチャット欄に書いてください。