確率・統計　前期　第8回

確率変数と確率分布（離散型）

稲積　泰宏（いなづみ　やすひろ）

確率変数とは？

- 試行の結果に応じて値が決まる変数のこと
- 確率を伴う現象に対して，数値で結果を表現する

📌 例：サイコロを投げる → 出る目を X とする

離散型確率変数

- 取り得る値が「数えられる」確率変数

📌 例：コインを3回投げて表が出る回数 → $0, 1, 2, 3$

確率分布

- 各値に対してその値をとる確率を対応させたもの
- 確率変数 X が値 x をとる確率 → $P(X = x)$

📌 条件：すべての確率の和は 1

$$\sum_i P(X = x_i) = 1$$

例1）コインを3回投げて、表が出る回数を X とする。

表の回数 x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

確率の計算：

- $P(X=0) = {}_3C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
- $P(X=1) = {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$
- $P(X=2) = {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$
- $P(X=3) = {}_3C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

期待値（平均）

- 確率変数の「平均的な値」
- 期待値 $E[X]$ は「x にその確率をかけて全部足す」

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

📌 サイコロの例：

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

分散と標準偏差

- **分散**：ばらつきの度合い
- **標準偏差**：分散の平方根

📌 分散の求め方：

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = \sum_i (x_i - E[X])^2 \cdot P(X = x_i)$$

📌 計算公式：

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

分散の計算例

サイコロの分散を求める：

1. $E[X] = 3.5$（既に計算済み）
2. $E[X^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$
3. $V[X] = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$

標準偏差：$\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.71$

平均の性質

確率変数 X, Y と定数 a, b について：

1. **線形性**：$E[aX + b] = aE[X] + b$
2. **加法性**：$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
3. **定数の期待値**：$E[c] = c$（c は定数）

$aX + b$ の平均と分散

確率変数 X に対して $Y = aX + b$ とするとき：

平均：

$$E[Y] = E[aX + b] = aE[X] + b$$

分散：
$V[Y] = V[aX + b] = a^2 V[X]$

標準化した確率変数

確率変数 X を標準化すると：

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V[X]}} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

標準化の効果：

- $E[Z] = 0$（平均が0）
- $V[Z] = 1$（分散が1）

意味：異なる分布を同じ尺度で比較可能

標準化の計算例

サイコロの目 X を標準化する場合：

- $E[X] = 3.5$
- $V[X] = \frac{35}{12}$
- $\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.71$

標準化：$Z = \frac{X-3.5}{1.71}$

例：$X = 6$ のとき $Z = \frac{6-3.5}{1.71} \approx 1.46$

まとめ

- **確率変数**：結果を数値で表す
- **離散型**：数えられる値をとる
- **確率分布**：それぞれの値の確率の対応
- **期待値・分散**：分布の中心とばらつき
- 感想をチャット欄に書いてください
- **次回までの課題：** Basic 110-117