確率・統計　後期　第4回

点推定

稲積　泰宏（いなづみ　やすひろ）

今日の内容

- 統計的推測とは
- 点推定
- 推定量の評価基準

統計的推測とは

目的

母集団の特性（母数）を標本データから推測する

2つのアプローチ

1. **点推定**：母数を1つの値で推定
2. **区間推定**：母数が含まれる範囲を推定

例

母平均 μ を推定したい

点推定：$\mu = 50$ と推定
区間推定：μ は 48〜52 の範囲にあると推定

点推定の基本

母数と統計量

- **母数（パラメータ）**：母集団の特性値
  - 母平均 μ、母分散 σ^2 など
  - 通常は未知
- **統計量**：標本から計算される値
  - 標本平均 $\overline{X}$、不偏分散 U^2 など
  - 母数の推定に使う

推定量と推定値

推定量

母数を推定するための統計量

確率変数である

例：$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

推定値

実際の標本データから計算した具体的な値

推定量の実現値

例：$\overline{x} = 50.3$

例6）

問13）

推定量の評価基準

良い推定量の条件

1. **不偏性**（Unbiasedness）
2. **一致性**（Consistency）
3. **有効性**（Efficiency）

これらの基準で推定量の良さを評価する

不偏性

定義

推定量 $\hat{\theta}$ が母数 θ の不偏推定量である
$\Leftrightarrow E[\hat{\theta}] = \theta$

> **意味**
>
> 何度も標本を取って推定を繰り返すと、平均的には真の値になる

例

- $E[\overline{X}] = \mu \rightarrow \overline{X}$ は μ の不偏推定量
- $E[U^2] = \sigma^2 \rightarrow U^2$ は σ^2 の不偏推定量

なぜ標本分散ではなく不偏分散を使うのか

標本分散

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
$E[S^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$
（バイアスがある）

不偏分散

$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
$E[U^2] = \sigma^2$
（不偏推定量）

問14）

一致性

定義

標本サイズ $n \to \infty$ のとき
推定量 $\hat{\theta}_n$ が母数 θ に確率収束する

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

意味

標本サイズを大きくすれば、推定値が真の値に近づく

「確率収束」とは？

記号

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

（確率収束：Convergence in Probability）

意味
標本サイズ n を大きくすると、
推定値 $\hat{\theta}_n$ が「高い確率で」真の値 θ に近づく。

イメージ
多くの標本を取るほど、ほとんどの推定結果が真の値のまわりに集中する。

例 大数の法則より標本平均は母平均に確率収束する。

一致性の例

標本平均

大数の法則により

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

$\overline{X}$ は μ の一致推定量

不偏分散

同様に

$$U_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

U^2 は σ^2 の一致推定量

問15）

有効性

定義

2つの不偏推定量のうち、分散が小さい方が有効

比較

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ が θ の不偏推定量で

$$V[\hat{\theta}_1] < V[\hat{\theta}_2]$$

ならば $\hat{\theta}_1$ の方が有効

意味

ばらつきが小さい推定量の方が信頼できる

有効性の具体例

標本平均の分散

$$V[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

標本サイズ n が大きいほど分散が小さくなる

> **より多くのデータを使う**
> $\longrightarrow$ より正確な推定ができる

問16）

主な母数とその推定量

母数	記号	推定量	性質
母平均	μ	$\overline{X}$	不偏・一致
母分散	σ^2	U^2	不偏・一致

問題集185）

問題集186）

まとめ

点推定

- 母数を1つの値で推定する方法

推定量の評価基準

- **不偏性**：平均的に真の値になる
- **一致性**：標本サイズを大きくすると真の値に近づく
- **有効性**：分散が小さい方が良い

実用上の推定量

- 母平均 μ → 標本平均 $\overline{X}$
- 母分散 σ^2 → 不偏分散 U^2

感想を会議のチャット欄へ