בדידה 2 הרצאה 6

<u>תזכורת – פתרון נוסחאות נסיגה:</u>

הסברנו איך לפתור נוסחאות נסיגה מהצורה:

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$$

כאשר A, B קבועים, למשל: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. ב"לפתור" הכוונה היא למצוא ביטוי מפורש ל-a_n, כלומר כזה שתלוי ב-n בלבד (ולא באיברים הקודמים).

בפועל, התהליך טכני מאד ודורש לעקוב אחרי "מתכון":

1. מסתכלים על המשוואה האופיינית של נוסחת הנסיגה - $x^2 = Ax + B$, ומוצאים את השורשים: $x_{1,2}$.
2. יש לנו שלושה מקרים:

א. אם x_1, x_2 הם ממשיים שונים, אז הפתרון הוא מהצורה: $a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n$.

ב. אם $x_1 = x_2$ אותו שורש (שורש "מריבוי 2"), אז הפתרון הוא מהצורה: $a_n = C_1 x_1^n + C_2 n x_2^n$.

ג. אם: $x_{1,2} = a \pm bi$, אנחנו עוברים להצגה קוטבית: $r\text{cis}\theta$, ואז הפתרון הוא מהצורה: $a_n = C_1 r^n \cos(n\theta) + C_2 r^n \sin(n\theta)$.

3. C_1, C_2 הם קבועים, ואותם מוצאים באמצעות תנאי ההתחלה.

בהרצאה הקודמת עשינו דוגמה לכל אחד מהמקרים; היה חזק.

כעת, נלמד לפתור נוסחאות נסיגה מצורה מעט שונה.

לנוסחאות הנסיגה מהצורה: $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ אפשר לקרוא "הומוגניות", בניגוד לנוסחאות נסיגה

מהצורה:

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + g\left(n\right)$$

שנקראות "לא-הומוגניות". למשל: $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} + 5n$.

נתמקד במקרים שבהם $g\left(n\right)$ הוא מהצורה "פולינום כפול מעריכית", כלומר אפשר לרשום: $g\left(n\right) = p\left(n\right) \cdot x^n$, כאשר $p\left(n\right)$ פולינום ו-x מספר קבוע.

למשל:

א. $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + 3n2^n$. כאן, ה"תוספת הלא-הומוגנית" היא: $g\left(n\right) = 3n2^n$, והיא אכן מהצורה "פולינום כפול מעריכית" – $g\left(n\right) = p\left(n\right) \cdot x^n$, כאשר $p\left(n\right) = 3n$ ו-$x = 2$.

ב. $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + 4^n$. כאן, ה"תוספת הלא-הומוגנית" היא: $g\left(n\right) = 4^n$, והיא אכן מהצורה "פולינום כפול מעריכית" – $g\left(n\right) = p\left(n\right) \cdot x^n$, כאשר: $p\left(n\right) = 1$ (פולינום קבוע) ו-$x = 4$.

ג. $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + 28$. כאן, ה"תוספת הלא-הומוגנית" היא: $g\left(n\right) = 28 = 28 \cdot 1^n$, והיא אכן מהצורה "פולינום כפול מעריכית" – $g\left(n\right) = p\left(n\right) \cdot x^n$, כאשר $p\left(n\right) = 28$ (פולונום קבוע) ו-$x = 1$.

אפשר לומר שהנוסחאות מהצורה: $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ הן מקרה פרטי של הנוסחאות מהצורה: $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + g\left(n\right)$, מקרה שבו: $g\left(n\right) = 0$.

איך פותרים נוסחאות נסיגה לא-הומוגניות? כמו במקרה ההומוגני, בשורה התחתונה מדובר על סד"פ טכני מאד שפשוט צריך לעקוב אחריו. עם זאת, התהליך ארוך יותר במקרה ההומוגני, וכרגיל לעיתים התיאורים הכלליים לא מובנים עד שרואים דוגמאות.

אם כן, נתונה לנו נוסחת נסיגה מהצורה: $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + g\left(n\right)$, כאשר $g\left(n\right)$ היא מהצורה "פולינום כפול מעריכית". נפתור אותה לפי השלבים הבאים:

1. מסתכלים על הנוסחה ההומוגנית המתאימה – זו שאין בה $g\left(n\right)$, כלומר: $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$. אנחנו מוצאים את הפתרון שלה בצורתו הכללית, בלי למצוא את הקבועים C_1, C_2. נסמן את הפתרון הזה ב-a_n^h.

(זה לא חזקה או משהו, רק סימון ל"הומוגני").

2. מוצאים פתרון ספציפי – אחד מסוים, לא כללי, מה שנקרא פתרון "פרטי" – של הנוסחה עצמה: $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + g(n)$, ואותו מסמנים ב-$a_n^p$.

איך מוצאים את a_n^p? יש פה כמה תתי-שלבים וחלוקה למקרים; קצת מסריח, אבל אחר-כך נדגים ועם קצת תרגול זה סבבה.

א. ראשית, אנחנו רושמים במפורש מהם הפולינום $p(n)$ והמעריכית x^n בתוספת הלא-הומוגנית $g(n)$.

ב. הפתרון a_n^p הוא מהצורה: $a_n^p = x^n \cdot q(n) \cdot n^t$, כאשר x^n הוא אותו x^n כמו ב-$g(n)$; $q(n)$ הוא פולינום מאותה מעלה כמו $p(n)$ (אם, למשל, $p(n)$ קבוע, אז $q(n) = C$; אם $p(n)$ הוא ממעלה ראשונה אז $q(n) = Cn + D$ וכו') ו-t הוא מספר השורשים של המשוואה האופיינית ששווים ל-x.

ג. כדי למצוא את הקבוע (או הקבועים) שיש לנו ב-$q(n)$, אנחנו מציבים את a_n^p בנוסחת הנסיגה, מסדרים ומקבלים משוואה על הקבועים האלו שמתוכה ניתן למצוא אותם.

3. מחברים את הפתרונות שמצאנו בשלבים הקודמים, וזהו הפתרון שלנו: $a_n = a_n^h + a_n^p$. ב-a_n^h מופיעים C_1, C_2, ועכשיו מציבים את תנאי ההתחלה ומוצאים אותם.

לפני שנעשה דוגמה מלאה לפתרון נוסחת נסיגה לא-הומוגנית, ניתן כמה דוגמאות לשלב 2 ב' – מציאת הצורה של הפתרון הפרטי a_n^p:

א. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 2n3^n$.

כאן, התוספת הלא-הומוגנית היא: $g(n) = 2n3^n$, כלומר הפולינום הוא $p(n) = 2n$ והמעריכית היא $x^n = 3^n$.

אם כך, $p(n)$ פולינום ממעלה ראשונה, ולכן גם $q(n)$ הוא ממעלה ראשונה, כלומר: $q(n) = Cn + D$.

המשוואה האופיינית: $x^2 = 6x - 8$, ושורשיה הם: $x_{1,2} = 2, 4$. אצלנו $x = 3$, ולכן אף אחד משורשי המשוואה האופיינית לא שווה ל-x, כלומר: $t = 0$.

לכן: $a_n^p = x^n \cdot q(n) \cdot n^t = 3^n \cdot (Cn + D) \cdot n^0 = 3^n (Cn + D)$.

ב. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 2 \cdot 4^n$.

כאן, התוספת הלא-הומוגנית היא: $g(n) = 2 \cdot 4^n$, כלומר הפולינום הוא $p(n) = 2$ והמעריכית היא $x^n = 4^n$.

אם כך, $p(n)$ פולינום קבוע, ולכן גם $q(n)$ הוא קבוע, כלומר: $q(n) = C$.

המשוואה האופיינית: $x^2 = 6x - 8$, ושורשיה הם: $x_{1,2} = 2, 4$. אצלנו $x = 4$, ולכן אחד משורשי המשוואה האופיינית שווה ל-x, כלומר: $t = 1$.

לכן: $a_n^p = x^n \cdot q(n) \cdot n^t = 4^n \cdot C \cdot n^1 = Cn4^n$.

ג. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n^2 3^n$.

כאן, התוספת הלא-הומוגנית היא: $g(n) = n^2 3^n$, כלומר הפולינום הוא $p(n) = n^2$ והמעריכית היא $x^n = 3^n$.

אם כך, $p(n)$ פולינום ממעלה שניה, ולכן גם $q(n)$ הוא פולינום ממעלה שניה, $q(n) = Cn^2 + Dn + E$.

המשוואה האופיינית: $x^2 = 6x - 9$, ושורשיה הם: $x_{1,2} = 3, 3$. אצלנו $x = 3$, ולכן שני שורשי המשוואה האופיינית שווים ל-x, כלומר: $t = 2$.

לכן: $a_n^p = x^n \cdot q(n) \cdot n^t = 3^n \cdot (Cn^2 + Dn + E) \cdot n^2$.

כעת, לדוגמה מלאה לפתרון נוסחת נסיגה לא-הומוגנית - נפתור את הנוסחה הבאה:

$$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + n2^n$$

עם תנאי ההתחלה: $a_0 = 0, a_1 = 1$.

כמובן, נעבוד לפי השלבים שתיארנו.

1. המשוואה ההומוגנית המתאימה היא: $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$.
המשוואה האופיינית היא: $x^2 = 7x - 10$, כלומר: $x^2 - 7x + 10 = 0$ ואפשר לרשום: $(x-2)(x-5) = 0$, ויש שני שורשים ממשיים שונים: $x_{1,2} = 2, 5$. לכן, הפתרון ההומוגני הוא מהצורה: $a_n^h = C_1 2^n + C_2 5^n$.

2. א. אצלנו, התוספת הלא-הומוגנית היא: $g(n) = n2^n$, כלומר הפולינום הוא: $p(n) = n$ והמעריכית היא: $x^n = 2^n$.

ב. אנחנו יודעים ש-$a_n^p = x^n q(n) \cdot n^t$, כאשר $q(n)$ פולינום מאותה מעלה כמו $p(n)$. הפולינום $p(n)$ הוא ממעלה ראשונה, ולכן גם $q(n)$, כלומר: $q(n) = Cn + D$.
כמו כן, שורשי המשוואה האופיינית הם $2, 5$ ו-$x = 2$, כלומר אחד משורשי המשוואה האופיינית שווה ל-x, משמע $t = 1$. כך, נקבל:

$$a_n^p = x^n q(n) \cdot n^t = 2^n \cdot (Cn + D) \cdot n^1 = 2^n \left(Cn^2 + Dn\right)$$

ג. כדי למצוא את C, D (כלומר, את a_n^p במפורש) – נציב את a_n^p בנוסחת הנסיגה:

$$a_n^p = 7a_{n-1}^p - 10a_{n-2}^p + n2^n \Longrightarrow$$

$$2^n \left(Cn^2 + Dn\right) = 7 \cdot 2^{n-1} \left(C(n-1)^2 + D(n-1)\right) - 10 \cdot 2^{n-2} \left(C(n-2)^2 + D(n-2)\right) + n2^n$$

נחלק את שני האגפים ב-2^{n-2}; לפי חוקי חזקות: $\frac{2^{n-1}}{2^{n-2}} = 2$, $\frac{2^n}{2^{n-2}} = 4$. כך, נקבל:

$$4\left(Cn^2 + Dn\right) = 7 \cdot 2\left(C(n-1)^2 + D(n-1)\right) - 10\left(C(n-2)^2 + D(n-2)\right) + n \cdot 4$$

נפתח את הסוגריים:

$$4Cn^2+4Dn=14\left(C\left(n^2-2n+1\right)+Dn-D\right)-10\left(C\left(n^2-4n+4\right)+Dn-2D\right)+4n$$

$$4Cn^2+4Dn=14Cn^2-28Cn+14C+14Dn-14D-10Cn^2+40Cn-40C-10Dn+20D+4n$$

$$4Cn^2+4Dn=4Cn^2+12Cn+4Dn+4n-26C+6D$$

כלומר: $12Cn+4n-26C+6D=0$, ואפשר לרשום:

$$\left(12C+4\right)n-26C+6D=0$$

לכאורה, קיבלנו משוואה אחת ואנו רוצים למצוא שני נעלמים, מה שבדרך כלל משוואה אחת לא מספיקה לו. בפועל, מדובר על שתי משוואות – השוויון הוא לא שוויון בין מספרים אלא שוויון בין פונקציות: השוויון מתקיים לכל n שנציב. זה קורה רק כאשר המקדמים – של n והמקדם החופשי – שווים ל-0, ואלו שתי משוואות:

$$\begin{cases} 12C+4=0 \\ -26C+6D=0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה: $C=-\frac{1}{3}$; נציב זאת בשניה ונקבל: $\frac{26}{3}+6D=0$, כלומר: $D=-\frac{13}{9}$, ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$a_n^p=2^n\left(-\frac{1}{3}n^2-\frac{13}{9}n\right)$$

3. לבסוף, הפתרון של נוסחת הנסיגה הוא הסכום של הפתרונות שמצאנו בשלבים $1,2$:

$$a_n = a_n^h + a_n^p = C_1 2^n + C_2 5^n + 2^n\left(-\frac{1}{3}n^2 - \frac{13}{9}n\right)$$

בשביל למצוא את C_1, C_2, נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 0 = a_0 = C_1 2^0 + C_2 5^0 + 2^0\left(-\frac{1}{3}\cdot 0^2 - \frac{13}{9}\cdot 0\right) \\ 1 = a_1 = C_1 2^1 + C_2 5^1 + 2^1\left(-\frac{1}{3}\cdot 1^2 - \frac{13}{9}\cdot 1\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 1 = 2C_1 + 5C_2 - \frac{32}{9} \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה, $C_1 = -C_2$; נציב זאת בשניה ונקבל:

$$1 = -2C_2 + 5C_2 - \frac{32}{9} \Longrightarrow \frac{41}{9} = 3C_2$$

כלומר: $C_2 = \frac{41}{27}$. לכן: $C_1 = -\frac{41}{27}$, ובסה"כ:

$$a_n = -\frac{41}{27}\cdot 2^n + \frac{41}{27}\cdot 5^n + 2^n\left(-\frac{1}{3}n^2 - \frac{13}{9}n\right)$$

תהליך ארוך – היזהרו מטעויות...

<u>הערה:</u>

אם רוצים, באותה השיטה אפשר לפתור נוסחת נסיגה לא-הומוגנית שבה התוספת הלא-הומוגנית היא סכום של כמה ביטויים מהצורה "פולינום כפול מעריכית", למשל:

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + 2^n + 6$$

איך? מוצאים פתרון פרטי עבור כל "פולינום כפול מעריכית" בנפרד, ואז מחברים את כולם ביחד עם הפתרון ההומוגני וזה הפתרון של הנוסחה כולה.

למשל, בדוגמה הזו, צריך למצוא פתרון פרטי עבור: $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + 2^n$ ופתרון פרטי עבור: $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + 6$.

<u>קצב גידול פונקציות:</u>

ניסוח פורמלי של דברים שאנו מכירים אינטואיטיבית (למשל מאינפי 1) – מעריכית "יותר מהירה" מפולינום וכו'.

תהיינה $f, g : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ פונקציות. אנו אומרים ש-$g = O(f)$, אם קיימים קבוע C_0 ומספר טבעי n_0 שהחל ממנו מתקיים:

$$g(n) \leq C_0 f(n)$$

אינטואיטיבית, פירוש הדבר ש-f לא איטית יותר מ-g כאשר $n \to \infty$.

למשל, נתבונן בפונקציות: $f(n) = 3^n, g(n) = 5 \cdot 2^n$. עבור, למשל, הקבוע: $C_0 = 5$ והמספר הטבעי $n_0 = 1$, לכל $n \geq n_0$ אכן מתקיים:

$$g(n) \leq C_0 f(n) \Longrightarrow 5 \cdot 2^n \leq 5 \cdot 3^n$$

לכן: $5 \cdot 2^n = O(3^n)$.

נשים לב – הקבוע C_0 והטבעי n_0 שבחרנו הם בוודאי לא היחידים שעושים זאת; עם אותו $C_0 = 5$ אפשר היה לבחור כל n_0 שנרצה.

איך נראה ש-$g \neq O(f)$? בגדול, להניח בשלילה ש-$g = O(f)$ ולהגיע לסתירה.

למשל, נראה ש: $3^n \neq O(2^n)$. נניח בשלילה ש: $3^n = O(2^n)$. כלומר, קיימים C_0 קבוע ו-n_0 טבעי כך

שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$3^n \leq C_0 \cdot 2^n$$

כלומר: $\frac{3^n}{2^n} \leq C_0$ ולפי חוקי חזקות: $\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq C_0$ לכל $n \geq n_0$.
אלא שלפי מה שאנחנו יודעים, מכיוון ש-$\frac{3}{2} > 1$, הסדרה $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ שואפת לאינסוף, וזו סתירה לכך שהיא חסומה ע"י C_0.

<u>כמה דברים נוספים:</u>

1. שאלות שאוהבים לשאול – הרבה פעמים אחרי שמחשבים סכום לפי נוסחאות הבינום או פותרים נוסחת נסיגה, שואלים על התוצאה האם היא $O(f)$ עבור f כזו או אחרת.
למשל – חשבו את הסכום: $g(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(k4^k + 5^k + 6^n\right)$, ובדקו האם: $g(n) = O(15^n)$.

2. את הטענות האינטואיטיביות המוכרות מאינפי, אפשר לנסח פורמלית בשפה של O.
למשל, "בפולינום מה שקובע הוא החזקה הגבוהה". בשפה של O, אפשר לנסח את הטענה הזו באופן הבא – אם $p(n)$ הוא פולינום ממעלה k, כלומר:

$$p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$$

אז: $p(n) = O\left(n^k\right)$.

3. אפשר לנסח כמה תכונות פשוטות של O, שנובעות ישירות מההגדרה שבה יש אי-שוויון, למשל:
א. $f = O(f)$.
ב. אם $g = O(f)$ וגם: $h = O(g)$, אז: $h = O(f)$.

4. סימונים נוספים:

א. כאשר $g = O\left(f\right)$, אפשר לסמן במקום: $f = \Omega\left(g\right)$.

ב. כאשר $g = O\left(f\right)$ וגם $f = O\left(g\right)$, אפשר לסמן: $f = \Theta\left(g\right)$.

בשורה התחתונה, **אינטואיטיבית – לא פורמלית!** – O פירושו שהפונקציה בפנים "לא איטית יותר" מזו שבחוץ; Ω פירושו שהפונקציה בפנים "לא מהירה יותר" מזו שבחוץ, ו-Θ פירושו שהן שואפות באותה "מהירות".